第 33 回

トポロジー・シンポジウム

講　演　集

昭和60年 7 月18日～20日

於　信　州　大　学

昭和59年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号　59340001

序

この講演集は、昭和60年7月18日から20日の間、信州大学で開催される第33回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費補助金・総合研究(A)

「位相幾何学の総合的研究」(課題番号 59340001)

により作られたものであることを附記しておく。

昭和60年7月

総合研究(A)　59340001

研究代表者　笹尾靖也

目　次

James 数とその周辺について

和歌山大、教育、 森杉 馨

§0、序、 $Sp(n)$ を n-th symplectic group とするとき

我々の目標は、$Sp(n)$ のホモトピー群 $\pi_i(Sp(n))$ を決定することにある。 $n=\infty$ の時は、Bottの周期性定理により、$\pi_i(Sp(\infty))$ はよく知られている。 自然なバンドル，$Sp(n) \hookrightarrow Sp(n+1) \longrightarrow S^{4n+3}$，の存在から $\pi_i(Sp(n)) \cong \pi_i(Sp)$ if $i \leqq 4n+1$ （但し $Sp=Sp(\infty)$）がわかるので $i \geqq 4n+2$ について調べればよい。 $i=4n+2$ の時は [3] [7] [16] 等により

$$\pi_{4n+2}(Sp(n)) \cong a(n)\cdot(2n+1)!\ , \text{------} ①$$

が、わかっている。 ここで $a(j)=\begin{cases}1 & (j:\text{even})\\ 2 & (j:\text{odd})\end{cases}$ とする。 ①と、バンドル $Sp(n) \hookrightarrow Sp \longrightarrow Sp/Sp(n)$ に附随した、homotopy exact sequence を考えれば $i \geqq 4n+2$ でかつ $i \not\equiv 2\ (4)$ の時は

$$\pi_i(Sp(n)) \cong \begin{cases}\pi_{i+1}(Sp/Sp(n)) & i \equiv 0,1,3 \text{ or } 7\ (8)\\ \pi_{i+1}(Sp/Sp(n)) \oplus Z/2 & i \equiv 4 \text{ or } 5\ (8)\end{cases}$$

が出る。 $Sp/Sp(n)$ は $(4n+2)$ −連結なので、$i-4n$ が小さいときは、計算ができる（§2, §7を参照）。 一方で $i \equiv 2$

(4)の時は たとえ $\pi_{i+1}(Sp/Sp(m))$ がわかったとしても $\pi_i(Sp(m))$ を計算するためには、まだ不充分である。ここに James number の問題がでてくる。今 $X_{n,k} = Sp(n)/Sp(n-k)$ とするとき 自然なバンドル ($n \geqq k$)

$$X_{n-1,k-1} \longrightarrow X_{n,k} \xrightarrow{p} S^{4n-1} \quad —— ②$$

を考えて、$p_*\pi_{4n-1}(X_{n,k})$ の $\pi_{4n-1}(S^{4n-1}) \cong \mathbb{Z}$ の中での Index を $X\{n,k\}$ で表し、$X\{n,k\}$ を quaternionic James number とよぶ。前述の① より $X\{n,n\} = a(n-1)\cdot(2n-1)!$ となっている、又、$l \leqq k \leqq n$ に対して、$X\{n,l\}$ は $X\{n,k\}$ の約数となっている。そこで $n \geqq m+1$ に対して $d(n,m) = X\{n,n\}/X\{n,n-m\}$ とすれば、次の exact sequence;

$$0 \to \mathrm{Tor}(\pi_{4n-1}(X_{n,n-m})) \xrightarrow{\partial} \pi_{4n-2}(Sp(m)) \xrightarrow{i_*} \underset{\mathbb{Z}/d(n,m)}{\overset{}{\mathrm{Im}\, i_*}} \to 0$$

($\mathrm{Im}\, i_* \cong \mathbb{Z}/d(n,m)$)

を得る。但し、$i: Sp(m) \hookrightarrow Sp(n-1)$ は自然な包含写像で ∂は、$k=n-m$ の時に bundle $Sp(m) \hookrightarrow Sp(n) \to X_{n,k}$ から得られる homotopy exact sequence の boundary homo. の制限である。故に $\pi_{4n-2}(Sp(m))$ を決定するためには、次の三つの問題を解く必要がある。i). $d(n,m)$ を求めよ。 ii) $\mathrm{Tor}(\pi_{4n-1}(X_{n,n-m})) \cong \mathrm{Tor}(\pi_{4n-1}(Sp/Sp(m)))$ を求めよ。iii) 上の short exact sequence は、split するか否か。本講演では

これらの問題に対しての部分的な解答例の説明を行なうと共に、関連するその周辺の問題に触れる。

§1. Quaternionic quasi-projective space Q_n と (stable) quaternionic James number.

Hp^n を quaternionic n-dim projective space, ξ を Hp^n 上の canonical quaternionic line bundle, ζ を $Sp(1)$ の adjoint 表現 ($\mathbb{H}\times Sp(1)\longrightarrow\mathbb{H}$ を $(q,p)\longrightarrow p\cdot q\cdot\bar{p}$ で作用させる時 $\mathbb{H}$ の虚数部 $\cong\mathbb{R}^3$ が $Sp(1)$ の表現空間になる。) から得られる Hp^n 上の real 3-dim vector bundle とする。(この時、$\xi\otimes_{\mathbb{H}}\xi^*\simeq 1\oplus\zeta$ となっている。)。この記号の下で quaternionic quasi-projective space Q^n は Hp^{n-1} 上の ζ の Thom complex として定義される。この時 Q^n は、自然に、$Sp(n)$ の subcomplex と思える [10][29]。$Q^{n-k}\subset Q^n$ で Q^n/Q^{n-k} を $Q_{n,k}$ と書いて stunted quaternionic quasi-projective space とよぶ。この時 $Q_{n,k}$ は前述の $X_{n,k}$ の subcomplex と考えられる。$Q_{n,k}$ 及び $X_{n,k}$ の (co)homology を考察すれば、対 $(X_{n,k}, Q_{n,k})$ は $8(n-k)+9$ 連結となっている [10][ ]。故に Suspension Th. を使って $4m+2\leqq i\leqq 8m+4$ の時は (meta-stable range), $\pi_i(X_{n,n-m})\cong\pi_i(Q_{n,n-m})\cong\pi_i^S(Q_{n,n-m})$ を、

得る。 ここで $\pi_i^S(\ )$ は stable homotopy 群を表わす。更に 次の図式の可換性から [10] [28]

$$\begin{array}{ccccccccl}
\Omega S^{4n-1} & \longrightarrow & X_{n-1,n-m-1} & \longrightarrow & X_{n,n-m} & \xrightarrow{p} & S^{4n-1} & \cdots & \text{fibration} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
S^{4n-2} & \longrightarrow & Q_{n-1,n-m-1} & \longrightarrow & Q_{n,n-m} & \xrightarrow{g} & S^{4n-1} & \cdots & \text{cofibration}
\end{array}$$

$Q\{n,n-m\} :=$ Index of $g_*\pi_{4n-1}(Q_{n,n-m})$ in $\pi_{4n-1}(S^{4n-1})\cong Z$

$Q^S\{n,n-m\} :=$ 〃 $g_*\pi^S_{4n-1}(Q_{n,n-m})$ in $\pi^S_{4n-1}(S^{4n-1})\cong Z$

$X^S\{n,n-m\} =$ 〃 $p_*\pi^S_{4n-1}(X_{n,n-m})$ in 〃

と def すれば、一般に $X\{n,n-m\}\,|\,Q\{n,n-m\}$, $X^S\{n,n-m\}\,|\,X\{n,n-m\}$, $Q^S\{n,n-m\}\,|\,Q\{n,n-m\}$ が成立することはすぐわかる。 特に、$n<2m$ のときは $X\{n,n-m\}=X^S\{n,n-m\}=Q\{n,n-m\}=Q^S\{n,n-m\}$ となる。 更に n,m に関する条件がなくても 一般に $Q^S\{n,n-m\}=X^S\{n,n-m\}$ が知られている。([10] [21]) ここで $Q^S\{n,n-m\}$ は Index of Im $\{h : \pi^S_{4n-1}(Q_{n,n-m})\longrightarrow H_{4n-1}(Q_{n,n-m})\}$ と等しいことに注意しておく。 他方 $X\{n,n\}=X^S\{n,n\}$ ([10] [17] [20]) であるから $d^S(n,m)\left(:=X^S\{n,n\}/X^S\{n,n-m\}=Q^S\{n,n\}/Q^S\{n,n-m\}\right)$ は、$d(n,m)\left(:=X\{n,n\}/X\{n,n-m\}\right)$ の倍数になっている。 故に $d(n,m)$ を調べるために、まず $d^S(n,m)$ を調べる。 そのために、$d^S(n,m)$ が満たすべき、代数的条件を e-invariant ([7]

[27] [28] ）を使用に計算する。

Def.[28] $n\geq 1$, $s\geq 1$ に対して 数, $M(n,s)$ を,

$$(e^{t}+e^{-t}-2)^{s}=\sum_{n\geq 1}\frac{(2s)!}{(2n)!}M(n,s)\,t^{2n}$$

で定義すると、これは整数となる。

$\widetilde{KO}^{*}(Q^{n})\cong KO^{*}(pt)\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 但し $x_s\in\widetilde{KO}^{4s-1}(Q^{n})$。

今、$\varphi^{Q}_{n,k}: S^{4n-2}\longrightarrow Q_{n-1,k-1}$ を $Q_{n,k}$ の top-cell の attaching map とするとき、明らかに $Q^{s}\{n,k\}$ は $\varphi^{Q}_{n,k}$ の stable order に等しい。$\varphi^{Q}_{n,k}$ の e-invariant;

$$e(\varphi^{Q}_{n,k}):\widetilde{KO}^{4s-1}(Q_{n-1,k-1})\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\quad\left(\begin{array}{c}n-k+1\\ \leq s\leq n-1\end{array}\right)$$

について次が成立する[8][9]。

Prop.1.1. $e(\varphi^{Q}_{n,k})(x_s)=\dfrac{(2s-1)!\,M(n,s)}{(2n-1)!\,a(n-s)}$

但し $n-k+1\leq s\leq n-1$。

故に $d^{A}(n,m)\overset{def}{=}\underset{s\geq m+1}{g.c.d}\left\{\dfrac{a(n-1)}{a(n-s)}(2s-1)!\,M(n,s)\right\}$

とおけば $d^{A}(n,m)$ は、$d^{s}(n,m)$ の倍数となる。

同様に $\varphi^{H}_{n,k}: S^{4n-1}\longrightarrow HP^{n-1}/HP^{n-k}$ を HP^{n}/HP^{n-k} の top cell の attaching map とする時 その e-invariant については

Prop1.2 $e(\varphi^{H}_{n,k})(x^{s})=\dfrac{(2s)!\,M(n,s)}{(2n)!\,a(n-s)}$,

但し $n-k+1\leq s\leq n-1$、$x^{s}\in\widetilde{KO}^{4s}(HP^{n-1}/HP^{n-k})$。

これらの attaching map の stable order は、対応する e-invariant の order と等しいだろうという予想が、昔からあった。

今 $d_H^A(n,m) \underset{\text{def}}{=} \underset{s \geqq m+1}{\text{g.c.d}} \left\{ \dfrac{(2s)!}{a(n)a(n-s)} M(n,s) \right\}$,

$d_H^S(n,m) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S}^H_{n,n-m}$ の stable order とする。

$d_H^S(n,m)$ 及び $d^S(n,m)$ は それぞれ

$$j_* : \pi_{4n}^S(HP^\infty) \longrightarrow \pi_{4n}^S(HP^\infty/HP^m)$$

及び $j_* : \pi_{4n-1}^S(Q^\infty) \longrightarrow \pi_{4n-1}^S(Q^\infty/Q^m)$

の modulo torsion index に等しい。但し j は canonical projection map である。同様に $d(n,m)$ は $j_* : \pi_{4n-1}(Sp) \longrightarrow \pi_{4n-1}(Sp/Sp(m))$ の modulo torsion index に等しい。

これらの数の性質を調べるためには、各素数成分ごとに注目する方が見通しが良い。一方奇素数成分については対応する complex version の問題と同じであるから、我々は 2-成分のみに着目する。

<u>A-theory について</u>　$\widehat{KO}^*(\ )$ は以後 (2) で localized されているものとする。この時 stable Adams operation $\psi^3-1 : \widehat{KO}^*(\ ) \longrightarrow \widehat{KO}^*(\ )$ は $\widehat{\psi^3-1} : bo \longrightarrow bspin$ に unique に lift する。但し bo 及び bspin はそれぞれ $KO^*(\ )$ の (-1)-connected 及び 2-connected cover を表わす。

今この $\widehat{\psi^3-1} : bo \longrightarrow bspin$ の fibre spectrum を A で表わす。A-theory の係数群は、丁度、球面の安定ホモ

トピー群の Im J と $\{\mu, \eta\mu\}$-family に対応している。但し J は stable J-homo : $\pi_*(SO) \longrightarrow \pi_*^S(S^0)$ である。この A-theory を使うと代数的な数 $d_H^A(n.m)$ は次の様に解釈される。

$$d_H^A(n.m) = \text{modulo torsion index of}$$

$$j_* : A_{4n}(HP^\infty) \longrightarrow A_{4n}(HP^\infty/HP^m).$$

$d^A(n.m)$ についても同様。

この解釈は A-theory が (co)homology theory なので、都合がいい。A-theory の種々の重要な性質については、必要になった時、逐次、触れることにする。

2. 具体的な結果

定理1 [6] nが m と比較して十分大ならば

$$d^S(n,m) = d^A(n,m) \quad (2\text{-成分})$$

$$d^S_H(n,m) = d^A_H(n,m) \quad (2\text{-成分})$$ が成立する。

次に§0で述べた問題についての部分的な解を述べる。そのため、次の記号を用いる。$d^A_2(n,m)$, $d_2(n,m)$ は夫々 $d^A(n,m)$ 及び $d(n,m)$ を素因数分解した時の 2 の指数を表わすものとする。

定理2 [9]' $1 \leqq m \leqq 3$, $n \geqq m+1$ とすると

0) $$d^A_2(n,1) = \begin{cases} 2 & n : \text{even} \\ 0 & n : \text{odd} \end{cases}$$

$$d^A_2(n,2) = \begin{cases} 3 & n : \text{odd} \\ 4 & n \equiv 0\ (4) \\ 5 & n \equiv 2\ (4) \end{cases}$$

$$d^A_2(n,3) = \begin{cases} 4 & n \equiv 1\ (4) \\ 5 & n \equiv 3\ (4) \text{ or } n : \text{even} \\ 6 & n \equiv 15\ (16) \\ 7 & n \equiv 7\ (16) \end{cases}$$

i) $$d_2(n,m) = d^A_2(n,m)$$

ii) $$\underset{(2\text{-成分})}{\pi_{4n-2}(Sp(m))} \cong \mathrm{Tor}(\pi_{4n-1}(Sp/Sp(m))) \oplus \mathbb{Z}/2^{d^A_2(n,m)}$$

定理3. [9]′ $n \geqq m+1$, $1 \leqq m \leqq 5$ について

i) $d_2(n, n-m) = d_2^A(n, n-m)$

ii) $\underset{(2\text{-成分})}{\pi_{4n-2}(Sp(n-m))} \cong \mathrm{Tor}(\pi_{4n-1}(Sp/Sp(n-m)) \oplus \mathbb{Z}/2d_2^A(n, n-m)$

が成立する。

定理4. [9].

i) $\underset{(n \geqq 2)}{\pi_{4n+10}(Sp(n))} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2d_2^A(n+3, 3n) & n \equiv 1(4) \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2d_2^A(n+3, 3n) & \text{その他} \end{cases}$

ii) $\underset{(n \geqq 2)}{\pi_{4n+11}(Sp(n))} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & n \not\equiv 1\ (4) \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & n \equiv 1\ (4) \end{cases}$

iii) $\underset{(n \geqq 2)}{\pi_{4n+12}(Sp(n))} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & n = \text{even} \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & n : \text{odd} \end{cases}$

iv) $\underset{(n \geqq 3)}{\pi_{4n+13}(Sp(n))} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/16 & n = \text{odd} \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/64 & n \equiv 6\ (8) \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/32 & n \equiv 2\ (8) \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/k & n \equiv 4\ (8) \\ \quad \text{但し } k = 64/(64, 10(n+2)(n+k)/8) & \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \boxed{} & n \equiv 0\ (8) \end{cases}$

↑ 連立方程式がとけていない。

v) $\underset{(n \geqq 3)}{\pi_{4n+14}(Sp(n))} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2d_2^A(n+4, n) & n \equiv 0(4) \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2d_2^A(n+4, n) & n \not\equiv 0\ (4) \end{cases}$

註.

1) 定理1で"nがmと比較して十分大"という意味は正確には"あるmの関数$f(m)$があって $n \geqq f(m)$ ならば"という意味である。当然$f(m)$は小さい方が望ましい。このtypeの定理は、complex caseで Crabb–Knapp [5] [ ] で証明された。複素のcaseでは対応する我々のcaseより$f(m)$は小さく取れている。これはCP^∞はH-spaceであるが、$HP^\infty \simeq Q^\infty$はH-spaceにならないことが原因である。

2) 定理2で $d_2(n,m)=d_2^A(n,m)$ ならば当然 $d_2^S(n,m)=d^A(n,m)$ が従うが、この $d_2^S(n,m)$ については [8] 及び [9] で前に考察していた。が証明方法は異なる。

3) 定理3では $d_2(n,n-m)=d_2^S(n,n-m)$ であるが 1) については Oshima [21] [22] [23] によって $m=5$ のcaseの時へ小数の例外を除いて、既に証明されている。

4) 定理4では $\pi_{4n+i}(Sp(n))$ について $i \leqq 8$ については1960年代に [3] [16] [17] etc によって計算され、$i=9$ の時は1981年に Ōshima [22] によって計算された。尚 ii) については Ōshima が既に証明していた。(unpublished)。

追加) 定理2の $m=2$ の時は $\pi_{4n-2}(Sp(m))$ の direct summand $Z/2d^S(n,m)$ の部分は Oda [20] が構成したものと対応している。

§3. 代数的な条件. $d^A(n,m)$ 及び $d^A_H(n,m)$ について.

i：整数に対して $\nu_2(i)$ は i を素因数分解した時の２の指数を表わすものとし. $\nu_2(d^A(n,m))$ を $d^A_2(n,m)$, $\nu_2(d^A_H(n,m))$ を $d^A_H(n,m)_2$ で表わす。又, $b\geqq 1$ に対して

$$t(b)=\max\{2,\ 2^{b-3}\}$$

とおく。この時, $d^A_2(n,m)$ 及び $d^A_H(n,m)_2$ は次の性質をもつ。

<u>Prop 2.1</u>　$n\geqq m+1$, $b\geqq 1$ とする

i) $d^A_2(n,m)\leqq 2n-3$ 　if $(n,m)\neq(2,1)$

ii) $d^A_2(n,m)\geqq b \Rightarrow \forall k\geqq 1$ に対して $d^A_2(n+k\,t(b),m)\geqq b$

iii) $d^A_2(n,m)=b \Rightarrow \forall k\geqq 1$ に対して $d^A_2(n+k\,t(b+1),m)=b$

iv) $d^A_2(n,m)\leqq m(m+1)$。 特にこれから

$D(m)\overset{\exists}{=}\max\limits_{n\geqq m+1}\{t(d^A_2(n,m))\}$ とおけば

$d^A_2(n,m)$ は m を固定した時. n に関して周期 $D(m)$ をもつ。

<u>Prop 2.2</u>　$n\geqq m+1$, $b\geqq 1$ とする

0) $d^A_H(n,n-1)=(2n)!/a(n)$

i) $n\geqq m+2$ ならば $d^A_H(n,m)_2\leqq 2n-3$

ii), iii) prop 2.1 と同じ

iv) $d^A_H(n,m)_2\leqq m(m+2)$, 以下 prop 2.1 と同様

prop. 2.1 − 2.2 の証明は、まったく同様。iv) 以外は $M(n, A)$ の性質を使うことにより、代数的にすぐにできる。iv) については、代数的な証明を小生は持ち合わせていないが、§2 でのべた $d^A(n, m)$ 及び $d^A_2(n, m)$ の A-theory を使った解釈と、Q^∞ 及び HP^∞ の適当な stable map の情報 [7] を使って証明できる。

§4. $d(n, m)$ と $\pi_{4n-2}(Sp(m))$.

§0 でのべた事を、もう少し詳しくみると次の事が分かる；今 $\lambda_n \in \pi_{4n-1}(Sp) \cong \mathbb{Z}$ を generator $j : Sp \to Sp/Sp(m)$ を canonical projection, $i : Sp(m) \to Sp(n-1)$ を inclusion $(1 \leqq m \leqq n-1)$ とする時

prop 4.1

i) $\exists$ short exact seq.（但し 2-component）

$$0 \to \mathrm{Tor}(\pi_{4n-1}(Sp/Sp(m))) \to \pi_{4n-2}(Sp(m)) \to \mathrm{Im}\, i_* \to 0$$

ii) $\mathrm{Im}\, i_* \cong \mathbb{Z}/2^{d_2(n,m)}$

iii) (i) の sequence が split するための必十条件は、$j_*\lambda_n$ が $\pi_{4n-1}(Sp/Sp(m))$ の中で $2^{d_2(n,m)}$ でわり切れることである。

特に、もし $j_*\lambda_n$ が $2^{d^A_2(n,m)}$ でわり切れば、$d_2(n, m) = d^A_2(n, m)$ で (i) の sequence は split する。

§5. Unstable Adams maps.

$b \geqq 1$ に対して mod 2^b Moore spectrum を M_b で表わす。i.e. $M_b = S^0 \cup_{2^b} e^1$。$i_0 : S^0 \to M_b$, $\pi_0 : M_b \to S^1$ は、夫々 inclusion, projection を表わす。$\Sigma^t M_b$ で ($t \geqq 1$)、時には、スペクトラムでなく、space を表わすこともある。今 $b \geqq 1$ に対して

$$r(b) = \begin{cases} 7 & \text{if } b \leqq 3 \\ 2b+2 & \text{if } b \geqq 4 \text{ and } b \equiv 0 \text{ or } 3\ (4) \\ 2b+3 & \text{if } b \geqq 4 \text{ and } b \equiv 2\ (4) \\ 2b+4 & \text{if } b \geqq 4 \text{ and } b \equiv 1\ (4) \end{cases}$$

とおく。

次の定理は、本質的に Mahowald [11] [12] による Im J の order 2^b の element の sphere origin に関する定理の系である。

<u>Thm 5.1</u> $b \geqq 1$, $k \geqq 1$ に対してある unstable map

$${}^kB_b : \Sigma^{4kh(b)+r(b)} M_b \longrightarrow \Sigma^{r(b)} M_b$$

で $\pi_0 {}^kB_b i_0$ は stable には order 2^b の Im J の中の元をあらわすものがある。($\Sigma^\infty(\pi_0 {}^kB_b i_0) \in \pi^S_{4kh(b)-1}(S^0)$)。

証明は $b=1,2,3$ の時と $b \geqq 4$ に分けて考える。$b \geqq 4$ の時は Mahowald の定理 [11] [12] と Toda bracket の議論から、簡単にわかる。$b=1,2,3$ の時は次の事実と低次元の球面の非安定ホモトピー群の情報 [13] を使って証明できる。

事実. $\exists j_A : A^0(X) \longrightarrow \pi_s^0(X)$ s.t.

$$\begin{tikzcd} A^0(X) \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_s^0(X) \\ bspin^{-1}(X) \arrow[u] \arrow[ur, "J_{spin}"'] & \end{tikzcd}$$

上の事実は、A-theory の定義、及び Adams conjecture の解決から出る。更に、$j_A : A^0(X) \to \pi_s^0(X)$ は次の性質をもつ。[13] 今 $h^A : \pi_s^0(X) \to A^0(X)$ を A-theory Hurewicz homo とすると $h^A \circ j_A$ は一般に bijective で、もし $X = \Sigma Y$ ならば $h^A \circ j^A$ は同型。

注 Th 5.1 は least possible ではない (S Oka の unpublished work) が、我々の目的のためには十分である。

Coro. 5.2 $b \geqq 1$, $k \geqq 1$ に対して

i) $r(b) \leqq 4n-1$ ならば 図① は可換 (stable)

ii) $r(b) \leqq 4n-2$ ならば 図② は可換 (unstable)

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{4(n+kt(b))-1} M_b \arrow[rr, "kB_b"] \arrow[d, "\pi_0"] & & \Sigma^{4n-1} M_b \arrow[d, "\pi_0"] \\ S^{4(n+kt(b))} \arrow[dr, "\sigma_{n+kt(b)}"'] & ① & S^{4n} \arrow[dl, "\sigma_n"] \\ & HP^\infty & \end{tikzcd}$$

但し $\sigma_n \in \pi_{4n}^s(HP^\infty)$ は Becker-Segal splitting [2][27] より得られる $\pi_{4n}^s(HP^\infty)$ の free part の generator [ ]

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{4(n+kt(b))-2} M_b \arrow[rr, "kB_b"] \arrow[d, "\pi_0"] & & \Sigma^{4n-2} M_b \arrow[d, "\pi_0"] \\ S^{4(n+kt(b))-2} \arrow[dr, "\lambda_{n+kt(b)}"'] & ② & S^{4n-1} \arrow[dl, "\lambda_n"] \\ & Sp & \end{tikzcd}$$

但し $\lambda_n \in \pi_{4n-1}(Sp) \cong \mathbb{Z}$ は generator

Cor 5.3 i) もし $j_*\sigma_n$ が 2^b でわりきれて、かつ、$r(b) \leqq 4n-1$ ならば $j_*\sigma_{n+kt(b)}$ も 2^b でわりきれる。($n \geqq m+2$ ならば $r(b) \leqq 4n-1$ はみたされる)

ii) もし $j_*\lambda_n$ が 2^b でわりきれれば $j_*\sigma_{n+kt(b)}$ も 2^b でわりきれる。(この時は $r(b) \leqq 4n-2$ は自動的に成立する。)

§6. ある stable Adams map の存在とその応用

Crabb–Knapp [4] は §5の事実で述べた事を使って次の定理を得た。この定理は Mahowald–Miller の定理 [12] [13] の拡張を導く。

Th. 6.1 [4]. X: finite (dimensinal) complex, $b \geqq 1$, $k \geqq 1$ とする。ある stable map $\widetilde{{}^kB_b} : \Sigma^{4kt(b)} M_b \to M_b$ で次の性質をもつものが存在する。

(1) $\pi_0 \widetilde{{}^kB_b}\, i_0 \in \mathrm{Im}J \subset \pi^S_{4kt(b)-1}(S^0)$

(2) $x \in \pi^l_S(X : \mathbb{Z}/2^b)$ で、$h^A(x) = 0$ in $A^l(X : \mathbb{Z}/2^b)$ の時

もし $\exists k$, s.t. $\begin{cases} 4kt(b) \geqq \dim X - l + 3 \\ \Sigma^{4kt(b)-l} X \text{ がある space の 3回 suspension} \end{cases}$

ならば、この k について $\widetilde{{}^kB_b}(x) = 0$

ここで $\pi^l_S(X : \mathbb{Z}/2^b) = \{X, \Sigma^l M_b\}$ で、これには $\widetilde{{}^kB_b}$ が自然な方法で作用している。$A^l_S(X : \mathbb{Z}/2^b)$ についても同様。h^A は A-theory Hurewicz hom.。

Th 6.1の応用として次の定理を得る。Quasi-case も同様.

Th. 6.2　$n \geqq m+2$, $b \geqq 1$

もし $d_{\mathbb{H}}^{A}(n,m) \geqq b$ ならば $k\lambda(b) \geqq n-m$ をみたす k に対して

$\exists\ \sigma'_{n+k\lambda(b)} \underset{gen.}{\in} \pi^{S}_{4(n+k\lambda(b))}(HP^{\infty})$, s.t.

$j_{*}\sigma'_{n+k\lambda(b)}$ は $\pi^{S}_{4(n+k\lambda(b))}(HP^{\infty}/HP^{m})$ の中で 2^{b} でわりきれる.

§3 の定理1はこの定理から出てくる。

§7. 計算例

例として比較的簡単でしかも non-trivial と思われる

$$\pi_{4n+11}(Sp(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n \equiv 1\ (4) \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{その他} \end{cases}$$

を証明してみよう。

① $\pi_{4n+11}(Sp(n)) \cong \pi_{4n+12}(Sp/Sp(n)) \underset{(n\geqq 2)}{\cong} \pi^{S}_{4n+12}(Q_{n+3,3})$

$\therefore$ $\pi^{S}_{4n+12}(Q_{n+3,3})$ を求めれば OK

② Cofiber sequence

$$S^{4n+10} \xrightarrow{\varphi} \underset{\parallel}{Q_{n+2,2}} \longrightarrow Q_{n+3,3}$$
$$Q_{n+2,2} = S^{4n+3} \cup_{(n+2)\nu} e^{4n+7}$$

を考えた時

$\varphi_{*}: \pi_{*}(S^{4n+10}) \longrightarrow \pi_{*}(Q_{n+2,2})$ について

Lemma 7.1　$\varphi_{*}(\eta) = \begin{cases} i_{*}\varepsilon \neq 0 & n \equiv 0\ (4) \\ 0 & n \equiv 1\ (4) \\ i_{*}\eta\sigma \neq 0 & n \equiv 2\ (4) \\ i_{*}\bar{\nu} \neq 0 & n \equiv 3\ (4) \end{cases}$　　$\varphi_{*}(\eta^{2}) = \begin{cases} i_{*}\eta^{2}\sigma \neq 0 & n \equiv 0\ (2) \\ 0 & n \equiv 1\ (2) \end{cases}$

但し　$i: S^{4n+3} \longrightarrow Q_{n+2,2}$ は inclusion

③ 故に $0 \to Z_2 \oplus Z_2 \to \pi^S_{4n+12}(Q_{n+3,3}) \to \left\{ \begin{matrix} Z_2\{\eta\} \\ 0 \end{matrix} \right\} \to 0$ ← $n \equiv 1\ (4)$

$n \equiv 1\ (4)$ の時の extension は次の様にして、とける。

④ $n \equiv 1.\ (4)$ のとき $\langle \varphi,\ \eta,\ 2 \rangle \ni 0$

これを示すため、

Lemma 7.2 $\exists f:\ HP^{n+2}/HP^{n} = S^{4n+4} \underset{(n+1)\nu}{\cup} e^{4n+8} \longrightarrow \Sigma Q_{n+2,2}$ (stable)

s.t. $(f_*)_{n+1} = (n+2)\times \frac{1}{0}$. $(f_*)_{n+2} = (n+1)\times\frac{1}{0}$.

Lemma 7.3 $n \equiv 1\ (4)$ のとき

$$\frac{n+3}{2} f_* \varphi^H_{n+3,3} = \frac{(n+3)(n+2)}{2} \varphi^Q_{n+3,3}$$

Lemma 7.4 $n \equiv 1\ (4)$ のとき

$$\varphi^H_{n+3,3}\,\eta^2 = 0$$

⑤ $\langle \varphi.\ \eta.\ 2 \rangle = \langle 2\varphi^H,\ \eta.\ 2 \rangle \supset \varphi^H \langle 2.\ \eta.\ 2 \rangle = \varphi^H \eta^2 = 0$

Lemma 7.3 は §1 の prop 1.1 及び prop 1.2 よりわかる。

Lemma 7.1 及び Lemma 7.4 は spectral sequence

$H_*(X;\ \pi_*(S^0)) \Rightarrow \pi^S_*(X)$ $(X = HP^\infty.\ QP^\infty)$

の計算からでる。 HP^∞-case の計算は $X = MSp$ の時 [13] から

わかり Q^∞ の case の計算は HP^∞-の case から従う。($\varphi^H_{n+3,3}:\ S^{4n+11}$

$\to HP^{n+2}/HP^{n} = Q_{n+1,2}$ と $\Sigma^5 \varphi^Q_{n+2,3}:\ S^{4n+11} \to Q_{n+1,2}$ の差が

prop. 1.1 及び prop 1.2 よりわかる。)

§8. 定理2,3の証明の概略（方針のみ）

① まず、代数的にきまってくる $d_2^A(n, m)$ を決定する。

これは、結構シンドイ作業である。実際の計算では Mycro computer で確めた。

② Cor. 5,3 の仮定を $n = m+1, m+2, \cdots$ について検証する。

このとき Mimura-Toda [15] etc の結果及び James splitting ($Sp(n) \xrightarrow{\theta} \Omega^\infty \Sigma^\infty Q_n$) 及び e-invariant を使用する。

詳しくは [19] を参照して下さい。

§9. 最後に

Complex James number $\longleftrightarrow \Sigma CP^\infty \longleftrightarrow SU(n)$

quaternion 〃 $\longleftrightarrow Q^\infty \longleftrightarrow Sp(n)$

relative James 〃 [10] $\longleftrightarrow HP^\infty \longleftrightarrow SU(2n)/Sp(n)$

となっている事を注意しておく。

References

[1] J. F. Adams, On the group J(X), IV, Topology 5 (1966)

[2] J. C. Becker, Characteristic classes and K-theory, Lecture Notes in Math., 428 (1978)

[3] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Michigan Math. J., 5 (1958)

[4] M. C. Crabb and K. Knapp, Adams periodicity in stable homotopy, preprint.

[5] ——————, James numbers and codegrees of vector bundles, I, II. preprint

[6] —————— and K. Morisugi, 'On the stable Hurewicz image of the stunted quaternionic projective spaces, preprint.

[7] B. Harris, Some calculations of homotopy groups of symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963)

[8] M. Imaoka and K. Morisugi, On the stable Hurewicz image of some stunted projective spaces, II, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 20 (1984)

[9] ——————. 〃 III, preprint

[10] I. M. James, The Topology of Stiefel manifolds. London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 24 (1976)

[11] M. Mahowald, Descriptive homotopy of the element in the image of J-homo. Proc. Tokyo Conf. on manifolds (1973)

[12] ________, The image of J in the EHP sequence, Ann. of Math. 116 (1982)

[12]′ ________, bo-resolutions. Pac. J. of Math. 192 (1981)

[13] P. May, E_∞-ring spaces and E_∞-ring spectra, Lecture Note. in Math. 577 (1977)

[13]′ H. Miller, On the relations between Adams spectral sequence with an application to the stable homotopy groups of a Moore space, J. of Pure and appl. Algebra 20 (1981)

[14] M. Mimura, Quelques groupes d'homotopie metastables des espaces symplectre $Sp(n)$ et $U(2n)/Sp(n)$, C.R. Acad. Sci. Paris 262 (1966)

[15] ________ and H. Toda, Homotopy groups of $SU(3)$, $SU(4)$ and $Sp(2)$, J. Math. Kyoto. Univ. 3 (1964)

[16] ________________, Homotopy groups of symplectic groups, J. Math Kyoto Univ. 3 (1964)

[17]. K. Morisugi, Stable self maps of the quaternionic (quasi-) projective space, Publ. RIMS, Kyoto Univ 20 (1984)

[18] ________, Massey products in MSp_* and its application, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983)

[19] K. Morisugi, Meta-stable homotopy groups of $Sp(n)$, in preparation.

[19]′ ________, Homotopy groups of symplectic groups and the quaternionic James numbers, preprint.

[20] J. Mukai, The order of the attaching class in the suspended quaternionic quasi-projective space, publ. RIMS Kyoto Univ 20 (1984)

[21] H. Ōshima, On the stable James numbers of stunted complex or quaternionic projective spaces, Osaka. J. Math 16 (1979)

[22] ________, Some James numbers of Stiefel manifolds, Math. Proc. Phil. Soc. 92 (1982)

[23] ________, A remark on James numbers of Stiefel manifolds, Osaka J. Math. 21 (1984)

[24] N. Oda ; Periodic families in the homotopy groups of $SU(3)$, $SU(4)$, $Sp(2)$ and G_2, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A 32 (1978)

[25] G. B. Segal, The stable homotopy of complex projective space, Quart. J. Math. Oxford (2) 24 (1973)

[26] H. Toda, Composition Methods in homotopy groups of spheres, Ann. Math. Studies 49 (1962)

[27] ________, A survey of homotopy theory, Sugaku 15 (1963/64)

[28] G. Walker, Estimates for the complex and quaternionic James numbers, Quart. J. Math. Oxford (2), 32 (1981)

[29] I. Yokota, On the homology of classical Lie groups, J. Inst. Poly. Osaka City Univ. 8 (1957)

岡七郎氏の業績について

丸山研一（九大　理）

１．序

昨年（１９８４年）の１０月末に急逝された岡　七郎氏の業績を振り返ってみたいと思います。氏の専門分野は、代数的位相幾何学のホモトピー論、特に球面のホモトピー群に関する所が中心であり、実際３０編余りの論文の内の８割程を球面のホモトピー群が占めています。したがって、ここでの話題もその辺が主となります。

２章で８１年までの球面のホモトピー群に関する論文を見ることとし、３章では最近携わっておられた奇素数成分のｐ－ｒａｎｋについての仕事を紹介します。４章では球面のホモトピー群以外の業績について少しふれたいと思います。

２．　球面のホモトピー群での仕事（８１年まで）

球面のホモトピー群と言っても、２成分と奇素数成分ではずいぶん様子が違う様であるが、岡の仕事場は奇素数成分であったと言って

良いと思う。まず、３部作［３］、［４］、［１０］がある。これらに於いては、それ以前に戸田によって得られていた結果が拡張されている。即ち、；Ｋｋ　を　S^n　の　ｎ＋ｋ次元以上のホモトピー群をｋｉｌｌして得られる空間から得られるｓｐｅｃｔｒｕｍとすると、［３］では、コホモロジー　$H^*(Kk;Zp)$　を　$2(p^2+1)\times(p-1)-3\leqq k\leqq 2(p^2+p)(p-1)-3$の範囲で決定し、$\Pi_k(S;p)$（球面の安定ホモトピー群のｐ－ｃｏｍｐｏｎｅｎｔ）を　$k\leqq 2(p^2+p)\cdot(p-1)-3$まで求めている。［４］ではこれが　$k\leqq 2(p^2+3p+1)(p-1)-6$　$(p>3)$　$k\leqq 76$　（$p=3$の場合）　まで拡張され、最終的には［１０］で$p\geqq 5$　のとき　$\Pi_k(S;p)$　は、$k\leqq 2(p^2+p)q-4$、$q=2(p-1)$　まで、環構造も$(2p^2+p)q-3$まで決定されている。

上のコホモロジー群の計算には、［２］及び戸田によって得られていたいくつかの　Ｓｔｅｅｎｒｏｄ　ａｌｇｅｂｒａ上の完全系列が用いられている。

一方このころ、岡は論文　［８］、［１３］で、　ρ　という球面の安定ホモトピー群の元$((tp^2+(t-1)p+r)q-2$　ｓｔｅｍ、$t\geqq 1$、$r=1,2,\dots,p-1$、$p\geqq 5$）を構成する。これらの元は、Ｌ．Ｓｍｉｔｈと戸田によるβ－ｆａｍｉｌｙ　と関係の深い、新しい無限族である。構成方法は、［７］で準備されて

いた Ｍｏｏｒｅ ｓｐａｃｅ のｓｔａｂｌｅ ｈｏｍｏｔｏｐｙ 環における結果や、Ｌ．Ｓｍｉｔｈの方法をさらに精密にした議論を用いている。

同じ年に［９］が出ている。戸田によって定義されていた γ_1と呼ばれる元がありこれが自明であるか否かが当時問題となっていたが結局のところ非自明であることがここで示された。γ_1は、後に第３の無限族（γ－ｆａｍｉｌｙ）として拡張される（Ｍｉｌｌｅｒ等）。

［１６］に於いては、先程の ρ と同様の元で、$\beta_{sp^2/\langle p,2\rangle}$ と書かれる元が （p^3+sp^2-p）$q-2$ ｓｔｅｍ、$p\geq5$、$s\geq2$で定義され、非自明である事が示されている。特筆すべきは、この元の位数p^2あってＣｏｋｅｒJに含まれていて、しかも、偶数次元であることである。と言うのも、それまで知られていた位数p^2の元は、ＩｍJ にあるものと、そうでない数個だけであった。上の事より、偶数次元の位数p^2のＣｏｋｅｒJの元が無限にあることとなった。

証明は、BP_*－ｍｏｄｕｌｅ $BP_*/(p^2, v_1^p, v_2^{sp^2})$ を、ｃｏｍｐｌｅｘ で実現し、Ａｄａｍｓスペクトル系列によってなされる。

これまで、$p\geq5$ という仮定での話が多かったが、$p=3$ の場合には、少し異なった事情となる。β－族｛β_t｝は、部分的にしかない。例えばβ_4とかβ_7，β_8は存在しない。このことに関して［２３］

では、β_tが　$t \equiv 0, 1, 2, 5, 6, \mathrm{mod}\, 9$　のとき存在することを、BP_*－module　$BP_*/(3, v_1^2, v_2^9)$を実現する様なcomplexを構成することによって示している。同様に、$BP_*/(3, v_1^3, v_2^9)$　を実現することによって、β_t（$t \equiv 3 \mathrm{mod}\, 9$）　の存在も述べられている。テクニックとしては、［11］や、80次元までの、”球面”の結果が使われている。

3.　球面のホモトピー群のp－rank

$\Pi_t(S)$　のp－componentの生成元の個数のことを、そのp－rankと言う。［26］、［27］では、十分大きなtをとれば、p－rankは任意に大きくなることを示した。このことは、代数的、すなわちAdamsスペクトル系列のE_2項に於いては知られていたことであったが、これが幾何的に成り立っているという事である。実際には、これらのgeneratorsというのは、前章でも述べたβ－族の亜族　$\beta_{t/s}$ に他ならない。なお、［26］に注意として次のことが述べられている。；”このp－rankの増え方というのは非常に遅く、例えばp＝5とした場合、p－rankは551次元でやっと3になり、それは今まで知られている次元の既に半分を越えている。…”。したがって、この様な現象を観察するには、かなり高い次元まで計算してみないといけない事となる。

［２７］では、上記の結果の他にも、L_2という環スペクトラムのself mapから $BP_*/(p, v_1, v_2^2, v_3^{tp})$ を実現する様な、complex を作り、$\gamma_{tp/2}$ という元を構成しているが、これは 先に触れたγ一族に対してのgeneralized γ一族（丁度、βにたいする$\beta_{s/t}$ の様なもの）である。

４． 非安定領域での業績

安定領域と同時に、非安定領域でも並行して研究がなされていた。その辺のことを見たいと思う。まず、自己ホモトピー同値群の決定を上げることが出来よう。$\varepsilon(X)$ を空間Xの自己ホモトピー同値写像のホモトピー類とすれば、これは写像の合成を演算として群をなす。一見単純にみえるこの群の決定は、実はそう容易ではなく、細かい議論が必要とされる。さて、［５］に於いては、二つのcellから成る複体の自己ホモトピー同値の群が、求められている。方法は、まず自己写像のホモトピー類のadditiveな群構造を決めて、そのunitとして、ホモトピー同値写像を拾い出すという自然なものとなっている。ここでの基になっているのは、たぶんムーア空間のstable homotopy ringの決定での多くの計算であろうと思う。

上を一般化した形で、［6］がつづいて出る。ここでは、写像ｆ：Ａ→Ｂ のｍａｐｐｉｎｇ ｃｏｎｅ Ｃｆの自己ホモトピー同値の群ε（Ｃｆ）を含む群拡大について考察していて、特にＡが球面のときはかなり計算可能であることが示されている。そして、例として ＳＵ（３）とＳｐ（２） を計算している。

また［20］では、Ｚ／p^rＺ（ｐ，ｏｄｄ）が適当な有限複体の自己ホモトピー同値の群によって実現されることを示した。一般に、空間 Ｘ が単連結な有限複体の場合、ε（Ｘ）はｆｉｎｉｔｅｌｙ ｐｒｅｓｅｎｔｅｄであるので（Ｓｕｌｌｉｖａｎ等）、例えば有限アーベル群がこの群によって実現されるかどうかは、自然な問である。ここでは、ムーア空間の間の写像から、その様な複体を構成している。なお、２－ｔｏｒｓｉｏｎ ｇｒｏｕｐについても同様な考察が、部分的になされている。

１９８０年頃までに、ｒａｎｋ２のＨ－空間の自己ホモトピー同値の群は決定されていたが、［２１］、［２２］ではｒａｎｋ３のリー群 ＳＵ（４）、Ｓｐ（３） のそれを決定している。結果は、ｒａｎｋ２の時と比べるとかなり複雑になっている。

その他、この方面ではＨ－写像と関係した、［２４］などもある。

５．結び

　以上、岡氏の業績を少しばかり述べましたが、やはり元論文を見て戴きたいと思います。というのも、氏の論文は、非常に良く準備されているからです。（クラフトワーク！）。

　現在の球面のホモトピー群と言う分野は、まさに、ジャングルのの様相を呈していますが、そこを開拓して行った一人として岡氏の名前は記念されるべきでしょう。４０才にして他界された岡　七郎氏に哀悼の意を表します。合掌。

List of Publications

[1] On the homotopy groups of sphere bundles over spheres, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1, 33 (1969), 161-195.

[2] Some exact sequences of modules over the Steenrod algebra, Hiroshima Math. J., 1 (1971), 109-121.

[3] The stable homotopy groups of spheres I, Hiroshima Math. J., 1 (1971), 305-337.

[4] The stable homotopy groups of spheres II, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 99-161.

[5] Groups of self-equivalences of certain complexes, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 285-298.

[6] (with N. Sawashita and M. Sugawara) On the groups of self-equivalences of a mapping cone, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 9-28.

[7] On the stable homotopy ring of Moore spaces, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 629-678.

[8] A new family in the stable homotopy groups of spheres, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 87-114.

[9] (with H. Toda) Non-triviality of an element in the stable homotopy groups of spheres, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 115-125.

[10] The stable homotopy groups of spheres III, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 407-438.

[11] (with H. Toda) 3-Primary β-family in stable homotopy, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 447-460.

[12] (with O. Nakamura) Some differentials in the mod p Adams spectral sequence ($p \geqq 5$), Hiroshima Math. J., 6 (1976), 305-330.

[13] A new family in stable homotopy groups of spheres II, Hiroshima Math. J., 6 (1976), 331-342.

[14] (with H. Toda) On stable homotopy groups of spheres (in Japanese), Sugaku, 28 (1976), 226-235.

[15] Module spectra over the Moore spectrum, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 93-118.

[16] Realizing some cyclic BP_*-modules and applications to stable homotopy of spheres, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 427-447.

[17] (with O. Nakamura) Corrections to "Some differentials in the mod p Adams spectral sequence ($p \geqq 5$)", Hiroshima Math. J., 7 (1977), 655-656.

[18] Corrections to "Module spectra over the Moore spectrum", Hiroshima Math. J., 8 (1978), 217-221.

[19] Ring spectra with few cells, Japan J. Math., 5 (1979), 81-100.

[20] Finite complexes whose self-homotopy equivalences form cyclic groups, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 34 (1980), 171-181.

[21] On the group of self-homotopy equivalences of H-spaces of low rank I, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 35 (1981), 247-282.

[22] On the group of self-homotopy equivalences of H-spaces of low rank II, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 35 (1981), 307-323.

[23] Note on the β-family in stable homotopy of spheres at the prime 3, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 35 (1981), 367-373.

[24] (with K. Maruyama) Self-H-maps of H-spaces of type (3,7), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 35 (1981), 375-383.

[25] (with K. Shimomura) On products of the β-elements in the stable homotopy of spheres, Hiroshima Math. J., 12 (1982), 611-626.

[26] Small ring spectra and p-rank of the stable homotopy of spheres, in Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference, pp. 267-308, Contemporary Mathematics vol. 19, AMS, 1983.

[27] Multiplicative structure of finite ring spectra and stable homotopy of spheres, Algebraic Topology, Aarhus 1982, Proceedings, Springer Lecture Notes, #1051, pp. 418-441, 1984.

[28] Derivations in ring spectra and higher torsions in Coker J, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 38 (1984), 23-46.

[29] (with K. Maruyama) Note on some exotic multiplication on SU(n), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 38 (1984), 61-64.

[30] Multiplications on the Moore spectrum, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 38 (1984), 257-276.

[31] (with J. Mukai) A note on the quaternionic quasi-projective space, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 38 (1984), 277-284.

[32] Homotopy of the exceptional Lie group G_2, to appear in Proc. Edinburgh Math. Soc.

INFINITELY MANY KNOTS WITH THE SAME POLYNOMIAL INVARIANTS

九州大学理学部　　　金信　泰造

von Neumann環を使った，ｋｎｏｔまたはｌｉｎｋ（ここでは，有限個の１次元球面の３次元球面への埋め込み）の新しい多項式不変量が発見されたというニュースが，大阪市立大学の作間誠氏から私の耳に（実際，電話で）伝わってきたのは，昨年の秋でした。彼が，非常に興奮した様子で語っていたのを今でも覚えています。そのときは，頭の鈍い私には，ピンときませんでした。しかし，それから数日後，Ｊｏｎｅｓ等のプレプリントが届いて，やっと事情が，何となくわかってきました。

この新しい不変量—— Jones多項式は，非常に強力で，古典的に知られている Alexander多項式では区別できない多くのｋｎｏｔやｌｉｎｋ——例えば，Alexander多項式が　１　である樹下一寺阪ｋｎｏｔが自明でないことがすぐにわかる。Ｊｏｎｅｓのオリジナルな定義は，braid群から von Neumann環への表現を使っているが，

ここで用いる von Neumann環は，代数的に Hecke環から構成できるし，また， Jones多項式そのものも，Ｊ．Ｈ．Ｃｏｎｗａｙが Alexander多項式を組合せ的に記述したのと全く同様の方法で定義できるので簡単に導入することができる。さらに Jones多項式を拡張して，さらに強力な２変数の多項式が， Jones多項式と同じく Hecke環への表現，または，組合せ的な方法で定義できることが， Jones多項式が定義されて１，２か月後にほぼ同時に数人の数学者———Ｏｃｎｅａｎｕ， Ｌｉｃｋｏｒｉｓｈ－Ｍｉｌｌｅｔｔ， Ｈｏｓｔｅ， Ｆｒｅｙｄ－Ｙｅｔｔｅｒによって独立に示されている。ここでは， Jones多項式及び２変数多項式の解説を行ない，最後に表題に挙げた結果を述べる。

　日本にこれらの情報を伝えてくれたのは，ＢｅｒｋｅｌｅｙのＭ．Ｓ．Ｒ．Ｉ．に留学中の大阪大学の小林毅氏で，近いうちに『数学』に彼の論説［１２］が掲載されるので，詳しいことはそれを参照してください。また，本稿はこれ以外に，小林一章先生の解説［１０］や，Ｖ．Ｆ．Ｒ．Ｊｏｎｅｓの論文［６］を参考にしています。

§1．linkのbraid表現

3次元球面の中の2つのlinks L_1 と L_2 が同値であるとは，L_1 を L_2 に写す3次元球面の向きを保つ同相写像が存在するときをいう。

B_{n+1} をArtinの braid群［2，3］とすると，B_{n+1} は次の表示をもつ：

生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$,

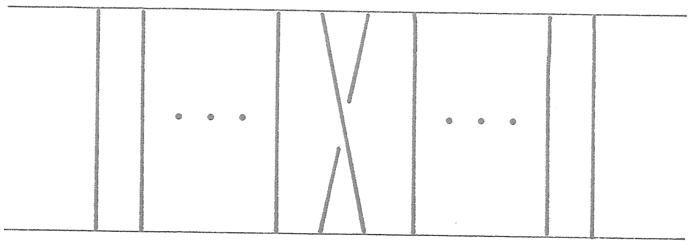
関係式 (B1) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$,

$1 \leq i \leq n-1$,

(B2) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$,

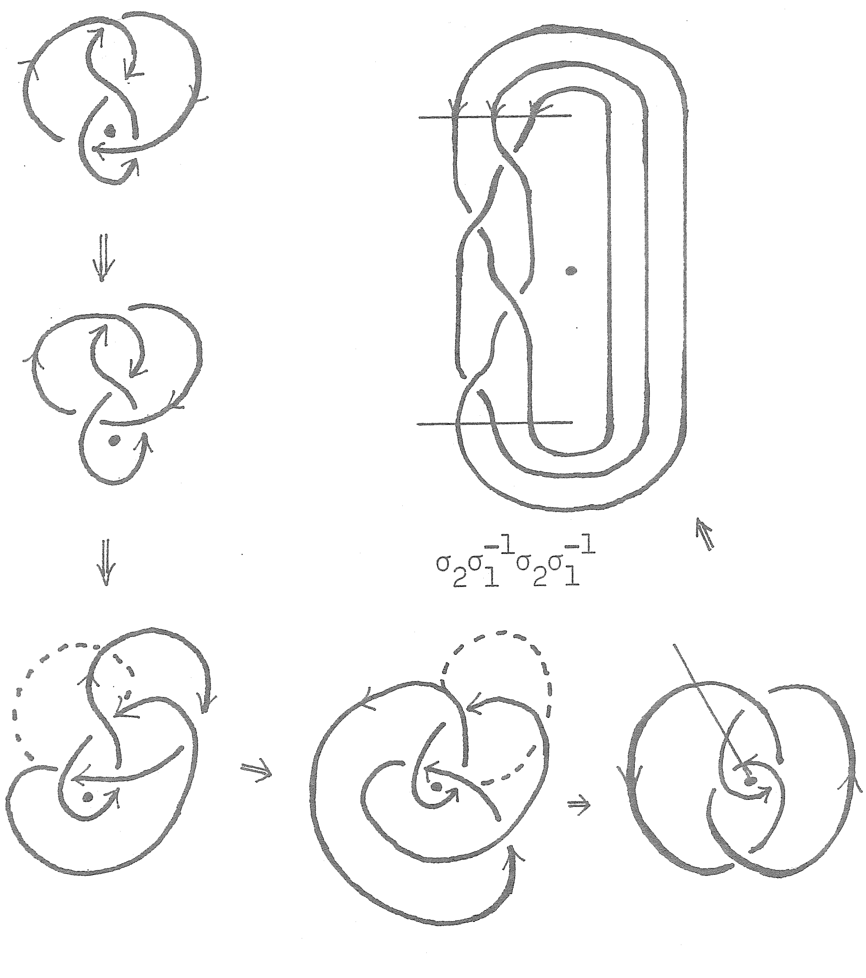
$|i-j| \geq 2$.

ここで σ_i は次の braidである。



braid $b \in B_{n+1}$ に対して。上下を結びつけてできる link を closed braid といい，$\hat{b}$ であらわす。逆に，任意の link は，closed braid であることが，J. W. Alexander [1] によって示されている。

例。8の字 knot の braid 表現。基点から眺めて knot がすべて同じ向きをもつように変形する。



$\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$

Markov move とは，次の２つのｔｙｐｅのおきかえである：

（Ｍ１）　$g \in B_{n+1}$ に対して

$$B_{n+1} \ni b \to gbg^{-1} \in B_{n+1}$$

（Ｍ２）　$$B_{n+1} \ni b \to b\sigma_{n+1} \in B_{n+2}$$

Markov move によって，closed braid $\hat{b}$は，変わらないが，逆に次がなりたつ。

<u>命題．</u>（Ａ．Ｍａｒｋｏｖ［１４，３］）２つのｂｒａｉｄｓ ｂとｃに対して，ｃｌｏｅｓｅｄ ｂｒａｉｄｓ $\hat{b}$と$\hat{c}$が同値なｌｉｎｋになるための必要十分条件は，ｂに有限回のＭａｒｋｏｖ ｍｏｖｅｓを施すことによってｃになることである。

§２．Ｊｏｎｅｓ多項式及び２変数多項式の定義（１）

$A_{\beta,n}$ を単位元１と次の関係式をみたす射影e_1，e_2，・・・，e_n で生成される有限次元の von Neumann環とする：

（Ｅ１）　$e_i^2 = e_i$，　$e_i^* = e_i$，

（Ｅ２）　$e_i e_{i+1} e_i = \beta^{-1} e_i$，

（Ｅ３）　$e_i e_j = e_j e_i$，　$|i-j| \geq 2$．

$\beta = 4\cos^2 \pi/m$ （$m = 3, 4, \cdots$）または，$\beta \geqq 4$ のとき，

次で決定されるトレース $tr: A_{\beta,n} \to C$ を持つような射影が存在する：

（0）　$tr(1) = 1$，

（i）　$tr(ab) = tr(ba)$，

（ii）　$w \in A_{\beta,n}$ のとき $tr(we_{n+1}) = \beta\, tr(w)$，

（iii）　$a \neq 0$ のとき　$tr(a^* a) > 0$。

Jonesは，II_1 型因子環の部分因子環の指数（上の β^{-1} にあたる）の研究においてこのような環を具体的に構成した［7］。

次に Hecke環について述べる。複素数 $q \neq -1$ を固定する。A_n 型の Hecke環 $H(n,q)$ とは，次の関係式をみたす $g_1, g_2, \cdots, g_n$ で生成される C 上の環である：

（H1）　$g_i^2 = (q-1) g_i + q$，

（H2）　$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$，

（H3）　$g_i g_j = g_j g_i$，　$|i-j| \geqq 2$。

Jones［7］は，$\beta = 2 + q + q^{-1}$ のとき $A_{\beta,n}$ が，$H(n,q)$ を次の Steinberg関係式でわったものであることを示している：

$$g_i g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i$$

$$+ g_i + g_{i+1} + 1 = 0.$$

$H_{\infty}(q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(n,q)$ とおくとき，複素数zに対して$H_{\infty}(q)$上の線型関数$tr: H_{\infty}(q) \rightarrow C$ で，次をみたすものが存在する［18］：

（0） $tr(1)=1$,

（i） $tr(ab)=tr(ba)$,

（ii） x　$H(n,q)$のとき，

$$tr(xg_{n+1}) = z\,tr(x).$$

$\beta = 2+t+t^{-1}$ をみたすtに対して，braid群B_{n+1}から von Neumann環$A_{\beta,n}$への表現r_tを$r_t(\sigma_i) = te_i - (1-e_i)$，Hecke環$H(n,q)$への表現$\pi_q$を$\pi_q(\sigma_i) = g_i$で定める。さらに，braid群の元$b$に対して，$t$の多項式$V_b(t)$, q,zの多項式$X_b(q,z)$をそれぞれ次のように定める：

$$V_b(t) = \left(-\frac{t+1}{t}\right)^{n} t^{e/2}\, tr_t(b),$$

$$X_b(q,z) = (q/zw)^{(n-1)/2} (w/qz)^{e/2}\, tr(\pi_q(b)),$$

ここで，eはbをσ_iの積であらわしたときのべき和をあらわす，

また，$w = 1-q+z$.

<u>定理 1.</u>　braid群B_{n+1}の元 b に対して多項式 $V_b(t)$ 及び $X_b(q,z)$は，link $\hat{b}$ の同値類にしかよらない。

証明。 $V_b(t)$ と $X_b(q,z)$ がそれぞれ，Markov moves（M1）（M2）で不変なことを示せばよい。 □

<u>定義 2.</u>　link $L=\hat{b}$，$b\in B_{n+1}$ に対して，

$$V_L(t)=V_b(t)$$

をLの Jones多項式，$X_b(q,z)$において，$l = i(w/z)^{1/2}$，$m = -i(q^{1/2} - q^{-1/2})$ $(i = \sqrt{-1})$ と置き換えた $P_L(l,m)$ をLの２変数多項式（特に広く通用している名前はない）とよぶ。

§３．Ｊｏｎｅｓ多項式の性質

Jones多項式について知られていることを簡単に述べる。

<u>定理　２.</u>（［６，Theorem 2］） link Lの連結成分の個数が奇数のとき（特にLがknotのとき），$V(t)$は，tの整係数 Laurent多項式に，偶数のときは，tの整係数 Laurent多項式の$\sqrt{t}$倍になる。

<u>定理　３.</u>（［６，Theorem 6］） K，Lを link，K♯Lをその連結和とすると，

$$V_{K\sharp L}(t) = V_K(t)\,V_L(t).$$

定理　4.（Jones）　γを link Lの1つの連結成分で，他の連結成分との linking number をλとする。L' をγの向きを逆にして得られた link とする。このとき

$$t^{3\lambda} V_L(t) = V_{L'}(t).$$

定理　5.（[6, Theorem 16]）　Kを knot とするとき，

$$d/dt V_K(1) = 0.$$

定理　5　は，大阪市立大学の村上斉氏によって一般の link の場合に拡張されている［16］。さらに村上氏は，2階微分についても結果をだしている［17］。

定理　6.（［6, Corollary 20］）　knot　K　の Arf不変量が0のときは，$\Delta_K(-1) = V_K(-1) \equiv 1 \pmod 8$ で，1のときは，$\Delta_K(-1) = V_K(-1) \equiv 5 \pmod 8$。

定理　6　についても，やはり村上氏によって Jones多項式が knotまたはlinkの Atf不変量を決定することが示されている［15］。

Jones多項式の幾何学的な解釈を与えることが，当初から重大な問題になっていたが，その1つの答えとして Toronto大学の村杉邦男先生は，次のような結果をアナウンスしている。

定理 7. Lを split しない alternative link (alternating link をふくむようなlinkのclass である。[9, Sect.9] を参照。) とするとき,

$$（V_L（t）の次数の差）\leqq c（L）+\mu（L）-1.$$

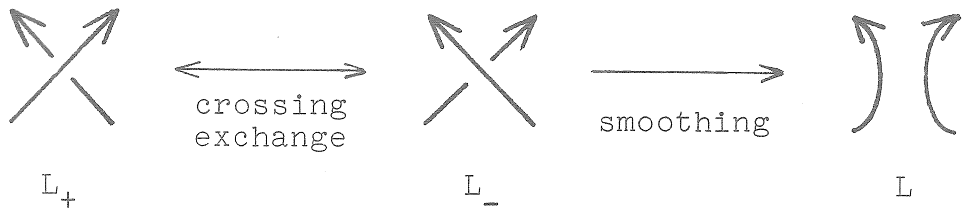
ここで, c（L）はLの射影の交差点の個数, μ（L）はLの連結成分の個数をあらわす。

さらに, 村杉先生は, すべての 2−bridge knot の交差点の個数を決定している。これは, これまでの代数的不変量ではほとんど得られなかった結果である。

§4. Jones多項式及び2変数多項式の定義(2)

ここでは, 組み合せ論的な定義を述べる。J. H. Conway は, [4] においてlinkの射影から Alexander多項式を回帰的に計算する方法を述べている:

3つのlink L_+, L_-, L_0 の射影が1つの交差点の付近で次の図のようになっており, 他の部分では一致しているとする。



このとき，

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2})\,\Delta_{L}$$

が成り立つが，この式と，自明な knot の Alexander多項式が１であることを用いて任意の knot や link の Alexander多項式が求められる。

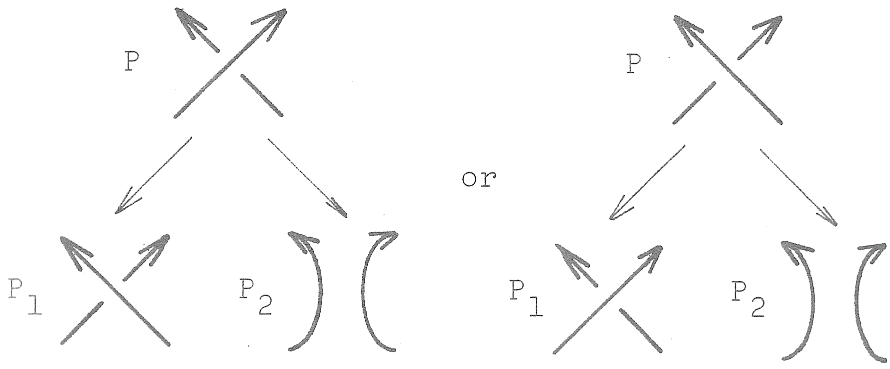
Jones多項式及び２変数多項式については，次が成り立つ。

<u>定理　８．</u>

$$t^{-1}V_{L_-} - tV_{L_+} = (t^{1/2} - t^{-1/2})\,V_{L},$$

（ｉ）　$l^{-1}P_{L_+} + lP_{L_-} + mP_{L} = 0.$

従って同様に，（ii）自明なknotの Jones多項式と２変数多項式がそれぞれ１であることを使って任意の Jones多項式や２変数多項式が計算できる。更に詳しく説明すると次のようになる。linkLの射影 P が与えられたとき，その左下に，ある交差点のcrossing exchangeした射影 P_1 をかき，右下にsmoothing した射影 P_2 をかく：



link L の任意の射影 P の1つの resolution Rに対して条件(i)，(ii)を満たしてこのようにして得られる2変数多項式を，改めてP(L，P，R)とする。

<u>定理 9.</u> 多項式P(L，P，R)は P，Rの取り方によらず，L の同値類にのみ依存する。

そこで，2変数多項式を次のように定義してもよい。(Alexander多項式及び Jones多項式についても同様。 Lickorish-Millet [13]，Hoste [5]は，このような方法で2変数多項式を発見している。小林一章先生の解説[10]，及び[11]も参照。)

<u>定義 2.</u> link Lに対して(i)，(ii)をみたすl，mに関するLaurent多項式を$P_L(l, m)$とする。

以上のことから，次がすぐに得られる：

<u>定理 10.</u>

$$\Delta_L(t) = P_L(-i,\ i(t^{1/2} - t^{-1/2})),$$

$$V_L(t) = P_L(-it^{-1},\ i(t^{1/2} - t^{-1/2})).$$

§５．例

ここであげる例は，Jones多項式または２変数多項式が非常に有効であることを示すと同時にその限界をも示している。詳しくは［８］を参照してください。

整数 p,q に対して$K(p,q)$をFigure 2 のknotとする。但し両端は無限遠点に達しているものとする。$K(p,q)$ の性質をあげる。

性質１）　$K(p,q)$ は genus 2の fibered knot である。

性質２）　$K(p,q)$ は２つの８の字knotの一般化された寺阪－樹下 union ［１９］であり，従ってribbon (slice) knot である。

性質３）　$K(p,q)$ は 3-bridge knotである。

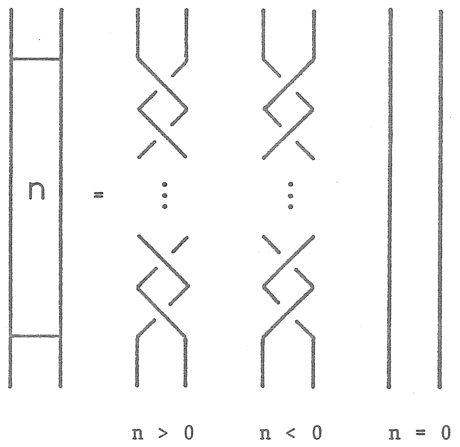
性質４）　２つの８の字knotの連結和である$K(0,0)$を 除いて$K(p,q)$ はhyperbolic knot である。

$K(p,q)$ の分類について調べる。次の性質５は，ちょっとしたpuzzle である。

性質５）　$K(p,q)$ と$K(q,p)$ は同値なknots である。

性質６）　$K(p,q)$ の Alexander行列は

$$\begin{bmatrix} t^2-3t+1 & (p-q)t \\ 0 & t^2-3t+1 \end{bmatrix}$$



n-full twists

Figure 1

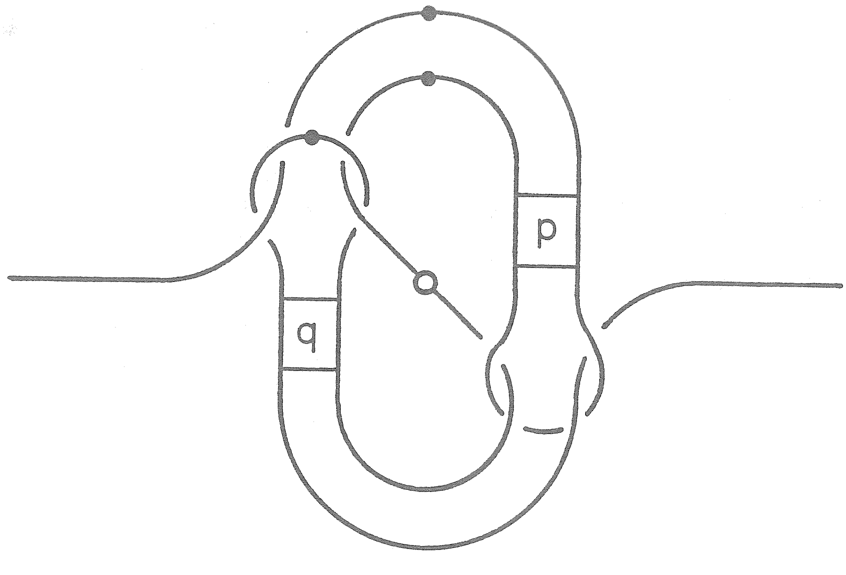


Figure 2

で。従って Alexander多項式は $(t^2-3t+1)^2$ である。また，K(p,q) とK(p',q') 同じ Alexander module をもつためには，$|p-q|=|p'-q'|$が必要十分である。

K(p,q) の２変数多項式 P(p,q) の計算を行なう。p回twistしているところの交差点の１つで§４の方法を適用すると

$$l^{-1}P(p,q)+lP(p-1,q)+m\mu=0.$$

ここで，$\mu=-(l+l^{-1})/m$ は２個の連結成分からなる自明なlinkの２変数多項式である。この式から

$$\begin{aligned}P(p,q)-1&=(-l^2)(P(p-1,q)-1)\\&=(-l^2)^p(P(0,q)-1)\\&=(-l^2)^p(P(q,0)-1)\\&=(-l^2)^{p+q}(P(0,0)-1)\end{aligned}$$

と計算ができる。但し，

$$P(0,0)=(m^2-l^2-l^{-2}-1)^2.$$

従って，

性質７） K(p,q) とK(p',q') 同じ Jonee多項式と２変数多項式をもつための必要十分条件は，$p+q=p'+q'$である。

性質５）－７）よりK(p,q) が完全に分類できる。すなわち，

K(p,q) は，Alexander moduleと Jones多項式の両方を用いて分類が可能となった。

性質8)　K(p,q) とK(p',q') 同値であための必要十分条件は，(p, q)=(p'，q')または(q'，p')である。

以上より次の定理をえる：

定理　11.　同じ2変数多項式をもつ，従って同じ Jonee多項式と Alexander多項式をもつが，相異なる Alexander moduleをもつ無限個のknots が存在する。これらは，hyperbolic, fibered, ribbon, genus 2 の 3-bridge knots である。

References

[1] Alexander, J. W., A lemma on systems of knotted curves, Proc. Nat. Acad., 9 (1923),93-95.

[2] Artin, E., Theory of braids, Ann. of Math., 48 (1947),101-126.

[3] Birman, J., Braids, links, and mapping class groups, Ann. of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press (1975).

[4] Conway, J. H., An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, Computational problems in abstract algebra, pp.329-358, Pergamon Press (1969).

[5] Hoste, J., A polynomial invariant of knots and links, preprint.

[6] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 12 (1985),103-111

[7] Jones, V. F. R., Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors, Japan-U.S. Conf. Proc., 1983.

[8] Kanenobu, T., Infinitely many knots with the same polynomial invariant, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[9] Kauffman, L. H., Formal knot theory, Math. Notes 30, Princeton Univ. Press, 1983.

[10] Kobayashi, K., linkのHoste多項式, 数理研講究録, 「計算機を利用した低次元トポロジーの研究」.

[11] Kobayashi, K., グラフと絡み目に関する多項式, 数理研講究録, 「グラフ理論とその応用」.

[12] Kobayashi. T., 絡み目理論の新しい不変量 ── 作用素環に由来するJones多項式とその一般化 ──, 数学.

[13] Lickorish, W. B. R.and Millett, K. C., Topological invariants of knots and links, preprint.

[14] Markov, A. A., Über die freie Aquivalenz geschlossener Zöpfe, Recueil Mathematique Moscou, 1 (1935), 73-78.

[15] Murakami, H., A recursive calculation of the Arf invariant of a link, preprint.

[16] Murakami, H., A note on the first derivative of the Jones polynomial, preprint.

[17] Murakami, H., A note on the second derivative of the Jones polynomial, preprint.

[18] Ocneanu, A., A polynomial invariant for knots: A combinatorial and an algebraic approach, preprint.

[19] Kinoshita, S. and Terasaka, H., On unions of knots, Osaka Math. J.,9 (1957),131-153.

On triangulated infinite-dimensional manifolds

筑波大・数　酒井　克郎

序

与えられた空間Eをmodelとするparacompact多様体を単にE－多様体と呼ぶ。$\mathbb{R}^n$－多様体，I^n－多様体が普通の（境界のない，あるいは境界をもつ）n次元多様体である。この有限次元多様体を自然に無限次元に拡張したものとして，可分Hilbert空間ℓ_2，$\mathbb{R}$の可算無限積s $(=\mathbb{R}^\omega)$やHilbert cube Q $(=I^\omega)$をmodelとしたℓ_2－多様体，s－多様体，Q－多様体が得られる。実は1966年にR.D. Anderson［1］により$\ell_2 \approx s$が証明されているのでℓ_2－多様体とs－多様体は同じものである（［2］参照）。

ℓ_2－多様体については，1970年にD. W. Henderson［12］によりOpen Embedding Theorem“可分ℓ_2－多様体はℓ_2の開集合と同相”とClassification Theorem“ℓ_2－多様体間のhomotopy equivalenceはhomeomorphismとhomotopic”が得られ，1981年にはH. Toruńczyk［27］

によりCharacterization“完備距離付け可能な可分ANRがl_2－多様体となる必要十分条件は，Qからのmapの列がimageの族がdiscreteとなるmapの列で近似できることである”が得られた（［5］参照）。［27］では，可分でないHilbert空間$l_2(A)$（および$l_2(A)$－多様体）のCharacterizationも与えられており，任意のFréchet空間（完備距離付け可能な局所凸線型位相空間）は同じdensityをもつHilbert空間と同相になることが示された。$l_2(A)$－多様体についてのOpen Embedding Theorem，Classification Theoremは［13］により示されている。

Q－多様体については，Triangulation Theorem“Q－多様体は多面体とQとの積と同相”Classification Theorem“多面体間のproper map $f: X \to Y$が（infinite）simple homotopy equivalence（infiniteはSiebenmannの意味）となる必要十分条件は$f \times id: X \times Q \to Y \times Q$がhomeomorphismにproper homotopicとなることである”がT. A. Chapmanによって1976年頃示され（［6］参照），1980年にはToruńczyk［26］によりCharacterization“locally compact ANRがQ－多様体となる必要十分条件は，Qからの2つのmapがimageが互いに

disjointとなるmapで近似できることである”が得られた（[28] 参照）。

距離付け可能ではないが$\mathbb{R}^n$やI^nの帰納的極限$\mathbb{R}^\infty$やI^∞をmodelとした$\mathbb{R}^\infty$-多様体，I^∞-多様体も有限次元多様体の自然な無限次元への拡張である。実は$\mathbb{R}^\infty \approx I^\infty$である（[11] 参照）。ここでは，この$\mathbb{R}^\infty$-多様体についての結果について述べる。

$\mathbb{R}^\infty$-多様体についても，l_2-多様体と同様にOpen Embedding TheoremやClassification Theoremが成立することがR.E. Heisey [9] によって1982年に示され，1984年にK. Sakai [20] によってCharacterizationが与えられた。[20] における技法はHeisey-Toruńczyk [11] の技法を発展させたものであるが，それによってOpen Embedding TheoremやClassification Theorem等の基本定理が非常に簡単に得られる。このことについて§1で述べる。$\mathbb{R}^\infty$-多様体は（弱位相をもつ）単体複体と同相になる。§2では，$\mathbb{R}^\infty$-多様体のCombinatorialな構造について述べる。可分Hilbert空間l_2の部分空間$l_2^f = \{(x_i) \in l_2 \mid x_i \neq 0$ となるiは有限個$\}$は集合$\bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$の$\mathbb{R}^\infty$と異なる位相付けであり，$l_2^f$-多様体

と$\mathbb{R}^\infty$-多様体は同じ集合の異なる位相付けと見なされる。この両者の関係について§3で述べる。以下，$\mathbb{R}^\infty$-多様体は可分であるとする。

§1

［20］で得られた$\mathbb{R}^\infty$-多様体の特徴付けについて，まず述べよう。空間Xが$\mathbb{R}^\infty$-多様体となるための必要十分条件は

（a） Xが有限次元compact距離空間の増大列の帰納極限と表わせ，

（b） 有限次元compact距離空間の対（A，B）に対し，BのXの中への任意のembeddingがBのAでのある近傍にまで拡張できる

ことである。$\mathbb{R}^\infty$がこれらの条件を満たすことはすぐわかる。しかも条件（b）では，Bの$\mathbb{R}^\infty$へのembeddingはAにまで拡張できる。条件（a），（b）を満たす空間が$\mathbb{R}^\infty$-多様体であることは，$\mathbb{R}^\infty$に開集合としてembedできることを示すことによって示される。これによってOpen Embedding Theoremも得られる。上の条件（b）は，“Xが有限次元compact距離空間に対するANEとなる”こと

と次の条件で置き換えられる。

(c) 有限次元compact距離空間の対(A, B)に対し，BのXの中への embedding は map としてAにまで拡張できれば，embedding としてもAにまで拡張できる。

$\mathbb{R}^\infty$-多様体は，この条件より強い次の性質を持つ。

(c*) $f: A \to X$を有限次元compact距離空間AからXへの map とし，Aの閉集合Bへの制限$f|B$がBの embedding となっているものとすると，任意のXの open cover $\mathcal{U}$に対し，Aの embedding $g: A \to X$でBを止めてfと$\mathcal{U}$-homotopic となるものが存在する。

この性質を用いると，Classification Theorem が非常に簡単に示せる。この証明に covering control を行なえば，Homeomorphism Approximation Theorem "$\mathbb{R}^\infty$-多様体間の fine homotopy equivalence は near-homeomorphism" が得られ，Corollary として Stability Theorem "$\mathbb{R}^\infty$-多様体は，$\mathbb{R}^\infty$との積をとっても元と同相" が得られる。Heisey [9] の Open Embedding Theorem，Classification Theorem の証明は，l_2-多様体の証明を手本にしたもの

で，Stability Theorem が鍵となる。しかし，Stability Theorem の証明は l_2－多様体で用いた技法が適用できなかったので苦労している。（［7］,［8］参照。）

空間 X の閉集合 A について，id：X → X が map f：X → X＼A で近似できるとき，A を Z-set という。これは，l_2－多様体，Q－多様体では非常に重要で，infinite deficiency を特徴付ける概念である。A を l_2－多様体（Q－多様体）X の閉集合とするとき，homeomorphism $h：X \to X \times l_2$（$h：X \to X \times Q$）で $h(A) \subset X \times \{0\}$ となるものが存在する必要十分条件は A が X の Z-set となることである。この Z-set の infinite deficiency を用いて，l_2－多様体（Q－多様体）X の Z-set に関する Unknotting Theorem "X の Z-set 間の homeomorphism f：A → B は id と (proper) homotopic ならば X 全体の homeomorphism に拡張でき，それは id と ambient-invertible isotopic である" が Anderson-McCharen［4］（Anderson-Chapman［3］）によって得られている。R^∞－多様体では，Z-set は infinite deficient でない［16］。しかし，infinite deficient な閉集合に関する Unknotting Theorem は V.T.Liem［17］によって示された。［21］では D-set

の概念が導入され[20]における技法によりD-setに関するUnknotting Theoremが示せる。空間Xの閉集合AがD-setであるというのは次の条件を満たすものである。

(d) Xのcompact部分集合の対(C, D)に対しえ $i: C \subset X$ がembedding $h: C \to X$ で $h|D = id$ となり $h(C \setminus D) \subset X \setminus A$ となるもので近似できる。

D-setにUnknotting Theoremを用いて，$\mathbb{R}^\infty$-多様体ではD-setがinfinite deficiencyを特徴付ける概念であることがわかりinfinite deficient閉集合に関するUnknotting Theoremが得られる。

詳細については論文[20]，[21]を参照，また概観については[19]を参照されたい。

§2.

R. E. Heisey [10]は $\mathbb{R}^\infty$ の開集合間の $\mathbb{R}^\infty$-p.l. mapを定義し，微分多様体に習ってp.l. $\mathbb{R}^\infty$-多様体を定義した。$\mathbb{R}^\infty$ の開集合間のmap $f: U \to V$ について，Uの中の任意のcompact多面体Cに対し，$f(C) \subset V \cap \mathbb{R}^n$ となるnをとり，$f|C: C \to V \cap \mathbb{R}^n$ が普通の意味でp.l.となるとき，fを $\mathbb{R}^\infty$-p.l.であるという。p.l. $\mathbb{R}^\infty$-多様体間

の$\mathbb{R}^\infty$-p.l. mapや$\mathbb{R}^\infty$-p.l. isomorphismは微分多様体間のdifferential mapやdiffeomorphismと同様に定義する。このp.l.$\mathbb{R}^\infty$-多様体について$\mathbb{R}^\infty$-p.l. Hauptvermutung "互いに同相(homotopic)なp.l.$\mathbb{R}^\infty$-多様体は$\mathbb{R}^\infty$-p.l.同型" が、K.Sakai[22]によって示された。$\mathbb{R}^\infty$-多様体のOpen Embedding Theoremにより "任意の$\mathbb{R}^\infty$-多様体はp.l.$\mathbb{R}^\infty$-構造を持ち，それは唯一つにかぎる" ことがわかる。

$\mathbb{R}^\infty$は三角形分割可能であるので$\mathbb{R}^\infty$-多様体もそうである。すなわち，$\mathbb{R}^\infty$-多様体は弱位相を持つ単体複体と同相である。これによりp.l.$\mathbb{R}^\infty$-構造とは違った別のCombinatorialな構造が考えられる。可算無限充満複体(∞-単体)をΔ^∞で表わす。単体複体Kについて，各頂点vにおける星状体st(v,K)がΔ^∞と組み合せ同値(すなわち，互いに同型な分割を持つ)のとき，Kを組み合せ∞-多様体と呼ぶ。Sakai[23]により$\mathbb{R}^\infty$-多様体のCombinatorial Triangulation Theorem "$\mathbb{R}^\infty$-多様体は組み合せ∞-多様体によって三角形分割される"，組み合せ∞-多様体に関するHauptvermutung "互いに同相(homotopic)な組み合せ∞-多様体は組み合せ同値"

が示された。また，組み合せ∞－多様体は$\mathbb{R}^\infty$－多様体と類似な特徴付けをもつ。可算単体複体Kが組み合せ∞－多様体となる必要十分条件は

（e） compact多面体の対（C, D）に対し，Dの$|K|$の中への任意のp.l. embeddingがDのCでのあるcompact多面体近傍にまで拡張できる

ことである。これにより“可算単体複体とΔ^∞との積複体は組み合せ∞－多様体となる”ことがわかり，単体複体に関するStable Hauptvermutung“可算単体複体K，Lについて$|K| \approx |L|$（$|K| \sim |L|$）ならば，積複体$K \times \Delta^\infty$と$L \times \Delta^\infty$は組み合せ同値”が得られる。

組み合せ∞－多様体とp.l. $\mathbb{R}^\infty$－多様体の関係については，組み合せ∞－多様体は自然なp.l. $\mathbb{R}^\infty$構造でp.l. $\mathbb{R}^\infty$－多様体となり，p.l. $\mathbb{R}^\infty$－多様体は自然なp.l. $\mathbb{R}^\infty$－構造を持つ組み合せ∞－多様体と$\mathbb{R}^\infty$－p.l. 同型となるが，組み合せ∞－多様体間の自然なp.l. $\mathbb{R}^\infty$－構造に関する$\mathbb{R}^\infty$－p.l. 同型はかならずしも組み合せ同値とはかぎらない。

単体複体Kについて，“$|K|$が$\mathbb{R}^\infty$－多様体となるときKは組み合せ∞－多様体となるか？”あるいは，“$|K| \approx$

$\mathbb{R}^\infty$ならば K は Δ^∞ と組み合せ同値となるか?” という問題はまだ未解決である。

§3

序で述べたように，$\mathbb{R}^\infty$-多様体と ℓ_2^f-多様体は同じ集合の上の異なる位相付けと考えられる。両者はそれぞれ，弱位相と距離位相を持つ単体複体と同相（§2及び[14]参照）であり，単体複体 K に対して次のように予想される。

予想：$|K|$ が $\mathbb{R}^\infty$-多様体となる必要十分条件は $|K|_m$ が ℓ_2^f-多様体となることである。

ここで，$|K|$ は弱位相を持つ K の多面体，$|K|_m$ は距離位相を持つ K の多面体を表わす。

J. Mogilski [18] は ℓ_2^f-多様体を§1の条件(C^*)と“任意の compact set が strong Z-set になる”という性質を持つ σ-f.d. compact ANR として特徴付けた。ここで，空間 X の strong Z-set とは，id : X → X が map $f: X \to X$ で $\mathrm{cl}\, f(X) \cap A = \phi$ となるもので近似できるような X の閉集合 A のことである。また，有限次元 compact set の可算和となる空間を σ-f.d. compact という。

（§1で述べた$\mathbb{R}^\infty$-多様体の特徴付けは、Mogilskiのこの特徴付けが動機付けとなった。） このMogilskiの特徴付けを用いて，"$|K|$が$\mathbb{R}^\infty$-多様体となれば$|K|_m$はℓ_2^f-多様体となる"ことが，[25]において示されたが，この逆についてはまだ証明が得られていない。

単体複体 K について，$id : |K| \to |K|_m$ は fine homotopy equivalence となる（[24]参照）。そこで，$h : \varinjlim X_n \to Y$ を有限次元compact距離空間の増大列の帰納極限から距離空間への1対1上への fine homotopy equivalence とするとき，$\varinjlim X_n$ が$\mathbb{R}^\infty$-多様体となる必要十分条件はYがℓ_2^f-多様体となることであると予想されるが，この予想は成立しない。すなわち，$\mathbb{R}^\infty$からℓ_2^f-manifoldとはならないσ-f.d.compact ARへの1対1上への fine homotopy equivalence と，$\mathbb{R}^\infty$-多様体とはならない有限次元compact ARの帰納極限からℓ_2^fへの1対1上への fine homotopy equivalence が[25]において構成された。反例の構成には[5]，[15]の例を利用する。

参考文献

[1] R.D. Anderson, Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. AMS 72, (1966), 515–519.

[2] R.D. Anderson & R.H. Bing, A completely elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. AMS 74, (1968), 717–792.

[3] R.D. Anderson & T.A. Chapman, Extending homeomorphisms to Hilbert cube manifolds, Pacific J. Math. 38, (1971), 281–293.

[4] R.D. Anderson & J.D. McCharen, On extending homeomorphisms to Fréchet manifolds, Proc. AMS 25, (1970), 283–289.

[5] M. Bestvina, P. Bowers, J. Mogilski & J. Walsh, Characterization of Hilbert space manifolds revisited, preprint.

[6] T.A. Chapman, Lectures on Hilbert Cube Manifolds, CBMS Regional Conf. Series in Math. no. 28, AMS, Providence, R.I., 1976.

[7] R.E.Heisey, Manifolds modelled on $\mathbb{R}^\infty$ or bounded weak-* topologies, Trans. AMS 206, (1975), 295-312.

[8] ———, An example on normal covers, Topology Proc. 2 (1977), 161-167.

[9] ———, Manifolds modelled on the direct limit of lines, Pacific J. Math. 102 (1982), 47-54.

[10] ———, Embedding piecewise linear $\mathbb{R}^\infty$-manifolds into $\mathbb{R}^\infty$, Topology Proc. 6 (1981), 317-328.

[11] R.E.Heisey & H.Toruńczyk, On topology of direct limits of ANR's, Pacific J. Math. 93 (1981), 307-312.

[12] D.W.Henderson, Infinite-dimensional manifolds are open subsets of Hilbert spaces, Topology 9 (1970), 25-33.

[13] ———, Corrections and extensions of two papers about infinite-dimensional manifolds, Gen. Top. Appl. 1 (1971), 321-327.

[14] D.W. Henderson & J.E. West, Triangulated infinite-dimensional manifolds, Bull. AMS 76 (1970), 655-660.

[15] J.P. Henderson & J.J. Walsh, Examples of cell-like decompositions of the infinite-dimensional manifolds σ and Σ, Topology Appl. 16 (1983) 143-154.

[16] V.T. Liem, An unknotting theorem in Q^∞-manifolds, Proc. AMS 82 (1981), 125-132.

[17] ———, On infinite deficiency in $\mathbb{R}^\infty$-manifolds, Trans. AMS (to appear).

[18] J. Mogilski, Characterizing the topology of infinite-dimensional σ-compact manifolds, Proc. AMS 92 (1984), 111-118.

[19] K. Sakai, Manifolds modeled on the direct limits of Euclidian spaces and Hilbert cubes, A survey, 数理解析研究所講究録 509 (1984) 51-60.

[20] ———, On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds, Topology Appl. 18 (1984), 69-79.

[21] ———, On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds, II : Infinite deficiency, Tsukuba J. Math. 8 (1984), 101–118.

[22] ———, Each $\mathbb{R}^\infty$-manifold has a unique piecewise linear $\mathbb{R}^\infty$-structure, Proc. AMS 90 (1984), 616–618.

[23] ———, Combinatorial infinite-dimensional manifolds and $\mathbb{R}^\infty$-manifolds, preprint.

[24] ———, Fine homotopy equivalences of simplicial complexes, preprint.

[25] ———, On topologies of triangulated infinite-dimensional manifolds, preprint.

[26] H. Toruńczyk, On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds, Fund. Math. 106 (1980), 31–40.

[27] ———, Characterizing Hilbert space topology, Fund. Math. 111 (1981), 247–262.

[28] J. J. Walsh, Characterization of Hilbert cube manifolds : An alternate proof, preprint.

Controlled surgery theory

城西大 理　山崎 正之

§1. 序

XをENR(=Euclidean Neighborhood Retract) n次元ホモロジー多様体(i.e. $H_*(X, X-p; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-0; \mathbb{Z})$ for $\forall p \in X$)としよう。次はEdwardsの有名な定理である：

定理1　XはさらにDDP(= Disjoint Discs Property)をみたし、$n \geqq 5$とする。このときn次元多様体Mからの任意のCE写像　$f: M \longrightarrow X$　は同相写像で近似できる。

このfをXのresolutionとよぶ。つまりENR n次元ホモロジー多様体($n \geqq 5$)が本当の多様体であるためにはDDPをみたし、resolutionを持てばよい。ここでDDPとは、任意の連続写像$i, j: D^2 \longrightarrow X$が互いに交わらない像を持つように近似できることをいう。またCE写像とはproperでcell-likeな写像のことをいう。§2でCE写像のある特徴づけをのべるので、ここでは"cell-like"

の定義はしない。

さて、本題のcontrolled surgeryとは、次の定理(?)を証明するためにF. Quinnが用いた、geometric topology版の手術理論である。

定理(?)2 ([4], [5]) すべてのENR ホモロジー多様体(次元 ≧4)はresolutionを持つ。

これが正しければ、定理1により、DDPを持つホモロジー多様体(次元≧5)は自動的に多様体となり、5次元以上の多様体の特徴づけが得られる。上で 定理(?) と書いたのは、Quinn自身により証明の誤りがみつけられ、この原稿を書いている時点では、定理2はまだ「予想」であるからだ。

この講演では、まず与えられたdegree 1 normal map $M \to X$ がresolutionとbordantであるための障害がcontrolled L-group とよばれる群の中に定まることを述べる。但しその障害が[4]で主張されているように消えるかどうかという問題にはふれない。次に、このcontrolled L-groupを少し改変したcontrolled $L^{-\infty}$-groups

を用いて、poly-(finite or cyclic) groups の普通の L-群（Wall 群）を rational に計算する。

§2. controlled equivalence.

CE 写像の特徴づけをするために、ε-homotopy の概念を説明する。K を位相空間、X を距離空間、$p: K \to X$ を proper な写像とする。p を control map とよぶ。ε を正数とする。ホモトピー $H: Z \times [0,1] \to K$ において $\mathrm{diam}(p \circ H(z \times [0,1])) < \varepsilon$ が各 $z \in Z$ に対して成立するとき、H は $p^{-1}(\varepsilon)$-homotopy であるという。また連続写像 $f: Z \to K$ に対して、連続写像 $g: K \to Z$, $p^{-1}(\varepsilon)$-homotopy $f \circ g \simeq 1_K$, および $(p \circ f)^{-1}(\varepsilon)$-homotopy $g \circ f \simeq 1_Z$ が存在するとき、f は $p^{-1}(\varepsilon)$-equivalence という。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$p^{-1}(\varepsilon)$-equivalence であるような $f: Z \to X$ を p-controlled equivalence とよぶ。$K = X$ で $p = 1_X$ のとき、これらは単に、ε-homotopy, ε-equivalence, そして、controlled equivalence とよばれる。ENR における CE 写像は、Lacher により次のように特徴づけられた（[3]）：

定理3. Z, X は metric ENR とする。このとき、

$f: Z \to X$ が CE $\Leftrightarrow$ $f: Z \to X$ が proper な controlled equivalence

X を ENR n 次元ホモロジー多様体とする。今、かりに多様体 M^n からの degree 1 normal map $f: M \to X$ があったとしよう。普通の手術理論はこの f が（simple な）ホモトピー同値写像に bordant であるための障害を与える。我々が興味を持っているのは、単なる simple なホモトピー同値写像ではなく、controlled equivalence である。（controlled equivalence は、X がコンパクトなら、自動的に simple なホモトピー同値写像である。）f が controlled equivalence に bordant であるための障害を調べるのが、controlled surgery theory である。普通の手術理論で用いる代数的な道具にすべて、X における control を導入してやればよい。以下にその結果をまとめると：

control map $p: K \to X$ が与えられたとき、controlled L-group $L_*(X; p)$ が定義される。これは p に関して natural であり、特に、図式

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K \arrow[d] \\
X \arrow[r] & pt.
\end{tikzcd}
$$

は準同型 $L_*(X;p) \to L_*(pt;K \to pt.)$を与える。$L_*(pt;K \to pt.)$では、1点の上でコントロールを行っており、これは結局何のコントロールも持たないのと同じであり、実は $L_*(pt;K \to pt.) \cong L_*(\pi_1 K)$である。

定理4. XをENR n次元ホモロジー多様体, $f: M^n \to X$をn次元多様体M^nからの degree 1 normal map とすると、$\sigma(f) \in L_n(X;1_X)$が定まり、$n \geq 5$ならば

fが controlled equivalence に bordant $\Leftrightarrow \sigma(f) = 0$.

もちろん、$\sigma(f)$の $L_n(X;1_X) \to L_n(\pi_1 X)$ による像は普通の手術のための障害となる。

$\sigma(f)$は、fがε_i-equivalence と bordant であるための"障害"(但し、$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots \to 0$)の"列"として定義される。実際、$f$が上のような$\varepsilon_i$に対し、$\varepsilon_i$-equivalence $f_i: M_i \to X$と次々にbordantであれば、Quinnの end theorem により、(M_i, f_i)の極限が存

在し、それが controlled equivalence となる。

ここでは、$L_*(X;p)$, $O(f)$ の定義を述べる余裕はないので、§3で、control のはいった代数学の初歩を記して、あとは読者の想像におまかせしたい。興味ある人は [6] [9] などを参考にしてほしい。

§3. controlled algebra.

Kを位相空間とする。次が、$\mathbb{Z}\pi_1K$-自由加群（基底つき）の代わりに、我々が用いるものである。

定義 K上の <u>geometric module</u> とは集合Sと、写像 $f: S \to K$ の対をいう。Sの元を<u>生成元</u>とよぶ。

もし、$\alpha: \tilde{K} \to K$ が Kの covering space とすると、fによるαのひきもどし $\tilde{S}(\to S)$ を考えることにより、$\tilde{K}$上の geometric module $\tilde{f}: \tilde{S} \to \tilde{K}$ を得る。αの covering translations の群をπとかくと、$\tilde{S}$によって生成される自由$\mathbb{Z}$加群 $\mathbb{Z}[\tilde{S}]$ は自然にSを生成元とする自由$\mathbb{Z}\pi$-加群 となる。

(例) LをCW複体, $f: L \to K$ を写像とする。nを固定しよう。Lの各n-cell e_i^n の中心を O_i^n とかく。$S = \{O_i^n\}$ とし、f のSへの制限を同じfでかくことにすれば $f: S \to K$ は、K上の geometric module を定める。これを $C_n(L)$ とかくことにする。

次に geometric modules の間の morphism を定義する。

定義. $f: S \to K$ から、$f': S' \to K$ への morphism とは、±の符号のついたK上の道の和 $\sum(\pm)\rho$ である。但し各 $\rho: [0,1] \longrightarrow K$ には"始点" $s \in S$ と"終点" $s' \in S'$ が定まっており、$\rho(0) = f(s)$, $\rho(1) = f'(s')$ が成りたつ。和の中に異符号の同じρが2つあるときは取り去っておくとする。なお合成は、道の合成によって行う。

(例) [つづき] L, $f: L \to K$ を前と同じとする。各n-cell e_i^n のはりつけ写像 $S^{n-1} \to L^{(n-1)}$ は各(n-1)-cell e_j^{n-1} の中心 O_j^{n-1} に transverse であると仮定しよう。はりつけ写像と O_j^{n-1} との各交点1つにつき、O_i^nとその

交点をe^n_i内で"まっすぐ"にむすぶ道ρ'をとる。$\rho = f \circ \rho'$とすればρはK内の道となる。ρの"始点"を0^n_i, "終点"を0^{n-1}_jと定める。また符号は対応する交点の符号とする。$\sum(\pm)\rho$を∂とかく。∂は$C_n(L)$から、$C_{n-1}(L)$へのmorphismである。$(C_*(L), \partial)$をLのgeometric chain complexとよぶ。注意するのは：∂^2は一般に0（"empty" morphism）とならない。morphismの中にあらわれる道たちを、始点、終点を止めたホモトピーによってかえることを、morphismのホモトピーとよんで、$\sim$とかけば、$\partial^2 \sim 0$である。

ここで、距離空間Xを登場させよう。$p : K \to X$をcontrol mapとする。K上のgeometric modulesの間のmorphismに対して、その中にあらわれる道ρのpによるXでの像の直径のmaxを考えることにより、そのmorphismの「大きさ」が定まる。同様にしてgeometric chain complexの「大きさ」も、∂たちの「大きさ」、$\partial^2 \sim 0$のホモトピーの「大きさ」などから定めることができる。

練習問題. 1. 2つの geometric chain complexes の間の "chain equivalence" の「大きさ」を定義せよ。

2. "geometric module の上の quadratic form が ε-bordant to 0" ということを定義せよ。

§4. $L^{-\infty}$-群.

Ranicki により定義された $L_*^{-\infty}(\pi)$ [8] は $L_*(\pi)$ と modulo 2 torsion で同型であり、しかも splitting に関する exact sequence などでよいふるまいを示し、systematic な計算が行いやすい。

G を poly-(finite or cyclic) group とする。このとき、G を discrete cocompact subgroup として含むような、virtually (connected and solvable) Lie group L が存在する。[1] K を L の maximal compact subgroup とすると G は $K \backslash L = \mathbb{R}^n$ に作用する。各 $y \in \mathbb{R}^n$ に対して isotropy subgroup G_y は有限である。$\mathbb{R}^n/G \ni [y]$ に対して、G_y の conjugacy class は well-defined である。

定理5 $H_*(\mathbb{R}^n/G ; \cup \mathbb{L}^{-\infty}(G_y)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong L_*^{-\infty}(G) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

但し、Gが 2torsionを持たないときは、$\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は不要である。

$\mathbb{L}^{-\infty}(*)$ は $L_*^{-\infty}(*)$ をホモトピー群とするspectrumで、$\cup$はその$\mathbb{R}^n/G$上での"和"を表わす。

証明のスケッチをのべる。EGをGが自由に作用するcontractible complexとし、Gの$EG\times\mathbb{R}^n$への対角的作用を考える。$\mathbb{R}^n$への射影は、写像p: $(EG\times\mathbb{R}^n)/G\to\mathbb{R}^n/G$ を誘導する。$p^{-1}([y])$の基本群がG_yである。つまり、$\cup\mathbb{L}^{-\infty}(G_y)$はpの各ファイバーに$\mathbb{L}^{-\infty}(\ )$を作用させて作ったex-spectrumである。これを$\mathbb{L}^{-\infty}(p)$とかくことにする。さて、Lのidentity componentの交換子群をL'とかく。すると、$(L'K)\backslash L=\mathbb{R}^m$ $(m>0)$ はユークリッド空間とisometricであり、Gは$\mathbb{R}^m$にisometryで作用する。$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$の中でのGの像を$\Gamma$とかくと、$\Gamma$は結晶群である。$\mathbb{R}^n/G\longrightarrow\mathbb{R}^m/\Gamma$を q とかこう。定理5は、次の定理と帰納法により、容易に証明できる。

定理6 [10] $H_*(\mathbb{R}^m/\Gamma;\mathbb{L}^{-\infty}(qp))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\cong L_*^{-\infty}(G)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

ここで、$\mathscr{g}p:(EG\times\mathbb{R}^n)/G\to\mathbb{R}^m/\Gamma$は、$K(G,1)$から距離空間への写像であることに注意しよう。しかも$\mathbb{R}^m/\Gamma$の距離は$\mathbb{R}^m$から自然に誘導されるものである。左辺のホモロジー群はcontrolled $L^{-\infty}$-group $L_*^{-\infty}(\mathbb{R}^m/\Gamma;\mathscr{g}p)$と同型であることがわかっている([9])。また前にのべたように、右辺の$L_*^{-\infty}(G)$は、$L_*^{-\infty}(pt;(EG\times\mathbb{R}^n)/G\to pt.)$と同型である。従って定理6の内容を一口でいえば、「$(EG\times\mathbb{R}^n)/G$の上のものは、必ず$\mathbb{R}^m/\Gamma$の上で大きさをコントロールできる」ということである。これの証明には[2]と同様にDressのinductionを用いる。

$(EG\times\mathbb{R}^n)/G$は$K(G,1)$だからBGとかくことにしよう。定理5の系として次を得る([9]参照)。

系. 図式

$$\begin{array}{ccccc} BG & \xrightarrow{1} & BG & \xrightarrow{1} & BG \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ BG & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{R}^n/G & \longrightarrow & pt \end{array}$$

により導かれる写像

$$H_*(BG;\mathbb{L}^{-\infty}(1)) \longrightarrow H_*(\mathbb{R}^n/G;\mathbb{L}^{-\infty}(p)) \longrightarrow \underset{\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}{\overset{\cong}{}} L_*^{-\infty}(G)$$

の合成は、$\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$で split injective である。

なお、定理5の algebraic K-theory 版をQuinnが announce している([7])。

文　献

[1] L. Auslander and F. E. A. Johnson, "On a conjecture of C. T. C. Wall", J. London Math. Soc. (2), 14 (1976), 331–332.

[2] F. T. Farrell and W. C Hsiang, "The Whitehead group of poly-(finite or cyclic) groups", J. London Math. Soc. (2), 24 (1981), 308–324.

[3] R. C. Lacher, "Cell-like mappings, I", Pacific J. Math. 30 (1969), 717–731.

[4] F. Quinn, "Resolutions of homology manifolds, and the topological characterization of manifolds", Invent. math. 72 (1983), 267–284.

[5] ________, "Ends of maps, II", J. Diff. Geom.

17 (1982), 503–521.

[6] ________, "Controlled algebra and topology", Lecture notes (in preparation).

[7] ________, "Algebraic K-theory of poly-(finite or cyclic) groups", Bull. AMS, 12 (1985), 221–226.

[8] A. Ranicki, "Algebraic L-theory II: Laurent extensions", Proc. London Math. Soc., (3) 27 (1973), 126–158.

[9] M. Yamasaki, "L-groups of crystallographic groups", (preprint).

[10] ________, "L-groups of virtually nilpotent groups", (preprint).

Stable and unstable equivalences of G-manifolds

川久保 勝夫

§1 序.

与えられた多様体に何らかの意味で近いものを考察するというのが，手術理論を始めとして微分位相幾何学のよくやる方法である。

我々はG多様体のGホモトピー同値，接Gホモトピー同値，単純Gホモトピー同値，接単純Gホモトピー同値等の条件とG多様体の安定同値との関係を考察することにする。これらの言葉の定義はやがて明らかにされるであろう。

本稿を通じてGはコンパクトLie群とする。

我々の最初の結果は次の定理である。

定理 1. M_1, M_2 を閉G多様体, $f: M_1 \to M_2$ をG写像とする。そのとき, 次の同値が成り立つ.

f は G ホモトピー同値である.

$\Longleftrightarrow$ G ベクター・バンドル $\pi_i : E_i \to M_i$ $(i=1,2)$ と G微分同相 $\bar{f} : E_1 \longrightarrow E_2$ が存在して, 次の図式は G ホモトピー可換である.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & E_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

注意 二つの G ホモトピー同値な G 多様体が G作用を忘れて微分同相であっても, G 微分同相とは限らない [9].

G ホモトピー同値を強めて次の概念を導入する。

定義 M_1, M_2 を G 多様体とする。写像 $f: M_1 \longrightarrow M_2$ が接G ホモトピー同値であるとは, f は G ホモトピー同値かつ 次の条件を満たす G表現空間 V が存在するときに言う。

$$T(M_1) \oplus \underline{\underline{V}} \cong f^* T(M_2) \oplus \underline{\underline{V}}$$

ここで $T(M_i)$ は M_i の接Gベクター・バンドル，$\underline{\underline{V}}$ は自明なGベクター・バンドル $M_1 \times V \longrightarrow M_1$，$\cong$ はGベクター・バンドルの同型を表わす。

次の定理は〔10〕でアナウンスしたものである。

<u>定理 2.</u>　M_1, M_2 を閉G多様体，$f : M_1 \longrightarrow M_2$ をG写像とする。そのとき，次の同値が成り立つ。

f は接Gホモトピー同値である。

$\Longleftrightarrow$ G表現空間 V とG微分同相 $\bar{f} ; M_1 \times V \longrightarrow M_2 \times V$ が存在して，次の図式はGホモトピー可換である。

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times V & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2 \times V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

ここで $M_i \times V$ 上のG作用は対角作用で与え，$\pi ; M_i \times V \longrightarrow M_i$ は射影を表わす。

$\pi : E \to M$ をコンパクトG多様体M上の微分可能Gベクター・バンドルとする。E上のG不変Riemann計量$\langle\ ,\ \rangle$を一つとり固定する。そのとき

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \qquad v \in E$$

とおき，$r > 0$に対して次の記号を導入する。

$$E(r) = \{ v \in E \mid \|v\| \leqq r \}$$
$$SE(r) = \{ v \in E \mid \|v\| = r \}$$
$$\mathring{E}(r) = E(r) - SE(r).$$

単純Gホモトピー理論は，Illman [5] [7]，[8]，Hauschild [4]，Rothenberg [14]，Anderson [1]，Araki [2] 等により展開されている。

Gが有限群のとき，G多様体は一意的G三角形分割をもつから，コンパクトG多様体の単純Gホモトピー型が矛盾なく定義される。

最近，Matumoto-Shiota [11] により，このことはGがコンパクトLie群の場合に，次の様に拡張されている。

〝G三角形分割の一意性は分らないが，単純Gホ

モトピー型そのものは矛盾なく定義される。"

定理3　M_1, M_2 を閉G多様体，$f : M_1 \longrightarrow M_2$ をG写像とする。そのとき，次の同値が成り立つ。

f は単純Gホモトピー同値である。

$\Longleftrightarrow$ Gベクター・バンドル $\pi_i : E_i \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$ とG微分同相 $\bar{f} : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$ が任意の $r>0$ に対して存在して，次の図式はGホモトピー可換である。

$$\begin{array}{ccc} E_1(r) & \xrightarrow{\bar{f}} & E_2(r) \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} .$$

次の定理は［10］で予想したものである。

定理4［3］M_1, M_2 を閉G多様体，$f : M_1 \longrightarrow M_2$ をG写像とする。そのとき，次の同値が成り立つ。

f は接単純Gホモトピー同値である。

$\Longleftrightarrow$ Gの直交表現空間 V とG微分同相 $\bar{f} : M_1 \times V(r) \longrightarrow M_2 \times V(r)$ が任意の $r>0$ に対して存在して，次の図式はGホモトピー

可換である。

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times V(r) & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2 \times V(r) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

ここで $\pi : M_i \times V(r) \longrightarrow M_i$ は射影を表わす。

定理3，定理4の証明と次の定理の証明は類似である。

<u>定理5</u> [3] (<u>Stable equivariant s-cobordism theorem</u>). $(W; X, Y)$ を G s-コボルディズムとする。即ち，$(W; X, Y)$ は G h-コボルディズムであり，かつ同変トーション $\tau_G(W, X) = 0$ とする。そのとき G の表現空間 V が存在して，任意の $r > 0$ に対して $W \times V(r)$ と $X \times I \times V(r)$ が G 微分同相になる。特に $X \times V(r)$ と $Y \times V(r)$ は G 微分同相である。ここで I は閉区間 $[0, 1]$ を表わし，その上の G 作用は自明なものとする。

<u>注意</u> Rothenberg [14] は equiv. s-cob. th. と名付けた定理を述べているが，殆んど意味を無さ

ない定理である。

最後に，定理5において stable の条件は除けないことを示す次の定理を挙げよう。

<u>定理6</u>　同変 h コボルディズム定理及び同変 s コボルディズム定理は一般には成り立たない。

§2　<u>同変無限くり返し法</u>.

Mazur [12], [13] の無限くり返し法を次の様に modify する。

<u>定義</u>　$\mathcal{P}_1$ を次の条件を満たす G 写像からなる集合を表わす。　M_i を（境界を許す）コンパクト G 多様体（$i=1,2$）

(1)　$f: M_1 \longrightarrow M_2$　：G 埋め込み

(2)　$f(\mathrm{Int}\, M_1)$　：　M_2 の開集合

(3)　$f(M_1) \subset \mathrm{Int}\, M_2$.

G 多様体と G 写像からなる列

S : $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$, $f_i \in \mathcal{P}_1$

に対して，S の injective limit を $\lim S$ と書

くことにする。 $\lim S$ には自然に多様体の構造と G 作用が導かれて，G 多様体になることは容易に分る。

本講では次の二種類の列を取り扱う。

$$S(f_1, f_2) : M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

$$f_i \in \mathcal{P}_1$$

$$S(f) : M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \to \cdots$$

$$f \in \mathcal{P}_1$$

そのとき，次の様におく

$$X(f_1, f_2) = \lim S(f_1, f_2)$$
$$X(f) = \lim S(f).$$

次の補題は定義から直接的に示される。

<u>補題 7</u>. $X(f_2 \cdot f_1) \cong X(f_1, f_2) \cong X(f_2, f_1) \cong X(f_1 \cdot f_2)$. ここで $\cong$ は G 微分同相を表わす。

<u>定義</u> M をコンパクト G 多様体とする。$\mathcal{P}_2(M)$ を次の条件を満たす G 写像 $f : M \to M$ からなる集合を表わす。

(1) $f \in \mathcal{P}_1$

(2) $f \underset{G}{\simeq} id$ （$\underset{G}{\simeq}$ は G ホモトピック）

(3) $f' \in \mathcal{P}_1$, $f' \underset{G}{\simeq} id$ を満たす任意の $f' : M \to M$ に対して、次の図式を可換にする G 微分同相 $\alpha : M \to M$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ & M \end{tikzcd}$$

<u>補題 8</u>　M はコンパクト G 多様体で $\mathcal{P}_2(M) \neq \phi$ とする。　$f \in \mathcal{P}_1$ および $f \underset{G}{\simeq} id$ を満たす $f : M \to M$ に対して、

$$X(f) \cong \mathrm{Int}\, M$$

が成り立つ。ここで $\cong$ は G 微分同相を表わす。

<u>補題 9</u>　閉 G 多様体 M 上の G ベクター・バンドル $E \to M$ に対して、G の表現空間 V が存在して、任意の $r > 0$ に対して、

$$\mathcal{P}_2((E \oplus \underline{V})(r)) \neq \phi$$

が成り立つ。ここで $\underline{V}$ は自明な G ベクター・バンドル $M \times V \to M$ を表わす。

定理 1 の証明は補題 7, 8, 9 を合せて示される。定理 2 は定理 1 よりただちに示される。

§3 G多様体の分解定理

G多様体を考察するときに大変に役立つ分解定理を述べよう。

コンパクトLie群Gの部分群Hに対して、(H)はHの共役類を表わすことにする。Gの閉部分群の共役類の集合に半順序を次の様に入れる。

$$(H_1) \geq (H_2) \iff \exists g \in G,\ H_1 \supset g H_2 g^{-1}$$

WをコンパクトG多様体とする。$x \in W$におけるアイソトロピー群をG_xと書く。即ち

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

Gの部分群Hに対して

$$W^H = \{ x \in W \mid G_x \supset H \}$$

$$W(H) = \{ x \in W \mid (G_x) = (H) \}$$

とおく。

Wがコンパクトであるから、アイソトロピー群の共役類は有限個である。それを

$$\{ (H_1), (H_2), \cdots, (H_k) \}$$

としよう。この番号づけを次の条件を満たすようにする：

" $(H_i) \geqq (H_j) \Longrightarrow i \leqq j$ "

さて，角をもつコンパクト G 多様体 W_i から なる filtration

$$W = W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k$$

であって

$$\{(G_x) \mid x \in W_i\} = (H_i) \cup (H_{i+1}) \cup \cdots \cup (H_k)$$

を満たすものを次の様に考える。

仮定から (H_1) は極大共役類であるから，$W(H_1)$ はコンパクトな G 不変部分多様体になる。（一般の $W(H_i)$ はそうならないことに注意せよ）。$W(H_1)$ の W における法バンドル ν_1 と管状近傍を同一視する。ν_1 に G 不変 Riemannian 計量を入れ

$$W_2 = W - \overset{\circ}{\nu}_1(1)$$

とおく。W_2 はコンパクト G 多様体で角をもつ。しかも

$$\{(G_x) \mid x \in W_2\} = (H_2) \cup (H_3) \cup \cdots \cup (H_k)$$

を満たしている。

今，filtration

$$W = W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_i$$

であって，W_jは角をもつコンパクトG多様体かつ

$$\{(G_x)\mid x\in W_j\}=(H_j)\cup\cdots\cup(H_k)$$

が任意の$j\leqq i$に対して成り立つとする。

(H_i)は共役類の集合

$$\{G_x\mid x\in W_i\}$$

の中で極大であるから，$W_i(H_i)$はW_iのコンパクトG不変部分多様体である。$i=1$のときと同様に$W_i(H_i)$のW_iにおける法バンドルν_iと管状近傍と同一視し，ν_i上にG不変Riemannian計量を入れて

$$W_{i+1}=W_i-\nu_i(1)$$

とおく。W_{i+1}は角をもつコンパクトG多様体であって

$$\{(G_x)\mid x\in W_{i+1}\}=(H_{i+1})\cup\cdots\cup(H_k)$$

を満たす。こうして帰納的構成が終る。

以上をまとめておこう。

<u>定理10</u>　WをコンパクトG多様体，$(H_1),\cdots(H_k)$をWに現われるアイソトロピー群の共役類の集合とする。但し"$(H_i)\geqq(H_j)\Rightarrow i\leqq j$"を満たすように番号づけをする。そのとき角をもつ

G多様体 M_i と Gベクター・バンドル $\nu_i \longrightarrow M_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ が存在して

$$M_i(H_i) = M_i \underset{G}{\cong} W(H_i)$$

と分解

$$W = \nu_1(1) \cup \nu_2(1) \cup \cdots \cup \nu_k(1)$$

が得られる。さらに

$$W_i = \nu_i(1) \cup \nu_{i+1}(1) \cup \cdots \cup \nu_k(1)$$

とおくと,

$$\{(G_x) \mid x \in W_i\} = (H_i) \cup (H_{i+1}) \cup \cdots \cup (H_k)$$

および

$$W_i(H_i) \cong M_i$$

が成り立つ。

§4 G-deformation retract の excision theorem.

$(W; X, Y)$ を G h コボルディズムとする。即ち $\partial W = X \cup Y$ であって包含写像 $X \to W$, $Y \to W$ は G ホモトピー同値である。このとき X, Y は W の G-deformation retract になる。

§3 で G 多様体の分解を与えた。そのときの記号をそのまま W に適用する。そして

$$X_i = X \cap W_i$$

とおく。

一般には X_i は W_i の G deformation retract にならない。つまり G-deformation retract の excision theorem は一般には成り立たない。定理 6 はその様な例で与えられる。

定理 3, 4, 5 の証明の Key point は stable にすると G deformation retract の excision theorem が成り立つことを示すことにある。

<u>定理 11</u> [9] 任意の $(H_i) < (H_j)$ を満たす組 H_i, H_j に対して

$$\min_{\mu}\{\dim (W^{H_i})_{\mu}\} - \max_{\lambda}\{\dim (W^{H_j})_{\lambda}\} \geq \dim G + 3$$

を満たすとする。ここで $(W^{H_i})_{\mu}$ は W^{H_i} の各連結成分を表わす。$(W^{H_j})_{\lambda}$ も同様である。

そのとき X_i は W_i の G-deformation retract である。さらに $\nu_i \mid X_i(H_i)$ は

$\mathcal{U}_i$ の G-deformation retract である。

定理 3, 4, 5 の状況では この定理の仮定が check される。

もう一つの key point は equivariant Whitehead torsion の excision theorem である。同じ notation のもとに

定理 12. [3] 定理 11 の仮定のもとに

$$\tau_G(W, X) = 0 \implies \tau_G(W_i, X_i) = 0.$$

注意　Rothenberg の結果が殆んど意味をなさないと注意した理由は、定理 11, 定理 12 の形を示すことなく、その結果を仮定しているからである。

参考文献

[1] D. R. Anderson, Torsion invariants and actions of finite groups, Michigan Math. J., 29 (1982), 27-42.

[2] S. Araki, Equivariant simple homotopy theory, Lecture note 1983.

[3] S. Araki and K. Kawakubo, to appear.
[4] H. Hauschild, Äquivariante Whiteheadtorsion, manuscripta math., 26 (1978), 63-82.
[5] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad, Sci. Fenn. Ser. A1 588 (1974), 1-44.
[6] S. Illman, Smooth equivariant triangulations of G-manifolds for G a finite group, Math. Ann., 233 (1978), 199-220.
[7] S. Illman, Actions of compact Lie groups and equivariant Whitehead torsion, Preprint, Purdue Univ., June 1983.
[8] S. Illman, Equivariant Whitehead torsion and actions of compact Lie groups, Preprint, Univ. of Helsinki.
[9] K. Kawakubo, Compact Lie group

actions and fiber homotopy type, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 295 – 321.

[10] K. Kawakubo, talk at Topology symposium, Daisanbiru Osaka, February 1984.

[11] T. Matumoto and M. Shiota to appear.

[12] B. Mazur, The method of infinite repetition in Pure Topology: I, Ann. of Math., 80 (1964), 201 – 226.

[13] B. Mazur. The method of infinite repetition in pure topology: II Stable applications, Ann. of Math., 83 (1966), 387 – 401.

[14] M. Rothenberg, Torsion invariants and finite transformation groups. Proc. Symp. Pure Math., 32 (1978), 267 – 311.

C^1 級葉層構造の存在について

東大教養　坪井 俊

§0. C^r 級葉層構造.

$(m+n)$ 次元多様体 X 上の余次元 n (次元 m) C^r 級葉層構造 $\mathcal{F}$ は次のような $(\{U_\lambda\}, f_\lambda, g_{\lambda\mu})$ で与えられる。

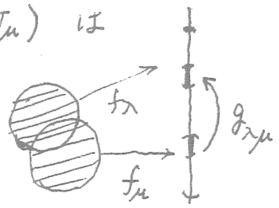
$\{U_\lambda\}$ は X の開被覆、

$f_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は (C^∞) submersion、

$g_{\lambda\mu} : f_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow f_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ は

C^r 級微分同相で

$f_\lambda = g_{\lambda\mu} f_\mu$ 　をみたす。



f_λ のファイバーのつながりあったものを $\mathcal{F}$ の葉というが、葉の接束は葉層構造 $\mathcal{F}$ の接束 $T\mathcal{F} \subset TX$ を定める。そこで、

『接束の部分束 $E \subset TX$ は葉層構造を定めるか？』

という問題が出てくるが、これは局所的な問題であり完全積分可能条件（Frobeniusの定理）として解決されている。位相幾何の立場で葉層構造の存在を考えるときは、次のような問題が自然である。

問題。接束の部分束 E は葉層構造の接束にホモトープか？

ホモトープの意味は、部分束として、すなわち、TX に付随するGrassmann束への切断としてホモトープという意味である。たとえば、S^3 のHopf fibrationのfiberの法平面束は、いたるところ積分不可能（接触構造）であるが、Reeb葉層の接束にホモトープである。一般に余次元1の部分束は C^∞ 級葉層構造の接束にホモトープである（Thurston）。

しかし、次の定理は接束の部分束で C^r 級葉層構造の接束にホモトープでないものの存在を示している。

Bottの消滅定理。X の接束の部分束 E が C^2 級葉層構造の接束にホモトープならば $E^\perp = TX/E$ の特性類 $\in H^i(X;R)$, $i > 2n$ は零である。

さて、標題の C^1 級の葉層について次の結果を得た。

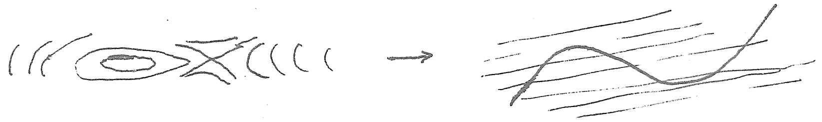
定理. 任意の部分束 $E \subset TX$ に対し、C^1級葉層構造 $\mathcal{F}$ が存在し、$T\mathcal{F} \simeq E$ となる。

C^0 級のときは Mather-Thurston により同様のことが示されている。

§1. Haefliger-Thurston の存在定理

葉層構造の存在を示すためには、まず特異点を許した葉層構造をつくり、次にその特異点をとりのぞくという方法が考えられる。そのような特異点をもつ構造として Γ_n^r 構造を考える。これは葉層構造を与える $(\{U_\lambda\}, f_\lambda, g_{\lambda\mu})$ において、$f_\lambda : U_\lambda \longrightarrow R^n$ を連続写像とし、貼り合わせの整合性を保証するために、$g_{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}$ という条件を付加して定義される。

たとえば、余次元 n 葉層構造 $(X', \mathcal{F}')$ を連続写像 $f : X \longrightarrow X'$ により引き戻すと Γ_n 構造 $(X, f^*\mathcal{F}')$ が得られる。実は Foliated microbundle あるいは Graph constuction を考えれば、Γ_n^r 構造は常に葉層構造の引き戻し $(X, f^*\mathcal{F})$ になっている。従って Γ_n^r 構造 $\mathcal{H}$ に対し、その法束 $\nu\mathcal{H}$ が（$f^*(\nu\mathcal{F})$ として）得られるが、一般には $\nu\mathcal{H}$ は TX の部分束ではない。



Haefliger-Thurston の定理。 X 上の Γ_n^r 構造 $\mathcal{H}$ と束単射 $\nu\mathcal{H} \hookrightarrow TX$ が存在するならば、X 上の余次元 n, C^r 葉層構造 $\mathcal{F}$ で $TX/T\mathcal{F} = \nu\mathcal{F} \simeq \nu\mathcal{H}$ となるものがある。

ふりかえってみると、§0 の Bott の定理は、$\mathcal{H}$ が Γ_n^2 構造ならば、$\nu\mathcal{H}$ の特性類 $\in H^i(X;\mathbb{R})$, $i>2n$ は零、というものである。

この存在定理以後、残念なことに、葉層構造は多様体から離れてしまったようである。普通の葉層構造は、あまりにありふれていて、それから多様体の性質を決めることは困難である。もっと高級な葉層構造の存在を議論すべきではないだろうか。

§2. Mather-Thurston の定理

さて、問題は与えられた部分束 $E \subset TX$ の法束 $E^\perp = TX/E$ を法束とする Γ_n^r 構造の存在である。これは $E^\perp$ の分類写像 $BE^\perp : X \longrightarrow BO_n$ を Γ_n^r 構造の分類空間 $B\Gamma_n^r$ へ持ち上げるという問題になる。

$$\begin{tikzcd} & B\Gamma_n^r \arrow[d, "B\nu"] \\ X \arrow[r, "BE^\perp"'] \arrow[ur, dashed] & BO_n \end{tikzcd}$$

ここで、$B\Gamma_n^r$ は普遍 Γ_n^r 構造 ω をもつ空間で、X 上の Γ_n^r 構造 $(X, \mathcal{H})$ は分類写像 $B\mathcal{H} : X \longrightarrow B\Gamma_n^r$ により $\mathcal{H} = (B\mathcal{H})^*\omega$ と書かれ、これにより、$\{(X,\mathcal{H})\}/\simeq$ と $[X; B\Gamma_n^r]$ が一対一に対応する。$B\nu$ は ω の法束を分類する写像である。

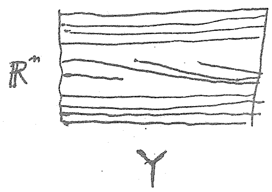
ここで Bott の定理を述べれば、$(B\nu)^* : H^\tau(BO_n; \mathbb{R}) \longrightarrow H^\tau(B\Gamma_n^r; \mathbb{R})$ ($r \geqq 2$, $\tau > 2n$) は零写像、となる。

我々の定理のためには、$B\Gamma_n^1 \longrightarrow BO_n$ のホモトピーファイバー $B\overline{\Gamma}_n^1$ が可縮であることを示せばよい。$B\nu : B\Gamma_n^r \longrightarrow BO_n$ のホモトピーファイバー $B\overline{\Gamma}_n^r$ について次の定理がある。

Mather-Thurston の定理。

$$H_*(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega^n B\overline{\Gamma}^r_n;\mathbb{Z}).$$

ここで Ω^n は n 重閉道空間。位相群 G に対し、G^δ を G に離散位相を入れたものとすると、$B\overline{G}$ は $BG^\delta \longrightarrow BG$ のホモトピーファイバーである。$B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c(\mathbb{R}^n)$ は次のような葉層積構造の分類空間である。位相空間 Y と $\mathbb{R}^n$ の直積 $Y\times\mathbb{R}^n$ 上の積葉層 $\{Y\times\{x\};x\in\mathbb{R}^n\}$ を有界な部分で perturb して得られる $Y\times\mathbb{R}^n$ 上の $\{\{y\}\times\mathbb{R}^n;y\in Y\}$ に横断的な葉層。



$B\overline{\Gamma}^1_n$ が可縮ということは、$B\overline{\mathrm{Diff}}^1_c(\mathbb{R}^n)$ が acyclic であるということである。

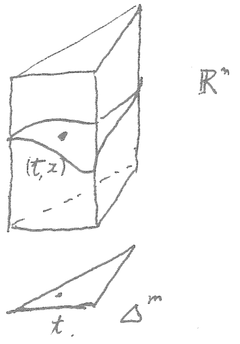
§3. 葉層積の分類空間のホモロジー

$G=\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$ としよう。$B\overline{G}$ は次のように構成される。$S_*(G)$ を G の特異単体複体とする。G は $S_*(G)$ に右から自由に作用する。これは特異 m 単体 $\sigma:\Delta^m \longrightarrow G$,

$g\in G$ に対し $\sigma g:\Delta^m\longrightarrow G$ を $(\sigma g)(t)=\sigma(t)g$ $(t\in\Delta^m)$ とするものである。このG作用は $S_*(G)$ の境界作用子と可換で $S_*(G)/G$ は半単体的複体となる。$B\overline{G}$ は、これの実現 $|S_*(G)/G|$ として得られる。$\sigma:\Delta^m\longrightarrow G$ は Δ^m 上の葉層積 $\mathcal{F}_\sigma$ を定める。$\mathcal{F}_\sigma$ の $(t,x)\in\Delta^m\times\mathbb{R}^n$ を通る葉は

$\{(u,\sigma(u)\sigma(t)^{-1}(x));\ u\in\Delta^m\}\subset\Delta^m\times\mathbb{R}^n$

である。σ と σg は同じ葉層積を定める。このような単体上の葉層積を自然に貼りあわせて $B\overline{G}$ が得られる。



$B\overline{G}$ の位相を考える上で、葉層積の台，ノルムが重要な役割をはたす。

有限複体 Y 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積 $\mathcal{F}$ の台 $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$ とは $\mathbb{R}^n$ の閉集合 K で「$Y\times(\mathbb{R}^n-K)$ で葉層は積葉層、すなわち葉は水平である」ようなもののうち最小のもののことである。

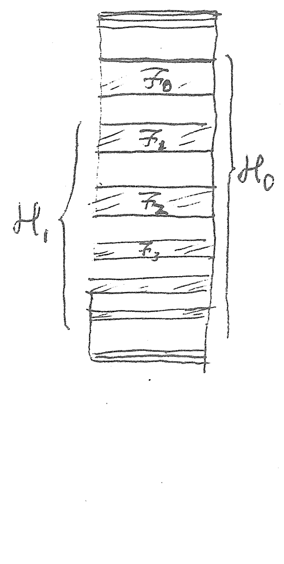
$\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq r<\infty)$ の C^∞ 多様体構造に対して C^∞ であるような特異 m 単体 $\sigma:\Delta^m\longrightarrow\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$ に対して、葉層積 $\mathcal{F}_\sigma$ のノルムは $\sigma(u)\sigma(t)^{-1}$ の $u=t$ に

おける接写像 $X_t : T_t\Delta^m \longrightarrow \mathfrak{X}^r_c(R^n)$ のノルムの上限 $\sup_t \|X_t\|$ として得られる。このノルムは $\mathcal{F}$ をファイバー方向に $f : x \longmapsto ax+b$ $(a\in R_+^*,\ b\in R^n)$ でうつすとき、$\|(id\times f^{-1})^*\mathcal{F}\|_r = a^{1-r}\|\mathcal{F}\|_r$ となる。ここで、$r=1$ のときノルムが変化しないことが、我々の定理が成立する理由の一つである。

$B\bar{G}$ のホモロジーは半単体的複体 $S_*(G)/G$ に付随するチェイン複体のホモロジーである。$B\bar{G}$ が acyclic を示すためには、このチェイン複体において恒等写像と自明写像の間のチェインホモトピーを低い次元から構成しなければならない。そのための基本的なアイデアは次のようなものである。

$B\bar{G}$ の1つのサイクルは有限複体 Y 上の葉層 R^n 積 $\mathcal{F}$ で表現される。$\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$ とホモローグな Y 上の葉層 R^n 積 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots$ で次をみたすものをつくる。

Int Supp $\mathcal{F}_i$ は disjoint かつ
$\bigcup$ Int Supp $\mathcal{F}_i$ は有界,
$\|\mathcal{F}_i\|_1 \longrightarrow 0$ $(i\to\infty)$,
$\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_{i-1} = \partial\mathcal{G}_i$ となる
$\mathcal{G}_i$ の"形状"が同じである。



次に、Int Supp $\mathcal{F}_i$ が disjoint であることをつかって、
$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots$ をよせあつめた葉層積 $\mathcal{H}_0$ と
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots$ をよせあつめた葉層積 $\mathcal{H}_1$ をつくる。このとき、($B\overline{G}$ が Y の次元の半分まで acyclic ならば) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_1$ にホモローグである。一方で、上の g_i を使って $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_1$ はホモローグであることを示し、$\mathcal{F}$ が零にホモローグであることがいえる。

§4. C^1 級微分同相群

上のような構成を C^1 級葉層積に対して行なうためには、次の定理が必要となる。

Denjoy－Pixton の定理。任意の正整数 N に対して、次のような準同型 $\Phi : \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ が存在する。ある開球 $U \subset \mathbb{R}^n$ で $\Phi(\lambda)(U)$, $\lambda \in \mathbb{Z}^N$ が disjoint となる。

T^2 上の Denjoy flow の存在とこの定理の準同型の存在

は根源的には同じものであり、C^1級微分同相群に特有の現象である。実際 $\mathrm{Diff}^2_c(\mathbb{R}^1)$ に対しては Kopell の定理により、上のような Φ は $N \geqq 2$ に対しては存在しない。

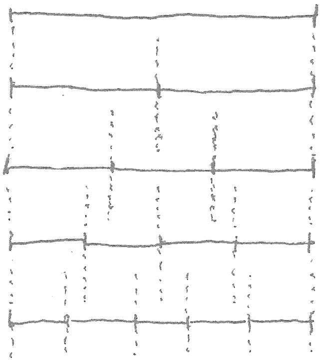
予想. $r \geqq 2$, $N \geqq n+1$ で上のような Φ は存在しない。

さて、次の構成が $B\overline{\mathrm{Diff}}{}^1_c(\mathbb{R}^n)$ が acyclic を示すための鍵となるものである。

$N = m+1$ に対して、$\Phi : \mathbb{Z}^{m+1} \longrightarrow \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ と U をとる。m 次元立方体 $\square^m$ 上の U に台をもつ葉層 $\mathbb{R}^n$ 積 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ をとる。$\square^m$ を各方向に $(l+1)$ 等分して、$(a_1, \cdots, a_m)$ $(a_i = 0, 1, \cdots, l)$ という index のついた $(l+1)^m$ 個の立方体に分割する。このとき、その上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積も分割される。次に $(a_1, \cdots, a_m)$ 番目の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積を $\Phi(l, a_1, \cdots, a_m)$ の作用により、$\Phi(l, a_1, \cdots, a_m)U$ に台をもつ $\square^m$ 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積にうつす。これら全体が、$\mathcal{F}_l$ をつくる。$\mathcal{F}_l$ は $\bigcup_{a_i} \Phi(l, a_1, \cdots, a_m)U$ に台をもつ葉層 $\mathbb{R}^n$ 積である。よって $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}_l$ $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ は disjoint である。

また、分割したものをふたたび$\square^m$上の葉層積とみることにより、ノルムは減小し、Ξの作用でノルムはほとんど変わらない（そういうΞを構成できる）から、$\ell \to \infty$のとき $\|\mathcal{F}_\ell\|_1 \longrightarrow 0$ である。

$\mathcal{F}_\ell$ と $\mathcal{F}_{\ell+1}$ の関係は次のようなものである。



$\mathcal{F}_{\ell+1}$は $\mathcal{F}_\ell$ をうまく2^m個に分割して、その断片に$\Xi(1, e_1, \cdots, e_m)$ $(e_i = 0, 1)$を作用させ、行った先で、$2^{m'}$ $(m' \leq m)$個の断片をはりあわせたものになっている。

これらのことにより各立方体上の葉層$\mathbb{R}^m$積に対し、§3で述べたような構成ができる。とくに、$m=1$、あるいは、各$\mathcal{F}_\ell$が、T^m上の葉層積に対応するサイクルであれば、$H_1 = 0$ あるいは、トーラスがホモロジー的に0であることがいえる。

$B\overline{\mathrm{Diff}_c}(\mathbb{R}^m)$がacyclic であることを示すためには、上の構成をつかって $B\overline{\mathrm{Diff}_c}(\mathbb{R}^m)$ のチェイン複体上で、恒等写像と自明写像の間のチェインホモトピーを構成するのである。チェインの計算はかなり面倒である。

文献

坪井. 葉層構造と微分同相の群のホモロジー，数学36 (1984) 320−343.

Tsuboi: On the homology of classifying spaces for foliated products. Advanced Studies in Pure Math. 5, to appear.

Tsuboi: in preparation.

Orbifold 上の self-dual connection

東大 理　古田 幹雄

§1 序 (a survey)

Yang-Mills connection (Yang-Mills potential) は、物理学に由来する概念であり、ある変分問題の解として定義される connection である。Mを compact Riemannian manifold, P を M 上の, Lie group G を structure group とする principal bundle とする時、P 上の connection A に対するその変分問題とは

$$\delta \int_M \| F(A) \|^2 \, d\,vol = 0$$

で与えられる。ここで、F(A) は A の curvature, $\|\cdot\|$ は、G の Lie alg. $\mathfrak{g}$ の固定された G 不変 metric と、M の Riemannian metric とから決まる norm である。

M が、4次元で向きづけられている時には、A が Yang-Mills connection であるための次の十分条件が存在する。

(1) self-dual connection　　　$*F(A) = F(A)$

(2) anti-self-dual connection　$*F(A) = -F(A)$

ただし、$*$ は、Hodge の star operator であり、

4次元の manifold の上では，(vector bundle に値を持つ) 2-form $F(A)$ を，再び 2-form に写す。

現在，Yang-Mills (self-dual, anti-self-dual) connection は，大別して，次の三方面から興味を引かれている。以下，M は 4次元で向きづけられているとする。

[1] <u>無限次元空間上の Morse theory</u> (がどこまで O.K か。)

特に，M を standard S^4 として，functional

$$A \longmapsto \int_M \| F(A) \|^2 \, dvol$$

を connection の gauge 同値類 (後述) のなす空間上で考える。([AJ], [BL], [T1], [T2])

[2] <u>holomorphic structure との関係</u>

M を Kähler surface とすると，anti-self-dual connection は，bundle に holomorphic structure を定める。([I]; [D1]) また，M が "self-dual" である時も "twistor construction" によって，holomorphic str. との対応関係がある ([AHS], [BO])

[3] <u>4 dim. differential topology への応用</u>

① (Donaldson [D2])

$G = SU(2)$, $c_2(P) = -1$, M simply

connected, positive definite intersection form を持つ。

$\Longrightarrow$ M の metric を適当にとると. ([FU])
self-dual connection の moduli space $\mathcal{M}$ は.
M と微分同相な境界を持つ自然な compactification $\overline{\mathcal{M}}$ を許し. $\overline{\mathcal{M}}$ は. $\mathbb{C}P^2$ の cone の頂点の形をした $\dim H_2(M)$ 個の特異点を除けば、smooth orientable な 5 dim. manifold.

$\Longrightarrow$ int. form $\cong \sum x_i^2$

② (Fintushel - Stern [FS1])

$G = SO(3)$, $\quad P \underset{SO(3)}{\times} \mathbb{R}^3 = L \oplus 1$.

$e(L)^2 = 2$ or $3 \quad \in H^4(M, \mathbb{Z})$

M は. pos. def. intersection form を持つ. $H_1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$

$\Longrightarrow$ M の metric を適当にとると. $\mathcal{M}$ は.
$\mathbb{C}P^m$ の cone の頂点の形をした $\mu(e(L))$ 個の特異点を除けば、smooth な compact $(2m+1)$-dim. singular manifold. ただし. $1+2m = 2e(L)^2 - 3$

$\mu(e(L)) = \frac{1}{2} \# \{ e \in H^2(M, \mathbb{Z}) \mid e^2 = e(L)^2, \ e \equiv e(L) \bmod 2 \}$

$\Longrightarrow$ $\mu(e(L))$: even. ($e(L)^2 = 2$ ならば上から直ちに出る。$e(L)^2 = 3$ の時には $\mathcal{M}$ に関する

情報を、もう少し使う。)

③ (Donaldson [D4])

$G = SU(2)$, $c_2(P) = -1$. M: simply connected, int. form $\cong -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\Longrightarrow$ Mのmetricを動かしながら、$M \times \mathcal{M}$ 上の "universal bundle" の特性類を考える。

$\Longrightarrow$ $H^2(M, \mathbb{R})$ の部分集合から $H^2(M, \mathbb{Z})$ の、ある性質を充たす写像として、Mの微分構造の不変量を得る。

④ (Donaldson [D3])

$G = SU(2)$, $c_2(P) = -2$. M: simply connected, int. form $\cong n E_8 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{M} \neq \phi$ ([T4]) の cohomology を考える。

$\Longrightarrow$ $n = 0$ (?)

③, ④ は、現在のところ筆者には詳細不明である。

Fintushel-Stern [FS2] は、巡回群作用がある場合に上記 [3] ② を考察し、応用として、$\mathbb{Z}$-homology 3-sphere のなす $\mathbb{Z}$-homology cobordism の群が、位数

無限大の元を持つことを示した。

ここでは、有限群作用のある場合の [3] ① を、少し拡張して考える。

§2 結果

有限個の特異点 $x_0, x_1, \cdots x_n$ を除いて smooth な singular manifold M が、次の条件を充たす時、その構造をこめて、"pseudofree orbifold" と呼ぶことにする： x_i の近傍は、ある有限群 G_i による、その有限次元実表現空間 V_i の商 $G_i \backslash V_i$ の、0 の近傍と同相であり、$x_i(0)$ を除いて微分同相である。ただし、G_i は $V_i - \{0\}$ に自由に作用するものとする。

（注、[F52] では、少し狭い class を指して "pseudo-free orbifold と呼んでいる。）

M 上の微分幾何的諸概念（orientability, form, bundle, Riemannian metric, connection etc）は、$M - \{x_0 \cdots x_n\}$ 上では普通の意味で与えられ、x_i の近傍では、V_i の 0 の近傍の上での G_i 不変な対象として与えられたものの、両立的な組によって自然に定義さ

れる。

以下、Mを、4 dim, oriented closed pseudo free orbifold とする。ひとつの自然な問がある。

<u>問題</u>　Mの homotopy type は、特異点の type に如何なる制限を与えるか？

<u>例1</u>　$\pi_1(M) = 1$, intersection form は positive definite だが、$\sum x_i^2$ の形ではないとする。この時、Donaldson の定理（cf §1 【3】①）によって、Mは、少なくとも1個の特異点を持つ。

<u>例2</u>　（Fintushel - Stern [FS2]）　$M = S^1 \backslash Q$, Qは smooth 5-manifold, S^1 action は smooth で、isotropy $\mathbb{Z}/a_1, \cdots, \mathbb{Z}/a_n$（$a_1, \cdots a_n$ は pairwize に互いに素）を持つ有限個の exceptional orbits を除いて free, さらに、次を仮定する。

(1)　Mの intersection form は positive definite, $H_1(M, \mathbb{R}) = 0$ ＋ cohomological な技術的仮定

(2)　Qへの S^1 action から決まる Euler class $e \in H^2(M - \text{sing. pts})$ に関するある仮定。

この時，Mの特異点のまわりの情報だけから決まる整数 R（eにも依存する。）が存在して，$R \leqq 0$。

主定理を述べるために、singularity を特徴づける次の言葉を用意する。

<u>定義</u>　singular point x_i (または V_i への G_i の作用) が、次の同値な性質を充たす時、"positive" [resp. "negative"] と呼ぶ。

(1)　G_i は、$\Lambda_-^2 V_i = \{u \in \Lambda^2 V_i \mid *u = -u\}$ [resp. $\Lambda_+^2 V_i = \{u \in \Lambda^2 V_i \mid *u = u\}$] の各元を動かさない。

(2)　向きを保つ $\mathbb{R}$-同型 $V_i \cong \mathbb{H}$ が存在し、G_i の元の作用は、$Sp(1)$ の元の左から [resp. 右から] の作用として表現される。

(3)　向きを逆にする [resp. 保つ] $\mathbb{R}$-同型 $V_i \cong \mathbb{C}^2$ が存在し、この同一視によって $G_i \subset SU(2)$ となる。

<u>主定理</u>　M は simply connected で、positive definite intersection form を持つとする。singular point x_0 が、次の仮定を充たすとせよ。

(1)　x_0 は positive

(2)　G_0 は非巡回群 かつ $\#G_0 = \max_i \#G_i$

(3)　$H^1(M - x_0, \mathbb{Z}_2) = 0$

この時 次のような singular point x_1 が存在する。

(i) x_1 は negative.

(ii) $\# G_1 = \max_i \# G_i \; (= \# G_0)$

注意 $\pi_1(M) = 1$. intersection form pos. def とすると、M が nonsingular な場合を除いて、M のすべての singular point が positive であることはあり得ない。実際、もしあったとすると、positive singular point をすべて blow up して、smooth oriented な manifold M' であって、$\pi_1(M') = 1$, int. form が pos. def. かつ non standard なものを得るが、これは Donaldson の定理に反する。(cf. 例1)

isotropy group G_i の位数が、singular point の複雑さを測るひとつのめやすであると考えれば、主定理は、最も複雑な singular point の中に positive なものがあって、ある付帯条件を充たすならば、同程度の複雑さを持つ negative な singular point が存在しなくてはならないことを主張している。

例3 G を $Sp(1)$ の非巡回有限部分群とする

と，G は，$\mathbb{H}\cup\{\infty\}$ に，左からかけ算で作用する。$M = G \backslash \mathbb{H}\cup\{\infty\}$ は $0, \infty$ を singular point とする pseudo free orbifold の構造が入り，主定理の仮定を充たす。0 は positive，∞ は negative である。

<u>例 4</u>　主定理の仮定から，G_0 の非巡回性を除くことができないことを示す例。$S^5 = \{(z_i)\in\mathbb{C}^3 \mid \sum |z_i|^2 = 1\}$ への S^1 作用を

$$(z_0, z_1, z_2) \xrightarrow[t]{} (t^5 z_0, t^3 z_1, t^{-2} z_2)$$

によって定め，$M = S^1 \backslash S^5$ を考える。singular point は，次の3点である。

$x_0 = (1, 0, 0)$ ： 近傍 $\cong L(5, 1)$ 上の cone.

$x_1 = (0, 1, 0)$ ： 〃 $\cong L(3, -1)$ 〃

$x_2 = (0, 0, 1)$ ： 〃 $\cong L(2, 1)$ 〃

lens space の cone の頂点は，$L(p, 1)$ に対しては，positive，$L(p, -1)$ に対しては negative な singular point である。M は，$G_0 \cong \mathbb{Z}/5$ が巡回群であることを除いては，主定理の仮定を充たす。だが，他の isotropy group は $G_1 \cong \mathbb{Z}/3$，$G_2 \cong \mathbb{Z}/2$

であり、x_1, x_2 とも、negative ではあるが、isotropy group の位数の条件を満足しない。

§3 主定理の証明のあらすじ

M を simply connected で positive definite intersection form を持つ 4 dim, oriented closed pseudo free orbifold とし、前節の記号を用いる。

主定理の証明は、M 上の広義の bundle の上の広義の self-dual connection の moduli space の性質を用いてなされる。この節では、利用する広義の self-dual connection の定義と、moduli space の充たす性質をあげる。x_0 を positive singular point とせよ。

[1] 広義の $Sp(1)$ bundle P の定義

P は、V_0 上の G_0 同変 bundle と、$M - x_0$ 上の通常の bundle の組であって、x_0 を除くその近傍において ある両立条件を満たすものである。$V_0 \cong \mathbb{H}$, $G_0 \subset Sp(1)$ とみなし、V_0 上の G 同変 bundle P_0 を

$$P_0 = \tilde{v}_0 \times Sp(1) \amalg \mathbb{H} - \{0\} \times Sp(1) \,/\sim$$

$$\begin{array}{llll} G \ni g \downarrow & (x, p) & (x, p) & \\ & \downarrow & \downarrow & (x, p) \sim (x, (\frac{x}{|x|})^{-1} p) \\ P_0 \ni & (gx, gp) & (gx, p) & \end{array}$$

で定める．（ $\widehat{U}_0 (\subset \mathbb{H})$ ：0の近傍）。一方，$M - \{x_0\}$ の上の bundle P_1 を，$P_1 = M - \{x_0\} \times Sp(1)$ とおけば，x_0 を除く x_0 の近傍 $U_0 - \{x_0\}$，（$U_0 \cong G \backslash \widehat{U}_0$）において，次の同型が定まる。

$$\begin{array}{ccc} G \backslash P_0 |_{\widehat{U}_0 - \{0\}} \ni (x, p) & \mapsto (x, p) \in & P_1 |_{U_0 - \{x_0\}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \backslash \widehat{U}_0 - \{0\} & \xrightarrow[\text{diffeo}]{\cong} & U_0 - \{x_0\} \end{array}$$

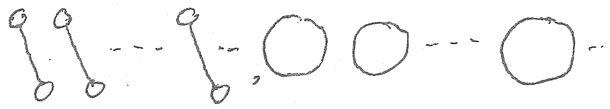
[2] P 上の gauge group，self dual connection．

前節で述べたように，M には（広義の）metric を定義でき，P 上では（広義の）connection を定義できる。同様に，P の gauge group を，identity を cover する bundle automorphism の拡張として，singular point のまわりの情報に，$\widehat{U}_i$ への G 作用と可換な（$\widehat{U}_i$ の identity を cover する）bundle automorphism を与えた両立的な対象の組として定義する。M の metric を固定すると，connection の self-duality を定義できる。self-dual connection 全体の集合を，gauge group で割った商を $\mathcal{M}$ と書き，self-dual connection の moduli space と呼ぶ。

[3] $\mathcal{M}$ の性質

$\mathcal{M}$ は一般には smooth structure を持つとはいえない。しかし、必要なら、$\mathcal{M}$ を定義する self-duality の方程式を"少し"摂動して、新たに得られる解空間を $\mathcal{M}'$ とすれば、次が成立する。

<u>命題 5.</u> $\mathcal{M}'$ は smooth 1-dimensional manifold structure を持つ。

$\mathcal{M}'$:  ,

主定理は、次の命題の帰結である。

<u>命題 6</u> $\#G_0 = \max_i \#G_i$ とすると、

(1) $\mathcal{M}'$ の各 end (i.e proper emb. $(0,1] \to \mathcal{M}'$) に対し、M の singular point x_j であって、

$$\#G_j = \max_i \#G_i \quad (= \#G_0)$$

となるものを対応させることができる。

(2) x_0 に対応する end が丁度 1 個存在する。

(3) $x_1 \neq x_0$ に対応する end が存在する時、x_1 は negative である。

<u>命題 6 $\Longrightarrow$ 主定理の証明.</u>

x_0 が対応する end を含む $\mathcal{M}'$ の component を

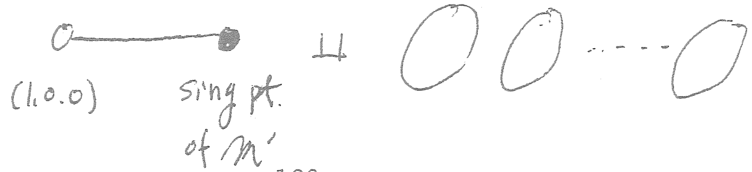
考える。それは open interval と同相であるから、反対側にもう一個の end があり、それに対応する singular point x_1 は、negative であり、$\#G_1 = \max_i \#G_i$ を充たす。 $\square$

<u>例 17</u>. 例 3 の $M = G \backslash \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ の場合。主定理の仮定を充たし、命題 5, 6 が成立する。今、$\mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^4$ の metric を standard なものにとっておくと、$\mathcal{M}$ 自身が smooth になり、$(0, \infty)$ と同相で、両端が、各々、positive な $0 \in M$ と negative な $\infty \in M$ とに対応する。

$\mathcal{M}$:

<u>例 8</u> 例 4 の $M = S^1 \backslash S^5$ の場合。主定理の仮定は、G_0 の非巡回性を除いて充たされている。G_0 の非巡回性は、命題 5 の証明につかわれ、この場合、$\mathcal{M}'$ は、closed interval の端点の形をした singular point を持ち得る。命題 6 はそのまま成立する。これから、

$\mathcal{M}'$:



§4 命題の証明のあらすじ

命題5の証明

$\mathcal{M}$ を摂動しても smooth になり得ない点は、P の reducible self-dual connection A (gauge group 作用の isotropy が、± 1 より大きくなる connection) によって代表される。A の holonomy group の closure は、

① $Sp(1)$ 全体ではない　$\because$ A: reducible

② discrete ではない　$\because$ P の topological type

③ $S^1 \subset Sp(1)$ ではない　$\because$ G_0 は非巡回群

④ $N_{Sp(1)}(S^1)$ ではない　$\because$ $H^1(M - x_0, \mathbb{Z}/2) = 0$

これは矛盾。$\dim \mathcal{M}'$ は、index theorem [Kw] から計算される。▨

命題6の証明

$\mathcal{M}$ の摂動は、compact subset を compact set に置きかえるので、$\mathcal{M}'$ と $\mathcal{M}$ の ends は一致する。収束部分列を持たない任意の $\mathcal{M}$ の点列に対し、その適当な部分列をとり、代表元の self-dual connection を適当にとると、M から有限個の点を除いたところでは C^∞-収束して self-dual な極限を持つ。$\# G_0 = \max_i \# G_i$ と仮定すると、Yang-Mills functional $\int_M \|F(A)\|^2 dvol$ を

考えることにより、除外点が丁度1点であり、isotropy group が、位数 $\max_i \# G_i \ (= \# G_0)$ を持つ singular point でなくてはならないことがわかる。$\mathcal{M}^{(1)}$ の各 end に、end内の点列に対する上の除外点を対応させる。((1) の ▨。) この議論は、本質的には Donaldson による。([D2])

x_0 に対応する end は Taubes [T3] の方法で構成される。x_0 に対応する end が構成されたものに限ることは、$\pi_1(M) = 0$ を使って Donaldson [D2] の議論を適用して得る。((2) の ▨)

x_0 以外の点 x_1 に対応する end が存在したとする。この時、G_1 space $S^4 = V_1 \cup \{\infty\}$ の上の、$c_2 = -1$ の $Sp(1)$ ($SU(2)$) bundle に G_1 作用が持ちあがり、

① $0 \in S^4$ における isotropy representation $G_1 \to Sp(1)$ は、trivial。

② standard metric に対して self-dual かつ、G_1-invariant な connection が存在する。

S^4 上の self-dual connection は分類されているので、①、② から、G_1 の表現空間 V_1 についての情報が得られ、それから、x_1 が negative とわかる。▨

§5 問題

4次元の topology に self-dual connection を応用しようとする際、point となると思われるのは、

問題　（解析的に定義される）self-dual connection の moduli space の end を、底空間の幾何学的情報を用いて表現せよ。——

Donaldson [D2], Fintushel - Stern [FS1] そして我々の主定理も、特別な bundle に対して上の問題を考える点が本質的であった。（§1 [3] ①, ②）

問題　$M \times \mathcal{M}$ 上の "universal bundle" の特性類を調べよ。——

これは、Donaldson [D3] [D4] による応用の論点であると思われる。（§1 [3] ③, ④）

問題　Donaldson の定理（§1 [3] ①）の仮定から、$\pi_1(M) = 0$ を除き、cohomological な条件（例えば $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$）によって置き換えられないか。——

Fintushel - Stern [FS1] の定理（§1 [3] ②）は、上の問の部分的解答と考えられる。3次元の $\mathbb{Z}$-homology cobordism への応用のためには、π_1 に関する仮定を

落とす必要があった。

最後に、我々の主定理に関連した問題をあげよう。

<u>問題</u>　主定理において、位数の等しい群 G_0, G_1 は、同型か ——

G_0 は、二面体群か、または陵多面体群である。G_1 は、それらの他に、巡回群となる可能性もある。

<u>問題</u>　M を pseudofree orbifold とする。M 上の、$c_2=-1$ の（通常の意味の）principal $SU(2)$-bundle の上の self-dual connection（広義の意味の）の moduli space の end はどうなっているか。特に、$\pi_1(M)=0$ intersection form pos def. の場合はどうか。——

M が smooth ならば、これは Donaldson [D2] の考えた bundle であり、end は $M\times(0,1]$ と微分同相である。（§1 [3] ①）M の singularity はどのように反映されるのかが、問題の意味である。それがわかれば、主定理よりも強い命題を主張できるかもしれない。

References

[A] M.F. Atiyah, The geometry of Yang-Mills field, Fermi Lectures, Scuola Normale Superiore, Pisa (1979)

[AB] M.F. Atiyah and R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surface, Phil. Trans. Roy. Soc. London (1983)

[AHS] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin and I.M. Singer, Self-duality in 4-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 362 (1978)

[AJ] M.F. Atiyah and J.D.S. Jones, Topological aspects of the Yang-Mills equations, Commum. Math. Phys. 61 (1978)

[BL] J.P. Bourguignon and H.B. Lawson, Jr., Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys. 79 (1981)

[BO] L.B. Bergery and T. Ochiai, On some generalization of the construction of twistor spaces, Global Riemannian Geometry, Ellis Horwood, 1984

[D1] S.K. Donaldson, Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. Lond. Math. Soc. to appear.

[D2] ________ , An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom. 18 (1983)

[D3] ________ , 4-manifolds with indefinite intersection form, Lecture at 1984 Arbeitstagung, Bonn.

[D4] ________ , The differential topology of complex surfaces, preprint.

[F] M. Furuta, Singular points of 4-orbifolds, in preparation.

[FS1] R. Fintushel and R. Stern, SO(3)-connections and the topology of 4-manifolds, preprint.

[FS2] ________ , Pseudofree orbifolds, preprint.

[FU] D. Freed and K.K. Uhlenbeck, Instanton and four manifolds, Springer-Verlag MSRI Series vol 1, 1984.

[I] M. Itoh, On the moduli space of anti self dual connections on Kähler surfaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ, vol 19, No. 1 (1983)

[K] F.C. Kirwan, The cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, Princeton U.P.

[Kw] T. Kawasaki, The index of elliptic operators over V-manifolds, Nagoya Math. J. vol 84 (1981)

[L] H.B. Lawson, Jr., The theory of gauge fields in four dimensions, Lecture notes for NSF-CBMS conference, Univ. of Calif. at Santa Barbara 1983.

[T1] C.H. Taubes, Stability in Yang-Mills theories, Comm. Math. Phys. to appear.

[T2] ________ ,Path connected Yang-Mills moduli spaces, U. C. Berkeley, preprint.

[T3] ________ , Self dual Yang-Mills connections on non self dual 4-manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982)

[T4] ________ , Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, J. Diff. Geom. 19 (1984)

[U1] K.K. Uhlenbeck, Connections with L^p bounds on curvature, Commun. Math. Phys. 83 (1982)

[U2] ________ , Removable singularities in Yang-Mills fields, Commum. Math. Phys. 83 (1982)

追加

[D5] S.K. Donaldson, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, preprint.

実有理関数の臨界点とHilbert第16問題

奈良女子大・理　石川 剛郎

実有理関数の位相型(特に，その臨界点の個数)とその零(zero locus)，極(polar locus)の対の(実部の)位相型との関係について，或る現象を見つけたので，そのことについて報告します．

zero locus，polar locus，およびその共通部分等は，実多項式の零点集合，すなわち実代数多様体(variety)(とくに，完全交叉)です．

実代数多様体の位相を調べる，というのは，所謂，Hilbert第16問題の前半であり，古来多くの興味深い研究があります(cf. §2)．

他方，実有理関数，あるいは一般に，実線型系(real linear system)，実代数関数，実代数写像の位相は単独の実代数多様体のそれよりも困難な対象です．その一般論として，写像の特異点論，実代数幾何がありますが，それをより豊かなものにするために，おもしろい現象を沢山発見していくことが必要だと思います．今回の

話が，その嚆矢の1つとなれば幸いです．

§1で，今回の話の essential な部分を説明します．§2で Hilbert 第16問題に関して知られている結果を概説します．§3で今回得られた結果を定式化します．§4た，定理の証明の outline を書きました．§5に今後の研究の展望を（やや無責任に）列挙してみました．詳しくは，References を御参照ください．

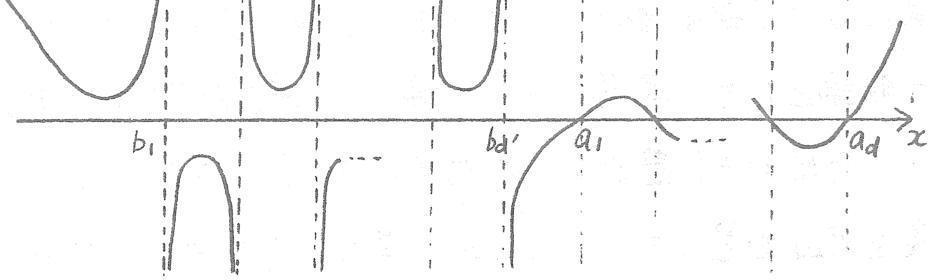
§1. Introduction

きわめて素朴な対象について，1つ observation をしてみます．

1°) 1変数実有理関数

$$h = \frac{f}{g} = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_d)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{d'})}$$

$(b_1 < \cdots < b_{d'} < a_1 < \cdots < a_d)$．たとえば $d > d'$ のとき，h のグラフは下図のようになります：

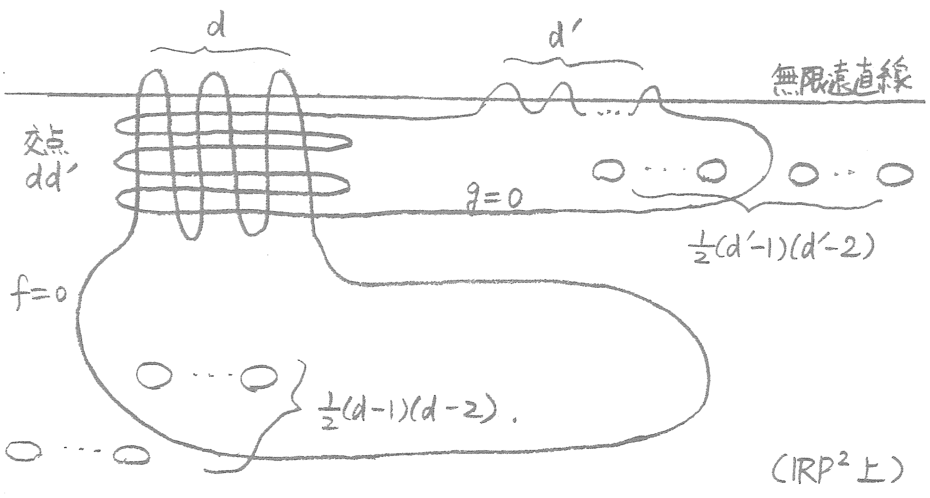


単に，Rolleの定理により，hの実臨界点の個数$s(h)$は$d+d'-1$以上となりますが，実は$\deg f=d$, $\deg g=d'$ + genericityのもと，$s(h)\leqq d+d'-1$であり，この例はそのmaximumをattainしています．zerosとpolesが"分離"しているというtopologicalな条件のみで，最大個数の実臨界点の存在が示せるわけです．

2°) このobservationを，今度は2変数実有理関数に対して考えてみます：

$$h=f(x,y)/g(x,y) \qquad (\deg f=d,\ \deg g=d').$$

このとき，zero locus $f=0$，polar locus $g=0$はそれぞれ平面曲線となります．この2つの平面曲線がどのようなtopological conditionを満たせば，多くの実臨界点をもつでしょうか？　その1例が下図です：



さて，zero locus $f=0$ と polar locus $g=0$ が上図のような位置にあるとき，$h=f/g$ の実臨界点の個数 $S(h)$ は，

$$S(h) \geqq \begin{cases} 3(d-1)^2 & (d=d') \\ (d-1)^2+(d'-1)^2+dd'-1 & (d\neq d') \end{cases}$$

を満たします．ところが，他方，$\deg f=d$, $\deg g=d'$, + genericity のもと，一般に $S(h)$ は右辺の数でおさえられます（cf. §3）．したがって，この場合も，実臨界点の個数の maximum を attain していることがわかります．

3°) 問題は，この observation をどう表現し，どう発展させるかです．そのために，実代数多様体のトポロジーの考察が必要になります．

§2. Hilbert 第16問題の過去と現在．

実代数幾何の歴史は，代数幾何のそれと同じぐらい古いが，現在の研究の流れは大きく2つに分けられると思う．それは，より代数的な方向（たとえば実体の理論 cf. [24]）と，より（位相）幾何的な方向である．前者は Hilbert 第17問題と関連して（cf. [5]），後者は Hilbert 第16問題と関連して発展している：

16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Kurve n-ter Ordnung haven kann, ist von Harnack bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Kurvenzüge in der Ebene. Was die Kurven 6.Ordnung angeht, so habe ich mich — freilich auf einem recht umständlichen Wege — davon überzeugt, daß die 11 Züge, die sie nach Harnack haben kann, keinesfalls sämtlich außerhalb von einander verlaufen dürfen, sondern daß ein Zug existieren muß, in dessen Innerem ein Zug und in dessen Außerem neun Züge verlaufen oder umgekehrt. Eine gründliche Untersuchung der gegensentigen Lage bei der Maximalzahl von getrennten Zügen scheint mir ebenso sehr von Interesse zusein, wie die entsprechende Untersuchung über die Anzahl, Gestalt und Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche im Raume — ist doch bisher noch nicht einmal bekannt, wieriel Mäntel eine Fläche 4. Ordnung des dreidimensionalen Raumes im Maximum wirklich desitzt.

Im Anschluß an dieses rein algebraische Ploblem möchte ich eine Frage aufwerfen, die sich, wie mir scheint, mittels der nämlichen Methode der kontinuierlichen Koeffizientenänderung in Angriff nehmen läßt, und deren Beantwortung für die Topologie der durch Differentialgeichungen definierten Kurvenscharen von entsprechender Bedeutung ist — namlich die Frage nach der Maximalzahl und Lage der Poincaréschen Grenzzyklen (cycles limites) für eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades von der Form: $dy/dx = Y/X$, wo X, Y ganze rationale Functionen n-ter Grades in x, y sind, oder in homogener Schreibweise

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z ganze rationle homogene Funktionen n-ter Grades von x, y, z bedeuten und diese als Funktionen des Parameters t zu bestimmen sind.

4°) 一般に，n次元複素射影空間$\mathbb{C}P^n$上，$(n+1)$-変数d次実斉次多項式$F(X)$の零点集合（structure sheafもこめて）を考える；$Z(F)=\{[X]\in\mathbb{C}P^n \mid F(X)=0\}$．

$Z(F)$を<u>d次実超曲面</u>といい，$n=2,3$のとき，特に，<u>d次実平面曲線</u>，<u>d次実(空間)曲面</u>という．これは，$\mathbb{C}P^n$の複素共役で不変であり，その実部は，$\mathbb{R}Z(F)=\{[X]\in\mathbb{R}P^n \mid F(X)=0\}=Z(F)\cap\mathbb{R}P^n$となる．相対位相型$(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}Z(F))$が主な対象である．

定理2.1（Harnack [10]）$Z=Z(F)$をd次実平面曲線とする．lを$\mathbb{R}Z$の連結成分の個数とするとき，

$$l \leqq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1.$$

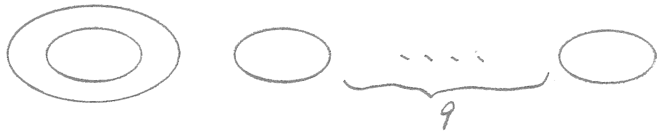
さらに，この評価は最良である．つまり，各dについて，等号を満たすd次実平面曲線（これをPetrovskiiに従いM-曲線とよぶ）が存在する．

定義2.2．$Z(F)$ (resp. $\mathbb{R}Z(F)$) が非特異 $\Leftrightarrow$「$dF(X)=0$，$X\in\mathbb{C}^{n+1}$ (resp. $X\in\mathbb{R}^{n+1}$) $\Rightarrow X=0$」．

5°) $\mathbb{R}Z(F)$を非特異d次実平面曲線とする．$\mathbb{R}Z$の各連結成分はS^1と同相であり，$\mathbb{R}P^2$の中で零ホモトピックか否で，ovalあるいはpseudo-lineとよばれる．

ovalは$\mathbb{R}P^2$をdiskとMöbius bandに分ける．diskの方をそのovalの内部という．すると，ovalsに対し，包含関係が意味をもつ．dをevenとすると，$\mathbb{R}Z$は，ovalsのみからなり，この包含関係が$(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}Z)$の位相型を記述する．

6次M-曲線$\mathbb{R}Z$を考える．これは，11個のovalsからなる．Bezoutの定理(cf. [26])から，その配置の可能性は，$11, \frac{1}{1}9, \frac{2}{1}8, \frac{3}{1}7, \cdots, \frac{8}{1}2, \frac{9}{1}1, \frac{10}{1}$の，11通りである．ここで，たとえば$\frac{1}{1}9$は



という配置を表わす．

Hilbertは，11という型の6次曲線は存在せず，$\frac{1}{1}9$あるいは$\frac{9}{1}1$という型のもののみが存在するだろうと主張した(cf. P.5)．11型の非存在は，Petrovskii [29]により初めて示された：いま，定義式Fを，$B_+ = \{[X]\in\mathbb{R}P^2 \mid F(X)\geq 0\}$がorientableになるように選ぶ．

定理2.3．偶数d次非特異実平面曲線について，

$$|2\chi(B_+)-1| \leq \frac{3}{4}d(d-2)+1.$$

さて，11型に対し，$\chi(B_+)=11$，となりこの不等式

に矛盾し，その非存在がいえるわけである．

このPetrovskiiの不等式は，Petrovskii-Oleinikの不等式として一般次元に拡張される（[28], cf. [3]）

6°）1960年代後半，Gudkovは6次非特異実平面曲線の位相的分類を完成した（cf. [9]）．とくにM-曲線は，$\frac{1}{1}9$，$\frac{5}{1}5$，$\frac{9}{1}1$ の3通りのみが存在する．この過程で，GudkovはM-曲線に関して或る種の合同式の成立を予想した（Gudkov conjecture）．これはArnol'dによる画期的論文[2]のアイディアによって，Rokhlinが解いた：

定理2.4.（Rokhlin [34], [35]）　偶数d次非特異M-曲線について

$$2\chi(B_+) \equiv \frac{1}{2}d^2 \quad (\mathrm{mod}.\ 16).$$

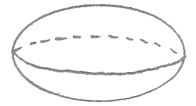
（とくに $d=6$ のとき，$\chi(B_+) \equiv 1$ (8) であり，上の3通りに限る）．

7°）現在では，7次曲線の分類がViro [39]によってなされ，さらにcomplex orientationの理論[36]等を用いて，8次曲線について研究がなされている[40]．

—— 実空間代数曲面のトポロジー ——

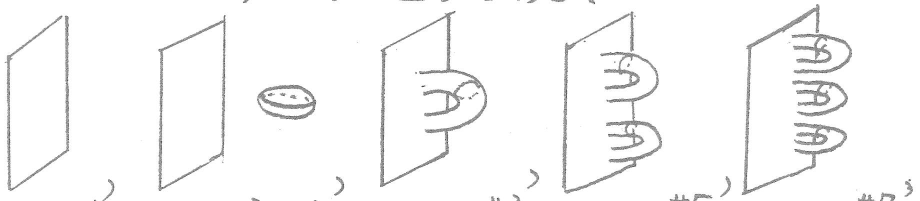
8°) d次非特異実曲面 $Z\subset \mathbb{C}P^3$ を考える．$d\leqq 4$ について，$\mathbb{R}Z$ の位相型，さらに $(\mathbb{R}P^3, \mathbb{R}Z)$ の位相型がわかっている．

1次曲面は $\mathbb{R}Z=\mathbb{R}P^2\subset \mathbb{R}P^3$ の1通り，2次曲面は

$\emptyset$,  $\approx S^2$,  $\approx T^2$

の（相対位相型もこめて）3通りである．

3次曲面は，次の5通りである：



$\approx \mathbb{R}P^2$, $\approx \mathbb{R}P^2 \amalg S^2$, $\approx (\mathbb{R}P^2)^{\#3}$, $\approx (\mathbb{R}P^2)^{\#5}$, $\approx (\mathbb{R}P^2)^{\#7}$,

相対位相型についても，この5通りである（Klein [23]）．以上は古典的結果である．

9°) Hilbert (cf. P.5) は，特に，4次曲面の実部の連結成分の最大個数を問題としている．これについては，最終的に Kharlamov [17] が，その個数は，10であることを示した（たとえば $\approx$  ）．

しかし，$d\geqq 5$ の場合の成分の最大個数については何ら知られていない！

Kharlamov [19], [20] はひき続き，実4次曲面を実構造を持ったK3曲面ととらえることにより，非特異実4次曲面の位相的分類を完成した。ここでは，単独の位相型の分類結果をあげておく；

$S_p \amalg aS_0$; $a \geqq 0$, $p \geqq 0$, $a+p \leqq 9$,

$S_p \amalg aS_0$; $a \geqq 0$, $p > 0$, $a+p = 10$, $a-p \equiv 0, 6 \ (8)$

$S_p \amalg aS_0$; $a \geqq 0$, $p > 0$, $a+p = 11$, $a-p \equiv 7 \ (8)$

$S_1 \amalg S_1$, ϕ

の66通り．（$S_p = S^2$ with p handles, $aS_0 = \overbrace{S_0 \amalg \cdots \amalg S_0}^{a}$）

10°) もっと精密で，自然かもしれない分類がある；いま，d 次実超曲面 $\subset \mathbb{C}P^n$ は，定義方程式の係数により射影空間 $\mathbb{R}P^N$ $(N = \binom{n+d}{d} - 1)$ と思える．$D = \{[F] \in \mathbb{R}P^N \mid Z(F) \text{ singular}\}$ とおけば，$D \subset \mathbb{R}P^N$ は semi-algebraic となる．容易にわかるように，$[F]$, $[G]$ が $\mathbb{R}P^N - D$ の同一の成分に属するならば，$(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}Z(F)) \approx (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}Z(G))$ となる．したがって $h_{n,d} = \dim H^0(\mathbb{R}P^N - D, \mathbb{R})$ を調べることが重要となる．今までに知られている結果は次のとおりである；

$h_{2,1} = 1$, $h_{2,2} = 2$, $h_{2,3} = 2$, $h_{2,4} = 6$,

$h_{2,5} = 9$ (Kharlamov [21]), $h_{2,6} = 64$

(Nikulin [27]), $h_{2,d}=?$ $(d\geqq 7)$.

$h_{3,1}=1$, $h_{3,2}=3$, $h_{3,3}=5$,

$h_{3,4}=169$ (Kharlamov [22]), $h_{3,d}=?$ $(d\geqq 5)$,

$h_{n,1}=1$, $h_{n,2}=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$, $h_{n,d}=?$ $(d\geqq 3)$.

11°) 分類問題から離れて一般論を考える.

Harnack の不等式(定理2.1)を, 連結成分の不等式と見ずに, 不等式

(HT): $\sum_i \dim_{\mathbb{F}_2} H_i(\mathbb{R}Z;\mathbb{F}_2)\leqq \sum_i \dim_{\mathbb{F}_2} H_i(Z;\mathbb{F}_2)$

$(\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$であると見直す. 一般に, 超曲面 $Z\subset\mathbb{C}P^n$ が非特異ならば(HT)の右辺は, 次数 d のみによる. このとき, 次の一様評価をうる:

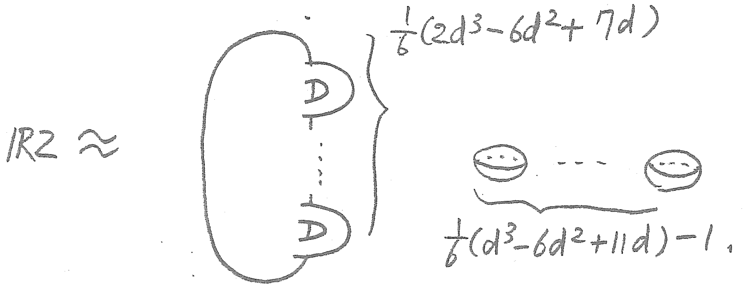
命題2.5. (Thom [37]). d次実超曲面 $Z\subset\mathbb{C}P^n$ とその実部 $\mathbb{R}Z\subset\mathbb{R}P^n$ について(HT)が成立する.

等号が成立する場合, ZをM-超曲面とよぶ. 問題は, 定理2.1の後半に相当する評価の最良性である. Viro [38] は, 曲面 $(n=3)$ の場合, 各dについて, M-曲面の存在を示した. ($n\geqq 4$ の場合も announce あり). その位相型は次頁のとおりである. (このとき, $\sum_i \dim_{\mathbb{F}_2} H_i(\mathbb{R}Z;\mathbb{F}_2)=d^3-4d^2+6d$.) 筆者は, この構成による$M$-曲面の pair $(Z(F), Z(G))$,

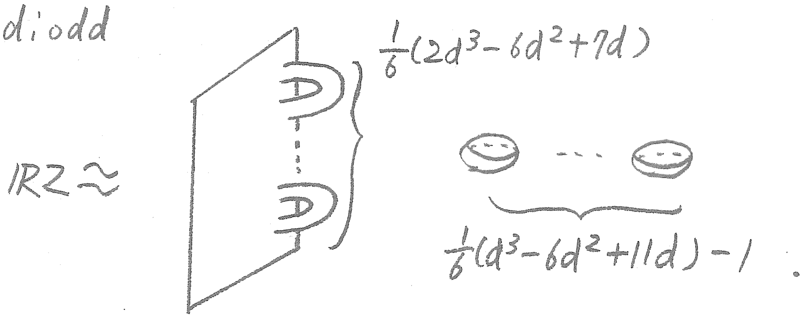
$(\deg F = d,\ \deg G = d')$ が適当な位置にあれば，有理関数 $h = [F : X_0^{d-d'} G]$ が，最大 $C_3(d, d')$ 個の実臨界点を持つことを示すことができた [15].

M-曲面の例

d: even



d: odd



— 実複素多様体のトポロジー —

… という研究分野は，いまのところまだ確立されていないが，あえてその方向性をさぐる．

12°) 実(Kähler)多様体と Kharlamov の不等式．

N を compact 連結複素多様体，$\dim_{\mathbb{C}} N = n$ とする．N に反正則対合 $T: N \to N$ が与えられたとき，(N, T)

を実複素多様体とよぶことにする．不動点のなす n 次元実部分多様体 N^T を $\mathbb{R}N$ と書く．実構造 T に関する，次の一様評価がある：

定理2.6.（Kharlamov [18]）N を偶数次元かつ Kähler とする．このとき，

$$|\chi(\mathbb{R}N)-1| \leqq h^{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(N)-1.$$

13°）M-多様体と Rokhlin の合同式．

実複素多様体 (N,T) に対しても，Harnack-Thom 不等式 $\sum_i \dim H_i(\mathbb{R}N, \mathbb{F}_2) \leqq \sum_i \dim H_i(N, \mathbb{F}_2)$ が成立する．特に，(N,T) が，等号をみたすとき，M-多様体とよぶ

定理2.7.（Rokhlin [35]）(N,T) が M-多様体ならば $\chi(\mathbb{R}N) \equiv \sigma(N) \pmod{16}$ が成立する．ここで $\sigma(N)$ は N の signature．

この定理2.7から定理2.4が従う．

14°）Ragsdale 予想と Ragsdale-Viro 予想．

偶数 d 次実平面曲線の oval が even (resp. odd) とは，偶数(resp. 奇数)個の他の ovals に含まれるときにいう．P (resp. n) で，even (resp. odd) ovals の総数を表わす．

1906〜1971年まで次の予想が存在していた[32]：

$$p \leqq \frac{3}{8}d(d-2)+1,\quad n \leqq \frac{3}{8}d(d-2).$$

Viro [39] は，これに対し反例を与え，次の形に予想を修正した：

$$p \leqq \frac{3}{8}d(d-2)+1,\quad n \leqq \frac{3}{8}d(d-2)+1.$$

これは，次の主張が正しければ肯定的である：

予想 2.8（Ragsdale-Viro 予想） (N,T) を実複素曲面 $(n=2)$，N を単連結とするとき，

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H_1(\mathbb{R}N;\mathbb{F}_2) \leqq h^{1,1}(N).$$

（このような主張は，複素曲面論自身に対しても新しい視点を与えると思う）.

— 実平面代数力学系のトポロジー —

15°）$\mathbb{R}^2$上の常微分方程式

$$(*)\quad \dot{x} = f(x,y),\quad \dot{y} = g(x,y)$$

（f, g は d 次実多項式）を考える．Hilbert (cf. P.5) は，(*)の limit cycles の相対位置の問題を提出した．

Petrovskii-Landis [31] は，$d=2$ のとき，(*)の limit cycles は3個以下と主張したが，証明に不備があ

り，実際反例が示された（cf. [42]）．この問題は，したがって未解決である．

しかし，最近，種々の有限性定理が生まれ（[33]，[11]等），この分野も次第に動き出しているようである．この方面では，名大の池上氏，大和氏等が結果を持っている．

§3、結果．

[16)] 2つの多項式の比（ratio）で表わされる"関数"を有理関数とよぶ．係数が実数なら実有理関数とよぶ．

$\mathbb{R}^n$上の rational function は通常

$$h = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) / g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

（f, g は実多項式）と表わす．これを次のように解釈する：$\deg f \leqq d$，$\deg g \leqq d'$ なる対 (d, d') を固定し，F, G をそれぞれ f, g の斉次化とする：

$$F(X) = X_0^d f\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right), \quad G(X) = X_0^{d'} g\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

いま，$B = \{[X] \in \mathbb{C}P^n \mid F(X) = G(X) = 0\}$ とおき，h を ratio を取る map

$$h = [F : X_0^{d-d'} G] : \mathbb{C}^n - B \ (\subset \mathbb{C}P^n) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

と考える．そして一般に（実）斉次多項式の対 (F, G)（$\deg F = d$，$\deg G = d'$）に対し，上できまる h を

$(n;d,d')$型の(実)有理関数とよぶことにする.

定義3.1. 対(F,G)が<u>generic</u>(あるいは, 有理関数hが<u>generic</u>)とは, 次が満たされるときにいう;

(1). $Z(F)$, $Z(G)$および$I=Z(X_0)$が$\mathbb{C}P^n$において一般の<u>位置</u>で交わる.

(2). hは$\mathbb{C}^n-B$上非退化なcritical pointsのみを持つ.

(3) ($d=d'$のとき) hのcritical pointsはI上にない.

hがgenericであれば, その$\mathbb{C}^n-B$におけるcritical pointsの個数は, nおよびd, d'にのみ依る<u>定数</u>$C_n(d,d')$になる. 実は,

$$h:\text{generic} \Leftrightarrow \#(\text{crit. pts of } h)=C_n(d,d')$$

となる. ともかく, hがgenericな実有理関数ならば従って, そのreal critical pointsの個数$S(h)$について,

$$(*)\quad \begin{cases} S(h) \leqq C_n(d,d') & \\ S(h) \equiv C_n(d,d') & (\mathrm{mod}.\ 2) \end{cases}$$

なる評価が得られる. 数$C_n(d,d')$は具体的に計算できて,

$$C_n(d,d') = \begin{cases} (n+1)(d-1)^n & (d=d') \\ \dfrac{d(d-1)^n-d'(d'-1)^n}{d-d'} & (d\neq d') \end{cases}$$

問題：各$(n;d,d')$について評価(＊)は最良か？

定理3.2.([12],[13],[15]) $n\leqq 3$とする．$(n;d,d')$型のgenericな実有理関数$h=f/g$で丁度s個の実臨界点を持つものが存在するための必要十分条件は，sが非負整数で，

$$s\leqq C_n(d,d'),\quad s\equiv C_n(d,d')\ (\mathrm{mod}.\ 2)$$

をみたすことである．

§4. 定理3.2の証明のideaとoutline．

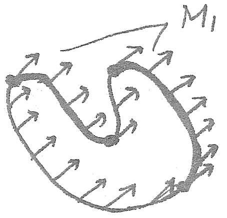
17) 1変数のときはRolleの定理を使ったので，その多変数版であるPoincaré-Hopf型公式を用いる．

証明のKey pointは最大$C_n(d,d')$個の実臨界点をもつものの存在を示すことである．そのために，うまいF,Gを見つけてきて，FとGのzero-loci $\mathbb{R}Z(F)$，$\mathbb{R}Z(G)$および$\mathbb{R}I=\mathbb{R}Z(X_0)$によって分割される$\mathbb{R}^n$の各領域$U$上で$h$の"gradientベクトル場"$v$のindexを計算し$\sum_U |\mathrm{ind}\, v|U| \geqq C_n(d,d')$を示す．

18) Poincaré-Hopf型公式

Mを境界∂Mをもつn次元compact C^∞多様体とする．

$v: \partial M \to TM|\partial M$ を C^∞ section とし, $v(x_0) \neq 0$ ($x_0 \in \partial M$) とする. まず $M_0 = M$ とおき, $M_1' = \{x \in \partial M \mid v(x)$ が M について外向き$\}$, $M_1 = \overline{M_1'}$, $\partial M_1 = M_1 - M_1'$ とおく.



帰納的に, もし M_k が境界 ∂M_k をもつ C^∞ 多様体ならば, $M_{k+1}' = \{x \in \partial M_k \mid (v|\partial M_k)(x)$ が M_k について外向き$\}$, $M_{k+1} = \overline{M_{k+1}'}$, $\partial M_{k+1} = M_{k+1} - M_{k+1}'$ とおく.

仮定: M_k は ∂M_k を境界とする C^∞ 多様体.

命題3.3. ([13]). v が上の仮定をみたすとする. そのとき, 孤立特異点のみをもつ v の任意の C^∞ 拡張 $w: M \to TM$ に対し,

$$\mathrm{ind}\, w = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi(M_i).$$

19°) 定理3.2の証明の方針.

Step 1. 評価(*)を示す.

Step 2. $\exists h$, $s(h) = C_n(d, d')$.

Step 3. $\exists h'$, $s(h') = \begin{cases} 0 & (C_n(d,d') \text{ even}) \\ 1 & (C_n(d,d') \text{ odd}) \end{cases}$,

Step 4. 上の h, h' をむすぶ実有理関数の1-パラメーター族 h_t で, 有限個の t をのぞいて h_t は generic であり, 例外の t での $s(h_t)$ の変化が ± 2 となるものを作る.

§5 展望

20°) 実代数関数の位相的分類（cf. [14]）.

これに関しては先駆的仕事[7]がある．具体的分類は，たとえば1変数実有理関数でさえ興味深い（[41]）.

21°) 実"数え上げ幾何"(real enumerative geometry)

実代数関数の種々の不変量に対し§3と同様の問題提起ができる．また，Intersection theory（cf. [8]）を$\mathbb{R}$上定義されたvarietyに対し精密化すること．これを用いて，実代数幾何の古典的仕事を見直すこと．

22°) linear system の位相

有理関数の議論はpencilの言葉で表現できる．pencilの研究，さらにその理論の拡張のために，一般のlinear system を扱う必要が生じる．また，linear systemの位相は様々な意味でDufour（[6]等）やNakaiによる最近の深い結果[25]と関連する.

23°) Hilbert第16問題の"globalization".

たとえばPetrovskii-Oleinik の不等式を，一般の実複素多様体（cf. 12°）上のAtiyahのいみのreal line bundleへのsection に対し定式化すること等。 また，KR理論のこの分野への有効な利用（まだ存在していない！）

24°) real complex singularity theory.

Picard, Lefschetz, Clemens 等の理論を，実代数関数（の複素化）に対し展開する．実代数関数の積分論，あるいは身近な例では [1] の方向．

25°) $\mathbb{R}P^4$ の実超曲面の分類．

これは実3多様体論と複素3多様体論の交叉する，おもしろいテーマだと思う．

26°) $\mathbb{R}P^3$ の実代数曲線の分類

これは link の topology と関連する．

27°) 実複素解析曲面論（cf. 14°）

28°) 実ベクトル束の section の topology.

私は実有理関数の位相の研究は Hilbert 第16問題（の前半）の自然な拡張だと思っていますが，このような "Hilbert 第16問題型の数学" には，どうも新しいトポロジーが必要な気もするので，その理論を模索中です．

29°) 偏微分方程式への応用．

（名大の青本先生から [30], [4] の存在をおそわりました．　Hilbert 第16問題と密接に関係し興味がありますが，私はまだ勉強不足で，この方面に関しては（も？）まったく無知です …．）

以上すべて，これからの課題です．

本稿を書くにあたって，特に [9], [16], [26] を参考にしたことを記しておきます．

REFERENCES.

[1] W.A.Adkins: A Harnack estimate for real normal surface singularities, Pacific J. Math.,114-2(1984),257-265.
[2] V.I.Arnol'd: The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms, Funct. Anal. Appl., 5(1971),169-176.
[3] V.I.Arnol'd: Index of a singular point of a vector field, the Petrovskii-Oleinik inequality, and mixed Hodge structure, Funct. Anal. Appl., 12(1978), 1-12.
[4] M.F.Atiyah, R.Bott, L.Gårding: Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I,II, Acta. Math., 124(1970), 131(1973).
[5] J-L.Colliot-Thélène et al (ed.): Géométrrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques, Lecture Notes in Math. 959 (1982), Springer.
[6] J.P.Dufour: Familles de courbes planes différentiables, Topology, 22-4(1983),449-474.
[7] T.Fukuda: Types topologiques des polynômes, Publ. Math. IHES, 46(1976), 87-106.
[8] W.Fulton: Intersection Theory, Ergeb. Math. Grenz., 3-2 (1984), Springer.
[9] D.A.Gudkov: The topology of real projective algebraic varieties, Russ. Math. Surveys, 29-4(1974), 1-79.
[10] A. Harnack: Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, Math. Ann. 10(1876),189-199.
[11] Yu.S.Il'yashenko: Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane, Funct. Anal. Appl. 18(1984), 199-209.
[12] G.Ishikawa: The number of singular points in a pencil of real plane algebraic curves, to appear.
[13] G.Ishikawa: The number of critical points of rational functions on $\mathbb{R}^2$, preprint.
[14] G.Ishikawa: On topology of real algebraic functions, in 数研講究録 550.
[15] G.Ishikawa: The number of critical points of real rational functions, in preparation.
[16] M.Kato: トポロジー (サイエンス社)

[17] V.M.Kharlamov: Maximal number of components of a surface of the fourth degree in $\mathbb{RP}^3$, Funct. Anal. Appl. 6(1972), 345-346.
[18] V.M.Kharlamov: The generalized Petrovskii inequality, Funct. Anal. Appl.,8(1974), 132-137.
[19] V.M.Kharlamov: The topological type of nonsingular surfaces in $\mathbb{RP}^3$ of degree four, Funct. Anal. Appl., 10(1976), 295-305.
[20] V.M.Kharlamov: Isotopic types of nonsingular surfaces of fourth degree in $\mathbb{RP}^3$, Funct. Anal. Appl., 12(1978), 68-69.
[21] V.M.Kharlamov: Rigid isotopic classification of real planer curves of degree 5, Funct. Anal. Appl., 15 (1981), 73-74.
[22] V.M.Kharlamov: Classification of nonsingular surfaces of degree 4 in $\mathbb{RP}^3$ with respect to rigid isotopies, Funct. Anal. Appl.,18(1984), 39-45.
[23] F.Klein: Über Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. 6 (1873), 551-581.
[24] M.Nagata: 可換体論（裳華房）
[25] I.Nakai: Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves, in 数研講究録 550.
[26] M.Namba: Geometry of projective algebraic curves, (1984) Dekker.
[27] V.V.Nikulin: Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, Math. USSR Izv., 14-1 (1980), 103-167.
[28] O.A.Oleinik, I.G.Petrovskii: On the topology of real algebraic surfaces, A.M.S. Transl.,7(1952),399-417.
[29] I.G.Petrovskii: On the topology of real plane algebraic curves, Ann. of Math., (2)39 (1938),189-209.
[30] I.G.Petrovskii: On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations, Mat. Sbor., 17-3 (1945), 289-370.
[31] I.G.Petrovskii, E.M.Landis: On the number of limit cycles of the equation $dx/dy = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials of the second degree, A.M.S. Transl., (2)10 (1958), 177-221.
[32] V.Ragsdale: On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves, Amer. J. Math., 28(1906), 377-404.
[33] J.J.Risler: Complexité et géométrie réelle (d'après A.Khovansky), Séminare Bourbaki 37e année 1984-85, n°637, November 1984.
[34] V.A.Rokhlin: Proof of Gudkov conjecture, Funct. Anal. Appl., 6(1972), 62-64.

[35] V.A.Rokhlin: Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem I,II, Funct. Anal. Appl., 6(1972), 301-306, ibid., 7(1973), 163-164.
[36] V.A.Rokhlin: Complex topological characteristics of real algebraic curves, Russ. Math. Surveys, 33-5(1978), 85-98.
[37] R.Thom: Sur l'homologie des varietes algébriques réelles, Diff. and Comb. topology (A symp. in honor of M.Morse),Princeton Univ. Press, (1965), 255-265.
[38] O.Ya.Viro: Construction of M-surfaces, Funct. Anal. Appl.,13(1979), 212-213.
[39] O.Ya.Viro: Curves of degree 7, curves of degree 8 and the Ragsdale conjecture, Soviet. Math. Dokl., 22-2 (1980), 566-570.
[40] O.Ya.Viro: Real plane curves of degree 7 and 8; New prohibitions, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 47-5 (1983), 1135-1150.
[41] C.T.C.Wall: Pencils of real binary cubics, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 93(1983), 477-484.
[42] Ye Yanquan: Some problems in the qualitative theory of ordinary differential equations, J. of Diff. Eq., 46 (1982), 153-164.

以上 (1985.6.5).