第32回

トポロジー・シンポジウム

講演集

昭和59年7月17日～19日

於 山形大学

昭和59年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号 59340001

序

この講演集は、昭和59年7月17日から19日の間、山形大学で開催される第32回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費補助金・総合研究（A）

「位相幾何学の総合的研究」（課題番号　59340001 ）

により作られたものであることを附記しておく。

昭和59年7月

総合研究（A）　59340001

研究代表者　笹 尾 靖 也

目　　次

3次元双曲型多様体のζ-不変量

吉田朋好（岡山大、理）

(1) 序

多様体を特徴づけるための不変量として通常有効に用いられるものには、コホモロジー特性類から得られる特性数、Whitehead torsion 等、色々あるが、その多くのものが3次元多様体においてはあまり有効ではない。3次元多様体の大部分は、非可換無限群を基本群とするいわゆる $K(\pi, 1)$ 多様体で、このような多様体を特徴づけることは、その基本群を特徴づけることと、ほぼ同値である。$K(\pi, 1)$ 多様体の典型的な例は Lie 群の両側剰余類の空間、$\Gamma \backslash G / K$（Γ は G の離散部分群、K は G の極大コンパクト群）として得られるもので、とくに3次元の場合は、Thurston の一意化定理により、実質的にこの種の多様体でつくされると考えられる。この種の多様体は Lie 群論的に定義される固有の Riemann 計量をもち、そ

れを用いて得られるRiemann幾何学的な不変量(曲線の長さ、体積、…)は、しばしばその多様体の位相不変量として扱うことができる。とくに双曲型多様体については Mostow の剛性定理により、双曲型計量から得られるすべてのRiemann幾何学的な量は位相不変量である。そこで3次元双曲型多様体を特徴づけるための不変量として、体積と η-不変量をあわせて考えることにする。

(2) 3次元双曲型多様体

Poincaré 上半空間 $\mathbb{H}^3$ を

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, \quad t > 0\}$$

とする(ただし $\mathbb{C}$ は複素平面)。Riemann計量を $ds^2 = (|dz|^2 + dt^2)/t^2$ で与えると、$\mathbb{H}^3$ はいわゆる3次元双曲型空間の model となる。$\mathbb{H}^3$ の等距離変換群で向きを保つものの全体は複素3次元Lie群 $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm id\}$ と同一視される。ただし $PSL_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{H}^3$ への作用は、$(z, t) \in \mathbb{H}^3$ を $g = z + tj$ と四元数

であらわして

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

に対し

$$A \cdot q = (\alpha q + \beta)(\gamma q + \delta)^{-1} \quad (\text{四元数積})$$

と定義される。容易にわかるように、$q = j$ の固定群は $SO(3)$ で、coset space $PSL_2(\mathbb{C})/SO(3)$ は $\mathbb{H}^3$ と同一視され、ファイバーバンドル

$$SO(3) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^3$$

は、$\mathbb{H}^3$ の oriented orthonormal frame bundle とみなされる。

3次元多様体 M^3 に対し、基本群からの単射準同型写像

$$\rho : \pi_1(M^3) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$$

があり、$\rho(\pi_1(M^3))$ は $\mathbb{H}^3$ に離散的かつ自由に作用し、M^3 が商空間 $\rho(\pi_1(M^3))\backslash\mathbb{H}^3$ と同相であるとき、M^3 を $\rho(\pi_1(M^3))\backslash\mathbb{H}^3$ と同一視して、これを(完備)双曲型多様体とよぶ。

(3) $PSL_2(\mathbb{C})$ 上の不変形式

$PSL_2(\mathbb{C})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は 2×2 複素行列で trace $= 0$ のもの全体から成る。$\mathfrak{g}$ を $PSL_2(\mathbb{C})$ の単位元での接ベクトル空間と同一視する。

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば $\{h, e, f\}$ は $\mathbb{C}$ 上の $\mathfrak{g}$ の基となる。$\{h^*, e^*, f^*\}$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ の双対基とする。

Definition : $PSL_2(\mathbb{C})$ 上の複素3次微分形式 C を、C は左不変形式で単位元においては $\frac{\sqrt{-1}}{\pi^2} h^* \wedge e^* \wedge f^*$ の値をとるものとして定義する

容易にたしかめられるように、C は $PSL_2(\mathbb{C})$ 上の両側不変な正則形式となる。(2) で述べたように、$PSL_2(\mathbb{C})$ は $\mathbb{H}^3$ の oriented ortho-normal frame bundle とみなされ、$\mathbb{H}^3$ の Riemann 計量についての基本形式と接続形式 (θ_i), (θ_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ が $PSL_2(\mathbb{C})$

上に定義される。簡単な計算で次のことはすぐわかる。

補題：C は次のように書かれる

$$C = \frac{1}{4\pi^2}\left(4\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3 - d(\theta_1\wedge\theta_{23}+\theta_2\wedge\theta_{31}+\theta_3\wedge\theta_{12})\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}\left(\theta_{12}\wedge\theta_{13}\wedge\theta_{23} - \theta_{12}\wedge\theta_1\wedge\theta_2 - \theta_{13}\wedge\theta_1\wedge\theta_3 - \theta_{23}\wedge\theta_2\wedge\theta_3\right).$$

つまり C は その real part が volume form + exact form，その imaginary part が Chern-Simons form となっている。(up to a constant multiplication)。

(4) 双曲型多様体の不変量

M^3 を closed 完備双曲型多様体，$\rho: \pi_1(M^3) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ を定義準同型写像とする。$\widetilde{M}^3$ を M^3 の普遍被覆空間、$F(M^3)$，$F(\widetilde{M}^3)$ を M，$\widetilde{M}$ の oriented orthonormal frame bundle とする（従って M には orientation が入っている）。M^3 の双曲構造を用いて developing map

$\alpha : \widetilde{M}^3 \longrightarrow H^3$ が構成され、これは $SO(3)$ -bundle map $\widetilde{\alpha} : F(\widetilde{M}^3) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ によってcoverされる。(3)の微分形式 C を $\widetilde{\alpha}$ によって引きもどして $F(\widetilde{M}^3)$ 上の微分形式 $\widetilde{\alpha}^*C$ が得られるが、C の両側不変性から、これは $F(M^3)$ 上の微分形式におろすことができる。我々はこの形式を同じく C で表わすことにする。今 M^3 上に orthonormal framing $\mathcal{F}_M$ をとれば、これは cross-section $s : M^3 \longrightarrow F(M^3)$ を定義する。このとき次の複素数が定義される。

$$f_0(M) = \int_{M^3} s^*C = \int_{s(M^3)} C$$

ただし $f_0(M)$ は framing $\mathcal{F}_M$ に depend する。しかし、異なる framing $\mathcal{F}'_M$ をとれば、$f_0(M)$ の値は $\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ は整数) だけ異なることは容易にたしかめられる。従って、

$$f_0(M) = \int_{s(M^3)} C \quad \text{in} \quad \mathbb{C}/\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$$

は M の不変量であり、(3)の補題から

$$\mathrm{Re}\, f_0(M) = \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{volume}\,(M) \quad \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Im}\, f_0(M) = 2\,CS(M) \quad \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

($CS(M)$ は Chern-Simons invariant)

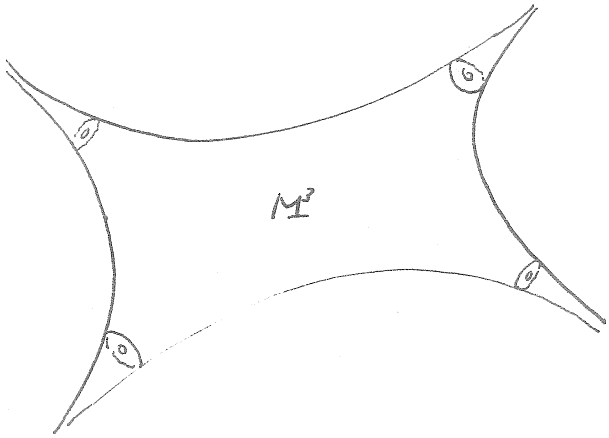
で与えられる。我々が調べるのはこの不変量 $f_0(M)$ で、後に述べるように $\mathrm{Im}\, f_0(M)$ は M の η-不変量の一部となっている。

(5) cusp をもつ双曲型多様体の変形空間

closed 完備双曲型多様体で向きづけられたものに対し (4) で述べたように不変量 $f_0(M)$ が定義されるが、我々は $f_0(M)$ を単独の M についてではなく、Thurston の hyperbolic Dehn 手術による closed 完備双曲型多様体の族 $\{\hat{M}_\omega\}$ について $\{f_0(\hat{M}_\omega)\}$ を調べることにする。

M^3 を non-compact 体積有限の完備双曲型多様体とする。このような多様体は cusp とよばれる $T^2\times[0,\infty)$ (T^2 は 2次元トーラス) と同相な end をいくつかもち (h 個とする)、位相的には h 個のトーラスを境界にもつコンパ

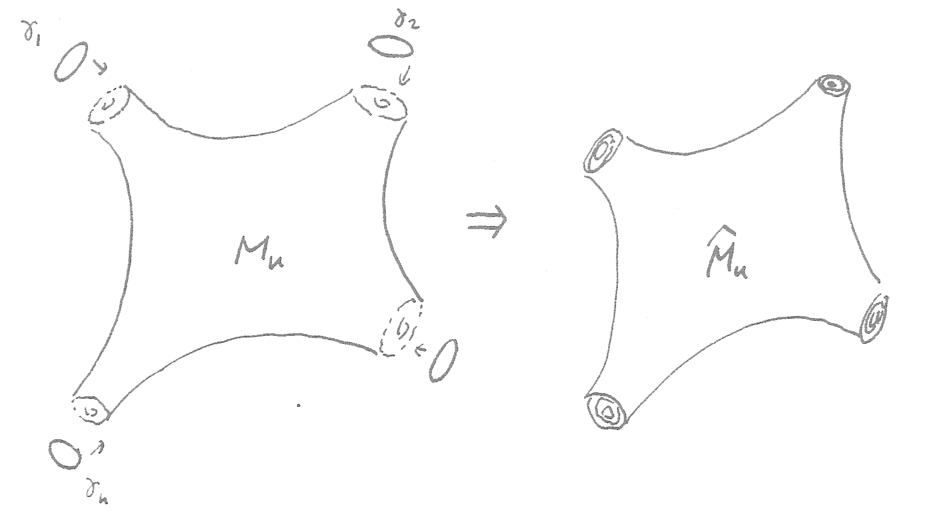
クト3次元多様体の内部と同相である。イメージとしては次のような図を思いうかべる。



non-compact 完備で体積有限であることから M^3 の end は無限に細長くのびる。

Mostow の剛性定理によりこのような M^3 の上の完備双曲型構造は一意的で、従って変形できない。しかし非完備な双曲型構造（無限にのばせない測地線がある）をも許せば、M^3 上の双曲構造は連続的に変形することができる。リーマン面の変形空間と同じように、M^3 上の非完備双曲構造の連続変形のパラメーター空間は cusp の数 h と同じ次元の複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^h$ の 0 のある開近傍 U をなし、0 はもとの完備双曲構造

を表わすようにすることができる。従って変形空間$\mathcal{U}$は自然な複素構造をもち、h次元の複素ベクトル $u=(u_1,\cdots,u_h)$ を用いてその点を表わすことができる。uに対応する双曲構造($u=0$以外は非完備)をもつM^3をM_uとあらわすことにする。さて、Thurston の hyperbolic Dehn surgery の理論とは次のようなものである。$\mathcal{U}$の中に0に集積点をもつ可算無限個の点列$\{u_i\}$があって、対応するM_uはendにh個の閉測地線$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_h\}$をつけ加えることにより、closed 完備双曲型多様体 $\hat{M}_u=M_u\cup\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_h$ に(完備化)することができる。



このとき $\widehat{M}_u$ は位相的には M_u の end に solid torus $S^1\times D^2$ を h 個はりあわせたものになり、従って M_u になんらかの Dehn 手術をほどこしたものになる。こうしていくつかの cusp をもつ non-compact 完備双曲型多様体から可算個の closed 完備双曲型多様体の族 $\{\widehat{M}_u\}$ が得られる。

(6) Framing の族.

我々は non-compact 体積有限の完備双曲型多様体 M^3 を一つ固定し、これから得られる (5) の closed 完備双曲型多様体 $\{\widehat{M}_u\}$ について、(4) における不変量 $\{t_0(\widehat{M}_u)\}$ を調べることにする。(M^3 は向きづけられているとし、$\widehat{M}_u$ はそれにともなう向きづけを与えられているとする)。

(4) の不変量 $t_0(\widehat{M}_u)$ は $\widehat{M}_u$ 上に framing を一つとることにより、その framing から定義される cross-section $s: \widehat{M}_u \to F(\widehat{M}_u)$ を用いて、$t_0(\widehat{M}_u) = \int_{\widehat{M}_u} s^*C$ として定義された。

そこで最初に framing を指定しなければならないが、$\int_{\hat{M}_u} s^*C$ が実際上計算可能になるような framing をえらぶのは大変むつかしい。そこで次のような妥協をする(この idea は Meyerhoff [3] による)。まず $\hat{M}_u = M_u \cup \{\tilde{\gamma}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\gamma}_h\}$ において $L = \tilde{\gamma}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\gamma}_h$ は $\hat{M}_u$ 内の link をなす。そして $M_u = \hat{M}_u - L$ をみると、これは位相的にはすべての $u \in U$ について同じものである。そこで $\hat{M}_u$ 全体で framing をとるかわりに、$M_u = \hat{M}_u - L$ の上だけで framing をとり、対応する cross-section $s: M_u \longrightarrow F(M_u)$ を用いて、(4) にのべた方法で複素数 $f(M_u)$ を $\int_{M_u} s^*C = \int_{s(M_u)} C$ として定義する。$f(M_u)$ は当然 (4) の $f_0(\hat{M}_u)$ とは値が異なるが、M_u 上の framing の、$L = \tilde{\gamma}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\gamma}_h$ の近傍での状態に適当な条件をつけることにより、$f_0(\hat{M}_u)$ と大して違わないようにできる(後の定理 2 参照)。この方法の大きな利点は M_u 上だけの積分にすることにより、すべての

$u \in U$ について（$M_u \to \hat{M}_u$ の完備化ができない点においても）、$f(M_u)$ が定義できることである。

そこで我々は $f(M_u) = \int_{S(M_u)} C$ が u について C^∞ 関数となるように framing の族 $\{\mathcal{F}_u\}$ をえらぶ。ただし、$\mathcal{F}_u$ は M_u 上の framing で M_u の end では適当な境界条件（これは大切であるがくわしくは述べない）をみたすようにとる。そこで $f(u) = \int_{S(M_u)} C$ とあらためて書きなおし、これを $u \in U$ についての C^∞ 関数として考察する。

(7) Neumann-Zagier conjecture

(5) で述べたように、変形空間 U は自然な複素構造をもつ。3次元双曲型多様体のモー不変量の計算において最も大切な step は (6) の関数 $f(u)$ の正則性の証明であるが、ここでは定理として述べるだけにする。

Theorem I

$f(u)$ は U の原点 0 のある近傍で正則な関数である。

（証明・略）

(4) に述べたように $f(u)$ の値は framing の族 $\{\mathfrak{F}_u\}$ のとり方に depend するが、異なる族 $\{\mathfrak{F}'_u\}$ をとれば、その値は $\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$ でしかちがわない。

そこで、$F(u) = \exp 2\pi f(u)$ とおけば、これは framing のとり方によらず、M だけできまる $0 \in U$ の近傍上の正則関数となる。この $F(u)$ を計算して次の Theorem を得る。

Theorem II.

$F(u) = \exp 2\pi f(u)$ は $0 \in U$ のある近傍で正則で、$u \in U$ がこの近傍に含まれ、M_u が $\hat{M}_u = M_u \cup \mathfrak{J}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{J}_h$ と closed 完備双曲型多様体に完備化されるとすれば、u において、

$$|F(u)| = \exp\left(\frac{2}{\pi} vol(\hat{M}_u) + \Sigma_i \, length(\gamma_i)\right)$$

$$\arg F(u) = \left(4\pi \, CS(\hat{M}_u) + \Sigma_i \, torsion(\gamma_i)\right) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

となる。ただし vol：体積，length：長さ，CS：Chern-Simons 不変量，torsion：γ_i にそっての holonomy をあらわす。

この定理にあるような性質をもつ正則関数の存在は Neumann-Zagier [5] に予想されていた。

(8) 8の字 knot の場合の計算と応用

(7)の正則関数 $f(u)$ を実際に8の字 knot の補空間の場合について計算してみる。
K を S^3 の中の8の字 knot とし，$M = S^3 - K$ とおく。M には有限体積完備双曲構造が入り，この場合 cusp は1個である。従って，M の非完備双曲構造の変形空間 $\mathcal{V}$ は複

素1次元となるが、実際次のような複素曲線上の領域となる。すなわち、Uの点uは$u=(z,w)$と$\mathrm{Im}\,z>0$, $\mathrm{Im}\,w>0$である2つの複素数のpairで

(I) $\log z + \log(1-z) + \log w + \log(1-w) = 0$

をみたすものの全体と同一視される。さらに(z,w)が

(II) $p\log w(1-z) + q\log z^2(1-z)^2 = 2\pi i$

を2つの互いに素な整数(p,q)の対に対してみたせば、対応する$M_u = M_{(z,w)}$はclosed完備双曲型多様体$\hat{M}_u$に完備化され、(ただし$|q|=1$ならば$|p|\geqq 5$とする)。位相的には$\hat{M}_u$はS^3をKにそって(p,q)-Dehn手術したものとなる。そこでこの場合の$\hat{M}_u$を$M_{p,q}$とかくことにする。Theorem 1の関数$f(u)$を計算するには、まず$\mathrm{Re}\,f(u)$を計算しこれを$\mathbb{H}^3$内のideal単体の体積についての古典的な公式で表わし、$f(u)$の正則性を利用して$f(u)$の関数形を求める。結果

は次のようになる。

$u=(z,w)\in U$ に対し.

$$f(u)=-\frac{\sqrt{-1}}{\pi^2}\left(R(z)+R(w)\right)+\mathrm{const}$$

ただし. $R(x)$ は上半平面上の関数で.

$$R(x)=\frac{1}{2}\log x\log(1-x)-\int_0^x\log(1-t)\,d\log t$$

で与えられる。const は適当に framing をえらべばきめられる。

$M=S^3-K$ の完備双曲構造に対応する $u_0=(z_0,w_0)$ は $z_0=w_0=\exp\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}$ で.

$|p|+|q|\longrightarrow+\infty$ のとき対応する $(z,w)=u$ は u_0 に収束する。又. u_0 において $f(u)$ の2階導関数が消えないことなら次のことがわかる。

(*) 十分大きな $N>0$ をとれば. $p>0$ である (p,q) について $|p|+|q|>N$ ならば. $M_{p,q}$ はすべて異なる多様体となり、対応する $f(u)$ の値によって区別することができる。

(*) は実際の $f(u)$ の値が求められなくても $f(u)$ の正則性を利用すれば u_0 における微係数を調べることにより、$M_{p,q}$ についての判定が得られることを示しており、同様なことは他の knot についても可能と思われる。

(9) η-不変量

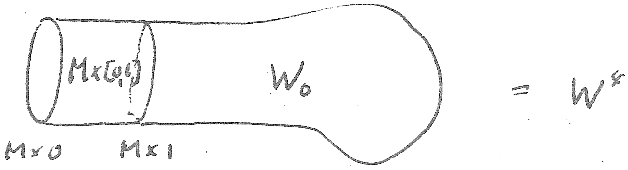
最後に3次元双曲型多様体の η-不変量について述べる。M^3 の η-不変量の定義として次のものをとる。W^4 を向きづけられた4次元 Riemann 多様体で $\partial W^4 = M^3$ とし、M^3 のカラー近傍上 Riemann metric は product metric とする。P_1 を first Pontrjagin 形式とし、

$$\eta(M) = \frac{1}{3}\int_W P_1 - \mathrm{Sign}(W^4) \in \mathbb{R}$$

とおく。

まず $\int_W P_1$ の計算を次のように行う。M^3 内に link L をとり、$M^3 - L$ 上に L に singularity をもつ一つの framing をとる。これを $\mathfrak{F}_L$ とする。又、M^3 全体に framing α をとる。W^4 を次のよ

うに分解し、W^* 上の接続を、$M\times 0$ の近



傍には product metric による接続、$M\times 1$ の近傍では framing α と product 構造により定義される接続とし、他の部分はこれらを C^∞ に拡張したものとして定義する。この接続による p_1 の積分を framing $\mathcal{F}_L$ と α を用いて計算することにより次の式を得る。

$$\eta(M)$$

$$= \frac{1}{3}\int_{S(M-L)} Q - \frac{1}{6\pi}\tau(L,\alpha) + \frac{2}{3}d(\mathcal{F}_L,\alpha) + \delta(M,\alpha).$$

ただし Q は (3) で述べた Chern-Simons 形式, $\tau(L,\alpha)$ は L にそっての α の回転数, $d(\mathcal{F}_L,\alpha)$ は $\mathcal{F}_L$ と α の difference degree, $\delta(M,\alpha)$ は α についての Hirzebruch 不変量。

この式を用いて実際に $\eta(M)$ が計算できる例として、(8) における 8の字 knot の (p,q)-Dehn 手術多様体 $M_{p,q}$ をとりあげる。

Theorem 3. $M_{p,q}$ を 8の字 knot を (p,q) Dehn 手術をした多様体とする。ただし、$|q|=1$ ならば $|p|\geq 5$. このとき $M_{p,q}$ には完備双曲構造が入り、その η-不変量は

$$\eta(M_{p,q})$$

$$= -\frac{1}{3\pi^2}\mathrm{Re}\left(R(z)+R(w)-\frac{\pi^2}{6}\right)+\frac{1}{3p\pi}\arg z(1-z)$$

$$+\frac{1}{p}\left(-\sum_k \cot\frac{k}{p}\pi\cot\frac{k}{p}q\pi\right)+\frac{q}{3p}.$$

で与えられる。ただし $(z,w)=u$ は $M_{p,q}$ に対応する U の点をあらわし $R(x)$ は (8) で述べた関数である。

この式から得られる興味ある事実として、p を fix して $|q|\to+\infty$ とした時 $\eta(M_{p,q})\to+\infty$ となることがある。これは、$M_{p,q}=M_u\cup\gamma$ としたとき、M_u につけ加えられる閉測地線が限りなく短かくなることに関係しており Millson [4] の与えた双曲型多様体の η-不変量の、閉測地線の長さと holonomy による表現からも導くことができると思われる。このような

方面からのη-不変量の幾何学的意味づけも大変興味深いと思う。

References

[1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer; Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975) 43-69.

[2] S.S. Chern and J. Simons; Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math. 99

[3] R. Meyerhoff; The Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds, thesis, Princeton

[4] J.J. Millson; Closed geodesics and the η-invariant, Ann. of Math. 108

[5] W.D. Neumann and D. Zagier; Volumes of hyperbolic three-manifolds, preprint

[6] W.P. Thurston; The Geometry and Topology of 3-manifolds, Princeton 1977

[7] T. Yoshida; The η-invariant of hyperbolic 3-manifolds, preprint

Fiberが正のEuler標数を持つ等質空間のfibrationとJacobian

志賀博雄(琉大・理)
手塚康誠(東工大・理)

§1 序

ここではfiber Fが与えられたときにorientable fibration

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B \qquad (1)$$

が持つホモロジカルな性質を調べる。ここでorientableとは$\pi_1(B)$の$H^*(F)$への作用が自明な事を意味する。

今例として，fiber S^{2n}, $\mathbb{C}P^n$を取と，それらをfiberとするorientable fibrationのSullivanの意味での分類空間は

$$B\mathrm{Aut}_S S^{2n}_{\mathbb{Q}} \simeq K(\mathbb{Q}, 4n)$$

$$B\mathrm{Aut}_S \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}} \simeq BSU(n+1) \underset{\mathbb{Q}}{\simeq} K(\mathbb{Q}, 2(i+1))$$

となる。ここで$X_{\mathbb{Q}}$は位相空間Xの有理ホモトピー型を表わす。次に$SO(2m+1)$, $U(n)$のS^n, $\mathbb{C}P^n$

への自然な作用を調べることで，S^{2n}，$\mathbb{C}P^n$をそれぞれfiberに持つようなorientable fibrationはrational fibration（§3参照）の意味で，構造群が$SO(2n+1)$，$U(n+1)$であるbundleに同値になることがわかる。また分類空間の有理係数コホモロジー群は偶数次元にしか存在しないので，それらのuniversal fibrationのセール・スペクトル列はE_2-項で退化し，したがってそれらの引きもどしで得られるS^{2n}，$\mathbb{C}P^n$のfiberとする任意のfibrationのスペクトル列も同様にE_2-項で退化することがわかる。

一般に，fibration (1)で，Fが全体的非0-ホモローグ/$\mathbb{Q}$（T.N.H.Z./$\mathbb{Q}$）とは，自然な写像

$$i^*: H^*(E,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(F,\mathbb{Q})$$

が全射となることで，すぐわかるようにセール・スペクトル列がE_2-項で退化することと同値になる。更にFとしてコンパクト連結リー群のその極大トーラスで割った空間や四元数射影空間$\mathbb{H}P^n$をとってもそれらのfibrationはT.N.H.Z/$\mathbb{Q}$になることがわかる。次に，これらの空間のコホモロジーに注意

してみると，いづれも

$$H^*(F,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,\ldots,f_n)$$

という型になっている。$(f_1,\ldots,f_n)$ は $f_1,\ldots,f_n$ で生成されたイデアルをあらわし，$f_1,\ldots,f_n$ は正則列即ち，各 f_k, $1 \leq k \leq n$ が $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,\ldots,f_{k-1})$ の零因子でないような列になっている。これよりホモトピー的性質

(1) $\dim_{\mathbb{Q}} H^*(F,\mathbb{Q}) < \infty$

(2) $\sum_{i\geq 2} \dim_{\mathbb{Q}} \pi_i(F)\otimes\mathbb{Q} < \infty$

(3) Euler標数 $\chi(F) > 0$.

を満たすことがわかる。逆に Halperin[8] はこれら(1)〜(3)の性質を満足すれば，Fのコホモロジーは，正則列 $f_1,\ldots,f_n$ で

$$H^*(F,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,\ldots,f_n)$$

と書けることを示した。

そこで問題を一般化して，「上記性質(1)〜(3)をみたすFをfiberとするfibrationは，T.N.H.Z/$\mathbb{Q}$ であろうか。」という疑問が生じる。(Halperinの予想) これに対して J.C.Thomas は[9]で $n\leq 2$, $H^*(F,\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/(f_1)$, $\mathbb{Q}[x_1,x_2]/(f_1,f_2)$

については正しいことを示している。ここではコンパクト連結リー群の等質空間 G/U で (1)～(3) をみたすものについて，有理係数及び正標数の場合も含めて考える。(正標数の場合の問題設定は河野明氏の注意による。) 尚等質空間のコホモロジー等の構造については [4] を参照されたい。

§2 結果

G をコンパクト連結リー群として，U を G の極大ランクをもつ閉部分群とする。その時次が成立する。

定理A

G/U を fiber とする任意の orientable fibration は T. C. H. $\mathbb{Z}/\mathbb{Q}$ である。

標数 p の素体 F_p に対しては，$W(G)$ で G の Weyl 群を表わすときに

定理B

$(p, |W(G)|)=1$ ならば，G/U を fiber とする任意の orientable fibration は T. C. N. H. $\mathbb{Z}/F_p$ である。

定理Bの証明は定理Aと同様な方針でなされるが，正標数の場合には，root系ならびに，これらの定理の証明に基本的な役割を果たすWeyl群の基本不変多項式系のJacobian等により注意深い考察が必要となる。これに関連して次の結果が得られる。

定理C

Kの体として，$P_1, \ldots, P_n$を多項式環$K[X_1, \ldots, X_n]$の$\mathfrak{m}$-正則列で$(\deg P_i, ch(K))=1$, $1\leq i\leq n$とする。ここで$\mathfrak{m}=(X_1, \ldots, X_n)$。このとき

$$\det(\partial P_i/\partial X_j) \notin (P_1, \ldots, P_n).$$

Halperinによると，$P_1, \ldots, P_n$がdecomposableのときは，コホモロジー環$K[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_n)$についてPoincaréの双対定理が成り立つ。そのとき$\det(\partial P_i/\partial X_j)$が基本類を与えていることに注意しておく。後述(§4. Proposition 4.1)の結果を使うと，G/Uの基本類に対する，Bernstein, I.M. Gel'fand及びS.I. Gel'fand[12]の結果がただちに得られる。定理Cに関しては，

渡辺敬一氏も同様な結果を得ている。

ここでは定理Aの証明の概略を示し定理B, Cの証明については[6]を参照されたい。

§3 Derivation と Fibration

与えられた orientable な fibration

$$F \to E \to B$$

に対して、P. Grivel 等により対応する D.G.A/Q-モデル

$$(m(F), d_F) \leftarrow (m(F)\otimes A(B), d) \leftarrow (A(B), d)$$

が存在する。ここで $m(F)$ は F の極小モデルで、$A(B)$ は底空間 B の D.G.A. モデルとする。その時、全空間 E の differential は次の式で与えられる。

$$d(1\otimes b) = 1\otimes d_B(b)$$

$$d(x\otimes 1) = d_F(x)\otimes 1 + \sum_{i\geq 2}\sum_{\nu} \varphi_i^{\nu}(x)\otimes b_i^{\nu}$$

ここに φ_i は $m(F)$ の Q-derivation で次数を i だけ下げるものである。$D_i(F)$ で、次数を i だけ下げる $m(F)$ の Q-derivation なす Q-vector space として、

$$D_*(F) = \bigoplus_{i\geq 0} D_i(F), \quad D_0(F) = \mathbb{Q}$$

とおくとき、$D_*(F)$ は次の演算

(1) $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2 - (-1)^{ij}\varphi_2\varphi_1, \quad \varphi_1 \in D_i(F), \varphi_2 \in D_j(F)$

(2) $\delta\varphi = d_F\varphi - (-1)^i \varphi d_F \quad \varphi \in D_i(F)$

で, differential graded Lie algebra/$\mathbb{Q}$になる。

すると$D_*(F)$は Fをfiberとする, orientable fibrationの分類空間$BAut_S F$のQuillen type modelになることが, Sullivan, Schlessinger-Stasheff Tanre等によって知られている。したがって特に

Proposition 3.1

$$\widetilde{H}_i(D_*(F), \delta) \cong \pi_{i+1}(BAut_S F)\otimes\mathbb{Q}.$$

一方, Fを§1の(1), (2), (3)をみたす空間とすると,

Proposition 3.2 ([6], [10])

$$H_{even}(D_*(F), \delta) \cong D_{even}(H^*(F))$$

が成り立つ。よって上の2つの命題により, $D_{even}(H^*(F, \mathbb{Q})) = 0$を示すことができれば, $H^*(BAut_S F)$は偶数次元からだけなることがわかるので, Universal fibrationのセール・スペクトル列はE_2-項で退化することが, 次元の関係よりわかり, 定理Aが示される。$D_{even}(H^*(F)) = 0$ならば, orientable fibration $F \to E \to B$のセール・

スペクトル列が E_2-項で退化することをみるには，柳田伸顕氏の注意により，D.G.A.-モデルを用いることなく直接的に次に示すように証明できる。

今 orientable fibration $F \to E \to B$ において，セール・スペクトル列の微分が $d_2 = \cdots = d_{r-1} = 0$ とすると

$$E_r^{0,*} = H^*(F),\ E_r^{r,*-r+1} = H^r(B) \otimes H^{*-r+1}(F).$$

このとき，

$$d_r : H^*(F) \longrightarrow H^r(B) \otimes H^{*-r+1}(F)$$

に対して，$b \in H^r(B)$ に対し，b の dual で評価した写像 $P_b : H^r(B) \otimes H^{*-r+1}(F) \to H^{*-r+1}(F)$

との合成 $P_b \cdot d_r : H^*(F) \longrightarrow H^{*-r+1}(F)$

を考えると，$P_b \cdot d_r$ は $H^*(F)$ の次数を $r-1$ だけ下げる $\mathbb{Q}$-derivation であるので，したがって仮定より

$$P_b \cdot d_r = 0 \qquad \forall b \in H^r(B).$$

よって $d_r = 0$ を得る。

この議論では，コホモロジーの係数体の標数によらないので，定理Bの証明に用いられる。

しかしながら，分類空間の理論は有理ホモトピー型については，更に詳しい情報，例えば序に述べたように，構造群に関する情報を与え，興味

あると思われる。例としてfiberをSU(3)とするような分類空間を調べてみる。

SU(3)の極小モデルは外積代数

$$m(SU(3)) = \Lambda(y_3, y_5), \quad d \equiv 0, \quad |y_i| = i$$

となる。(a, b) で a を b にうつし、他の生成元には 0 にうつす derivation を表わすことにすると、

$D_*(SU(3))$ は

$$\varphi_1 = (y_5, y_3), \quad \varphi_2 = (y_3, 1), \quad \varphi_3 = (y_5, 1)$$

$$|\varphi_1| = 2, \ |\varphi_2| = 3, \ |\varphi_3| = 5, \quad \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$$

で生成されたDifferential graded Lie algebra/$\mathbb{Q}$ で、基本関係は、

$$[\varphi_1, \varphi_2] = -\varphi_3$$

$$[\varphi_i, \varphi_j] = 0 \qquad i=3 \text{ 又は } j=3$$

により与えられる。標準的構成により、これを $BAut_S SU(3)$ の D. G. A. にうつすと

$$A^*(BAut_S SU(3)) = \{\mathbb{Q}[x_4, x_6] \otimes \Lambda(x_3), \ |x_i| = i$$
$$dx_3 = dx_4 = 0, \ dx_6 = -x_3 x_4 \}$$

が得られる。これは又分類空間 $BAut_S SU(3)$ の Sullivan の極小モデルになっている。主-SU(3)-bundle の分類空間を $BSU(3)$ とすると、そこから

$BAut_s SU(3)$ への自然な写像 i が存在して,

$$i_* : \pi_*(BSU(3)) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(BAut_s SU(3)) \otimes \mathbb{Q}$$

の像を, したがって調べることができて, injective であるが surjective でないことがわかる。これより主 $SU(3)$-bundle と有理的に同値にならない $SU(3)$-fibration の存在がわかる。

§4. 定理Aの証明の概要

§3で述べたように定理Aは次の代数的な定理に帰着される。

定理A'

$$D_i(H^*(G/U, \mathbb{C})) = 0, \quad i > 0.$$

以下簡単のため, G はコンパクト連結単連結単純リー群とする。T を G と U の共通な極大トーラスとし, 記号を次のように定める。

$$H^*(BT, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$$

$$H^*(BG, \mathbb{C}) = H^*(BT, \mathbb{C})^{W(G)} = \mathbb{C}[I_1, \cdots, I_n]$$

$$H^*(BU, \mathbb{C}) = H^*(BT, \mathbb{C})^{W(U)} = \mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n].$$

この時 Borel [1] により

$$H^*(G/U, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n]/(I_1, \cdots, I_n)$$

で与えられ，$I_1, \cdots, I_n$ は $\mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n]$ においても，$\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ においても正則列をなしている。

D を $H^*(G/U, \mathbb{C})$ 上の negative な $\mathbb{C}$-derivation とすると，次元の関係から

$$D(I_k) \in (I_1, \cdots, I_{n-1}) \qquad k = 1, \cdots, n$$

を得る。Leibniz の規則を使うことで，

$$D(I_k) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial I_k}{\partial J_l} D(J_l) \qquad l = 1, \cdots, n.$$

したがって，Cramer の公式から，

$$\det(\partial I_k/\partial J_l) D(J_l) \in (I_1, \cdots, I_{n-1}) \qquad (1).$$

次に $\mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n]$ を $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ の中に埋めこみ，(1) に $\det(\partial J_l/\partial X_i)$ をかけて，

$$\det\left(\frac{\partial J_l}{\partial X_i}\right) \det\left(\frac{\partial I_k}{\partial J_l}\right) = \det\left(\frac{\partial I_l}{\partial X_i}\right)$$

に注意して，$\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ の中でみると

$$\det\left(\frac{\partial I_k}{\partial X_i}\right) D(J_l) \in (I_1, \cdots, I_{n-1})^c$$

ここで，$(I_1, \cdots, I_{n-1})^c = \sum_{k=1}^{n} I_k \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$.

したがって，$\det(\partial I_k/\partial x_i)$ が $(I_1, \cdots, I_{n-1})^c$ の associated 素イデアル，即ち $\sqrt{(I_1, \cdots, I_{n-1})^c} = \cap \mathfrak{p}_i$ なる $\mathfrak{p}_i$ に含まれていないことを示せば，$D(J_k) \in (I_1, \cdots, I_{n-1})^c$ がわかる。

すると，

Proposition 4.1.

自然な写像 $H^*(BG, \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(BT, \mathbb{C})$ において，$H^*(BT, \mathbb{C})$ は階数 $|W(G)|$ の自由 $H^*(BG, \mathbb{C})$-加群になり，$H^*(BG, \mathbb{C})$ のイデアル I について

$$I \cdot H^*(BT, \mathbb{C}) \cap H^*(BG, \mathbb{C}) = I.$$

を使うことで，

$$D(J_\ell) \in I^c \cap H^*(BG, \mathbb{C}) = (I_1, \cdots, I_{n-1}) \quad 1 \leq \ell \leq n$$

となり定理が証明できる。したがって多項式関数 $\det(\partial I_k/\partial I_i)$ が代数的集合 $V((I_1, \cdots, I_{n-1})^c) = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid I_\ell(x) = 0 \quad 1 \leq \ell \leq n-1\}$ 上で考察する必要がある。

それには1950年代に得られたWeyl群の不変式の結果を用いる。G をコンパクトリー群とするとき，Hopfの定理より $H^*(G, \mathbb{Q}) = \Lambda(x_1, \cdots, x_n)$, $n = \mathrm{rank}\, G$ と書けるから，G の Poincaré 多項式 $P_G(t)$ は，

$$P_G(t) = (1 + t^{|x_1|}) \cdots (1 + t^{|x_n|}), \quad |x_1| \leq \cdots \leq |x_n|$$

と与えられる。今

$$H^*(BG, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]^{W(G)} = \mathbb{Q}[I_1, \cdots, I_n]$$

$\deg I_1 \leq \cdots \leq \deg I_n$ として，$m_i + 1 = \deg I_i$ とすれば，$|x_i| = 2m_i + 1$ となる。この m_i は Weyl 群 $W(G)$ の exponents といわれている。現今，exponents の決定の方法は，morse 理論による Bott の方法[4]や，リー群の代数的性質と位相幾何的性質を駆使した Borel-Chevalley の方法，リー環論的な coxeter の方法など，さまざまであるが，ここでは coxeter や Kostant の流儀による，尚これらの決定の歴史に関しては[11]を参照されたい。

$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環の複素化として，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra とする。$\mathfrak{h}$ による $\mathfrak{g}$ の root 分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}(H) X = \alpha(H) X\}$$

とするとき，$\mathfrak{g}$ の Cartan-Killing 形の $\mathfrak{h}$ 上への制限すると，非退化な2次形式となるので，

$$B(H_\alpha, H) = \alpha(H). \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

を満たす $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ が唯一存在する。そこで ~~root~~ $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ の元，α, β に対して $(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$ で，α, β の内積を定義する。

R_α で root α による $\mathfrak{h}^*$ 上の鏡映,

$$R_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

とする。$\dim \mathfrak{h} = n$ として fundamental root system $\Pi = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ とするとき, $R = \prod_{i=1}^{n} R_{\alpha_i}$ を Π に関する Coxeter-Killing 変換と呼ばれる。Coxeter-Killing 変換は共役をのぞいて一意的に存在する。同様に $\mathfrak{h}$ 上にも root α による鏡映が定義できて, $S(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{h}^*$ から生成される対称多元環とするとき, $w = R_{\alpha_{i_1}}\cdots\cdots R_{\alpha_{i_j}}$ と $x \in \mathfrak{h}$ に対して, $f \in S(\mathfrak{h}^*)$ は $(wf)(x) = f(w^{-1}x)$ をみたす。そのとき, $W(\mathfrak{g})$ を R_{α_1} から R_{α_n} で生成される群とするとき, 標準的同型 φ: $W(G) = N(T)/T \xrightarrow{\cong} W(\mathfrak{g})$ があって, $H^*(BG, \mathbb{C}) = S(\mathfrak{h}^*)^{W(\mathfrak{g})}$ と書ける。さて h を Coxeter-Killing 変換 R の位数とするとき, 次の事が示されている。([2], [3])

(1) R は固有値 $e^{2\pi i/h}$ を持つ。

(2) その固有ベクトルは regular element になる。即ち任意の root α に対し, $\alpha(v) \neq 0$.

$W(G)$ の exponent を $\{m_1,\cdots,m_n\}$, $m_1 \leq \cdots \leq m_n$ とすると R の位数 h との間には次の関係が成立する

(1) $1 = m_1 < m_2 \leq \cdots \leq m_{n-1} < m_n < h$

(2) $m_j + m_{n-j} = h$ (Chevalley duality)

(3) $\deg I_j = m_j + 1$

また次の事実も知られている([2])

Proposition 4.2

$$\det(\partial I_k / \partial x_i) = c \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \quad (\Delta^+ \text{は正 root 全体}),$$

ここで c は零でない定数。

これから,コンパクト連結リー群 G に対して,$H^*(G/T, \mathbb{Q})$ の基本類は $c\prod_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$,$c \in \mathbb{Q}^\times$ と書けることがわかる。

さて話をもどすと,$v \in \mathfrak{h}$ を R の固有値 $e^{2\pi i/h}$ をもつ固有ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} I_k(v) &= (R^{-1} I_k)(v) = I_k(Rv) \\ &= I_k(e^{2\pi i/h} v) \\ &= e^{2\pi i (m_k+1)/h} I_k(v) \end{aligned}$$

すると (1), (2) より $e^{2\pi i(m_k+1)/h} \neq 1$, $k = 1, \cdots, n-1$ であるから,$I_1(v) = \cdots = I_{n-1}(v) = 0$.

これは v が $V((I_1, \cdots, I_{n-1})^c)$ の点であることを示している。逆に $V((I_1, \cdots, I_{n-1})^c)$ 上の任意の点は,Kostantの方法を用いて,v に適当に定数倍したものと,Weyl

群でうつることが示されるので Prop. 4.2により,

Proposition 4.3

多項式関数 $\det(\partial I_k/\partial x_i)$ は代数的集合 $V((I_1,\cdots,I_{n-1})^c)$ の任意の既約成分上で,恒等的に零になることはない。

が言えて証明が終る。一般の場合は, Künneth公式等を使うことで, simpleの場合に帰着できる。

§5 Flag manifoldの場合

ここでは Flag manifold

$$W(n_1,\cdots,n_k)=U(n)/U(n_1)\times\cdots\times U(n_k) \qquad n=n_1+\cdots+n_k$$

の場合に標数 p の場合に§4の証明を具体的にみてみる。

$\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群, s_i を $x_1,\cdots,x_n$ の i 次基本対称式とする。このとき,

$$H^*(BT,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]$$

$$H^*(BU_n,\mathbb{Z})=H^*(BT)^{\mathfrak{S}_n}=\mathbb{Z}[s_1,\cdots,s_n]$$

$$H^*(B(U(n_1)\times\cdots\times U(n_k)),\mathbb{Z})=H^*(BT,\mathbb{Z})^{\mathfrak{S}_{n_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{n_k}}=\mathbb{Z}[t_1,\cdots,t_n]$$

とすると,

$$H^*(W(n_1,\cdots,n_k),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[t_1,\cdots,t_n]/(s_1,\cdots,s_n).$$

となる。pをnを割らない素数として，kを標数pの代数的閉体とする。§4の議論のように，$H^*(W(n_1,\cdots,n_k),k)$を$H^*(U(n)/T,k)$にうめこむと

$$\det(\partial s_i/\partial x_j)\,D(t_k)\in(s_1,\cdots,s_{n-1})^c.$$

線型代数でよく知られているように，$\det(\partial s_i/\partial x_j)$は判別式

$$\det(\partial s_i/\partial x_j)=\prod_{1\leq i<j<n}(x_i-x_j) \qquad (1)$$

になる。ここで右辺をA_{n-1}型のroot系と比較されたい。一方$(ch(k),n)=1$だから，$\zeta\in k^\times$を1の原始n乗根のひとつとするとき，$k^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in k\}$の中の直線$L_\sigma$，$\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}$を次のように定義する。

$$L_\sigma=V(x_2-\zeta^{\sigma(1)}x_1,\cdots,x_n-\zeta^{\sigma(n-1)}x_1) \qquad (2).$$

このとき，$\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}L_\sigma$

は，代数的集合$V((s_1,\cdots,s_{n-1})^c)$の既約分解を与えていることがわかる。

(1), (2) を見較べることにより

$\det(\partial s_i/\partial x_j)$ は各 L_σ 上で恒等的は零でないことがわかる。これから、

Proposition 5.1. p を n を割らない素数とするとき、orientable fibration

$$W(n_1,\dots,n_k) \longrightarrow E \longrightarrow B$$

の mod p 係数 セール・スペクトル列は E_2-項で退化する。

p が n を割るとき、スペクトル列が E_2-項で退化しない例。

$n=2$ とするとき、$W(1,1) = \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ であり、$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が S^2 に対点写像として自由に作用する。そこで associated bundle

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \longrightarrow & E\mathbb{Z}_2 \times S^2 \\ & & \downarrow \\ & & B\mathbb{Z}_2 \end{array}$$

に関する、Borel コホモロジーを考えると、$E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^2 \simeq \mathbb{R}P^2$ となり、上のセール・スペクトル列は E_2-項で退化しないことがわかる。

文献

[1] A. Borel, Sur la cohomologie des espace fibre principaux et des espace homogenes de groupes de Lie compact, Ann of Math 57 (1953)

[2] H. Coxeter, The product of generators of a finite group generated by reflections, Duke Math. J 18 (1951)

[3] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a Complex simple Lie group Amer. J. Math (1959)

[4] 戸田宏 三村護, リー群の位相〈下〉(1979)

[5] H. Matumura, Commutative algebra, Second edition, Benjamin (1980)

[6] H. Shiga and M. Tezuka, Rational fibrations homogeneous space with positive Euler characteristics and Jacobian (Preprint)

[7] D. Sullivan, Infinitesimal computations in Toplogy. Publ. I.H.E.S 47 (1977)

[8]. S. Halperin, Finiteness in the minimal models of Sullivan, Trans. A.M.S. (1977)

[9]. J. C. Thomas, Homotopié Rationell des fibrations de Serre, Ann Inst. Fourier 31 (1981)

[10] ——, Quelque questions commentes sur la fibre d'Eilenberg Moore d'une fibrations de Serre Publ. Lille 3. n°6 (1981)

[11] 荒木捷朗, コンパクト例外リー群のmod pコホモロジー, 数学 14 (1963), 219–235

[12] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, Schubert cells and cohomology of the space G/P, Russian Math Surveys 28 (1973), 1–26.

Involutive 写像の構造，Projective Curve の Web 幾何，位相不安定性定理．

中居　功

群作用が自明であるときの写像理論の紹介から話を始める。C^∞ 写像 $f, g : \bar{N} \to \bar{P}$ が C^r-同値とは，C^r diffeo $h : \bar{N} \to \bar{N}$, $h' : \bar{P} \to \bar{P}$ があり，$g = h'^{-1} \circ f \circ h$ となることをいう。f が C^r-同値類の内点に含まれるとき，f を C^r 安定という。講演者の意見によれば，この理論の主な結果は，Thom によって提唱された次の2つの定理である。

A，位相安定性定理，(Mather)．$C^\infty_{pr}(\bar{N}, \bar{P})$ の中で C^0-安定な写像は open dense 集合をなし，$(\dim \bar{N}, \dim \bar{P})$ が Nice pair ならば，C^∞ 安定な写像がすでに dense となる。

B，位相安定化定理，(Thom, Varchenko, Fukuda, Plessis)
$f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$: C^∞-写像芽，K : 正整数。このとき K-flat な写像芽 h があり $f+h$ は位相有限確定，つまり $f+h$ の有限 Jet が $f+h$ の位相型を決定している。

これらの定理のための KEY は次の事実である。

(*) Generic な $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ は isolated sing. 0

$\in f^{-1}(0)$ を持つ ($\Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \theta(f)/tf(\theta_n) + f^*m(p)\theta(f) < \infty$)。

これらの結果はもちろん不完全であり、写像の本質的構造に対して、これに続く結果はない。

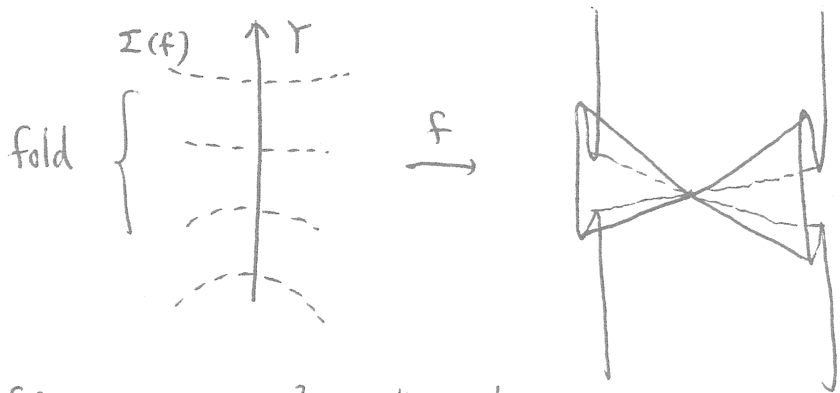
一方、これらの結果は多くの数学者により同変写像を含む他の場合に一般化されてきた。通常の C^∞-写像の場合に有効であった Marglange の割り算定理は G-同変な場合にも有効であり、これらに基づいた Mather により infinitesimal な議論、unfolding 等は形式的に平行に進む。しかしながら同変写像に対しては KEY fact (*) は成立しないことが指的されている(c.f. Robbert)。この理由により位相構造を調べるには、さらに別の方法が必要であると考えられる。以下、これに対して一つの新しい方法を紹介すると共にこれに関連したさまざまな問題について触れてみたい。

G. 群、$\widetilde{N}, \widetilde{P}$. C^∞-G 多様体、$f: \widetilde{N} \to \widetilde{P}$ が G-同変とは、$\sigma_g^{-1} \circ f \circ \sigma_g = f$, $g \in G$ となることをいう。$C_G^\infty(\widetilde{N}, \widetilde{P})$ を G-同変写像 (C^∞) の集合とする。$f \overset{C^r}{\sim} g$ $\Longleftrightarrow$ $^\exists h: \widetilde{N} \to \widetilde{N}$, $h': \widetilde{P} \to \widetilde{P}$: G 同変 C^r-diffeo s.t. $h'^{-1} \circ f \circ h = g$。

$f \in C_G^\infty(\widetilde{N}, \widetilde{P})$ とすると各 $x \in \widetilde{N}$ に対して $H_x \subset H_{f(x)}$

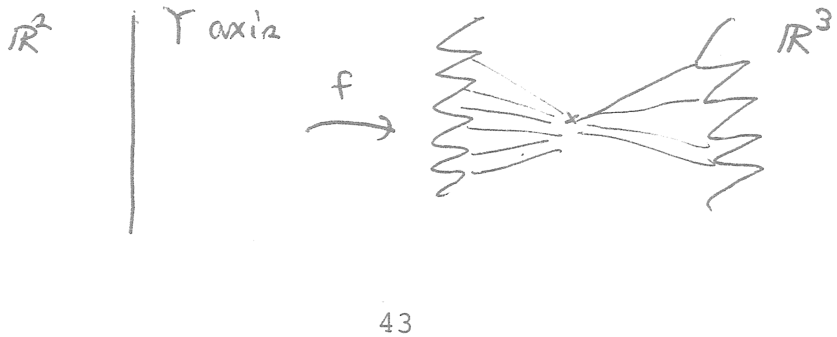
(H_x は x の isotropy group) を得るから f は $\hat{N}, \hat{P}$ の orbit type (H_x) による層化により自然に弱い意味で層化写像となる。

例1. $\mathbb{R}^2$ の2つの involution $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ をそれぞれ source, target とする involutive 写像は fixed point set ; Y-axis を 0 に写す:



$f(\Sigma(f))$ の $0 \in \mathbb{R}^2$ での tangent cone は上図の場合 4-lines となり cross ratio は f の摂動により変化するので、C^1-安定性は generic に成立しない。

例2. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の involution を $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&&0\\&-1&\\0&&-1\end{pmatrix}$ とすると fixed point set は Y-axis, 0 となり下図のようになる:



上の写像 f の分類は、$\mathrm{Im} f$ の 0 での tangent cone、つまり smooth 射影曲線の線型の分類を含むが、これは一般にすべて codim $= \infty$ となり、従って f は、有限確定でない。(C^1)

これら2つの例からもわかるとうり、同変性からくる層化状件が、特異な状況を作り出している。以後、簡単のために $G = \mathbb{Z}/2$、fixed point set を $N \subset \hat{N}$、$P \subset \hat{P}$ と書き、f の N での germ について考察する。

$f(N) \subset P$ だから、df は、N, P の法バンドルの写像を与える：

$$\begin{array}{ccc} df: \mathcal{N}_N & \longrightarrow & \mathcal{N}_P \\ \pi_N \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_P \\ f: N & \longrightarrow & P \end{array}$$

。$\Sigma_{fibre}(df) = \{x \in N,$ ker rank $df_x : \mathcal{N}_{N,x} \to \mathcal{N}_{P,f(x)} \neq 0\}$ とすると df は、法球面束 $\overline{df} : S_{N, N-\Sigma_{fib.}(df)} \longrightarrow S_P$ を与える。

定理 1. generic な $f \in C^\infty_{\mathbb{Z}/2}(\hat{N}, \hat{P})$ に対し、f の $N - \Sigma_{fib}(df)$ での germ は、$\overline{df}$ の cone と C^0-同値。ここで $\overline{df}$ の cone は、$C\overline{df}(p, t) = t\,\overline{df}(p)$ により自然に定義される。

定理2. $f, g \in C^\infty_{\mathbb{Z}/2}(\hat{N}, \hat{P})$ を generic. $\overline{df}, \overline{dg}$ が C^0 同値, つまり homeo $\varphi_N, \hat{\varphi}_N$, $\varphi_P, \hat{\varphi}_P$ が存在して, 下の図式が可換：

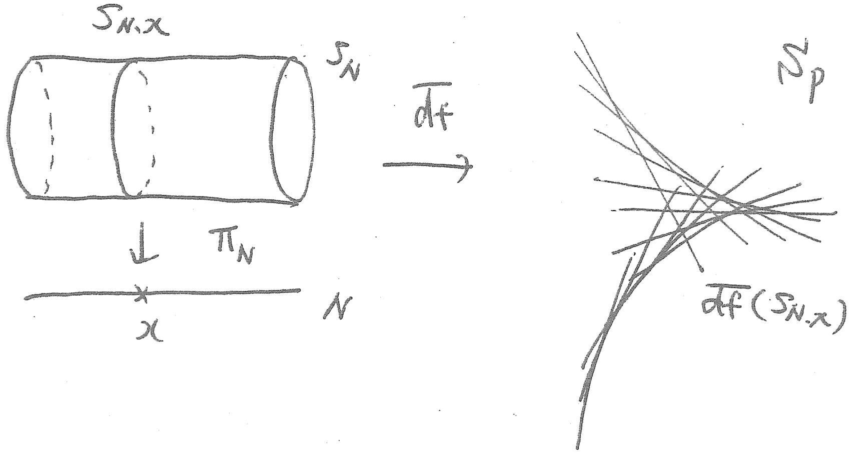
$$\begin{tikzcd}
\overline{df}\colon S_{N,N-\Sigma(df)} \arrow[rr] \arrow[dr, "\hat{\varphi}_N"] \arrow[dd] & & S_P \arrow[dr, "\hat{\varphi}_P"] \arrow[dd] & \\
& \overline{dg}\colon S_{N,N-\Sigma(dg)} \arrow[rr] \arrow[dd] & & S_P \arrow[dd] \\
f\colon N-\Sigma(df) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_N"'] & & P \arrow[dr, "\varphi_P"] & \\
& g\colon N-\Sigma(dg) \arrow[rr] & & P
\end{tikzcd}$$

このとき, $f_{N-\Sigma(df)}$, $g_{N-\Sigma(dg)}$ は C^0-同値となる。

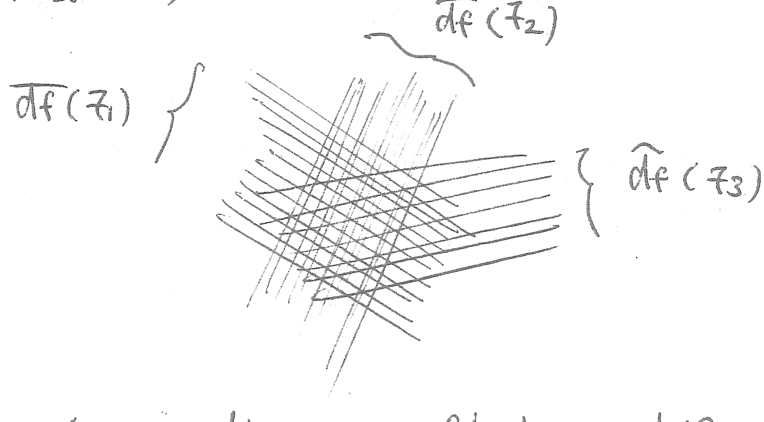
上の定理より, 我々の問題は bundle map の構造の問題に帰着する。また, bundle map の図式 $\begin{smallmatrix} & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \longrightarrow & \end{smallmatrix}$ の持つ様々な位相構造が, 写像 f に反映する (定理)。

◎ Bundle map $(\overline{df}, f)\colon S_N \to S_P$ の分類について。

$\dim S_N = \dim S_P$, $\Sigma_{fib}(df) = \Sigma_{fib}(dg) = \phi$ とすると $\overline{df}(S_{N,x})$, $x \in N$ は S_P の multi foliation を与える (特異点を持つ)：



$p_i \in \Sigma(\overline{df})$ (C^∞-写像としての特異点集合), $\overline{df}(p_i)=q$. $i=1,\dots,k$ とすると. p_i での $S_N \to N$ の fibre による葉層 $\mathcal{F}_i$ は. $\overline{df}(p_i)$ での葉層 $\overline{df}(\mathcal{F}_i)$ を与え、局所的に下図のようになる。



一般に codimension r foliation の d 個の組 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_d$ を d-web of codim r と呼ぶ。

定理 3. ($n=2$ のとき Dufour による). $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_i'$ を $(\mathbb{R}^n, 0)$ の codim 1 の C^r-foliation, $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n+1})$,

$(z_1', \dots, z_{n+1}')$ をそれぞれ一般の位置，$h:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ homeo，$h(z_i)=z_i'$，$i=1,\dots,n+1$。
このとき h は C^r-diffeo となる。($r=1,\dots,\infty,\omega$).

上の定理は C^r $n+1$ web of codim 1 に対して C^0 分類と C^r-分類は同等であることを示している。

$Hom(S_N.S_P)$ を bundle map $L: S_N\longrightarrow S_P$，$bHom(S_N S_P)_{p.q}$ を $L=\{L_i\}$，$L_i:(S_N.p_i)\longrightarrow(S_P,q)$，$i=1,\dots,b$ の集合とする。$L=\{L_i\}$，$L'=\{L_i'\}\in bHom(S_N.S_P)_{p.q}$ が同値(C^r)とは C^r-diffeo $\hat\varphi_{N,i}$，$\varphi_{N,i}$，$\hat\varphi_P$・φ_P が存在し次の図式が可換となることをいう：

$$\begin{tikzcd}
L_i:(S_N,p_i) \arrow[rr] \arrow[dr, "\hat\varphi_{N,i}"] \arrow[dd, "\pi_N"'] & & (S_P,q) \arrow[dr, "\hat\varphi_P"] \arrow[dd] & \\
& L_i':(S_N,p_i') \arrow[rr, "\pi_P"] \arrow[dd] & & (S_P,q) \arrow[dd, "\pi_P"] \\
f_i:(N,x_i) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_{N,i}"'] & & (P,q) \arrow[dr] & \\
& (N,x_i') \arrow[rr, "\varphi_P"] & & (P,q)
\end{tikzcd}$$
。

$\Theta^r(L)$ を $L\in Hom(S_N.S_P)$ ($bHom(S_N.S_P)_{p.q}$) の C^r-同値類とする。定理3を使って次を証明できる。

定理4. S_N, S_P を S^{k-2}, S^{k-1} 一束とする。$p_i \in S_{N,x_i} - \Sigma(L_i)$, $q = S_{P,y}$, $L_i(S_{N,x_i}) \subset S_{P,y}$, $i = 1, \dots, b$ は一般の位置とする。このとき $\mathrm{Codim}\, \mathcal{O}^0(L) = \infty$.

系 $L \in \mathrm{Hom}(S_N, S_P)$, $L_p = \{L_{p_i}\}$ が上の条件を満たす。このとき $\mathrm{codim}\, \mathcal{O}^0(L) = \infty$.

$W(L) = \{ p \in S_P \mid {}^{\exists} p_i \in S_{N,x_i}.\ x_i \neq x_j,\ p_i \notin \Sigma(L)$, $L(S_{N,x_i})$, $i = 1, \dots, k$ は一般の位置, $\bigcap_{i=1}^{k} L(S_{N,x_i}) = \pm p \}$ と定義する。この集合は S_P の k-web の点の集合である。

定理5 $N^n \subset \tilde{N}^{n+a}$, $P^p \subset \tilde{P}^{p+b}$, $n+a = p+b$. $f, g \in C^{\infty}_{Z_2}(\tilde{N}, \tilde{P})$: generic, ${}^{\exists} h : (\tilde{N}, N) \to (\tilde{N}, N)$, $h' : (\tilde{P}, P) \to (\tilde{P}, P)$ homeo. s.t $h'^{-1} f \circ h = g$. ならば. 次の図式を可換にする homeo. $\widehat{h'}\ \hat{h}$ が存在する

$$
\begin{tikzcd}
\overline{df}: \overline{df}^{-1}(W(\overline{df})) \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{h}"] \arrow[dd] & & W(\overline{df}) \arrow[dr, "\tilde{h}'"] \arrow[dd] & \\
& \overline{dg}: \overline{dg}^{-1}(W(\overline{dg})) \arrow[rr] \arrow[dd] & & W(\overline{dg}) \arrow[dd] \\
f: N - \Sigma df \arrow[rr] \arrow[dr, "h"'] & & P \arrow[dr, "h'"] & \\
& g: N - \Sigma dg \arrow[rr] & & P
\end{tikzcd}
$$

まとめると、次の図式を得る。

$$\overline{df} \overset{C^0}{\sim} \overline{dg} \quad \underset{\text{定理5}}{\overset{\text{定理2}}{\rightleftarrows}} \quad f \overset{C^0}{\sim} g$$

また定理4は、$\overline{df}$ が b-web of codim 1 を構成すれば、codim $\Theta^{top}(\overline{df}) = \infty$ を示す。これから、$\mathrm{Codim}_f\, \Theta^0(f)$ in $C^\infty_{Z/2}(\overline{N}, \overline{P}) = \infty$ を示すことができる（$\mathrm{codim}_f X$ は、X の f での codimension）。

定理.6（又は系）. $f \in C^\infty_{Z/2}(\overline{N}, \overline{P})$ generic, $\overline{df}$ が b-web of codim 1 を持つ. $\Rightarrow$ $\mathrm{codim}_f\, \Theta^{top}(f) = \infty$

従って我々の興味は、問題

"いつ $\overline{df}: S_N \longrightarrow S_p$ は k-webed cod 1 を持つか"

に導かれる。

◎ Bundle map から Web 幾何へ。 簡単のために $\Sigma(df) = \phi$ とする。 $\overline{df}(S_{N,x}) \subset S_{p,f(x)}$ の Grassman dual をとることにより次の写像 df^* を得る：

$$\begin{tikzcd} df^* : N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & G(S_p, a-1) \arrow[d, "\pi"] \\ & P \end{tikzcd} ,$$

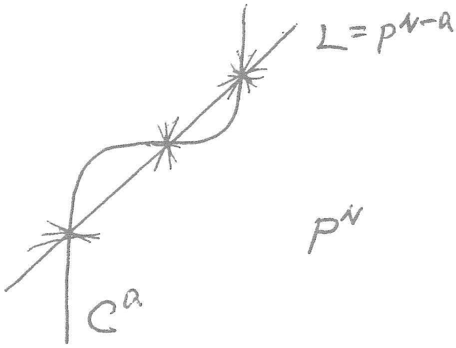
ここで $G(S_p, a-1)$ は $S_{p,y}$ の $a-1$ subspace の集合で π は $y \in P$ への projection。さらに $P = \text{point}$ とすると curve $df^* : N^1 \longrightarrow P^{k-1}$ の分類に帰着する。

（ここでは $N^1 \subset \hat{N}^{1+a}$, $P^0 \subset \hat{P}^k$, $k = a+1$ を仮定）

今、逆に射影曲線 $C \subset P^{k-1}$ に対し、それを dual curve とするような bundle map を構成することは、やさしい。従って、この曲線の分類問題として考えてみる。

一般に $C^a \subset P^N$ を smooth manifold とする。各点 $x \in C$ は $L_x = \{ L \in G(N-a, N) \mid x \in L \}$ を leaf とすることにより、グラスマン $G(N-a, N)$ ($P^{N-a} \subset P^N$

の集合）の codim a の <u>multi</u> foliation を与える。
右図のように $L=P^{N-a}$ が V と d 点で regular に交われば L のまわりで、この foliation は d-web of codim a を定義する。



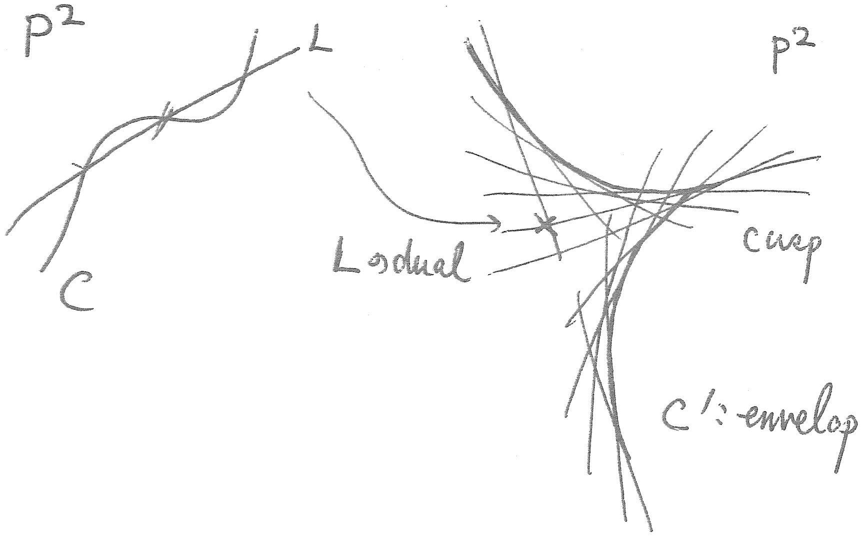
さらに $N=2$ と仮定してみる。つまり $C\subset P^2$ を Curve $(G(2-1,2)=P^2)$ とすると このとき、C から multi foliation の envelope C' への対応 $C\longrightarrow C'$ は、まさに古典的射影曲線の双対性であることがわかる。（この双対性は、さらに上の Web の envelop の構成と関連して、高次元でも成立する（Lamotoke））。 さて、双対性により次のことが知られている：

C が変曲点を持つ $\Longleftrightarrow$ C' が cusp を持つ

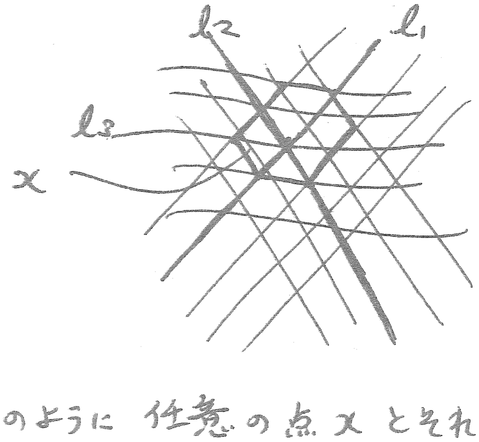
また bundle map L を考えると

$\Longleftrightarrow$ $L: S_N^{N+1}\longrightarrow S_P^2$ は cusp 特異点（Σ^{11}）を持ち $L(\Sigma(L)) = C'$ は cusp を持つ 。

このとき envelop C' のまわりで 3-web of codim 1 が構成される



ここで、射影曲線のWeb幾何のいくつかの結果を紹介する。2次元の3-web of codim 1がhexagonalとは、平行な直線からなるfoliationのWebにC^0-同値となることをいう。また古典的には、次のように定義されていた。



上図のように任意の点xとそれを通るleaf, l_1, l_2, l_3で折れ曲がる図型がすべて6角型をなす。

定理 6.（Thomsen, Dufour）上の2つの定義は同値。

定理 7.（Graf Sauer）$C^1 \subset P^2$ から構成される web が hexagonal $\Longrightarrow$ C^1 は 3次代数曲線.

定理 8.（Akief. Graf. Sauer）. $V^a \subset P^N$ から構成される web が hexagonal (see Soviet Math. Dokl. Vol 21. (1980) No.3). for definition) $\Longleftrightarrow$ V が algebraic variety.

他に S. Lie, Chern. Grifith 等による結果、また hexagonal のための form を使った条件 (Carneilo) も知られている。

さて、我々の involutive 写像の結果（の中の一つ）を述べる。

定理 9. $N^n \subset \widehat{N}^{n+a}$, $P^p \subset \widehat{P}^{p+b}$, $n+a=p+b$, $b=a+1$, $h=4l+3$, $l=0,1,\cdots$ さらに

$f \in C^\infty_{Z/2}(\tilde{N}, \tilde{P})$: generic $(f^*T\hat{P} - T\hat{N})_\nu$: non-orientable とする。$\Longrightarrow$

① $\operatorname{codim}_f \Omega^0(f) = \infty$

② ${}^\exists x \in N$. f_x は、位相的に安定化されない。

系. $T_P\hat{P}$ が自明 $T_N\hat{N}$ が non orientable ならば、Open dense subset $U \subset C^\infty_{Z/2}(\tilde{N}, \tilde{P})$ が存在して、任意の $f \in U$ は、上の性質 ①、② を持つ。特に、位相安定な写像は存在しない。

上の定理は、Dual Curve が変曲点を持つことにより、定理6を用いて証明される。

さて、振り出しに戻って考える。我々は、$G = Z/2$ として特別な場合に考察してきた。これを一般化するには、さまざまな興味深い問題がある。

① G を一般とすると、orbit type がたくさん出てくるが、このとき、上の議論を展開する。

② 同変 bundle map $L \in Hom_G(N_v, N_p)$ の分類。

③ codim P < codim N の場合の $\Sigma_{fibre}(df) \subset N$ での位相的解析

④ 定理 2 を使った肯定的位相安定性定理の証明

⑤ codim > 1 の Webの分類（定理 3）の拡張。

⑥ Web 幾何を使った involutive 写像の分類

さらに最も基本的な問題は

⑦ "写像の fibreの平行性を調べる"

である。一般に写像 $f \sim g : N \to P$ を示すのには Thom-Mather による isotopy lemma が使われてきた。この中で重要な役割りをはたすのが、次の A_f 条件(3)である: $f : (N, \mathcal{S}) \to (P, \mathcal{S}')$ が、層化 $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ に関して Thom 写像とは、

(1) $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$. Whitney B-regular

(2) $\forall s \in \mathcal{S}, \exists s' \in \mathcal{S}'$. s.t $f : s \to s'$ submersive.

(3) (A_f-regular) if $x_i \in S \in \mathcal{S} \to y \in S' \in \mathcal{S}$

$\ker d(f|S) \to T$ then $\ker d(f|S') \subset T$.

Thomのisotopy lemmaは、family f_tがThom写像ならば、f_tは自明。つまり位相同値 h_t, h_t'があり
$h_t' \circ f_t \circ h_t = f_0$ となることをいう。

上の条件(3)は、fのfibreがほぼ"平行"であることを意味している。また非常に人工的な条件であるとも思はれる。実事、Thom写像でないf_tの自明化がいくつかの場合に示されている(Looijenga, Damon)。また始めにあげた例(1),(2)は、fibreの次元の観察から上の意味で層化できないことがわかる。このことから、fibreの"平行性"と自明性の関係を調べなければならない。

多項式写像の自明性について次が知られている(Nakai):

$$f_a(x,y,z) = (xy(x+y),\ (x+ay(x^2-y^2)z))$$

: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ は自明化されない。このことから、f_aは連続濃度の位相型を持つことがわかる。これは自明化の問題が非常に困難であることを示している。

定理 10 (Sabbah) $f: X \to Y$ を Complex analytic map. このとき Y の blow up の系列 $\pi: \tilde{Y} \to Y$ があり、これによる f の strict transform $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ は Thom map になる。

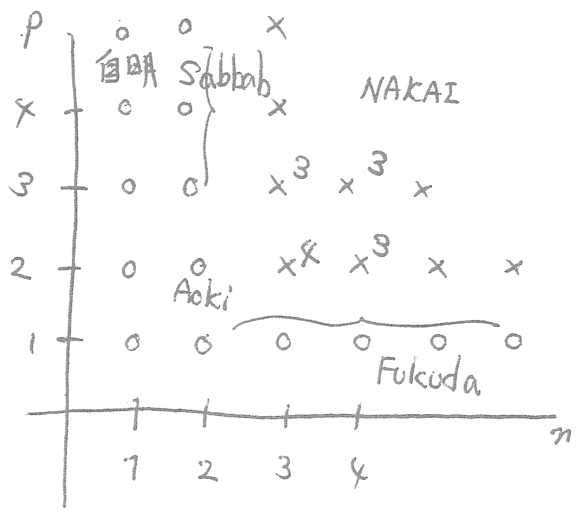
$$\begin{tikzcd} \tilde{f}: \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[d, "\pi"] \\ f: X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

これは Hironaka による flatning 定理の拡張である。これを用いて Sabbah は $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n$ の多項式写像 f, $\deg \leq d$ の位相型が有限個であることを示しているが、これは (Aokiの結果: $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) の場合の同様の結果の拡張となっている。下の表に $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ の位相型の濃度をを示そう。

○ 有限

× 連続濃度

また整数は連続濃度となる次数 d.



これから、自然に次の問題に興味を持つ。

⑧ $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, $\deg f \leqq 2$ の位相的分類

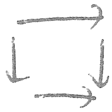
⑨ $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, degree 3 の分類

再び我々の involutive 写像に戻ろう。$\tilde{N}, \tilde{P}$ を fixed point set N, P に沿って exceptional bundle S_N, S_P を持つように blow up した多様体を $\widehat{S_N}, \widehat{S_P}$ と書く。すると $f: \tilde{N} \to \tilde{P}$ は写像 $\hat{f}: \widehat{S_N} \to \widehat{S_P}$ に lift して、次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc} \hat{f}: (\widehat{S_N}, S_N) & \longrightarrow & (\widehat{S_P}, S_P) \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ f: (\tilde{N}, N) & \longrightarrow & (\tilde{P}, P) \end{array}$$

$\hat{f}|S_N = df: S_N \to S_P$ （ここで $\Sigma_{fib}(df) = \Sigma_{fib}(dg) = \phi$ を仮定）。このとき、この図式は f の π_P による strict transform であることがわかり、まさに f の Thom 写像化に外ならない。Theorem 10 は、さらに特異性の高い写像もこの方法で扱えることを示しているのではないだろうか。

さて、我々の involutive map の問題は図式

 の問題に帰着したといえる。

ここで一般に次の問題を考えることができる。

⑩ 写像の図式を分類する。

実事、Web—の問題は、図式  の問題と

同等であることがすぐにわかる。(envelop も同様)

これに関して、Dufour, Baas Nakai の結果がある。

曲面の同相写像の定める link と位相的エントロピー

阪大 理　小林 毅

Adler et al [A-K-M] により，位相空間 X 上の自己写像 f に対して位相的エントロピーと呼ばれる不変量 $h(f)$ (≥ 0) が定義されたが，これは写像 f の力学的な"乱雑さ"を表していると考えられる。 さて"どのような f に対して $h(f)$ は正の値をとるか？"というのは基本的な問題である。 特に X が多様体の時が重要で，これをホモロジーレベルで定式化したのが いわゆる"エントロピー予想"である（エントロピー予想については [Sh][Y] 参照）。compact，連結な双曲曲面 X 上の同相写像 f に対する上の問題の解は，Thurston et al により エントロピー予想よりもさらに精密に f の isotopy 類の範囲で完全に与えられている（Proposition 1.3）。 また双曲的でない compact 曲面に対しても 各々の曲面を調べることにより同様の結論が導かれる。 しかし，このような定式化にしても場合によってはまだ十分に精密とは言えない。 例えば，2次元円板 D^2 上の 向きを保つ同相写像は全て恒等写像に

isotopicであるが，D^2上の向きを保つ同相写像でいくらでもエントロピーの大きなものは構成できる。そこでいま曲面X上の同相写像に対して次の仮定をおく。

"fは，Xの内部に有限個の周期軌道Σをもつ（即ちΣ（$\subset \mathrm{Int}\,X$）は有限個の点集合で$f(\Sigma)=\Sigma$をみたす)"

このときfのrel Σ isotopy類の中で上の問題を考えたものとしてBlanchard-Franks [B-F], Handel [H], Smillie [Sm]等がある。しかしこれらの結果は，Σの各周期軌道の周期の値に注目したもので，例えば上に掲げたD^2上の向きを保つ同相写像に対しては依然として何の手がかりも与えない。

本報告では，fが向きを保つときrel Σ isotopy類の中での上の問題の解がfの写像トーラスM_fの中のlink theoryに帰着されることを述べる（定理1）。特にD^2に対しては上の問題は古典的な（即ち三次元球面S^3の中の）link theoryに帰着できる（定理2.3）。

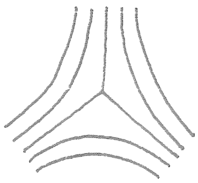
定理1の定式化にあたって東京大学の矢野公一氏より貴重な助言を戴きました。また私の内容は大阪大学の松岡隆氏の仕事[Ma]が動機づけになっており，同氏には論文[Ko]及び本報告をまとめるにあたっ

て様々な御協力を載きました。謹んでお礼申し上げます。

§1. Thurston の標準型

以下，曲面は全て有向, compact, 連結とする。ここでは [Th.] で述べられた双曲曲面上の自己同相写像の分類定理について報告する。

F を曲面とする。F 上の <u>measured foliation</u> $(\mathcal{F},\mu)$ とは，F 上の有限個の pronged singularity（但し prong の数は 3 個以上）をもつ foliation $\mathcal{F}$ と，$\mathcal{F}$ の leaf に横断的な測度 μ の組とする。

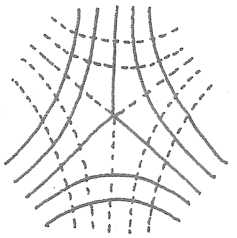


: 3-pronged singularity

F 上の自己同相写像 f が <u>pseudo-Anosov</u> とは F 上の (singular points 以外で) 互いに横断的な measured foliations $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$, $(\mathcal{F}^s,\mu^s)$ で $f(\mathcal{F}^u)=\mathcal{F}^u$, $f(\mathcal{F}^s)=\mathcal{F}^s$ かつ $f^*(\mu^u)=\lambda\cdot\mu^u$, $f^*(\mu^s)=1/\lambda\cdot\mu^s$ (但し $\lambda>1$) となるようなものが存在することとする。この λ を f の <u>expanding constant</u> と呼ぶ。

$\mathcal{F}^s$: ——

$\mathcal{F}^u$: ----



; singular point の近傍での $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ の状況

f が <u>periodic</u> とは ある正整数 n が存在して f^n が恒等写像になることとする。 Γ を F 上の互いに交わらない単純閉曲線の系とする。 f が Γ によって <u>reducible</u> とは Γ の各閉曲線は non-contractible かつ ∂F の成分に homotopic でなく, Γ の 2つの閉曲線は, 互いに平行でなく, $f(\Gamma) = \Gamma$ (但し f は Γ の元を入れ替えてもよい) をみたすこととする。 このとき:

Theorem 1.1 ([Th1]) f を双曲曲面 F (i.e. $\chi(F) < 0$) 上の自己同相写像とする。 このとき f に isotopic な φ で次のいずれかを みたすものがある:

(i) periodic,

(ii) pseudo-Anosov,

(iii) F 上の互いに交わらない単純閉曲線の系 Γ が存在し φ は Γ によって reducible. 特に Γ の φ-不変な正則近傍 $\eta(\Gamma)$ が 存在し, $F - \mathrm{Int}\,\eta(\Gamma)$ の各成分 S_j に対して $\varphi^{m_j}(S_j) = S_j$ となる最小の正整数 m_j が定まるが,

$\varphi^{m_j}|_{S_j}$ は (i) 又は (iii) をみたす。 $\eta(\Gamma)$ の各成分 $\eta(\Gamma_i)$ に対して $\varphi^{m_i}(\eta(\Gamma_i))=\eta(\Gamma_i)$ となる最小の正整数 m_i が定まるが $\varphi^{m_i}|_{\eta(\Gamma_i)}$ は annulus の twist homeomorphism.

Theorem 1.1 で得られた φ を f の <u>Thurston の標準型</u>と呼ぶ。 φ は力学系的に見ても 標準型と呼ぶにふさわしい性質を持っている。 以下，それらを見てゆく。[F-L-P] Exposé 10 では 次の事が示されている。

Proposition 1.2. φ は pseudo-Anosov とする。 このとき $h(\varphi)\leq h(f)$。 特に λ を φ の expanding constant とすれば $h(\varphi)=\log\lambda>0$。

さらに次の事も容易に示される。

Proposition 1.3. ([Ko$_2$] Proposition 2.1) 一般に $h(\varphi)\leq h(f)$ が 成り立つ。 特に $h(\varphi)>0$ となるためには φ が pseudo-Anosov の 成分を含むことが 必要十分である。

即ち，φ はその isotopy class の中での最小エントロピー

を実現していることがわかる。 またφの周期点の個数についても 次の性質が知られている。

Proposition 1.4. ([Th1], [B-K], [F-L-P]) φを pseudo-Anosov とする。 このとき次の性質が成立する：

(i) φの周期点はFで dense,

(ii) 任意の正整数nに対してφ^nは，そのisotopy類の中で最小個数の固定点をもつ。

またJiangにより次が示された。

Proposition 1.5. ([J]) fは 向きを保つとする。このとき φを periodic な成分の所と$\eta(P)$の内部で isotopyで動かすことにより丁度 $N(f)$個の 固定点を持つようにできる。 ここで $N(f)$は，fの本質的な固定点類[B]の個数を表す。

$N(f)$は，fに homotopic な写像の 固定点の数の下限を与える[B]。従って，次がわかる。

Corollary 1.6. fは向きを保つとする。 φがpseudo-Anosovの成分を含むならば fは無限個の周期軌道で互いに異なる周期をもつようなものをもつ。

§2. 曲面上の同相写像の写像トーラス

§1.で見たように曲面上の自己同相写像fの力学系はそのThurstonの標準型と深くかかわっているが，具体的に標準型を求めることは 容易ではない。 ところがThurston et al によりfのThurstonの標準型と，fの写像トーラスの幾何的構造の間には 密接な関係のある事が 知られている。

M_fをfの写像トーラスとする(i.e. $M_f = F\times[0,1]/\sim$, 但し $(x,0)\sim(f(x),1)$)。 多様体 M上の 双曲的構造とは M上の完備なリーマン計量で，各点での各方向での切断曲率が -1 になるようなものとする。 このとき：

Theorem 2.1. ([Su], [Th2]) Fは双曲的曲面，fは向きを保つ同相写像とする。 このとき $\mathrm{Int}\, M_f$ に体積有限の双曲的構造が はいるための必要十分条件は fが pseudo-Anosov に isotopicな事である。

3次元多様体上の S^1-fibration で有限個の例外 fiber を含んでいるようなものは Seifert fibration と呼ばれる（正確な Seifert fibration の定義は [He] 参照）。このとき：

Theorem 2.2（[He]） f は有向曲面 F 上の periodic な写像とする。このとき M_f は Seifert fibration を許容する。

注：3次元多様体上の Seifert fibration は，双曲的構造とは異なる微分幾何的構造と深くかかわっていることが知られている（[Sc]）。

以下，この§では F は双曲的曲面とする。$f: F \to F$ は向きを保つとし，φ を f の Thurston の標準型とする。いま φ は Γ によって reducible とすると $\Gamma \times [0,1]$（$\subset F \times [0,1]$）は M_φ の中の 2次元トーラスの系 $\mathcal{T}$ に射影される。Theorem 2.1, Theorem 2.2 より M_φ を $\mathcal{T}$ で切り開いて得られる各成分は "体積有限の双曲的構造を持つ" か "Seifert fibration を許容する" ことがわかる。また3次元多様体論の標準的議論により，この分解は，M_φ の

Jaco-Shalen-Johanson 分解 (: J-S-J 分解) ([Ja], [J-S], [Jo]) と呼ばれる分解に一致することがわかる。 これらから次の Proposition が出る。

Proposition 2.3. φ が pseudo-Anosov 成分を含むためには，M_φ の J-S-J 分解の成分で 体積有限の双曲的構造をもつものが存在することが必要十分。

これと Proposition 1.3 より次がわかる。

Corollary 2.4 $h(\varphi) > 0$ となるためには，M_φ の J-S-J 分解の成分で体積有限の双曲的構造をもつものが存在することが必要十分。

3次元多様体 M が graph-多様体であるとは，M内の互いに交わらない2次元トーラスの系 $\mathcal{T}$ で Mを $\mathcal{T}$ で切り開いたとき その各成分の閉包が (曲面)$\times S^1$ の形をしているようなものが 存在することとする。 Seifert fibered 多様体は graph-多様体である。 また M が体積有限の双曲的構造を持てば M は graph-多様体でない ([Th3])。

従って Corollary 2.4 は次のように言い換えられる。

Corollary 2.4′ $h(\varphi)=0$ となる必要十分条件は M_φ が graph-多様体であること。

§3. 相対的なThurstonの標準型

f を曲面 F 上の向きを保つ自己同相写像，Σ ($\subset \mathrm{Int}\,F$) を有限個の点で $f(\Sigma)=\Sigma$ をみたすとする。特に $\chi(F-\Sigma)<0$ となるとする。いま f を rel Σ isotopy で動かして f は Σ の各点で微分可能としておく。$F-\Sigma$ の各 non-compact end に circle をつけて得られる compact 曲面を S とすると $f|_{F-\Sigma}$ は，$\bar{f}: S\to S$ に拡張する ([H])。$\bar{f}$ の Thurston の標準型 $\bar{\varphi}$ を F に射影して得られる写像 φ: $(F,\Sigma)\to(F,\Sigma)$ を (f,Σ) の <u>相対的なThurstonの標準型</u> と呼ぶ ([Sm])。φ は f に rel Σ で isotopic である。このとき次が示せる。

Proposition 3.1 (Cf. Proposition 1.3) $h(\varphi)\leq h(f)$。特に $h(\varphi)>0$ となるには，$\bar{\varphi}$ が pseudo-Anosov 成分を含むことが必要十分。

即ち，φ は f の rel Σ isotopy class の中での最小エントロピーを実現している。

3次元多様体 M 内の <u>link</u> L とは，Int M 内の互いに交わらない有限個の circle の和とする。 L の正則近傍を N(L) と書く。 M − Int N(L) のことを L の <u>exterior</u> と呼ぶ。 L の exterior が graph-多様体であるとき L を <u>graph-link</u> と呼ぶ。

いま $f:(F,\Sigma)\to(F,\Sigma)$ に対して $\Sigma\times[0,1]\ (\subset F\times[0,1])$ は M_f 内の link L_f に射影される。 このとき：

Proposition 3.2 ([Ko3], Cf Cor. 2.4′) $h(\varphi)=0$ となるためには，$L_f\ (\subset M_f)$ が graph-link になることが必要十分。

これと Cor. 1.6 より次の定理が得られる。

定理 1 ([Ko3]) f. Σ. M_f. L_f を上の通りとする。 いま L_f が graph-link でないなら $h(f)>0$。 また L が graph-link なら f と rel Σ で isotopic な写像 φ で $h(\varphi)=0$ となるものがある。 特に L_f が graph-link ではなく，f は Σ の各点で微分可能とすると，f は無限個の周期軌道で互い

に相異なる周期をもつようなものを　もつ。

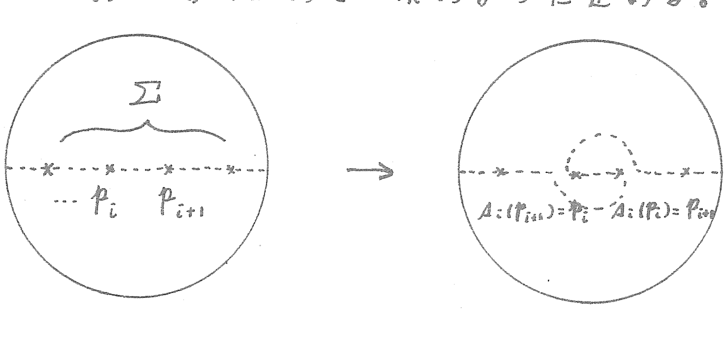
§4. 円板上の同相写像の定める link.

この§では f を円板 D^2 上の向きを保つ同相写像, $\Sigma=\{p_1,\cdots,p_m\}$ $(m\geq 2,\ p_i\in \mathrm{Int}\,D^2)$ を f で不変な有限個の点集合とする。このとき (f,Σ) から §3 のようにして定まる link L_f $(\subset M_f \cong D^2\times S^1)$ の exterior は, 3次元球面内のある link の exterior に同相なことが示される。定理3では, そのようにしてできる S^3 の link のうち graph-link であるようなものの特徴づけをする。

braid の定義については [Bi] 参照。B_m を braid群:

$$\langle \sigma_1,\cdots,\sigma_{m-1} \mid \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \ \text{if}\ |i-j|>1,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\rangle$$

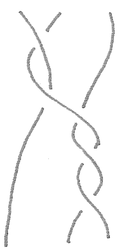
とする。また $\mathrm{Diff}(D^2,\Sigma,\mathrm{rel}\,\partial)$ を D^2 上の微分同相写像 ψ で $\psi|_{\partial D^2}=id_{\partial D^2}$, $\psi(\Sigma)=\Sigma$ をみたすもの全体の集合に smooth topology を入れた空間とする。また $s_i\in\mathrm{Diff}(D^2,\Sigma,\mathrm{rel}\,\partial)$ $(i=1,\cdots,m-1)$ を次のように定める。



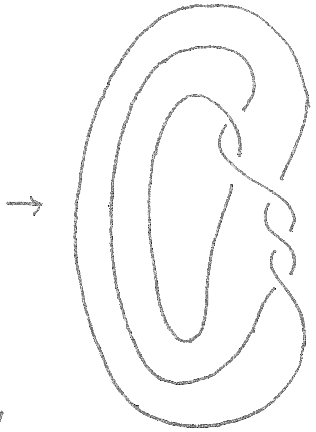
[F-L-P] Exposé 2では，次が示されている。

Proposition 4.1. B_n は $\pi_0(\mathrm{Diff}(D^2,\Sigma,\mathrm{rel}\,\partial))$ に同型。特に σ_i は s_i の代表する $\pi_0(\mathrm{Diff}(D^2,\Sigma,\mathrm{rel}\,\partial))$ の元に対応している。

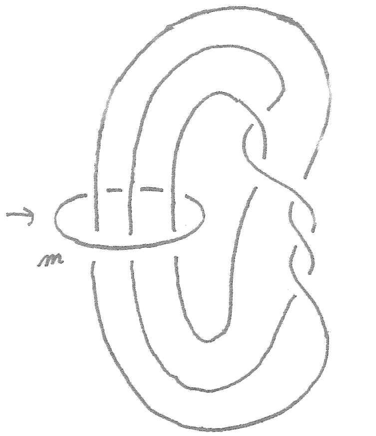
いま，f を rel Σ isotopy で $\mathrm{Diff}(D^2,\Sigma,\mathrm{rel}\,\partial)$ の元 g にまで動かす。*Proposition* 4.1 より g に対応して B_n の元 σ が定まる。σ の幾何的 braid [Bi] を閉じて得られる S^3 内の link L に特別な成分 m を下のように付け加えた link ($\subset S^3$) を <u>(f,Σ) の link</u> と呼ぶ。



$\sigma=\sigma_1^2\sigma_2^3$ の幾何的 braid



L



a link of (f,Σ)

このとき：

Lemma 4.2. L_f ($\subset M_f$) の exterior は (f, Σ) の link $m \cup L$ の exterior に同相。

従って，この Lemma と定理1より次がわかる。

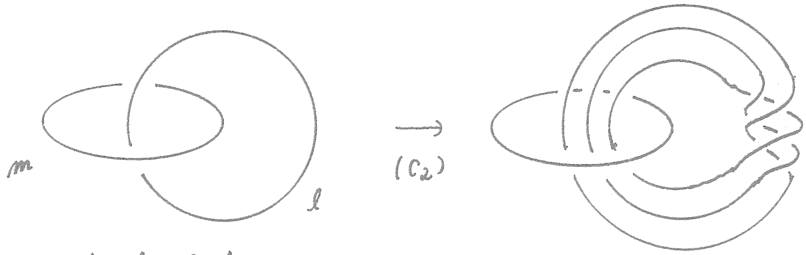
定理2.（[Ko1]） $m \cup L$ を (f, Σ) の link とする。$m \cup L$ が graph link でないならば $h(f) > 0$。また $m \cup L$ が graph-link なら f を rel Σ isotopy で $h(g) = 0$ となる g まで動かせる。特に $m \cup L$ が graph-link でなく，f が Σ の各点で微分可能とすると，f は無限個の周期軌道で互いに相異なる周期をもつようなものを もつ。

定理3を述べるために，ある link L_1 から新しい link L_2 を得る2つの operations (C_1), (C_2) を 次のように定める。

(C_1) ℓ を L_1 の成分，N を ℓ の正則近傍，$\bar{L}$ ($\subset \partial N$) を link でその各成分は N で contract しないものとする。このとき，$L_2 = L_1 \cup \bar{L}$。

(C_2) (C_1) の状況のもと $L_2 = (L_1 \setminus \ell) \cup \bar{L}$。

定理3.([Ko1,3]) $m \cup L$ はある (f, Σ) の link で graph-link であるとする。このとき $m \cup L$ は Hopf link $m \cup l$ から出発して有限回 (C_1) 又は (C_2) を m 以外の成分に施すことによって得られる。



Hopf link

§5. Application.

松岡[Ma]は微分方程式;

$$\begin{cases} (*) \quad \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{但し } f(t,x) \in C^1,\ f(t+1,x) = f(t,x).\ \text{任意の初期値 } (t_0, x_0) \in \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \text{ に対して } -\infty < t < \infty \text{ で 解 } x = \varphi(t; t_0, x_0) \text{ が存在} \\ \text{する。} \end{cases}$$

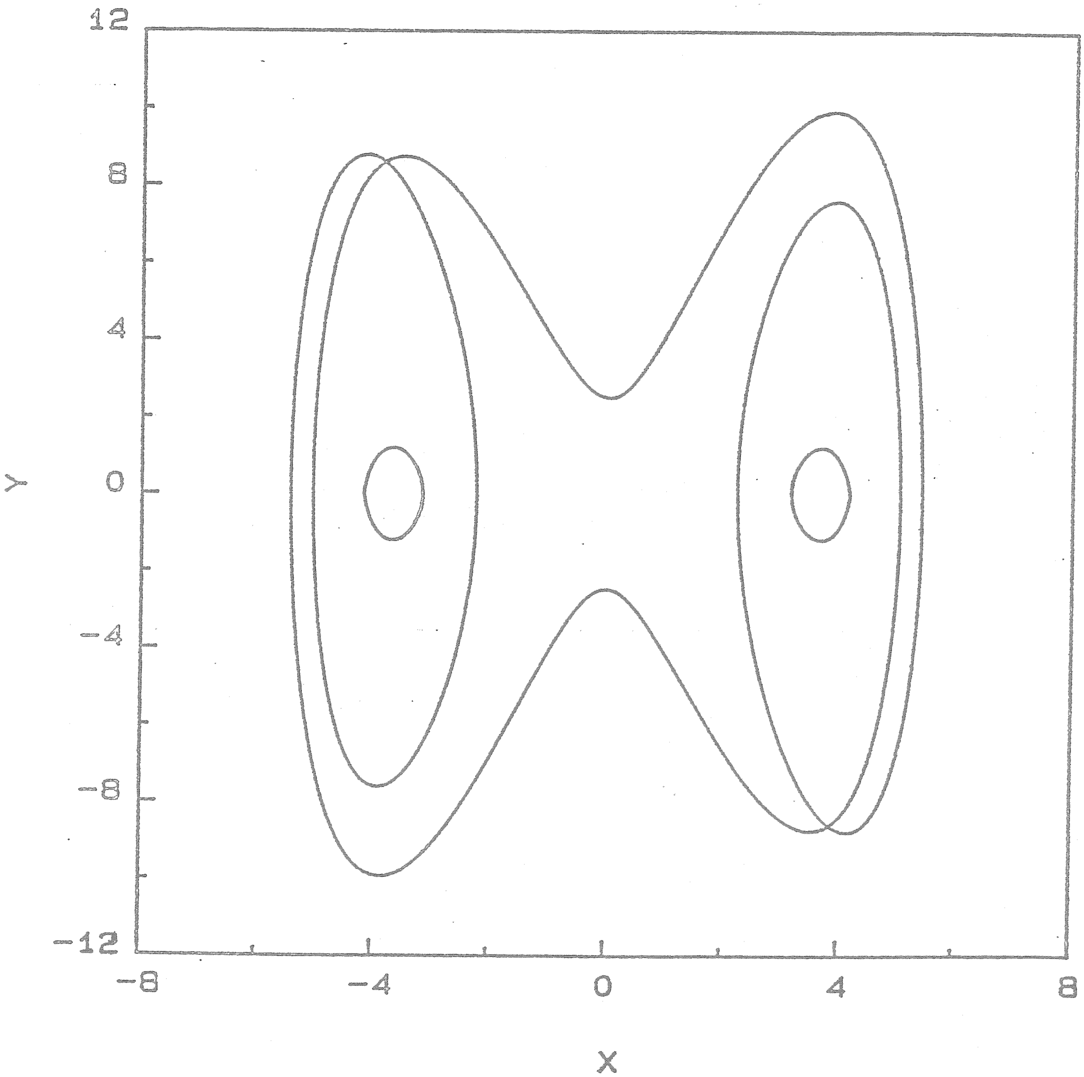
の有限個の周期解が与えられたとき，それらの間の"絡み"を見て，各整数 p に対してこの方程式の p-周期解の個数を評価する方法について論じた。定理2は $(*)$ の p-周期解の数の評価は与えないが，周期解が無限個あるかどうかを判別するには有用と思われる。

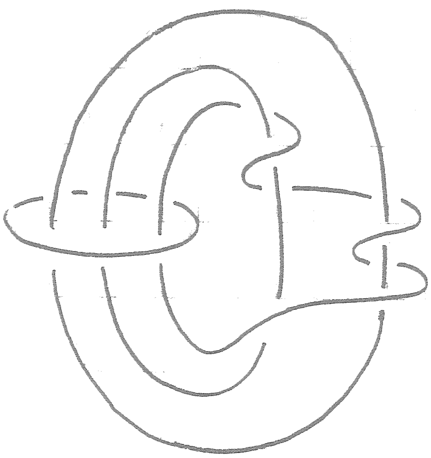
いま(*)のPoincaré変換 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(x) = \phi(1; 0, x)$ によって定める。(*)に対して次の仮定をおく

(**) $\mathbb{R}^2$上の円板 K で $T(K) \subset K$ となるものがある。

いま $x_1(t), \cdots, x_m(t)$ を(*)の周期解とし $\{x_1(0), \cdots, x_m(0)\} = \{x_1(1), \cdots, x_m(1)\} (\subset K)$ とする。このとき§4の方法を少し拡張することにより K と $\{x_1(0), \cdots, x_m(0)\}$ から S^3 のlink $m \vee L$ が定まる。定理2を使って $m \vee L$ がgraph-linkでなければ(*)は無限個の周期解で互いに異なる周期をもつものをもつ事が示せる。

最後に、徳島大工の川上博氏によって得られた微分方程式 $\ddot{x} = -0.1\dot{x} - (-14 + 3.3\cos(2t))x - x^3$ の3個の周期解をcomputerで追跡した図とそれから定まるlink L の絵を掲げておく。但し上の方程式が仮定(**)をみたすことは、数学的には示されていないが、数値解析により K の存在は示唆されている。尚、L はgraph linkではない。





L

References

[A-K-M] R. Adler, A. Konheim, and M. McAndrew, Topological entropy, Trans. A.M.S. 114(1965), 309-319

[Bi] J. Birman, Braids, links, and mapping class groups, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, 1974

[B-K] J. Birman, and M. Kidwell, Fixed points of pseudo-Anosov diffeomorphisms of surfaces, Advances in Math. 46(1982), 217-220

[B-F] P. Blanchard, and J. Franks, The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces, Invent. Math. 62(1980), 333-339

[B] R. Brown, The Lefschetz fixed point theorem, Scott, Foresman and Co., Chicago, III, 1971

[H] M. Handel, The entropy of Orientation reversing homeomorphisms of surfaces, Topology 21(1982), 291-296

[He] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. Math. Studies 86, Princeton Univ. Press, 1976

[Ja] W. Jaco, Lectures on three manifold topology, CBMS Regional Conference Series in Math., No 43, 1980

[J-S] W. Jaco, and P. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Memoirs A.M.S., 1979

[J] B. Jiang, Fixed points of surface homeomorphisms, Bull. A.M.S. 5(1981), 176-178

[Jo] K. Johanson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Lect. Notes in Math. 761, Springer-Verlag, Berlin, 1979

[Ko$_1$] T. Kobayashi, Links of homeomorphisms of a disk and topological entropy, preprint

[Ko$_2$] ____________, Homeomorphisms of 3-manifolds and topological entropy, preprint

[Ko$_3$] ____________, Links of homeomorphisms of surfaces and topological entropy, preprint

[Ma] T. Matsuoka, The number and linking of periodic solusions of periodic systems, Invent. Math. 70(1983), 319-340

[Sc] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15(1983), 401- 487

[Sh] M. Shub, Dynamical systems, filtrations and entropy, Bull. A.M.S. 80(1974), 27-41

[Sm] J. Smillie, Periodic points and surface homeomorphisms of zero entropy, Ergodic Th. & Dynam. Sys. 3(1983), 315-334

[Su] D. Sullivan, Travaux de Thurston sur les groupes quesi-Fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrés sur S^1, Séminaire Bourbaki 554, 01-19 (1979/80)

[Th$_1$] W. Thurston, On the geometry of dynamics of diffeomorphisms of surfaces I, preprint

[Th$_2$] ____________, Hyperbolic structures on 3-manifolds II: surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, preprint

[Th$_3$] ____________, Geometry and topology of 3-manifolds, Lect. Notes, Princeton Univ. (1978)

[Y] K. Yano, Topological entropy と entropy conjecture

球面の安定ホモトピー群, 最近の10年

九大理　岡 七郎

当時の記録によると、今から丁度10年前、筆者は春の学会で「球面の安定ホモトピー群について」という特別講演を行っている。講演の内容は手許に何も残っていないので正確ではないが、当時その存在が知られていた β 族と呼ばれる球面の安定ホモトピー群 $\pi_*^S(S^0)$ の族 $\{\beta_t\}$ が、$\beta_t=\beta_{t/1}$ として、t, s に条件つきで族 $\{\beta_{t/s}\}$ に拡張できる、というものであったかと記憶する。これらの族はすべて BP-filtration が丁度2であり、BP-filtration 2 の元がどの程度存在するかという研究が Smith [21] にはじまり、筆者 [12], Zahler [24], Smith [22] 等によりはじまったばかりの頃であった。この研究から最近次の事実が証明された。

$\underbrace{\text{定理A}}$ [14]-[15]　p を5以上の素数とするとき、$\pi_k^S(S^0)$ の p-rank (p-成分の生成元の個数) は k が大きくなればいくらでも大きくなり得る。

ここに至った経過や、これに派生する話題等について

は講演にゆずるとして，本稿では，講演では細部までのべられないと思われる定理Aの解説，基礎となった事柄について記すことにする。（したがって，本稿の標題は，"最近の10年"をむしろ"最近得られた一結果"に置きかえるべきかもしれない）

$\pi_*^S(S^0)$ の構造については西田[10]による巾零定理（$\pi_k^S(S^0)$, $k>0$, の任意の元 α は巾零，すなわち $\alpha^n=0$ となる n が存在する）や，古くは Serre による $\pi_k^S(S^0)$, $k>0$, は有限（可換）群，といった著るしい成果があり，これらは $\pi_*^S(S^0)$ の"上限"を与えるものと理解される。これに対し，定理Aは"下限"に関するものと言えよう。

定理Aを示唆する代数的事実は，Zahler[24]にはじまり，Miller, Ravenel–Wilson[17]によって整備された，次の結果である。

<u>定理B</u>．$\mathrm{Ext}^{2,n}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ の p-rank は n が大きければいくらでも大きくなり得る。

Ext 云々については本文を参照してもらうとして，定理Bと定理Aをつなぐのは Adams spectral sequence

$$E_2^{**}=\mathrm{Ext}^{**}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*) \Longrightarrow \pi_*^S(S^0)_{(p)}$$

である。最初に述べた"BP-filtration 2"の元とは，spectral sequence で $Ext^{2,*}$ に対応する元という意味である。いま，$Ext^{2,n}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ の位数 p の元全体からなる部分群を R^n，$R^* = \bigoplus_n R^n$，とすれば，R^* の $\mathbb{Z}/p$-基底として

$$(0.1)\qquad \left\{\beta_{t/s} \;\middle|\; t \geq 1,\ 1 \leq s \leq \begin{cases} p^{\nu} & (t = p^{\nu} \text{ のとき}) \\ p^{\nu}+p^{\nu-1}-1 & (t > p^{\nu} \text{ のとき}) \end{cases}\right\},$$

(ただし，$\nu = \nu(t)$ は t を割る最大の p べキ) なるものがとれる [7]。ここで $\beta_{t/s}$ の次数は $t(2p^2-2) - s(2p-2) = (t(p+1)-s)(2p-2)$ であり，$t(p+1)-s$ が同じ値をとる (0.1) を満たす組 (t, s) の数を評価することによって定理 B は得られる。$\beta_{t/s}$ と $\beta_{t/s'}$ が同じ次元のとき，$s' < s$ のとき $\beta_{t/s'}$ を $\beta_{t/s}$ の lower term と呼ぶことにする。このとき，定理 A は次の構成的結果からただちに従う。

<u>定理 A′</u> [14], [15] $p \geq 5$ とする。$t \geq 1$，$1 \leq s \leq 2^{\nu(t)}$ なる任意の (t, s) に対し $\beta_{t/s}$ + lower terms という形の R^* の元で permanent cycle となるものが存在する。更に $1 \leq s \leq 2^{\nu(t)-1}$ ならば $\beta_{t/s}$ 自身 permanent cycle である。

(0.1) における (s, t) の条件が更に $s \leq 2^{\nu(t)}$ と制限されるので定理 A′ による p-rank の増大は定理 B におけるそれよりはるかにゆるやかなものであることを注意する。位数の高い元についても，多少の情報が類似の方法で得られる。

<u>定理 A″</u> [14]. $p \geq 5$ とする。任意の $l \geq 1$ に対し，$\pi^S_k(S^0) \ni$

$\overbrace{\mathbb{Z}/p^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^2}^{l}$（直和因子）となる次元 k が存在する。

<u>定理C</u> [16] $p \geq 5$ とする。$a=3$ または4 とし，任意の $n \geq a$ と無限に多くの $t \geq 2$ に対し，次元 $k = t(p^{n+1}+p^n)(2p-2)-3$ において $\pi_k^S(S^0)$ は位数 p^a の元を含む。

定理Cは $\mathrm{Ext}^{3,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ の情報[7]を必要とする。これらの定理において，permanent cycle であるという事は differential を直接計算するのではなく，対応すべきホモトピーの元を構成してみせる，という事で得られる（§4の(4.4),(4.5)）構成されたホモトピーの元が実際 non-zero（あるいは linearly independent）であることは定理B，あるいは(0.1)，のような代数的事実にもとづく。

本稿では紙数の関係で定理Bの解説（および証明）が中心となり定理Aそのものにはあまりふれられなかった。§4は証明等一切省き余分な説明もたまぬままになったが，(4.6)の少し後にある step (3) が，定理Aを得るに必要なホモトピーの元をいかに構成すべきかを示唆したものであり，その構成において，step (3) にあらわれる有限スペクトラム $K_j = S^0 \cup_p e^1 \cup e^{j(2p-2)+1} \cup_p e^{j(2p-2)+2}$ の ring structure（可換性，結合性およびそれらの類似概念）が有効に働くことを付言する。(1984.6.1)

§1. Brown-Peterson homology

pを素数とし，BPを（p-localな）Brown-Peterson スペクトラムとする。BPは最初Brown-Peterson [3] によって，そのmod p cohomology群がSteenrod algebra上のmoduleとして，reduced power operation全体となるものとして与えられ，その後Quillen によって[18],[1] complex Thom スペクトラムMUのp-localizationのwedge summandとして与えられた。

XをCW complexまたはスペクトラムとするとき，$BP_*(X) = \pi_*(BP \wedge X)$と置いて，(reduced) homology theory $X \mapsto BP_*(X)$が定義される。BPは可換かつ結合的な積 $\mu : BP \wedge BP \to BP$（vector bundleのWhitney和によるBUの積 $BU \times BU \to BU$ は可換かつ結合的であり，これはThomスペクトラムの積 $MU \wedge MU \to MU$ を導き，このp-localizationによって与えられるものと思ってよい）およびμに対するunit $\iota : S^0 \to BP$，すなわち $S^0 \wedge BP = BP = BP \wedge S^0$ とみて，$\mu(\iota \wedge 1_{BP}) = 1_{BP} = \mu(1_{BP} \wedge \iota)$ なるもの，を持つ。$a, b \in BP_*(S^0) = \pi_*(BP)$（$= BP_*$と以下書く），$x \in BP_*(X)$に対し，$ab = \mu(a \wedge b) \in BP_*$，$ax = (\mu \wedge 1_X)(a \wedge x) \in BP_*(X)$と置いて，$BP_*$は（次数つき）可換環，$BP_*(X)$は（次数つき）左$BP_*$-moduleとなる。$\iota \in \pi_0(BP) = BP_0$はこの積に関する単位元である。

とくに $X=BP$ のとき，$BP_*(BP)=\pi_*(BP\wedge BP)$ は $xa=(1_{BP}\wedge\mu)(x\wedge a)$，$x\in BP_*BP$，$a\in BP_*$，により 右 BP_*-module の構造も持ち，$a(xb)=(ax)b$，$a,b\in BP_*$，$x\in BP_*BP$ がなりたつ。外部ポントリャーギン積 $BP_*(X)\otimes BP_*(Y)\longrightarrow BP_*(X\wedge Y)$ において $X=Y=BP$ とし，$\mu_*:BP_*(BP\wedge BP)\to BP_*BP$ をつないで内部ポントリャーギン積 $\phi:BP_*BP\otimes BP_*BP\longrightarrow BP_*BP$ が定義される。すなわち，$\phi(x\otimes y)=(\mu\wedge\mu)(1_{BP}\wedge T\wedge 1_{BP})(x\wedge y)$，$T:BP\wedge BP\Rightarrow BP\wedge BP$ は座標を入れかえる写像，である。これは可換かつ結合的な積であるが，BP_*-module structure に関しては，η_R，$\eta_L:BP_*\to BP_*BP$ を $\iota\wedge 1_{BP}$，$1_{BP}\wedge\iota:BP\to BP\wedge BP$ によって誘導されるものとするとき，$a\in BP_*$，$x\in BP_*BP$ に対し $ax=\phi(\eta_L(a)\otimes x)$，$xa=\phi(x\otimes\eta_R(a))$ がなりたつ。この意味で η_R，η_L は それぞれ right unit，left unit と呼ばれる。これらは ring homomorphism であり，η_R は $X=BP$ のときの Hurewicz homomorphism $\pi_*(X)\to BP_*(X)$，η_L は $\iota:S^0\to BP$ が BP-homology に誘導する homomorphism のことである。

よく知られているように

(1.1) $\quad BP_*=\mathbb{Z}_{(p)}[v_1,v_2,\cdots]$，$|v_i|=2(p^i-1)$

である（MU の場合には Milnor [9] によって証明されたことである）ただし，$\mathbb{Z}_{(p)}$ は $\mathbb{Z}$ の局所化 すなわち 分母が p と素な有理数

全体のなす $\mathbb{Q}$ の subring である。また

(1.2) $H_*(BP) = \mathbb{Z}_{(p)}[m_1, m_2, \cdots]$, $|m_i| = 2(p^i-1)$

であり（$\mathbb{Z}/p$ 係数で考えると，mod p homology は mod p cohomology，すなわち reduced power の全体，の dual であり，それは，Milnor の Steenrod algebra の dual の計算をみればわかる様に，係数を $\mathbb{Z}/p$ におきかえた上記の形の多項式環である。それは偶数次元のみから成るので Bockstein operation はすべて 0 であり，BP の正確な定義を与えていないので厳密性を欠くが，(1.2) は容易に想像されよう），Hurewicz homomorphism $BP_* = \pi_*(BP) \to H_*(BP)$ は単射であって，その形は，帰納的に，

(1.3) $v_n = pm_n - \sum_{i=1}^{n-1} m_i v_{n-i}^{p^i}$ in $H_*(BP)$

である（Hazewinkel [4]，より正確に言えば，(1.3) は (1.1)の 生成元 $\{v_n\}$ のとり方を定めるものであり，別のとり方もあり得る。実際 Araki [2] による生成元 $\{v_n\}$ もある）．次に，

(1.4) $BP_*BP = BP_*[t_1, t_2, \cdots]$, $|t_i| = 2(p^i-1)$.

これはポントリャーギン環として，また左 BP_*-module として一致する。ただし，$a \in BP_*$ に対し $\eta_L(a) \in BP_*BP$ は (1.4)の右辺の係数環 BP_* の元 a のことであり，この意味において $\eta_L(a)=a$ である。η_R は η_L とは一致せず，その形は homology に imbed したとき次の形で与えられる。まず $H_*(BP\wedge BP) = H_*(BP)[t_1, t_2, \cdots]$

(Künneth formula) であり, Hurewicz homomorphism

$BP_*BP = \pi_*(BP\wedge BP) \to H_*(BP\wedge BP)$ は 係数環 について

Hurewicz homomorphism $BP_* \to H_*(BP)$ であり, $t_i \mapsto t_i$ で与えられる。したがって単射である。$\eta_R : BP_* \to BP_*BP$ は $\eta_R : H_*(BP) \to H_*(BP\wedge BP)$ に拡張され (同様の定義でよい), 後者は

$$(1.5) \qquad \eta_R(m_n) = \sum_{i=0}^{n} m_i t_{n-i}^{p^i}$$

であたえられる。ただし $m_0 = 1$, $t_0 = 1$ とする。これと (1.3) から, BP_*BP において,

$$(1.6) \qquad \eta_R(v_1) = v_1 + pt_1$$

$$(1.7)[6] \quad \eta_R(v_n) \equiv v_n \mod I_n \quad (n \geq 1)$$

$$(1.8)[8] \quad \eta_R(v_n) \equiv v_n + v_{n-1}t_1^{p^{n-1}} - v_{n-1}^p t_1 \mod I_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

等が導かれる。ただし, $v_0 = p \in BP_*$ とおいて, I_n は BP_* のイデアル $(v_0, v_1, \cdots, v_{n-1})$ であり, 上記の mod I_n は, mod $\eta_L(I_n)\cdot BP_*BP$ のことである。なお (1.7) により

$$(1.9) \qquad \eta_L(I_n)\cdot BP_*BP = BP_*BP\cdot\eta_R(I_n)$$

となる。(1.8) よりさらに精密な η_R の評価式は Ravenel [19] によって与えられている。

さて, 次の homomorphism

$$BP_*BP \otimes BP_*(X) \xrightarrow{\wedge} \pi_*(BP\wedge BP\wedge BP\wedge X) \xrightarrow{(1\wedge\mu\wedge 1)_*} \pi_*(BP\wedge BP\wedge X) = BP_*(BP\wedge X)$$

は $xa\otimes y - x\otimes ay$, $x \in BP_*BP$, $a \in BP_*$, $y \in BP_*(X)$, なる形の元を 0 に写し、

$$m : BP_*BP \otimes_{BP_*} BP_*(X) \to BP_*(BP\wedge X)$$

を定義する。$c : BP_*BP \to BP_*BP$ を，座標を入れかえる写像 $T : BP\wedge BP \to BP\wedge BP$ から導かれる anti-automorphism (conjugation) とするとき あきらかに $c\eta_R = \eta_L$, $c\eta_L = \eta_R$, $c^2 = 1$, であり，c は BP_*BP の 左 BP_*-module structure を右-module structure に(および その逆も) 写す (すなわち $c(ax) = \pm c(x)a$, $c(xa) = \pm ac(x)$, $a\in BP_*$, $x\in BP_*BP$, $\pm = (-1)^{|a||x|}$)。(1.4) により，BP_*BP は 左 BP_*-module として free であるが，c によって 右 module としても free である。したがって $BP_*BP \otimes_{BP_*} -$ は exact sequence を exact sequence に写し，$X \mapsto BP_*BP\otimes_{BP_*} BP_*(X)$ は homology functor である。また $X \mapsto BP_*(BP\wedge X)$ もそうであり，$X = S^0$ のとき m は 同型，したがって m は 常に 同型 である。

$$\psi_X = m^{-1}(\iota\wedge 1_X)_* : BP_*(X) \to BP_*(BP\wedge X) \to BP_*BP \otimes_{BP_*} BP_*(X)$$

とおくと，これは $BP_*(X)$ に 結合的な BP_*BP-comodule over BP_* の構造 をあたえ，とくに $\psi = \psi_{BP} : BP_*BP \to BP_*BP\otimes_{BP_*} BP_*BP$ によって BP_*BP は BP_* 上の coalgebra となる。その counit ε は $\varepsilon = \mu_* : BP_*BP = \pi_*(BP\wedge BP) \to \pi_*(BP) = BP_*$ で与えられる。すなわち，積 ϕ が $\otimes_{BP_*}$ 上で定義されないことと unit を 左右 別に 考えねばならない (η_R と η_L) ことを除けば，BP_*BP は BP_* 上の Hopf algebra の構造をもつ [1]。特に

(1.10) $X=S^0$ のとき $\psi_{S^0} = \eta_L : BP_* = BP_*(S^0) \to BP_*BP \otimes_{BP_*} BP_* \cong BP_*BP$

(1.11) $\psi\eta_R(a) = 1\otimes\eta_R(a)$, $\psi\eta_L(a) = \eta_L(a)\otimes 1$, $a\in BP_*$.

$\psi(t_n)$ は J.モラバー に imbed したとき 帰納的に

$$\sum_{i+j=n} m_i (\psi t_j)^{p^i} = \sum_{i+j+k=n} m_i t_j^{p^i} \otimes t_k^{p^{i+j}}$$

であたえられ, 特に $\psi(t_1) = t_1\otimes 1 + 1\otimes t_1$.

§2. Ext_{BP_*BP} の元の構成

I を BP_* のイデアルとする。inclusion $I\subset BP_*$ が BP_*BP-comodule (以下単に comodule とする) map になる様な comodule structure が I に入るとき, I を <u>invariant</u> であるという。ただし, BP_* の comodule structure は (1.10) で与えられたものである。これは $\eta_L(I)\cdot BP_*BP = BP_*BP\cdot\eta_R(I)$ と同等であることは容易にたしかめられ, 特に (1.9) より I_n は invariant である。I を invariant ideal とするとき, $a\in BP_*$ が invariant mod I とは $\eta_R(a) \equiv \eta_L(a)$ mod I のことを言う。ここに, mod I は mod $\eta_L(I)\cdot BP_*BP$ $(= BP_*BP\,\eta_R(I))$ のことである。このとき I と a で生成されるイデアル (I, a) は invariant になり, η_R をてきとうな invariant ideal を mod に計算す

れば，invariant ideal が新しく得られることがわかる。また，このとき，BP_*/I は comodule であり，$a: BP_* \to BP_*/I$（a による乗法）は comodule map，よって $a \in \mathrm{Hom}(BP_*, BP_*/I)$ $= \mathrm{Ext}^0(BP_*, BP_*/I)$ である。ここで Hom, Ext は BP_*BP-comodule としてのものであり，本来 Hom, Ext の右下に書くべき BP_*BP を省略している。例えば，(1.6) より $\eta_R(v_1^{p^n}) \equiv v_1^{p^n} \mod (p^{n+1})$（$\eta_R$ は ring homo，右辺の $v_1^{p^n}$ は $\eta_L(v_1^{p^n})$ のこと），よって $v_1^{mp^n}$ は invariant mod p^{n+1}，すなわち

(2.1) $(p^{n+1}, v_1^{mp^n})$ $(m \geq 1, n \geq 0)$ は invariant ideal，

$$v_1^{mp^n} \in \mathrm{Hom}(BP_*, BP_*/(p^{n+1}))$$

また (1.7) より $\eta_R(v_n^m) \equiv v_n^m \mod I_n = (p, v_1, \cdots, v_{n-1})$，よって

(2.2) $(p, v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n^m)$ は invariant，$v_n^m \in \mathrm{Hom}(BP_*, BP_*/I_n)$。

$n=2$ のとき，$\eta_R(v_2) = v_2 + px + v_1 y$ と書けるから，(2.1) と同様にして $\eta_R(v_2^{p^n}) \equiv v_2^{p^n} + v_1^{p^n} y^{p^n} \mod p \equiv v_2^{p^n} \mod (p, v_1^{p^n})$ したがって

(2.3) $(p, v_1^j, v_2^{ap^n})$，$1 \leq j \leq p^n$，$a \geq 1$，は invariant，

$$v_2^{ap^n} \in \mathrm{Hom}(BP_*, BP_*/(p, v_1^j)).$$

また $\eta_R(v_2^{p^n}) = \sum_{k=0}^{p^n} \binom{p^n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p^j v_1^{k-j} x^j y^{k-j} v_2^{p^n-k}$ において，k を割る最大の p べきを p^l とすれば $\binom{p^n}{k}$ を割る最大の p べきは p^{n-l} であるから，mod p^{n-m+1} で $\eta_R(v_2^{p^n})$ の右辺は $l \leq m-1$

であるような $\overbrace{k}^{(>0)}$ については(j のいかんにかかわらず) $\equiv 0$, $l=m$ であるような k については $j \geqq 1$ のとき $\equiv 0$, 残る場合, すなわち $l>m$ または $l=m$, $j=0$ のとき v_1 のベキ $k-j$ の最小値は p^m ($k=p^m$, $j=0$ のとき) である。よって $\eta_R(v_2^{p^n}) \equiv v_2^{p^n} \bmod (p^{n-m+1}, v_1^{p^m})$, $(p^{n-m+1}, v_1^{p^m})$ が invariant になる為には, (2.1) より $n \leqq 2m$, 以上の計算から

(2.4) $a \geqq 1$, $m \leqq n \leqq 2m$, のとき $(p^{n-m+1}, v_1^{p^m}, v_2^{ap^n})$ は invariant, $v_2^{ap^n} \in \mathrm{Hom}(BP_*, BP_*/(p^{n-m+1}, v_1^{p^m}))$.

以上の計算例は invariant ideal の生成元が v_i のベキであるものに限っているが, もっと複雑な形のものの存在も多く知られている。簡単にわかる例として, (2.1) から $(p^{n+1+s}, p^s v_1^{mp^n})$ は invariant である。p が奇素数ならば (p^l, a) なる形の invariant ideal はこのようなものに限られることがわかるが, $p=2$ のときは a として $\{v_i\}$ の単項式でないものも存在する。その最初(最少次元という意味で)の例は, v_1^4 は, (2.1) より, invariant mod $8=2^3$ であったが, v_1^4 に適当な"補正項"をつけ加えることにより mod の 2 ベキをもう1つ増やすことができる。すなわち $v_1^4+8v_1v_2$ は invariant mod $16=2^4$ である。この invariant ideal $(16, v_1^4+8v_1v_2)$ は後述の様に, $|v_1^4|-1=7$ 次元の球面の安定ホモトピー群の $\overbrace{\text{2-成分の元}}^{\pi_7^S(S^0)_{(2)}}$

をあたえるが，その元の位数は ideal の生成元にあらわれる 16 であり，この ideal が $\pi_7^S(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/16$ の生成元をあたえることになる。この例の様に，"補正項"を加えることによってより低い生成元のベキを増やすという操作は，3つの元で生成される invariant ideal を得る際には常に必要となって来る [7], [20]（特に $p=2$ ではこの操作が2段階に及ぶことになる [20]）．本稿では，この様な操作を必要とする様なくわしい結果は必要としないので省略する。

BP_* のイデアル $J=(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ において各 $J_i = (a_0, \cdots, a_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$, は invariant, a_i は invariant mod J_i とする。このとき

$$(2.5)'' \quad 0 \to BP_*/J_i \xrightarrow{a_i} BP_*/J_i \to BP_*/J_{i+1} \to 0$$

は comodule の short exact sequence である。ただし，a_i は元 a_i による乗法，$BP_*/J_i \to BP_*/J_{i+1}$ は自然な全射，$J_0 = 0$ とする。$\mathrm{Ext}^*(BP_*, \ )$ をこれに施せば long exact sequence が出来る。その coboundary を

$$\delta_i : \mathrm{Ext}^s(BP_*, BP_*/J_{i+1}) \to \mathrm{Ext}^{s+1}(BP_*, BP_*/J_i)$$

とする。$a_i : BP_*/J_i \circlearrowleft$ は次数 $|a_i|$ であるから，internal degree も書けば $\delta_i : \mathrm{Ext}^{s,t} \to \mathrm{Ext}^{s, t-|a_i|}$ である。$BP_*/J_0 = BP_*$ であるから合成

$$\delta_0\delta_1\cdots\delta_{n-2} : Ext^{s,t}(BP_*, BP_*/J_{n-1}) \to Ext^{s+n-1,\, t-(|a_0|+\cdots+|a_{n-2}|)}(BP_*, BP_*)$$

が定義される。 $a_{n-1} \in Ext^{0,|a_{n-1}|}(BP_*, BP_*/J_{n-1})$ であるから，元

(2.5) $$\alpha(J) = \delta_0\delta_1\cdots\delta_{n-2}(a_{n-1}) \in Ext^{n-1,\, |a_{n-1}|-(|a_0|+\cdots+|a_{n-2}|)}(BP_*, BP_*)$$

が得られる．とくに，$t \geqq 1$ に対し

(2.6)
$$\alpha_t = \alpha(p, v_1^t) \in Ext^{1,(2p-2)t}(BP_*, BP_*)$$
$$\beta_t = \alpha(p, v_1, v_2^t) \in Ext^{2,(2p^2-2)t-(2p-2)}(BP_*, BP_*)$$
$$\gamma_t = \alpha(p, v_1, v_2, v_3^t) \in Ext^{3,(2p^3-2)t-(2p^2-2)-(2p-2)}(BP_*, BP_*)$$

とおく。((2.2) により，同じ方法で Ext^n の元が定義される) これらは Ext^1, Ext^2, Ext^3 を決めることにおいて中心的な役割をはたす元である。更に (2.1), (2.3) により

(2.7)
$$\alpha_{mp^n/n+1} = \alpha(p^{n+1}, v_1^{mp^n}) \in Ext^{1,*}(BP_*, BP_*),\quad m \geqq 1,\ n \geqq 0,$$
$$\beta_{ap^n/j} = \alpha(p, v_1^j, v_2^{ap^n}) \in Ext^{2,*}(BP_*, BP_*),\quad 1 \leqq j \leqq p^n,\ n \geqq 0,\ \underset{a \geqq 1}{(a,p)=1},$$

が定義される。

(2.8)
$$\alpha_{t/1} = \alpha_t,\quad \beta_{t/1} = \beta_t,\quad p^{n+1}\alpha_{mp^n/n+1} = 0,\quad p\beta_{ap^n/j} = 0,$$
$$p\alpha_{mp^n/n+1} = \alpha_{mp^n/n} \quad (= \alpha_{(mp)p^{n-1}/n})$$

である。最後の関係は可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & BP_* \arrow[r, "p^{n+1}"] \arrow[d, "p"] & BP_* \arrow[r] \arrow[d, equal] & BP_*/(p^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & BP_* \arrow[r, "p^n"] & BP_* \arrow[r] & BP_*/(p^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ここに $\pi(a) = a$) から下の可換図式

$$\begin{tikzcd}
Ext^0(BP_*, BP_*/(p^{n+1})) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\pi_*"] & Ext^1(BP_*, BP_*) \arrow[d, "\times p"] \\
Ext^0(BP_*, BP_*/(p^n)) \arrow[r, "\delta_0"] & Ext^1(BP_*, BP_*)
\end{tikzcd}$$

が得られ，$\pi_*(v_1^{mp^n}) = v_1^{mp^n}$ から従う。

したがって (2.7) の $\alpha_{mp^n/n+1}$ は $(m,p)=1$ のときが本質的である。(2.4) から定義される元についても同様に

$$p^{n-m}\alpha(p^{n-m+1}, v_1^{p^m}, v_2^{ap^n}) = \beta_{ap^n/p^m}$$

となり、また v_1 のべきが丁度 p べきでない場合も適当な制限のもとで (2.4) と類似のイデアルが得られ、(2.7) の $\beta_{ap^n/j}$ の p-divisibility が得られる。しかし、これを完全に決めるのは上記の様な η_R の直接計算（てきとうなイデアルを法として）だけでは大変で (cf. [8])、chromatic spectral sequence と呼ばれる Ext に収束する spectral sequence の計算によって、Miller, Ravenel-Wilson [7] (p 奇素数のとき) および 下村 [20] Mitchell (unpublished) ($p=2$ のとき) によって $\mathrm{Ext}^2(BP_*, BP_*)$ の完全決定と共に得られた。結果（の一部）を記すと、

(2.9) p が奇素数とする。$\varphi(n,j) \geq 0$ を $p^\ell \mid j$ および $j \leq \begin{cases} p^{n-\ell} & a=1 \text{ のとき} \\ p^{n-\ell}+p^{n-\ell-1}-1 & a>1 \text{ のとき} \end{cases}$ を満たす最大の数 ℓ とするとき、(2.7) の $\beta_{ap^n/j}$ は $p^{\varphi(n,j)}$ で割れ、$p^{\varphi(n,j)+1}$ では割れない。

($p=2$ のときは φ の形は非常に複雑である)。

§3. Ext^1, Ext^2 の構造

よく知られている様に Ext を計算する手段として、cobar complex がある。Hopf algebra の場合は May の Ph.D (Princeton 1964) にあるが、BP_*BP は (1.10) の手前で注意した様に、正確には Hopf algebra ではなく、この場合の cobar complex は Miller の Ph.D (Princeton 1974) による。

M を BP_*BP - $\underbrace{\text{comodule}}^{\text{over } BP_*}$ とする。すなわち M は 左 BP_*-module であって BP_*-map である co-product $\overbrace{\ }^{\psi_M :}M \to BP_*BP \underset{BP_*}{\otimes} M$ (結合的 かつ co-unit $\varepsilon : BP_*BP \to BP_*$ をもつ) をみたすものである。§1 の後半で述べた様に $BP_*(X)$ はその例である。

$$\Omega^0 M = M, \quad \Omega^n M = \underbrace{BP_*BP \underset{BP_*}{\otimes} \cdots \underset{BP_*}{\otimes} BP_*BP}_{n\text{-copies of } BP_*BP} \underset{BP_*}{\otimes} M \quad (n \geq 1)$$

とし、coboundary

$$d : \Omega^n M \to \Omega^{n+1} M$$

を
$$\begin{aligned} d(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n \otimes m) &= 1 \otimes \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n \otimes m \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varepsilon(i)} \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_{i-1} \otimes \gamma_i' \otimes \gamma_i'' \otimes \gamma_{i+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_n \otimes m \\ &+ (-1)^{\varepsilon(n+1)} \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n \otimes m' \otimes m'' \end{aligned}$$

で定義する。ただし、$\gamma_i \in BP_*BP$, $\overbrace{m \in M,}^{\text{であって}}$ $\gamma_i', \gamma_i'', m' \in BP_*BP$, $m'' \in M$ は $\psi(\gamma_i) = \Sigma \gamma_i' \otimes \gamma_i''$, $\psi_M(m) = \Sigma m' \otimes m''$ なるもの、この ψ の式の右辺の summation の記号は省略される習慣があり、d の上式の右辺においては この略記法を用いている。本来 各 γ_i および m

について，$'$，$''$ のついた元は index つきであり，その index に関する summation をとるものと，d の定義は理解される。また $\varepsilon(i) = |\gamma_1| + \cdots + |\gamma_{i-1}| + i$ である。$(\Omega^* M, d)$ は cochain complex になり，M の cobar construction と呼ばれる。この cohomology が (Hom の derived functor である) Ext ~~である~~ に一致する。すなわち

$$\mathrm{Ext}^n_{BP_*BP}(BP_*, M) = H^n(\Omega^* M, d).$$

$M = BP_*$ のとき，(1.10) により $\psi_M = \eta_L$，$\Omega^1 M \cong BP_*BP$

この同型は $\gamma \otimes a \to \gamma\eta_R(a)$ であたえられる。したがって d の定義から，

(3.1) $\quad d : \Omega^0 BP_* = BP_* \longrightarrow \Omega^1 BP_* = BP_*BP$

は $d(a) = \eta_R(a) - \eta_L(a) = \eta_R(a) - a$ であたえられる。

J を BP_* の invariant ideal とするとき $J \cdot BP_*BP = BP_*BP \cdot J$ $(\subset BP_*BP)$ を同じ J で表し，$M = BP_*/J$ について同様に

(3.2) $\quad d : \Omega^0 BP_*/J = BP_*/J \to \Omega^1 BP_*/J = BP_*BP/J$

は $d(a) = \eta_R(a) - a \mod J$ であたえられる。

これは a が cocycle であることと invariant mod J であることが同値であることを意味している。すなわち $\mathrm{Ext}^0(BP_*, BP_*/J)$ を決めることは invariant mod J である BP_* の元を求めることと同等であり，$a : BP_* \to BP_*/J$ が comodule map (すなわち Hom $= \mathrm{Ext}^0$ の元) である a を決めることと同じである。特に，(2.4) のすぐ後の注意 または (1.8) より，$J = 0$，$J = (p)$ の場合，

$$(3.3)\quad \mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(p)} & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases}$$

$$(3.4)\quad \mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*/(p)) = \mathbb{Z}/p\,[v_1].$$

$M = BP_*$ または $BP_*/(p)$ の積により，Ext の Yoneda 積

$$\mathrm{Ext}^{s,t}(BP_*, M) \otimes \mathrm{Ext}^{s',t'}(BP_*, M) \to \mathrm{Ext}^{s+s',t+t'}(BP_*, M)$$

が定義され，$\mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, M)$ は ring，$\mathrm{Ext}^{n,*}(BP_*, M)$ はその上の module となる。(3.3)，(3.4) は この意味で ring として同型である。より一般に，Landweber [6] による結果

$$\mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*/I_n) = \mathbb{Z}/p\,[v_n]$$

がある。これは (1.8) よりも古く，MU の言葉で表わされていた。

以下 <u>p を奇素数</u> として，$M = BP_*, BP_*/(p)$ について Ext^1 を調べよう。$0 \to BP_* \xrightarrow{p} BP_* \xrightarrow{\pi} BP_*/(p) \to 0$ の long exact seq.

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*/(p)) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*) \xrightarrow{\times p} \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*) \to \cdots$$

において internal degree $* = 0$ のときは (3.3)，(3.4) より $\pi_* : \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathbb{Z}/p$ は onto，よって $\times p$ は単射，$\mathrm{Ext}^1(BP_*, BP_*)$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$-module であるので $\mathrm{Ext}^{1,0}(BP_*, BP_*) = 0$。$* > 0$ のとき (3.3) より $\pi_* = 0$ で δ_0 は単射。$\times p$ の kernel は (3.4) により $* \not\equiv 0 \bmod 2p-2$ のとき 0，$* = t(2p-2)$ のとき $(t>0)$，$\mathbb{Z}/p$ で $\alpha_t = \delta_0(v_1^t)$ で生成される。したがって

(3.5) $\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*) = 0$ if $* \not\equiv 0 \bmod 2p-2$ or $* = 0$

$\mathrm{Ext}^{1,t(2p-2)}(BP_*, BP_*)$ $(t>0)$ は巡回 p-群で，位数 p の部分群は α_t で生成される。

$t=ap^n$, $(a,p)=1$, $a\geqq 1$, $n\geqq 0$, と一意的に表すとき, (2.8) により, α_t は p^n で割りきれた。したがって $\mathrm{Ext}^{1,t(2p-2)}$ は位数が少なくとも p^{n+1} であるが、これは best である ($p=2$ のときは (3.5) は正しいが, (2.4) のすぐ後の注意にある様に, p-divisibility については best でない)。これは cobar complex において (2.7) の $\alpha_{ap^n/n+1}$ をみることによってわかる。すなわち $v_1^{ap^n}\in\Omega^0 BP_*=BP_*$ に対し, $\overbrace{(3.1)\text{ より}}^{(1.6)\text{に}}$ $d(v_1^{ap^n})=(v_1+pt_1)^{ap^n}-v_1^{ap^n}$, (2.3) のすぐ後の様に二項係数の p べきを調べると

(3.6) $d(v_1^{ap^n})=p^{n+1}c(ap^n)$, $c(ap^n)\in\Omega^1 BP_*$, と一意的に書け, $c(ap^n)$ は cocycle, $c(ap^n)\equiv a v_1^{ap^n-1}t_1 \bmod p$ である。

(一意性および cocycle であることは $\Omega^1 BP_*$, $\Omega^2 BP_*$ に torsion がないことからでる) このとき $c(ap^n)$ のコホモロジー類 $[c(ap^n)]$ が $\alpha_{ap^n/n+1}$ であることは容易にわかる。この元が更に p で割れるというのは $c(ap^n)=pc'+d(c'')$ なる形をしていることであるが この式を p^{n+1} 倍すると $d(v_1^{ap^n})=p^{n+2}c'+p^{n+1}d(c'')$, すなわち $v_1^{ap^n}-p^{n+1}c''$ は invariant mod p^{n+2} (となる $c''\in BP_*$ が存在する) ということで p が奇素数なら, これは起らない ($p=2$ のときは $a=1$, $n=2$, $c''=v_1v_2$ として実際起った)。以上から

定理 3.7 (Novikov [11]) p を奇素数とするとき $\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*,BP_*)$ $=0$ if $*=0$ or $*\not\equiv 0 \bmod 2p-2$, $=\mathbb{Z}/p^{n+1}$ (生成元 $\alpha_{ap^n/n+1}$) if $*=ap^n(2p-2)$ ($n\geqq 0$, $(a,p)=1$, $a\geqq 1$)。

次に $\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$ を調べよう。(3.5) の上にある long exact sequence を右にのばすと $\xrightarrow{\times p}\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*,BP_*)\xrightarrow{\pi_*}\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*,BP_*/(p))$ であり、(3.7) より Image π_* は $\pi_*(\alpha_{ap^n/n+1})$ で生成される $\mathbb{Z}/p$-module である。(1.11) および d の定義により $t_1 \in \Omega^1 BP_* = BP_*BP$ は cocycle，その mod p image $t_1 \in \Omega^1 BP_*/(p) = BP_*BP/(p)$ もそうである。$h_0 = [t_1] \in \mathrm{Ext}^{1,2p-2}(BP_*, M)$, $M = BP_*, BP_*/(p)$, とおく。$M = BP_*$ では $h_0 = \alpha_1$ ($\eta_R(v_1) = pt_1$ より)，$\pi_* h_0 = h_0$ である。$\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$ は (3.4) より $\mathbb{Z}/p[v_1]$-module であるが，(3.6) の $c(ap^n)$ mod p の式により $\pi_*(\alpha_{ap^n/n+1}) = av_1^{ap^n-1}h_0$ がわかる。これは non-zero であり，従って $v_1^t h_0 \neq 0$ in $\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*,BP_*/(p))$ $(\forall t \geq 0)$，よって

(3.8)[8] Image π_* ($\subset \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$) は $\mathbb{Z}/p[v_1]$-free module で，rank 1，生成元は h_0 である。とくに $\pi_*(\alpha_{ap^n/n+1}) = av_1^{ap^n-1}h_0$.

$\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$ には $\mathbb{Z}/p[v_1]$-torsion element (すなわち $v_1^t x = 0$ $(\exists t)$ なる元 x) が実際あらわれ，全体の構造は複雑である [8]。例えば (2.7) の $\beta_{ap^n/j} = \delta_0\delta_1(v_2^{ap^n})$ を定義する途中に表われる元 $\delta_1(v_2^{ap^n}) \in \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$ について $v_1^j \delta_1(v_2^{ap^n}) = 0$ であることは，$0 \to BP_*/(p) \xrightarrow{v_1^j} BP_*/(p) \to BP_*/(p, v_1^j) \to 0$ に関する long exact sequence を見ればすぐわかる。

したがって，(3.8) より

(3.9) $\delta_1(v_2^{ap^n}) \notin \mathrm{Image}\,\pi_*$ または $\delta_1(v_2^{ap^n})=0$，ただし

$$\delta_1 : \mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*/(p,v_1^j)) \to \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p)),\quad j \le p^n.$$

さて，(2.7) の $\beta_{ap^n/j} \in \mathrm{Ext}^{2,*}(BP_*, BP_*)$ であるが，この internal degree $*$ は $ap^n(2p^2-2)-j(2p-2)$ である。したがって同じ internal degree にいくつかの β が存在することが起こる。実際，例えば

(3.10) $\mathrm{Ext}^{2,p^n(2p-2)}(BP_*, BP_*) \ni \beta_{a_k p^{n+1-2k}/p^{n+1-2k}}$，$1 \le k \le [\frac{n+1}{2}]$，

ただし $a_k = \dfrac{p^{2k-1}+1}{p+1} = p^{2k-2}-p^{2k-3}+\cdots+1$.

同じ internal degree にある異なる β については index j が異なる，すなわちそれらは (3.9) の δ_1（j に depend する）について異なった δ_1 の image として定義される。それら δ_1 を区別するために (3.9) の δ_1 を $\delta_{1,j}$ と記すと $j'<j$ のとき可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & BP_*/(p) \arrow[r, "v_1^j"] \arrow[d, "v_1^{j-j'}"] & BP_*/(p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & BP_*/(p,v_1^j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & BP_*/(p) \arrow[r, "v_1^{j'}"] & BP_*/(p) \arrow[r] & BP_*/(p,v_1^{j'}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

によって，(2.8) の最後の関係の証明と同じ方法で，

(3.11) $\delta_{1,j'}(v_2^{ap^n}) = v_1^{j-j'}\,\delta_{1,j}(v_2^{ap^n}) = \delta_{1,j}(v_1^{j-j'}v_2^{ap^n})$

となり，同じ次元で可能な j の最大のものをとれば，すべての β は同じ δ_1 の image にとることができる。ここまでくれば定理 B の証明は容易である。

<u>定理 B の証明</u>　$\beta_{t_1/s_1}, \cdots, \beta_{t_k/s_k}$ を同じ internal degree n の元とする。すなわち $t_i(2p^2-2)-s_i(2p-2)=n$（一定）。ただし，

t を割る最大の p べきを $p^{\nu(t)}$ とするとき $1 \leqq s_i \leqq p^{\nu(t_i)}$, $t_i \geqq 1$, である。$t_1 < \cdots < t_k$ としてよい。このとき $s_1 > \cdots > s_k$ である。$\delta_1 = \delta_{1, s_1}$ とすると, (3.11) より $\beta_{t_i/s_i} = \delta_0 \delta_1 (v_1^{s_1 - s_i} v_2^{t_i})$, ここに $v_1^{s_1-s_i} v_2^{t_i} \in BP_*/(p, v_1^{s_1})$ で, この degree は $(s_1 - s_i)(2p-2) + t_i(2p^2-2) = n + s_1(2p-2)$ で一定, これらは明らかに一次独立である。完全列

$$\mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*/(p)) \xrightarrow{v_1^{s_1}} \mathrm{Ext}^{0,*}(BP_*, BP_*/(p)) \to \mathrm{Ext}^0(BP_*, BP_*/(p, v_1^{s_1})) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$$

と (3.4) より δ_1 は単射で $\delta_1(v_1^{s_1-s_i} v_2^{t_i}) = v_1^{s_1-s_i} \delta_1(v_2^{t_i})$ は一次独立。完全列 $\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p)) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}^{2,*}(BP_*, BP_*)$ と $\delta_1(v_1^{s_1-s_i} v_2^{t_i})$ が $\mathbb{Z}/p[v_1]$-torsion であること, および (3.9) より δ_0 は $\mathbb{Z}/p[v_1]$-torsion elements 上単射であって $\delta_0\delta_1(v_1^{s_1-s_i} v_2^{t_i})$ は一次独立である。//

定理B は 1975-76 年に Zahler [24] によって得られたものであるが, (2.8) の証明の後に述べた様に, $\mathrm{Ext}^{2,*}(BP_*, BP_*)$ は任意の l について位数 p^l の元を非常に多く（定理B のごとく）含んでいる。$\mathrm{Ext}^{2,*}$ の完全な結果は [7] を参照してもらうとして, 一例として

(3.11) $l, m \geqq 1$, $a \geqq 1$, $(a, p) = 1$ を任意にとって $n = p^l + ap^{l+m} + (a-1)p^{l+m+1}$ とおく。このとき $\mathrm{Ext}^{2, n(2p-2)}$ は $\mathbb{Z}/p^l \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^l$ ($[\frac{m+1}{2}]$ コの直和) を直和因子として含む。[7] の記号を使えば a_k を (3.10) と同じものとして, 生成元は $\beta_{(a-1)p^{l+m} + a_k p^{l+m+1-2k}/p^{l+m+1-2k} - p^l, l+1}$ ($1 \leqq k \leqq [\frac{m+1}{2}]$) によってあたえられる。

§4. Adams スペクトル列

X を p-local で連結（$\exists n$, $\pi_i(X)=0$ for $i<n$）な CW スペクトラムとする（π_i は次数 i のスペクトラムの map $S^0 \to X$ のホモトピー類の全体，したがって X が sphere spectrum S^0 のとき $\pi_i(X)$ は i 次の球面の安定ホモトピー群である）。$\overline{BP}$ を $\iota : S^0 \to BP$ の cofibre とし、cofibration $S^0 \to BP \to \overline{BP}$ に右から $\overline{BP}^{\wedge n}\wedge X$（$\wedge n$ は n コの smash 積）を smash して cofibration $\Sigma^{-1}\overline{BP}^{\wedge n+1}\wedge X \xrightarrow{i} \overline{BP}^{\wedge n}\wedge X \xrightarrow{j} BP\wedge\overline{BP}^{\wedge n}\wedge X \xrightarrow{k} \overline{BP}^{\wedge n+1}\wedge X$ を得る。

$D_1^{s,t} = \pi_t(\overline{BP}^{\wedge s}\wedge X)$, $E_1^{s,t} = \pi_t(BP\wedge\overline{BP}^{\wedge s}\wedge X) = BP_t(\overline{BP}^{\wedge s}\wedge X)$

とおくと，$D_1^{s+1,t+1} \xrightarrow{i} D_1^{s,t} \xrightarrow{j} E_1^{s,t} \xrightarrow{k} D_1^{s+1,t}$ は exact であり，exact couple を得る。これから得られる spectral sequence $\{E_r^{*,*}(X)\}$ が BP-Adams スペクトル列である。その E_2 項は

(4.1) $$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}^{s,t}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*(X))$$

によって，与えられ，

$$F^{s,t} = \mathrm{Image}\ \pi_t(\overline{BP}^{\wedge(s)}\wedge X) = D_1^{s,t} \xrightarrow{i} D_1^{s-1,t-1} \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} D_1^{0,t-s} = \pi_{t-s}(X)$$

とおくと $F^{s+1,t+1} \subset F^{s,t}$ であり F は $\pi_*(X)$ の filtration，このとき

$$E_\infty^{s,t}(X) = F^{s,t}/F^{s+1,t+1}$$

すなわち，スペクトル列は $\pi_*(X)$ に収束する。differential の次数は

(4.2) $$d_r : E_r^{s,t}(X) \to E_r^{s+r,t+r-1}(X)$$

となる。Edge homo $\pi_t(X) = F^{0,t} \twoheadrightarrow F^{0,t}/F^{1,t+1} = E_\infty^{0,t} \rightarrowtail E_2^{0,t} =$ $\mathrm{Hom}^t(BP_*, BP_*(X))$ は BP-homology における induced homomorphism を対応させるものである。したがって

(4.3) $\alpha \in \pi_t(X)$ に対し，$x = \alpha_* \in \mathrm{Hom}(BP_*, BP_*(X)) = E_2^{0,t}(X)$ とおくと，x は α に収束する。

次の結果は (2.5) における invariant ideal J から得られた $\mathrm{Ext}^{**} = E_2^{**}(S^0)$ の元 $\alpha(J)$ が permanent cycle になるための十分条件を与えるものとして重要である。

定理 4.4 [5]. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ を有限スペクトラムの cofibration で $h_* = 0 : BP_*(Z) \to BP_*(\Sigma X)$ なるものとする。このとき $0 \to BP_*(X) \xrightarrow{f_*} BP_*(Y) \xrightarrow{g_*} BP_*(Z) \to 0$ は short exact で，これから導かれる Ext の long exact sequence の coboundary を

$\delta : E_2^{s,*}(Z) = \mathrm{Ext}^{s,*}(BP_*, BP_*(Z)) \to \mathrm{Ext}^{s+1,*}(BP_*, BP_*(X)) = E_2^{s+1,*}(X)$

とする。$z \in E_2^{s,*}(Z)$ が permanent cycle で，$\gamma \in \pi_{*-s}(Z)$ に収束するならば，$\delta(z) \in E_2^{s+1,*}(X)$ も permanent cycle であり，しかも $h_*(\gamma) \in \pi_{*-s}(\Sigma X) = \pi_{*-s-1}(X)$ に収束する。

これは文献として [5] にあらわれる以前から expert (e.g. Adams) には well known な事実であった。さて，この定理を (2.5) に用いると

(4.5) 各 i $(0 \leq i \leq n-2)$ について $(2.5)'$ の exact sequence ($J_0 = 0$

とする）が有限CWスペクトラムの cofibration $\Sigma^{|a_i|}X_i \xrightarrow{\alpha_i} X_i \to X_{i+1}$（とくに $X_0 = S^0$ とおく）で実現できるとする。すなわち $BP_*(X_i) \cong BP_*/J_i$ であり $(\alpha_i)_* = a_i : BP_*(X_i) \circlearrowleft$ 。更に (stable) map $f : S^{|a_{n-1}|} \to X_{n-1}$ で $f_* = a_{n-1} : BP_* \to BP_*(X_{n-1}) = BP_*/J_{n-1}$ なるものが存在すれば (2.5) の $\alpha(J)$ は permanent cycle であり次の合成によってあたえられる $\pi_*^S(S^0)$ の元に収束する：

$$S^{|a_{n-1}|} \xrightarrow{f} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \Sigma^{|a_{n-2}|+1} X_{n-2} \xrightarrow{d_{n-3}} \Sigma^{|a_{n-2}|+|a_{n-3}|+2} X_{n-3} \xrightarrow{d_{n-4}} \cdots \xrightarrow{d_0} S^{|a_{n-2}|+\cdots+|a_0|+n-1}$$

ただし $d_i : X_{i+1} \to \Sigma^{|a_i|+1} X_i$ は上記 cofibration の map.

d_i が BP-homology で 0 になるのは明らかだから (4.3) を出発点（$a_{n-1} \in E_2^{0,*}(X_{n-1})$ は $f \in \pi_*(X_{n-1})$ に収束）として (4.4) をくりかえし使えばよい。これを (2.7) の $\beta_{ap^n/j}$ に適用すると、$\beta_{ap^n/j}$ が permanent cycle であることを言うには次の3つの事柄が言えればよいことがわかる。

(1) $BP_* \xrightarrow{p} BP_* \to BP_*/(p)$ を実現する。これは M を mod p Moore spectrum $S^0 \cup_p e^1$ として、cofibration $S^0 \xrightarrow{p} S^0 \to M$ (p は degree p の写像) をとれば明らかに可能である。

(2) $BP_*/(p) \xrightarrow{v_1^j} BP_*/(p) \to BP_*/(p, v_1^j)$ を実現する。これは v_1^j を実現する写像 $\alpha^{(j)} : \Sigma^{j(2p-2)} M \to M$ が作れれば、$\alpha^{(j)}$ の cofibre を K_j とおいて $BP_*(K_j) = BP_*/(p, v_1^j)$ となるから この cofibration が求めるものである。$\alpha^{(j)}$ は $j=1$ のとき作れれ

ば $\alpha^{(j)} = \alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(1)}$ (j 回の composition) とおいて一般の j のとき可能である。$j=1$ のとき，実際可能である。

(4.6) [0], [21]. p を奇素数とするとき，$\alpha : \Sigma^{2p-2} M \to M$ で $\alpha_* = v_1 : BP_*/(p) \to BP_*/(p)$ なるものが存在する。

したがって (2) は cofibration $\Sigma^{j(2p-2)} M \xrightarrow{\alpha^j} M \to K_j$ をとればよいことがわかった。とくに α の cofibre K_1 は $V(1)$ と呼ばれるものである。最後の step は

(3) $f = f_{ap^n/j} : S^{ap^n(2p^2-2)} \to K_j$ で $f_* = v_2^{ap^n} : BP_* \to BP_*/(p, v_1^j)$ となるものを作る。

一番最初の場合，すなわち $ap^n = 1$, $j = 1$ のときは存在が知られている([21], [23])。これを出発点として，$p \geqq 5$ のとき，複雑な帰納法で $f_{ap^n/j}$ を定理A′であたえられている index の範囲で構成することが定理Aの証明の主要な部分である。出発点となる $f = f_{1/1}$ は $p = 3$ の場合も存在するにもかかわらず，$p \geqq 5$ と制限がつく最初の~~理由~~事情は次による。

(4.7) [23]. $p \geqq 5$ のとき $V(1) = K_1$ に積 (すなわち $\mu : K_1 \wedge K_1 \to K_1$ で $\mu(\iota \wedge 1_{K_1}) = 1_{K_1} = \mu(1_{K_1} \wedge \iota)$ となるもの，$\iota : S^0 \to K_1$ は inclusion) が存在する。$p = 3$ では存在しない。

K_1 に積があれば $\bar{f}_{1/1} = \mu(f_{1/1} \wedge 1_{K_1}) : \Sigma^{2(p^2-1)} K_1 \to K_1$ とおくと，これは $f_{1/1}$ の extension になっている。すなわち

$$\begin{tikzcd} S^{2p^2-2} \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, "f_{1/1}"] & \\ \Sigma^{2p^2-2}K_1 \arrow[r, "\bar{f}_{1/1}"] & K_1 \end{tikzcd}$$

は可換で、右の図式を実現する。（π_*は自然な射影）。

$$\begin{tikzcd} BP_* \arrow[d, "\pi_*"] \arrow[dr, "v_2"] & \\ BP_*/(p,v_1) \arrow[r, "v_2"] & BP_*/(p,v_1) \end{tikzcd}$$

$\bar{f}_{1/1}$ を t 回つなぐと v_2^t を実現する $(\bar{f}_{1/1})^t : \Sigma^{t(2p^2-2)}K_1 \to K_1$、$(\bar{f}_{1/1})^t i : S^{t(2p^2-2)} \to K_1$ を得るから $f_{t/1} = (\bar{f}_{1/1})^t i$ ($\forall t \geq 1$) とおくことができる。したがって (2.6), (2.8) から

(4.8) [21] $p \geq 5$ のとき β_t ($t \geq 1$) $\in Ext^{2,*}$ は permanent cycle.

$\bar{f}_{1/1} : \Sigma^{2p^2-2}K_1 \to K_1$ ~~p=3のときは~~ の cofibre は $BP_*/(p,v_1,v_2)$ を実現するものであり、それは $V(2)$ と呼ばれる。$p=3$ のときは $V(1)=K_1$ に積は存在しないし、$V(2)$ 自身も存在しない。また $v_2 \in Ext^{0,*}(BP_*, BP_*/(p,v_1)) = E_2^{0,*}(K_1)$ は permanent cycle であった（$f_{1/1}$ に収束する）が、$v_2^2 \in E_2^{0,*}(K_1)$ はそうではない。[23] しかし $\beta_2 \in E_2^{2,*}(S^0)$ は permanent cycle であることが知られており、(4.4) の逆は成りたたないことを意味する。$p=3$ のとき $v_2^t \in E_2^{0,*}(K_1)$, $\beta_t \in E_2^{2,*}(S^0)$ について ∞ cycle であるものに $\circ$, そうでないものに $\times$ をつけると $\overset{\circ}{v_2}, \overset{\times}{v_2^2}, \overset{\times}{v_2^3}, \overset{\times}{v_2^4}, \overset{\circ}{v_2^5}, \overset{\times ?}{v_2^6} \cdots$

$\overset{\circ}{\beta_1}, \overset{\circ}{\beta_2}, \overset{\circ}{\beta_3}, \overset{\times}{\beta_4}, \overset{\circ}{\beta_5}, \overset{\circ}{\beta_6}, \overset{\times ?}{\beta_7}, \overset{\times ?}{\beta_8}, \overset{\circ}{\beta_9}, \overset{\circ}{\beta_{10}} \cdots$ となり、(4.4) のような形で統一的に扱うのは困難な様である ([17], [13])。

今迄 "permanent cycle" という語をくりかえし使ったが、これについて (4.5) のすぐ後にでも注意しておくべきであった事を

書きおとしているので，ここで注意したい。言うまでもなく $x \in E_2^{*,*}$ が permanent cycle とは $d_r(x)=0$ $(\forall r \geqq 2)$ ということであるが，x が boundary になっている（すなわち $x = d_s(y)$ $\exists s$, $\exists y \in E_s^{*,*}$ でこのとき $x=0$ in $E_{s+1}^{t,*}$）かどうかについては何も言ってはない。

$E_2^{s,t}(S^0)=Ext^{s,t}(BP_*,BP_*)$ の internal degree t は BP_* の degree から来るものであるから，$t \not\equiv 0\ (2p-2)$ のとき $BP_t=0$，よって $E_2^{s,t}(S^0)=0$，$E_r^{s,t}(S^0)=0$ である。したがって，(4.2) により，$d_r=0$ for $r<2p-1$ となる。$E_2^{s,*}(S^0)=0$ $(s \leqq 0)$ である（(3.3) による）から

(4.9) $s<2p$ ならば $E_r^{s,t}(S^0)$ の元は boundary ではない。

（p が奇素数のとき $E_2^{1,*}(S^0)$ の元はすべて permanent cycle という Novikov [11] の結果を使えば，$s \leqq 2p$ に改良できる）

(4.5) において n が p くらいで小さい（$n \leqq 2p$）ならば $\alpha(J)$ は boundary ではなく，したがって E_∞ で non-trivial すなわち (4.5) における公式 $d_0 \cdots d_{n-2} f \in \pi_*^S(S^0)$ は non-trivial である。我々は今，$n=3$ すなわち $E_2^{2,*}(S^0)$ の元を論じているのであり，これらについては permanent cycle ということと non-trivial な homotopy の元をあたえることは同等である。

(4.6) の後の，Step (3) について もう少し述べるべきだが，すでに予定の枚数をオーバーしており省略する。

REFERENCES

[0] J.F.Adams, On the groups J(X)-IV, Topology 5 (1966), 21-71.

[1] J.F.Adams, Stable homotopy and generalised homology, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[2] S.Araki, Typical formal groups in complex cobordism and K-theory, Kinokuniya, 1974.

[3] E.H.Brown and F.P.Peterson, A spectrum whose Z_p-cohomology is the algebra of reduced p-th powers, Topology 5 (1966), 149-154.

[4] M.Hazewinkel, A universal formal group law and complex cobordism, Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975),930-933.

[5] D.C.Johnson, H.R.Miller, W.S.Wilson and R.S.Zahler, Boundary homomorphisms in the generalized Adams spectral sequence and the nontriviality of infinitely many γ_t in stable homotopy, Proceedings for the Aug. 1974 Northwestern Univ. homotopy theoty conference, Soc. Mat. Mexicana, 1975, 47-59.

[6] P.S.Landweber, Annihilator ideals and primitive elements in complex bordism, Illinois J. Math. 17 (1973) 273-284.

[7] H.R.Miller, D.C.Ravenel and W.S.Wilson, Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence, Ann.of Math. 106 (1977), 469-516.

[8] H.R.Miller and W.S.Wilson, On Novikov's Ext^1 modulo an invariant prime ideal, Topology 15(1976),131-141.

[9] J.W.Milnor, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I, Amer. J. Math. 82 (1960), 505-521.

[10] G.Nishida, The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 707-732.

[11] S.P.Novikov, The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories, Math. USSR-Izvestia 1 (1967), 827-913.

[12] S.Oka, A new family in the stable homotopy groups of spheres, Hiroshima Math. J. 5(1975), 87-114.

[13] S.Oka, Note on the β-family in stable homotopy of spheres at the prime 3, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 35(1981), 367-373.

[14] S.Oka, Small ring spectra and p-rank of the stable homotopy of spheres, Proceedings of the Northwestern homotopy theory conference (March 1982), Contemporary Mathematics 19, AMS, 1983, pp. 267-308.

[15] S.Oka, Multiplicative structure of finite ring spectra and stable homotopy of spheres, Algebraic Topology Aarhus 1982, Proceedings of coference held in Aarhus, Aug. 1982, Springer Lecture Notes in Math.#1051, 1984
(最近出版されたとの事だが，実物はまだ見ていない)

[16] S.Oka, Derivations in ring spectra and higher torsions in Coker J, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 38 (1984), 23-46.

[17] S.Oka and H.Toda, 3-Primary β-family in stable homotopy, Hiroshima Math. J. 5(1975), 447-460.

[18] D.Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1293-1298.

[19] D.C.Ravenel, The structure of BP_*BP modulo an invariant prime ideal, Topology 15(1976), 149-153.

[20] K.Shimomura, Novikov's Ext^2 at the prime 2, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 499-513.

[21] L.Smith, On realizing complex bordism modules. Applications to the stable homotopy of spheres, Amer. J. Math. 92 (1970), 793-856.

[22] L.Smith, On realizing complex bordism modules IV, Amer. J. Math. 99 (1977), 418-436.

[23] H.Toda, On spectra realizing exterior parts of the Steenrod algebra, Topology 10 (1971), 53-65.

[24] R.S.Zahler, Fringe families in stable homotopy, Trans Amer. Math. Soc. 224 (1976), 243-254.

On Evens type theorems

Norihiko Minami (広島大学理学部)

§1. Introduction and main theorems.

Recently G.Carlsson solved the Segal conjecture[6]. Let $(?)^\wedge$ denote the augmentation ideal adic completion of an angmented ring (?) and let BG denote the classifying space of a compact Lie group G, then it can be stated as follows:

$$A(G)^\wedge \cong \pi_S^0(BG_+) \quad \text{for any finite group } G.$$

But its extention to the case of compact Lie groups does not work well. In fact the augmentation ideal adic topology on tom Dieck's Burnside ring is suitable iff the action of weyl group on the maximal torus is trivial.(cf. Appendix and [14]) This fact presents a striking contrast with the theorem of Atiyah-Segal[2][3]:

$$R(G)^\wedge \cong K(BG) \quad \text{for any compact Lie groups.}$$

Therefore it suggests that stable cohomotopy theory π_S^* fits only finite group theory and while ordinary K-theory K^* fits compact Lie group theory.

In this paper we present another testimony of this view which might have independent interest. (cf. Cor. 2, Th. 7, Th. 8)

Let F be a contravariant functor from the category of finite(resp.compact Lie) groups to some category. We say F *is good for finite(resp.compact Lie)group* if F satisfies the following (*good*).

(*good*) If a homomorphism of finite(resp.compact Lie) groups $h : G \longrightarrow G'$ induces an isomorphism $F(h) : F(G') \longrightarrow F(G)$, then h is an isomorphism itself.

In [8], L. Evens stated the following.

Theorem(Evens). The functor $G \longmapsto \prod_{i \geq 0} H^i(BG)$ is good for finite groups.

Now we state our results most of which are generalizations of the theorem of Evens.

Theorem 1. Let F satisfy the following.

1) F is a contravariant functor from the category of finite groups to the category of abelian groups.

2) For each finite group G there exists an element $r_F(G)$ in $F(G)$ such that $i^* r_F(G) = |G/H| r_F(H)$. Here $i : H \longrightarrow G$ is an injection.

3) Let $R(\ )^\wedge$ be a functor which sends a compact Lie group G to $R(G)^\wedge$. When G is a finite group, we take $r_{R(\ )^\wedge}(G)$ to be r_G: the regular representation of G in $R(G)^\wedge$. Then $R(\ )^\wedge$ satisfies both 1) and 2). Now suppose that there is a natural transformation $\tau : F \longrightarrow R(\ )^\wedge$ in the sense os 1) and 2). (Therefore $\tau(G)$ sends $r_F(G)$ to $r_{R(\ )^\wedge}(G) = r_G$)

Then F is good for finite groups.

Corollary 2. If there is a natural transformation of generalized cohomology theory $\nu : h^* \longrightarrow K^*$ such that there is an element $u \in h^0(B\{1\})$ which is sent to $1 \in K^0(B\{1\})$ by $\nu(B\{1\})$. Then the functor $G \longmapsto h^0(BG)$ is good for finite groups. Here $\{1\}$ denotes the trivial group with one element.

Proof of Corollary 2 assuming Theorem 1. Let $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G$ denote the induced homomorphism on generalized cohomology theories by the transfer homomorphism associated with the finite covering $B\{1\} \longrightarrow BG$. Then the element $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G}u$ satiasies the required equality $i^*\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G}u = |G/H|\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{H}u$ from the double coset formula [ ] and is sent to $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G}1$ by $\nu(BG)$ because ν commutes with the transfer. Now recall the theorem of Atiyah-Segal and the fact $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G}1 = r_G$, then we can immediately apply Theorem 1.

Remark. (1) The following are examples of $F(G)$ such that F satisfies the hypothesis of Theorem 1; $A(G)$, $R(G;Q)$, $R(G;Q)^\wedge$, $RO(G)$, $\pi_s^0(BG_+)$, $MU^0(BG)$, $k^0(BG)$, $KO(BG)$, $K(BG)$.
(2) Corollary 2 suggests that for such a cohomology theory $h^0(BG)$ involves a relatively rich group information. An interesting point of the proof is the fact that we just use the theorem of Atiyah-Segal and we do not need to know the structure of $h^0(BG)$ in general. For example we do not use the Segal conjecture to prove the case of $h^*=\pi^*$.
(3) Let $(!)_n$ denote the n-skelton of a CW-complex (!). Then it seems likely that Corollary 2 can be improved as follows:

> If a homomorphism of finite groups $f : G \longrightarrow G'$ induces an isomorphism $f^* : h^0(BG'_n) \longrightarrow h^0(BG_n)$, then f is an isomorphism itself. Here h^* satisfies the hypothesis of Corollary 2 and $n \geq 2\mathrm{Max}(|G|,|G'|)-1$.

A result of this type is obtained for the theorem of Evence in [/2] and following two elementary propositions support this conjecture.

Proposition 3. If a homomorphism of finite groups $f : G \longrightarrow G'$ induces an epimorphism $f^* : h^0(BG'_n) \longrightarrow h^0(BG_n)$, then f is a monomorphism. Here $n \geq 2|G'|-1$.

Proof. Suppose Kernel of f is non-trivial and contains a cyclic subgroup Z/p. Then the map induced by a canonical injection $i : Z/p \longrightarrow G$ sends $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} u$ to $|G/(Z/p)|\,\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{Z/p} u$. Now consider the composition c of ν and the total Chern class, then we have $c(|G/(Z/p)|\,\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{Z/p} u) = (1+\xi^{p-1})^{|G/(Z/p)|}$ and is distinct from 1 because $H^j(BZ/p) \cong H^j(BZ/p_n)$ if $j \leq n-1$. Here ξ is a non-zero element in $H^2(BZ/p_n)$. On the other hand, there is an element x in $h^0(BG'_n)$ such that $f^*x = \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} u$ from the assumption. Therefore we have

$$\begin{aligned}(fi)^*c(x) &= c((fi)^*x) = c(|G/(Z/p)|\,\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{Z/p} u) \\ &= (1+\xi^{p-1})^{|G/(Z/p)|} \neq 1.\end{aligned}$$

But this is a contradictin because fi is trivial.

Proposition 4. If a homomorphism of finite groups $f : G \longrightarrow G'$ induces a monomorphism $f^* : h^0(BG'_n) \longrightarrow h^0(BG_n)$, then f is an epimorphism. Here $n \geq 2|G'|-2$ and G' *is a p-group*. Moreover we assume that $\nu : h^* \longrightarrow K^*$ is a natural transformation of *multiplicative* generalized cohomology theories.

Proof. Suppose f is not an epimorphism, and let M be a maximal subgroup of G' which contains $f(G)$. Since G' is a p-group, M is a normal subgroup of G' and $G'/M \cong Z/p$. Take an element $g \in G'$ which generates the cyclic group G'/M, and let $i : \langle g\rangle \cong Z/p^m \longrightarrow G'$ denote the canonical injection of the cyclic group generated by g. Then the proof is just an elementary consideration of K-theory of lense space.

We add an additional result which can be proved similarly as Corollary 2.

Proposition 5. Let F_q denote a finite field with $q=p^d$ elements and let $K^*_{F_q}$ denotes the algebraic K-theory assosiated with finite field F_q. If a homomorphism of finite group $f : G \longrightarrow G'$ induces an isomorphism $f^* : K^0_{F_q}(BG') \longrightarrow K^0_{F_q}(BG)$, then $|\mathrm{Ker}\cdot f|$ and $|G/\mathrm{Im}\cdot f|$ are p-power.

Now let's turn to the problem; *if Corollary 2 could be generalized to the case of compact Lie groups?* But the following Proposition gives a family of counter-examples for π^*_S; *π^* is not good for compact Lie groups.*

Proposition 6. Let $f : G \longrightarrow G'$ is a homomorphism of compact Lie groups each of which is a central extention of a finite group by a torus. Then f induces an isomorphim $f^* : \pi^{Q}_S(BG') \longrightarrow \pi^{Q}_S(BG)$ iff f induces an isomorphism $\bar{f} : G/G_1 \longrightarrow G'/G'_1$. Here G_1 (*resp.* G'_1) denotes the identity component of G (*resp.* G').

Proof. When G is a central extention of a finite group by a torus, it can be shown the isomorphism $A(G/G_1)^\wedge \cong \pi^0_s(BG_+)$ (cf. [14] and Appendix). Therefore the required result immediately follows from Corollary 2.

Nevertheless we present a striking contrast as we previously announced; K^* *is good for compact Lie groups.*

Theorem 7. The functor $G \longmapsto K(BG)$ is good for compact Lie groups.

we can also prove the following similarly.

Theorem 8. The functor $G \longrightarrow \mathrm{Spec}R(G)$ is good for compact Lie groups.

In the rest of paper we aim at the proof of Theorem 7. In §2, we consider a nature of $R(G)^\wedge$. In §3, we study some results from $\mathrm{Spec}H^*(BG;Q)$. In §4, we recall the result of Segal [17] on $\mathrm{Spec}R(G)$. In §5, we prove Theorm 1, Proposition 5, Theorem 7, and Theorem 8. (cf. [4] for partial results of Th. 8)

§2. A result on $R(G)^\wedge$.

Let $r_G \in R(G)$ denote the composition $G \longrightarrow G/G_1 \xrightarrow{r_{G/G_1}} U(|G/G_1|)$. Then the purpose of this section is to prove the following.

Proposition 9. If $r_G = n\alpha$ fore some $n \in Z$ and $\alpha \in R(G)^\wedge$ in $R(G)^\wedge$, then $n = \pm 1$.

Lemma 10. For any compact Lie group G, there exists a finite subgroup F, such that $F/(F \cap G_1) \cong G/G_1$.

Proof. Let T be a maximal subgroup of G. Consider the Euler number of the following two fiber bundles;

$$N_GT/N_{G_1}T \longrightarrow G/N_{G_1}T \longrightarrow G/N_GT, \quad G_1/N_{G_1}T \longrightarrow G/N_{G_1}T \longrightarrow G/G_1.$$

Then we have $\chi(G/N_{G_1}T) = \chi(N_GT/N_{G_1}T)\chi(G/N_GT)$

and $\chi(G/N_{G_1}T) = \chi(G_1/N_{G_1}T)\chi(G/G_1)$.

Since $\chi(G/N_GT) = \chi((G/N_GT)^T) = \chi(N_GT/N_GT) = 1$ and similarly $\chi(G_1/N_{G_1}T) = 1$, we have $|N_GT/N_{G_1}T| = \chi(N_GT/N_{G_1}T) = \chi(G/G_1)$ $|G/G_1|$. This shows that the injection of finite groups $N_GT/N_{G_1}T \longrightarrow G/G_1$ is an isomorphiam. Therefore it suffices to find a finite subgroup F in $N_G(T)$ such that $F/(F \cap T) \cong N_GT/T$.

Let $e \in H^2(N_GT/T;T)$ corresponds to the extention

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N_G T \longrightarrow N_G T/T \longrightarrow 1.$$

Consider the exact sequence of $N_G T/T$-module

$$0 \longrightarrow (Z/|N_G T/T|)^{\dim T} \longrightarrow T \xrightarrow{\times |N_G T/T|} T \longrightarrow 0,$$

then in the assosiated exact sequece of cohomology groups there exists a some element $e' \in H^2(N_G T/T;(Z/|N_G T/T|)^{\dim T})$ which is carried to e because e is $|N_G T/T|$-tortion.

$$\begin{array}{ccccc} H^2(N_G T/T;(Z/|N_G T/T|)^{\dim T}) & \longrightarrow & H^2(N_G T/T;T) & \xrightarrow{\times |N_G T/T|} & H^2(N_G T/T;T) \\ \exists\,\underset{e'}{\Psi} & \longmapsto & \underset{e}{\Psi} & \longmapsto & \underset{0}{\Psi} \end{array}$$

This means the existence of the following map of exact sequece

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & (Z/|N_G T/T|)^{\dim T} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & N_G T/T & \longrightarrow & 1 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & N_G T & \longrightarrow & N_G T/T & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

here the upper corresponds to e' and the lower corresponds to e. Thus we have proved the existence of the required finite group.

<u>Proof of Proposition 9.</u> Suppose $n \neq 1$ and $p \mid n$, and let F_p denote a p-Sylow subgroup of F whose existence was proved in Lemma 10. Consider the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccc} r_G \in R(G) & \xrightarrow{Res} & R(F_p) & \xrightarrow{\rho} & R(F_p)/pR(F_p) \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong \\ r_G \in R(G)^\wedge & \xrightarrow{Res^\wedge} & R(F_p)^\wedge & \xrightarrow{\rho^\wedge} & R(F_p)^\wedge/pR(F_p)^\wedge \end{array}$$

Here Res and Res^ are restriction homomorphisms and ρ and $\rho^\wedge$ are canonical quotient homomorphism. And the isomorphism on the third vertical arrow follows from the fact: $I(F_p)$-adic topology on $I(F_p)$ is the same as its p-adic topology [2]. Then from the hypothesis we have $\rho^\wedge Res^\wedge(r_G) = n(\rho^\wedge Res^\wedge(\alpha)) = 0$. On the other hand, by considering the character we see $Res(r_G) = |(G/G_1)/(F_p/F_p \cap G_1)| \, Ind_{F_p \cap G_1}^{F_p} 1$. Since F_p is a p-Sylow subgroup of F, $|(G/G_1)/(F_p/F_p \cap G_1)| = |(F/F \cap G_1)/(F_p/F_p \cap G_1)|$ is not

not divisible by p. And $\mathrm{Ind}_{F_p \cap G_1}^{F_p} 1$ is not divisible by p either because it contains just one trivial representation. Thus we have $\rho\mathrm{Res}(r_G) \neq 0$, but this clearly contradicts $\hat{\rho}\,\hat{\mathrm{Res}}(r_G) = 0$.

§3. Use of $\mathrm{Spec}\, H^*(BG;Q)$.

The follwing proposition tells us the validity of our study on $\mathrm{Spec}\, H^*(BG:Q)$.

Proposition 11. If a continuous map of CW-complexes $g : X \longrightarrow Y$ induces an isomorphism $g^* : K^*(Y) \longrightarrow K^*(X)$, then it also induces an isomorphism $g^* : H^*(Y;Q) \longrightarrow H^*(X;Q)$.

Proof. By considering the mapping cone of g, it suffices to show that $K^*(Z)=0$ means $H^*(Z;Q)=0$. According to the universal coefficient theorm for K-theory by Anderson and Yoshimura [18],

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(K_{n-1}(Z),A) \longrightarrow KA^n(Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K_n(Z),A) \longrightarrow 0$$

is an exact sequence for any abelian group A. Therefore $K^*(Z)=0$ means the simultanuous equations:

$$\mathrm{Ext}(K_*(Z),Z) = \mathrm{Hom}(K_*(Z),Z) = 0.$$

It follows $K_*(Z) = 0$ by [11], and we have $KQ^*(Z) = 0$ by putting $A=Q$ in the above exact sequence. Then we ~~get~~ $H^*(Z;Q) = 0$ using Chern character.

Now we prove the following.

Proposition 12. If an injective homomorphism of compact Lie groups $f : G \longrightarrow G'$ induces an isomorphim $f^* : \mathrm{Spec}\, H^*(BG';Q) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, H^*(BG;Q)$, then the rank of G and G' are equal to each other and f induces an isomorphism $\bar{f} : N_G(T)/C_G(T) \longrightarrow N_{G'}(T)/C_{G'}(T)$. Here T is a maximal torus of both G and G'.

Proof. First we quote some elementary facts from commutative algebra [5];

1) Krull dimension of the polinomial ring $k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ is n.

2) If a finite group W acts on a commutative ring R, then the canonical inclusion $R^W \longrightarrow R$ induces an isomorphism $(\mathrm{Spec}R)/W \longrightarrow \mathrm{Spec}(R^W)$ and in particular, R and R^W have same Krull dimension.

Then the assertion about the rank immediately follows from the Borel theorem: $H^*(BG;Q) \cong H^*(BT;Q)^{N_GT/C_GT}$. To prove the induced isomorphism, it suffices to find a prime ideal in $H^*(BT;Q)$ such that its orbit in $\mathrm{Spec}\,H^*(BT;Q)$ is free for the action of $GL_n(Z)$;

Lemma 13. The principal ideal $\mathfrak{p}=(1+X_1+X_2^3+X_3^5+\cdots+X_n^{2n-1})$ is a prime ideal in $H^*(BT;Q) \cong Q[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, and in $GL_n(Z)$ only trivial element carries this prime ideal to itself.

Proof. We can show that $1+X_1+X_2^3+X_3^5+\cdots+X_n^{2n-1}$ is irreducible in $Q[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ which is U.F.D. Therefore $\mathfrak{p}$ is a prime ideal. On the other hand suppose $(a_{ij})\in GL_n(Z)$ carries $\mathfrak{p}$ to itself, then we easily get

$$1+X_1+X_2^3+\cdots+X_n^{2n-1}=1+(\sum_i a_{i1}X_i)+(\sum_i a_{i2}X_i)^3+\cdots+(\sum_i a_{in}X_i)^{2n-1}.$$

From this we conclude that $a_{ij}=\delta_{ij}$ (Kronecker delta).

We conclude this section by proving the following lemma because we use $H^*(BG;Q)$ in its proof.

Lemma 14. Let K be a maximal rank connected closed subgroup of a compact connected Lie group G. Then $K=G$ iff $N_KT/T \cong N_GT/T$. Here T is a maximal torus of K.

Proof. Consider the following map of fiber spaces.

$$\begin{array}{ccccc} G/K & \longrightarrow & BK & \longrightarrow & BG \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ G/G & \longrightarrow & BG & = & BG \end{array}$$

From the assumption and the theorem of Borel, we see that the second vertical arrow induces an isomorphism of the rationnal cohomology ring. Since the third arrow which is an identity map on the simply connected base space BG also induces an isomorphism of the rational cohomology ring, we can apply the comparisson theorem of spectral sequence [19] and deduce that the canonical projection $G/K \longrightarrow G/G$ induces an isomorphiam of the rational cohomology ring. But this is imposible unless $K=G$ because G/K is an oriented manifold from the connectedness assumption on K.

§4. Application of Spec $R(G)$.

The following would be well known to experts; in fact it is essentially proved by Segal[17].

Proposition 15. Let $H_1,\cdots,H_l$ be closed subgroups of a compact Lie group G. If H is a cyclic subgroup of G such that no conjugate subgroup of H in G is contained in any $H_i (i=1,\cdots,l)$. Then there is an element $\xi \in R(G)$ such that

$$\mathrm{Res}^G_{H_i}\xi = 0 \ (i=1,\cdots,l),\ \mathrm{Res}^G_H\xi \neq 0.$$

Proof. Suppose there is no such , then the kernel of the following two homomorphisms μ_1 and μ_2 are equal to each other.

$$\mu_1 : R(G) \longrightarrow \oplus_i R(H_i) \qquad \mu_2 : R(G) \longrightarrow \oplus_i R(H_i) \oplus R(H)$$

$$\mu_1 = \oplus \mathrm{Res}^G_{H_i} \qquad \mu_2 = \oplus \mathrm{Res}^G_{H_i} \oplus \mathrm{Res}^G_H$$

Since μ_1 defines the finite $R(G)$-module structure on its target [ ], any prime ideal containing $\mathrm{Ker}\mu_1 = \mathrm{Ker}\mu_2$ comes from $\mathrm{Spec}(\oplus_i R(H_i)) = \coprod_i \mathrm{Spec}R(H_i)$. On the other hand any cyclic group becomes a support of some prime ideal [4][17], so let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal whose support is H. Since $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ker}\nu_2 = \mathrm{Ker}\nu_1$, $\mathfrak{p}$ comes from $\coprod_i \mathrm{Spec}R(H_i)$. This contradicts with the fact:H is a support of .

In [1], Adams proved that if S is a cyclic group with $|S/S_1|$: prime power then the canonical homomorphism $R(S) \longrightarrow R(S)^\wedge$ is a monomorphism. So the above proposition immediately indicates the following corollary.

Corollary 16. If an injective homomorphism of compact Lie groups $f : G \longrightarrow G'$ induces a monomorphism $f^*: R(G')^\wedge \longrightarrow R(G)^\wedge$, then for any cyclic subgroup S of G' with $|S/S_1|$: prime power, there exist some $S' \subset G$, $g \in G'$ such that $S = g^{-1}f(S')g$.

§5. Proof of main results.

Proof of Theorem 1.

Supppse $f : G \longrightarrow G'$ induces an isomorphism $F(f) : F(G') \longrightarrow F(G)$ where F satisfies the hypothesis of Theorem 1.

1) injectivity of f.

Since F(f) is onto, there exists some $x \in F(G')$ such that $F(f)(x) = r_F(G)$. From the assumption on F, we have

$$\tau(\mathrm{Ker}\cdot f)i^*F(f)(x) = \tau(\mathrm{Ker}\cdot f)(|G/\mathrm{Ker}\cdot f|r_F(\mathrm{Ker}f)) = |G/\mathrm{Ker}\cdot f|r_{\mathrm{Ker}f}$$

On the other hand as $i\cdot f$ is trivial, we have

$$\tau(\mathrm{Ker}\cdot f)i^*F(f)(x) = (i\cdot f)^*\tau(G')(x) = |G| = |G/\mathrm{Ker}\cdot f|\times|\mathrm{Ker}\cdot f|.$$

Since $R(\mathrm{Ker}\cdot f)^\wedge$ is torsion-free, we get $r_{\mathrm{Ker}\cdot f} = |G/\mathrm{Ker}\cdot f|\times 1$. By Proposition 9, this indicates $|G/\mathrm{Ker}\cdot f| = 1$.

2) surjectivity of f.

From 1 we may suppose that f is a monomorphism, so we get $F(f)r_F(G') = |G'/\mathrm{Im}\cdot f|r_F(G)$. Since $F(f)$ is an isomorphism, there is $y \in F(G')$ such that $r_F(G') = |G'/\mathrm{Im}\cdot f|y$. Applying $\tau(G')$, we get $|G'/\mathrm{Im}\ f| = 1$ by Proposition 9.

Proof of Proposition 5.

From [16] we know $R_{F_q}(G)^\wedge \cong K_{F_q}(BG)$ and if G is a p-group, $I_{F_q}(G)$-adic topology on $I_{F_q}(G)$ is p-adic topology. It is well known that if $|G|$ is invertible in a field F, then any finite dimentional representation of G on F is completely irreducible. From these we can prove the following lemma just as the proof of Proposition 9.

Lemma 17. Let G be a finite group. Let r_G be the regular representation of G on a finite field F_q with $q=p^d$ elements. If $r_G = n\alpha$ for some $n \in Z$ and $\alpha \in R(G)^\wedge$, then n is p-power.

Then we can complete the proof just as Theorem 1.

Proof of Theorem 7.

Suppose a homomorphism of compact Lie groups $f : G \longrightarrow G'$ induces an isomorphism $f^*: K(BG') \longrightarrow K(BG)$. WE shall prove the theorem in the following order;

1) Injectivity of f.

2) Injectivity of the induced homomorphism $\bar{f} : G/G_1 \longrightarrow G'/G'_1$.

3) Surjectivity of $\bar{f}$.

4) $f(G_1) = G'_1$.

We find easily these would complete the proof.

1) Injectivity of f.

Since $\mathrm{Ker}\cdot f \subset G$, the $I(\mathrm{Ker}\circ f)$-adic topology on $I(\mathrm{Ker}\circ f)^\wedge$ is induced from $R(G)^\wedge[/7]$. As f^* is an isomorphism it is also induced from $R(G')^\wedge$. Therefore the required topology on $I(\mathrm{Ker}\cdot f)^\wedge$ must be discrete. This means $\mathrm{Ker}\cdot f$ is trivial.

2) Injectivity of $\bar{f}$.

From 1) we may suppose f is an inclusion, so we write $\widehat{\mathrm{Res}}_G^{G'}$ for f^*. And from Proposition 11 and Proposition 12 we may take a maximal torus of G' in $G\cap G'_1$. Since $f^*=\widehat{\mathrm{Res}}_G^{G'}$ is an epimorphism, there exists $w\in R(G')^\wedge$ such that $\widehat{\mathrm{Res}}_G^{G'} w = r_G$. Therefore

$$|G/G\cap G'_1|\, r_{G\cap G'_1} = \widehat{\mathrm{Res}}^{G}_{G\cap G'_1} r_G = \widehat{\mathrm{Res}}^{G'}_{G\cap G'_1} w = \widehat{\mathrm{Res}}^{G'_1}_{G\cap G'_1}\, \widehat{\mathrm{Res}}^{G'}_{G'_1} w.$$

We would like to know $\widehat{\mathrm{Res}}^{G'}_{G'_1} w$. Since G'_1 is connective, $\widehat{\mathrm{Res}}_T^{G'_1}$ is injective [3]. So we apply this and obtain $\widehat{\mathrm{Res}}_T^{G'_1}\widehat{\mathrm{Res}}^{G'}_{G'_1} w$ $= \widehat{\mathrm{Res}}_T^{G} r_G = |G/G_1|$; this indicates $\widehat{\mathrm{Res}}^{G'}_{G'_1} w = |G/G_1|$. Therefore we have

$$\begin{aligned}|G/G\cap G'_1|\, r_{G\cap G'_1} &= |G/G_1| \\ &= |G/G\cap G'_1| \times |G\cap G'_1/G_1|.\end{aligned}$$

Since $R(G\cap G'_1)^\wedge$ is tortion-free, we get $r_{G\cap G'_1} = |G\cap G'_1/G_1|\times 1$. Then Proposition 9 indicates that $|G\cap G'_1/G_1| = 1$.

3) surjectivity of $\bar{f}$.

Since $G\cap G'_1 = G_1$ by 2), we get $f^* r_{G'} = |G'/GG'_1|\, r_{G_1}$ in $R(G)^\wedge$. Since f^* is an isomorphism, $|G'/GG'_1| = 1$ by Proposition 9.

4) $f(G_1) = G'_1$.

Suppose the order of an element $\kappa\in C_{G'}(T)/T$ is prime power, then consider the following commutative diagram of central extentions.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & C_{G'}(T) & \xrightarrow{\lambda} & C_{G'}(T)/T & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \cup & & \cup & & \\
0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \lambda^{-1}(\kappa) & \xrightarrow{\lambda} & <\kappa> & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

The lower diagram splits because $H^2(<\kappa>;T) = H^3(<\kappa>;Z) = 0$, so it can be written as follows; $\lambda^{-1}(\kappa) = T\times Z/q$. Then from Corollary 16, there exist some $C\subset G$, $g\in G'$ such that $T\times Z/q = g^{-1}Cg$. From 3) we know $G'=GG'_1$, so we can improve above to $g\in G'_1$. Now since T and C_1 are maximal tori of G_1, there exists some element $h\in G_1$ such that $h^{-1}C_1h = T$. Therefore we can improve more to the following;

there exist some $C\subset G$, $g\in N_{G'_1}(T)$ such that $C_1 = T$,

$$g^{-1}Cg = T\times Z/q.$$

Now let d generate $T\times Z/q$: $\overline{<d>} = T\times Z/q$, then gdg^{-1} generates C. Since $d\in N_{G'}(T) \triangleright N_{G'_1}(T)\ni g$, there exists some element $y\in N_{G'_1}(T)$ such that $d = (gdg^{-1})y$. As both d and gdg^{-1} act trivially on T, so does y, it follows $y\in T$ because $y\in N_{G'_1}(T)$ and G'_1 is connected. Therefore we get $d \in CT \subset G$, and $\kappa \in \lambda(\overline{<d>})$ is contained in the image of $C_G(T)/T \longrightarrow C_{G'}(T)/T$. Then this map is onto because we have proven that it is onto on any p-Sylow subgroup. Combining with Proposition 12, we see the injection $N_G(T)/T \longrightarrow N_{G'}(T)/T$ is an isomorphism. On the other hand, from 2),3) and the proof of Lemma 10, the following

$$N_G(T)/N_{G_1}(T) \longrightarrow G/G_1 \xrightarrow{\bar{f}} G'/G'_1 \longrightarrow N_{G'}(T)/N_{G'_1}(T)$$

are all isomorphisms. Therefore we get the isomorphism $N_{G_1}(T)/T \longrightarrow N_{G'_1}(T)/T$: which proves the required result by applying Lemma 14.

Proof of Theorem 8.

We prove this similarly as the proof of Theorem 7. In [4]

Theorem 6.2 substitutes 1),2)and 3) of our proof of Theorem 7, Theorem 5.2 substitutes our Proposition 12 and Corollary 16. Therefore we can argue just as 4) of our proof of Theorem 7; which would complete the proof.

Appendix.

Here we shall briefly sketch the proof of the following which was used in the proof of Proposition 6.

Theorem A. If G is a central extention of a finite group by a torus. Then we have the isomorphism:

$$A(G)^\wedge \cong \pi_s^0(BG_+).$$

From [14], we may consider the case: G is a central extention of a finite p-group by a torus, and in this case we employ the standerd technique [10] [15]; approximation of such a compact Lie group by finite p-subgroups. Let $\{F_n\}n\in N$ be a sequence of an increasing p-subgroups of G such that $F_n/(F_n\cap T) = G/T$, $\forall n\in N$ and that $\varinjlim_n(F_n\cap T) \subset T$ is all the elements of T whose orders are prime power. Then we can prove the isomorphism $\pi_s^0(BG) \cong \varprojlim_n \pi_s^0(B(F_n))$; for the latter we can apply the Segal conjecture for finite groups [6]. Therefore we only have to prove the following isomorphism:

$$A(G)^\wedge_p \cong \varprojlim_n (A(F_n)^\wedge_p).$$

Here $(\ )^\wedge_p$ denotes the p-adic completion of $(\ )$. Note that the problem has been reduced to the purely algebraic problem conserning the Burnside ring of finite groups because of the isomorphism $A(G) \cong A(G/T)$ when G is a central extention of a finite group by a torus T.

Now recall the characterization of the Burnside ring of a finite group F by Burnside and Dress [13]. Let $C(F)$ be the set of the conjugacy classes of subgroups of F, and let $(H)\in C(F)$ be the conjugacy class in which a subgroup H of F belongs. Then $A(F)$ is a free abelian group with basis $\{F/H\}(H)\in C(F)$, and for each (H) there is an assosiated homomorphism $\chi_H : A(F) \longrightarrow Z$ by $\chi_H(F/H') = |(F/H)^{H'}|$. The homomorphisms χ_H define together a homomorphism $\chi : A(F) \longrightarrow \underset{C(F)}{\oplus} Z \cong \mathrm{Map}(C(F);Z)$. Then the characterization can be stated as follows.

Theorem(Burnside, Dress)[13]. χ is an embedding with finite cokernel, and $m \in \mathrm{Map}(C(F);Z)$ is contained in the image of if and only if for all $(H) \in C(F)$

$$\Sigma_{(K)}\ n(H,K)m(K) \equiv 0 \bmod |NH/H| \qquad (\#)$$

where the summation is taken over the NH-conjugacy classes (K) such that $K\triangleright H$ and K/H is cyclic, and $n(H,K)$ are appropriate integers.

This result states the existence of the following exact sequence; $0 \longrightarrow A(F) \longrightarrow \underset{C(F)}{\oplus} Z \cong \mathrm{Map}(C(F);Z) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$, here Q is a finite group and becomes a p-group when F is a p-group. Therefore the exactness is preserved after p-adic completion, and we get immediately the following corollary.

Corollary. If F is a p-group, then $\chi_p^\wedge: A(F)_p^\wedge \longrightarrow \underset{C(F)}{\oplus} Z_p^\wedge \cong \mathrm{Map}(C(F);Z_p^\wedge)$ is an embedding with finite cokernel Q, and $m \in \mathrm{Map}(C(F);Z_p^\wedge)$ is contained in the image of $\chi_p^\wedge$ if and only if the congruence relations $(\#)$ hold.

To state the next lemma we make a definition. Let N be a nomal subgroup of G, then we define the homomorphism

$p^G_{G/N}: A(G) \longrightarrow A(G/N)$ by $p^G_{G/N}(G/H) = (G/N)/(H/N)$ if $H \quad N$; and $= 0$ if $H \quad N$. Then we have immediately the following.

<u>Lemma.</u> If H and N are subgroups of G such that $G \supset H \supset N$, $G \rhd N$, then $\mathrm{Res}^{G/N}_{H/N}\, p^G_{G/N} = p^H_{H/N}\, \mathrm{Res}^G_H$.

<u>Proposition.</u> Let G be a central extention of a finite p-group by a torus, then the homomorphism $\varprojlim_n \chi_{H\hat{p}}: \varprojlim_n A(F_n)^\wedge_p \longrightarrow Z^\wedge_p$, $(H \subset F_n$ for some $n)$ induced by χ_H is determined only by $(HT/T) \in C(G/T)$.

<u>Proof.</u> Since $N_G H \supset H, T$, we have $HT \rhd H$. Then applying the above lemma twice, we get the following commutative triangle.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_n A(F_n \cap HT)^\wedge_p \arrow[rr, "\varprojlim_n p^{F_n \cap HT}_{(F_n \cap HT)/H}"] \arrow[dr, "\chi_K"'] & & \varprojlim_n A((F_n \cap HT)/H)^\wedge_p \arrow[dl, "\chi_{K/H}"] \\
& Z^\wedge_p &
\end{tikzcd}$$

Here K satisfies $KT = HT$ and $H \subset K \subset F_m$ for some m. Now as $\{(F_n \cap HT)/H\}_{n \in N}$ approximate a torus, $\chi_{K/H} = \chi_{H/H}$ [15]. This shows for such H and K, $\varprojlim_n \chi_{H\hat{p}} = \varprojlim_n \chi_{K\hat{p}}$. If finite subgroups H_1 and H_2 satisfy $H_1T = H_2T$ and $H_1, H_2 \subset F_n$ for some n, then (H_1, H_2) : the finite subgroup of F_n generated by H_1 and H_2 satisfies $(H_1, H_2)T = H_1T = H_2T$, so $\varprojlim_n \chi_{H_1\hat{p}} = \varprojlim_n \chi_{(H_1,H_2)\hat{p}} = \varprojlim_n \chi_{H_2\hat{p}}$

<u>Proof of Theorem A.</u> Since G is a central extention of a finite group by a torus G, $A(G)$ is a free abelian group with basis G/H, here H runs over the representatives of the closed subgroups of G such that $H \supset T$. Since $G/H = (G/H)^T$ when $H \supset T$, for any closed subgroup $K \supset T$ we have $(G/H)^{F_n \cap K} =$

$(G/H)^{(T,F_n\cap K)} = (G/H)^K$. Hence we have the following commutative diagram.

$$\begin{tikzcd} A(G) \arrow[rr, "\mathrm{Res}^G_{F_n}"] \arrow[dr, "\chi_H"'] & & A(F_n) \arrow[dl, "\chi_{F_n\cap H}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Here $\chi_H : A(G) \longrightarrow Z$ is the homomorphism which assigns the Euler number $\chi(X^H)$ to compact G-ENR X. Since G is a central extention of a finite group by a torus, $A(G) \cong A(G/T)$ and under this correspondence, χ_H corresponds to $\chi_{H/T}$. Therefore we can apply Corollary to deduce the injectivity of $A(G)^\wedge_p \to \varprojlim_n(A(F_n)^\wedge_p)$. On the other hand, from Proposition we can define the injective homomorphism $\varprojlim_n(A(F_n)^\wedge_p) \to \mathrm{Map}(C(G/T);Z^\wedge_p)$ whose composition with $A(G/T)^\wedge_p \longrightarrow \varprojlim_n(A(F_n)^\wedge_p)$ is the homomorphism $\chi^\wedge_p$ of Corollary in the case of $F = G/T$. We can easily check that the image of $\varprojlim_n(A(F_n)^\wedge_p)$ also satisfies the congruence relations (#). This shows the surjectivity of the required map.

<u>Remark.</u> In [10] Feshbach insists a strong result; $A(G) \longrightarrow \pi^0_s(BG_+)$ has a dence image where the topology of the target is given by the filtration of BG and is also equal to the one given by the approximation by finite group. Admitting this, the surjectivity of Theorem A is clear because the topology of the augmentation ideal of A(G) is compact now.

<u>Corollary B.</u> The following three conditions are equivalent:

(1) G is a central extention of a finite group by a torus.

(2) A(G) is a Noetherian ring.

(3) $A(G)^\wedge \cong \pi^0_s(BG_+)$ is an isomorphism.

<u>Proof.</u> (1)⇒(2) was proved by tom Dieck [7]. (3)⇒(1) was proved in [4]. And we have just proved (1)⇒(3).

References.

[1] J.F. Adams: Maps between classifying spaces. II, Inventiones math. 49(1978), 1-65.

[2] M.F. Atiyah: Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. de l'I.H.E.S. no.9(1961), 23-64.

[3] M.F. Atiyah, G.B. Segal: Equivariant K-theory and completion, Jour. of Differential Geometry. 3(1969), 1-18.

[4] A. Bojanowska: The spectrum of Equivariant K-theory, Math. Z. 183(1983), 1-19.

[5] N. Bourbaki: Algèbre commutative, chap. 5-6, Paris, Herman, 1964.

[6] G. Carlsson: Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring cojecture, preprint.

[7] T. tom Dieck: Transformation group and representation theory, Lecture Notes in Math. No.766, Springer-Verlag.1979.

[8] L.Evens: A generalization of transfer map in the cohomology of groups, Trans. Amer. Math. Soc. 108(1963), 54-65.

[9] M. Feshbach: The transfer and comapct Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 251(1979), 139-169.

[10] M. Feshbach: The Segal conjecture for compact Lie groups, preprint.

[11] P.J. Hilton, U. Stambach: A course in homological algebra, Springer-Verlag. 1971.

[12] S. Jackowski: Group homomorphism inducing isomorphism of cohomology, Topology vol.17(1978), 303-307.

[13] E. Laitinen: On the Burnside ring and stable cohomotopy of finite group, Math. Scand. 44(1979), 37-72.

[14] N. Minami: On the I(G)-adic topology of the Burnside rings of compact Lie groups, to appear in Publ.R.I.M.S.Kyoto Univ.

[15] G. Nishida: On the S^1-Segal conjecture, Publ.R.I.M.S. Kyoto Univ. 19-3(1983).

[16] D.L. Rector: Modular character and K-theory with coefficients in a finite field, Jour. of Pure and Appl. Alg. 4(1975)137-158

[17] G. Segal:The Representation ring of a compact Lie group, Publ. Math. de l'I.H.E.S. no.34(1968), 129-151.

[18] Z. Yoshimura: Universal coefficient sequences for cohomology theories of CW-spectra, Osaka J. Math. 12(1975), 305-323.

[19] E.C. Zeeman: A proof of the comparison theorem for spectral sequence, Proc.Camb.Phil.Soc.53(1957), 57-62.

Structures of hyperspaces of continua

筑波大学数学系　加藤久男

Hyperspaces の理論は1900年代、Hausdorff や Vietoris の研究より始まった。1920年から1930年にかけて Hyperspaces の基本的な構造が研究され、1931年、Borsuk-Mazurkiewicz により 2^X, $C(X)$ ともに arcwise connected であることが示された。1939年、Wojdyslawski は X が Peano (locally connected) であれば 2^X, $C(X)$ ともに absolute retract であることを示した。1942年、Kelley は彼の博士論文の中で Whitney map を使用し、多くの興味ある結果を得、その概念は Hyperspaces の理論で最も基本的でかつ重要な道具であることを示した。以後多くの Hyperspaces に関する論文が書かれたが、それらの中で最も興味あるものは、Curtis-Schori-West による次の問題への肯定的な結果であろう。もし X が Peano であれば、2^X は Hilbert cube $Q=\prod_{i=1}^{\infty}[-1,1]$ に homeomorphic か？

この問題は1920年代より多くの数学者の興味を引いていたものである。Whitney map の構造についても多くの論文が書かれたが、最近(1982年)にGoodykoontz - Nadler が admissible Whitney map の概念を導入し興味ある結果を得ている。

この講演ではGoodykoontz - Nadler の更に詳しい結果を得たのでそれを報告致します。

§1 Definitions and Notations.

Xを continuum (compact connected metric space)とし、dをその metric とする。

このとき、

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ is nonempty and compact}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ is connected}\}$$

とおく。

任意の$\varepsilon > 0$, $A \in 2^X$に対し、

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ for some } a \in A\},$$

$A, B \in 2^X$に対し、

$$H_d(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ and } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}$$ とおく。

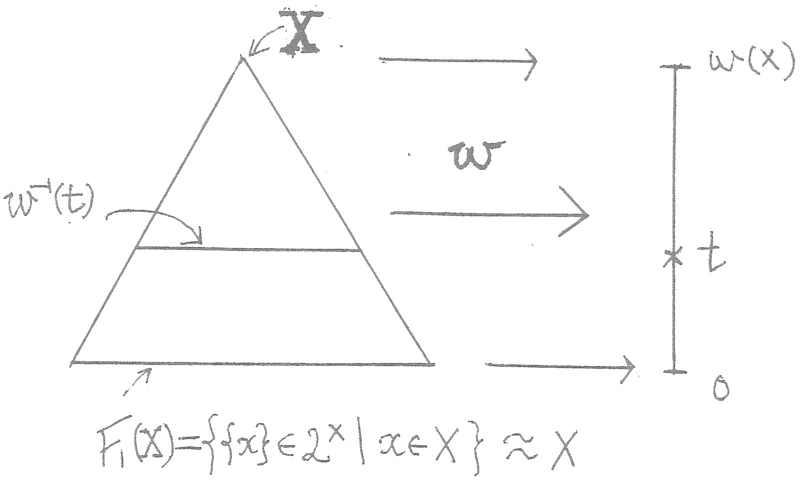
ここで H_d は 2^X における metric となり <u>Hausdorff metric</u> と呼ばれる。(= Vietoris topology)

A map $\omega : H \longrightarrow [0, \omega(X)]$ が <u>Whitney map</u> であるとは次の条件を満たすことである。ただし、$H = 2^X$ or $C(X)$.

(1) $\omega(\{x\}) = 0$ for $\forall\, x \in X$

(2) if $A, B \in H$ and $A \subsetneqq B$, then $\omega(A) < \omega(B)$.

Whitney map の存在は Whitney による。



以下良く知られた結果をあげてみる。

(1) (Borusuk-Mazurkiewicz-Kelley)

2^X, $C(X)$ ともに arcwise connected continuum で、任意の $A \in 2^X$ と $X \in 2^X$ に対し、次を満たす arc $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在する。$A_0 = A$, $A_1 = X$ で $t_1 < t_2 \Rightarrow A_{t_1} \subsetneq A_{t_2}$。(ただし、$A \subsetneq X$)

(2) (Wojdyslawski)

continuum X が Peano (locally connected) であるための必要十分条件は

(a) 2^X が absolute retract or

(b) $C(X)$ が absolute retract

(3) (Kelley-Segal-Kodama-Watanabe)

compactum X (connected とは限らない) に対し $Sh(2^X) = Sh(C(X)) = Sh(\square(X))$, ただし、$\square(X)$ は X の components をそれぞれ1点に縮めて得られる decomposition space, もちろん 0-次元。

特に、X が continuum ならば $Sh(X) = *$.

(4) (Kelley).

Continuum X において次は同値.

(a) 2^X は contractible,

(b) $C(X)$ は contractible,

(c) $i: X \hookrightarrow 2^X$ は null-homotopic,

(d) $i: X \hookrightarrow C(X)$ は null-homotopic.

特に X が the property of Kelley をもてば、2^X, $C(X)$ は contractible.

(5) (Kelley).

continuum X, Whitney map $w: C(X) \to [0, w(X)]$ に対し、$w^{-1}(t)$ は connected であり、更に X が hereditarily indecomposable で $\dim X \geqq 2$ であるならば、十分小さな $t > 0$ に対し, $w^{-1}(t)$ は無限次元の hereditarily indecomposable continuum で X から $w^{-1}(t)$ への monotone map が存在する。(Bing により、$(n+1)$ 次元 continuum の中に n 次元 hereditarily indecomposable continuum が常に存在している。)

(b) (Curtis-Schori-West).

もし continuum X が Peano であれば、$2^X \approx Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1,1]$，更に X が free arc を含まないならば $C(X) \approx Q$．（この結果は Hilbert cube manifolds の研究のめざましい発展によっており、現在では Toruńczyk による Hilbert cube の characterization によって簡単な証明が与えられている。）

§2 The structures of Whitney maps.

まず Whitney 自身による Whitney map の構成を述べよう。

X を continuum で d をその metric とする。$A \in 2^X$ に対し、

$$F_m(A) = \{K \subset A \mid K \neq \phi,\ |K| \leq m\},\ m \geq 2$$

$$\lambda_m : F_m(A) \to [0, \infty) \quad \text{by}$$

$$\lambda_m(\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}) = \mathrm{Min}\{d(a_i, a_j) \mid i \neq j\}$$

ただし、$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \in F_m(A)$, また.

$$w_m(A) = \sup \lambda_m(F_m(A)),$$

$$(*) - \quad w(A) = \sum_{m=2}^{\infty} w_m(A) / 2^{m-1}.$$

とおくと、$w: 2^X \longrightarrow [0, w(X)]$ は

Whitney map の条件をみたしている。

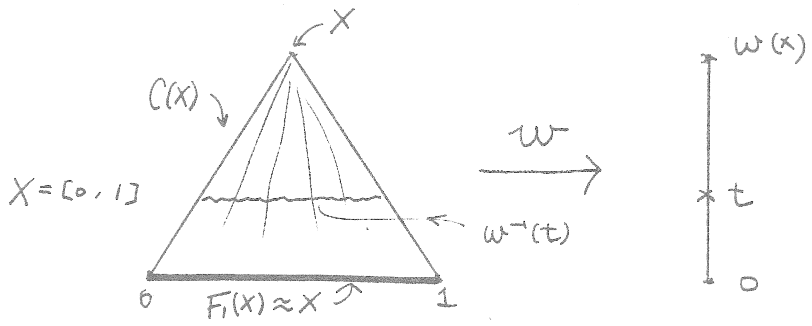
Example 1. $X = [0, 1]$ or $S^1 = \{x \in R^2 \mid \|x\| = 1\}$

とおくと、Whitney map $w: C(X) \to [0, w(X)]$

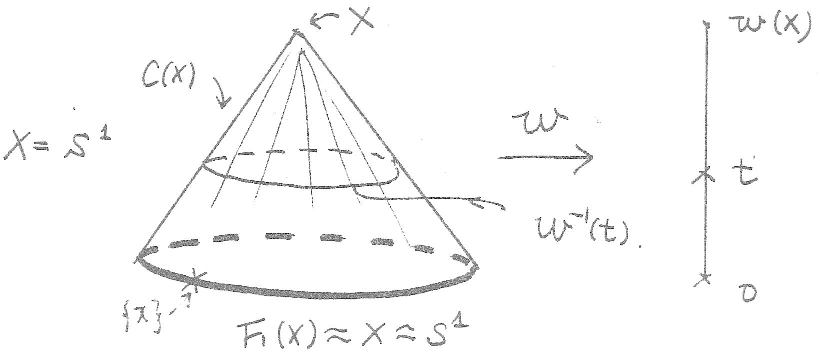
は次の図のようになる。$C(X)$ は X の cone に一致して

w は internal への自然な projection に一致している。

(i)



(ii)



Example 2. Whitney map は unique には決定されない。例えば (*) の構成法においても metric d に大きく依存している。

$X=[0,1]$, $d(x,y)=|x-y|$ とする。w を (*) によって定義される Whitney map とすれば、次の可換な diagram を得る。

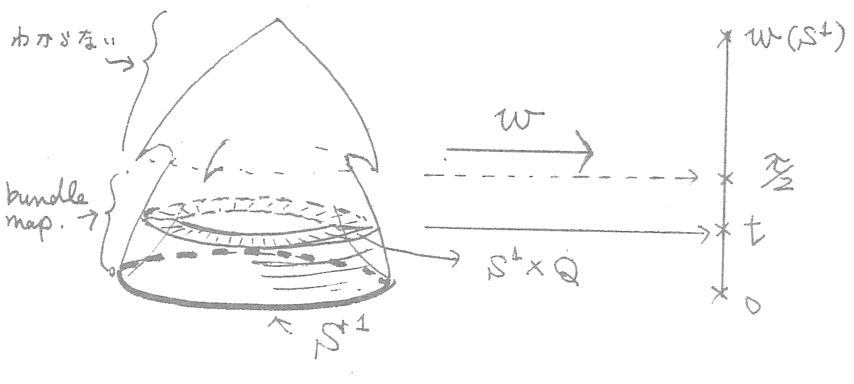
$$\begin{tikzcd}
2^X - F_1(X) \arrow[rr, "\exists h:\ \text{homeo.}", "\approx"'] \arrow[dr, "w|w^{-1}(0,w(X)]"'] & & Q\times(0,w(X)]/Q\times\{w(X)\} \arrow[dl, "\text{Projection}"] \\
& (0,\ w(X)] &
\end{tikzcd}$$

i.e., $w|w^{-1}(0,w(X))$ は Q を fibers にもつ bundle map となっている。(see Theorem 3.1)

また平面上の continuum $Y=\{e^{2\pi ti}\in\mathbb{C} \mid 0\leq t\leq \frac{3}{4}\}$ ($\mathbb{C}$ は複素数) は X に homeomorphic であり、$\mathbb{C}$ の普通の metric を d' として、(*) によって定義される Whitney map $w': 2^Y\to[0,w'(Y)]$ を考えると、$w'|w'^{-1}(0,w'(Y))$ は bundle map になってい

ない、実際 open map でさえない。 $A=\{1,-i\}$ $\in 2^Y$ とおくと、A は $w^{-1}(w(A))$ で isolated point である。

Example 3. $X=S^1=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|=1\}$ とし、X 上の metric d を arc-length によって定め、また(*)によって Whitney map $w: 2^X\to[0,w(X)]$ を決めると、$w|w^{-1}(0,\pi/2)$ は trivial bundle map で fibers は $S^1\times Q$ に homeomorphic であるが、$w|w^{-1}(0,\pi/2]$ は open map になっていない。(see Theorem 3.3).



Hyperspaces を山にたとえるなら、Whitney map はその山の等高線をつけることにたとえられるだろう。

では一体、その山を最も均整のとれた山に見せるためには、等高線をいかに引くべきかを考えてみたい。この問題に関して最近(1982)に Goodykoontz-Nadler が重要な概念を定義し、興味ある結果を得た。

定義 (Goodykoontz-Nadler). A whitney map w for H が "admissible" とは、homotopy $h: H\times[0,1]\to H$ が存在して

(1) if $A\in H$, $H(A,1)=A$, $H(A,0)\in F_1(X)$,

(2) if $w(h(A,t))>0$, then $w(h(A,s))<w(h(A,t))$. $0\leqq {}^{\forall}s<t\leqq 1$.

定理 (Goodykootz-Nadler)

X を compact subset of a Banach space または1次元ARとすれば、admissible Whitney map w for 2^X or $C(X)$. もし、X が smooth dendroid ならば すべての Whitney map for $C(X)$ は admissible.

彼らは更に、次のような興味深い定理を得ている。

定理（Goodykoontz－Nadler）
X を Peano continuum、w を admissible Whitney map for $H=2^X$ or $C(X)$ とする。$H=C(X)$ のとき、X は free arc（arc の neighborhood）を含まないと仮定する。このとき、$\forall t \in (0, w(X))$ に対して $w^{-1}(t)$, $w^{-1}([0,t])$ and $w^{-1}([t, w(X)])$ は Hilbert cube Q に homeomorphic である。
更に、w は open map となっている。

Remark．X が admissible Whitney map for H をもつとき、$Sh(X)=*$ であり、H が contractible であれば X も contractible である。したがって、contractible でない Peano continuum については存在しないので例えば S^n（sphere）の構造についてはあまり有効でない。また $t=0$, $w^{-1}(t) \approx X$ の近傍の構造がはっきりしない。実際、$t=0$ で良い構造をもっていない。

定義. Xを continuum とする。Whitney map w for $H = 2^X$ or $C(X)$ が <u>strongly admissible</u> であるとは、homotopy $h: H \times [0,1] \to H$ が存在して

(1) $h(\{x\}, s) = \{x\}$ for $\forall \{x\} \in F_1(X)$

(2) $h(A, 1) = A$, $h(A, 0) \in F_1(X)$ for $\forall A \in H$

(3) if $w(h(A,t)) > 0 \Rightarrow w(h(A,s)) < w(h(A,t))$ for $0 \leqq {}^\forall s < t \leqq 1$

明らかに strongly admissible ならば admissible であり逆は成立しない。strongly admissible Whitney map は $w^{-1}(0)$ の近傍の情報を与えてくれている。

定理。(1) Xを compact convex subset of a Banach space とすると strongly admissible Whitney map for $H = 2^X$, $C(X)$ が存在する。

(2) Xを 1次元AR とすると、strongly admissible Whitney map for $H = 2^X$, $C(X)$ が存在する。

§3. Main Theorems.

次の定理1によって admissible map の構造が完全に決定される。また、strongly admissible Whitney map の概念を使って次の定理2，3を得る。

定理1. X を Peano continuum で $H=2^X$ or $C(X)$ とする。$H=C(X)$ のとき X は free arc を含まないと仮定する。もし $\omega : H \to [0, \omega(X)]$ を admissible Whitney map とすれば、

$$\omega \mid \omega^{-1}(0, \omega(X)) : \omega^{-1}(0, \omega(X)) \longrightarrow (0, \omega(X))$$

は trivial bundle map with Hilbert cube fibers. (Goodykoontz—Nadler の更に詳しい結果). (see Ex.)

定理2. X を Hilbert cube Q とすれば、ある Whitney map ω for H が存在して、

$$\omega / \omega^{-1}([0, \omega(X))) : \omega^{-1}[0, \omega(X)) \longrightarrow [0, \omega(X))$$

は trivial bundle map with Q fibers, いいかえれば、ω は Q の cone から その interval への自然な projection に一致している。

定理3. P_iを n-sphere S^n $(n \geqq 1)$, または

1次元 or 2次元 connected polyhedron とする。

$X = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$ $(m \geqq 1)$. とおく。 このとき

Whitney map ω for H が存在して、

$$\omega / \omega^{-1}(0, t_0) : \omega^{-1}(0, t_0) \longrightarrow (0, t_0)$$

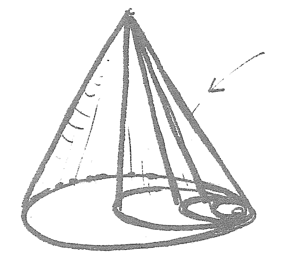
は trivial bundle map with $X \times Q$ fibers, ただし $\exists t_0 \in (0, \omega(X))$.

$X = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \times Q$ とおくと、Whitney map ω が存在して

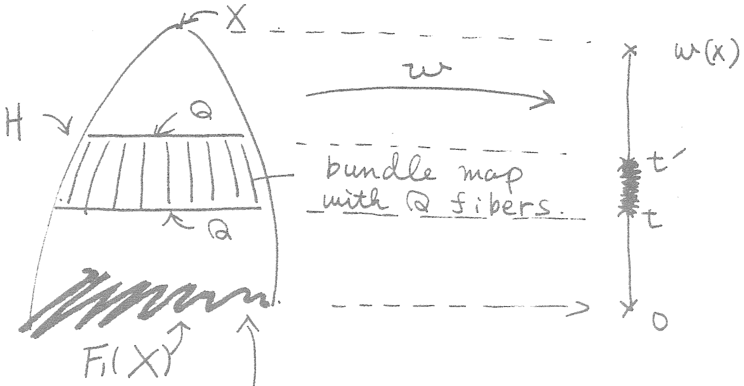
$$\omega / \omega^{-1}[0, t_0) : \omega^{-1}[0, t_0) \longrightarrow [0, t_0)$$

は trivial bundle map with X fibers.

Example.

$X =$ 

とすると、admissible Whitney map ω for H が存在して、



$t=0$ の所，$F_1(X)$ では bundle 構造のような単純な構造はもっていない。

定理3において，$t_0 = \omega(X)$ とはできない。
つまり，

命題．X を compact ANR であるが AR ではないとせよ。$H = 2^X$ or $C(X)$ で，もし $H = C(X)$ ならば X は free arc を含まないとする。このとき，任意の Whitney map ω for H に対して，ある $t_1 \in (0, \omega(X))$ が存在して，$\omega | \omega^{-1}(0, t_1)$ は trivial bundle map にはなっていない。

Problem. 定理2 or 3で、X を任意のAR, ANR または polyhedron に変えて一般化できるか。また、定理3で、$w(x)$ に十分近い所の w の構造を明らかにせよ。

X が Peano continuum でない場合でも、非常に興味深い結果が数多くあるが、ここでは触れられない。

Hyperspaces の理論、continuum 理論に関する最近の論文のリストは、S. B. Nadler 著の "*Hyperspaces of sets*" *Pure and Appl. Math.* 1978 (49) に詳しくでている。

Invariant polynomials characteristic to compact complex manifolds and compact group actions

千葉大・教養・二木昭人

§0. はじめに

筆者は [13] で, Einstein－Kähler 計量が存在する為の obstruction を発見した。 M を compact 複素多様体, $H(M)$ を双正則変換全体のなす複素 Lie 群, $\mathfrak{h}(M)$ を正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環(これは $H(M)$ の Lie 環でもある)とする。筆者の発見した obstruction は $H(M)$－不変な線形写像 $f: \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ で, M の複素構造のみから定まるものとして定義される。

一方, 森田茂之氏は筆者に, この f は Godbillon－Vey 不変量としても現れることを予言した。これを出発点として, 森田氏と共同で本稿の結果を得るに至った。

§1. 主定理

[Complex case] n 次元複素多様体 M の Hermite 計量を g, その Hermitian connection

を D とする。$^\forall X \in \mathfrak{h}(M)$ に対し

$$L(X) = L_X - D_X, \quad L_X \text{ は Lie 微分},$$

とおくと，$L(X)$ は $C^\infty(M, \mathrm{End}\,TM)$ の元を定める。ただし TM は M の正則接束を表す。次に正則 $GL_m(\mathbb{C})$-不変多項式環を $I^*(GL_m(\mathbb{C}))$ で表し，$\varphi \in I^{m+k}(GL_m(\mathbb{C}))$ に対し，$f_\varphi : \overset{k}{\otimes}\, \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ を

$$f_\varphi(X_1, \cdots, X_k) = \int_M \varphi\left(L(X_1), \cdots, L(X_k), \tfrac{i}{2\pi}\Theta, \cdots, \tfrac{i}{2\pi}\Theta\right)$$

Θ は D の曲率形式：$\Theta = \bar\partial(g^{-1}\partial g)$

と定義する。

<u>主定理 $I_{\mathbb{C}}$</u>：f_φ は Hermite 計量の選び方によらない。従って M の複素構造のみに依存する。特に f_φ は $H(M)$-不変多項式となる；

$$F : I^{m+k}(GL_m(\mathbb{C})) \ni \varphi \longmapsto f_\varphi \in I^k(H(M)).$$

（注）f_φ の定義は Lie 微分が extend するような正則ベクトル束 E（例えば $E = \left(\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} \overset{a_i}{\wedge} TM\right) \otimes \left(\overset{q}{\underset{j=1}{\otimes}} \overset{b_j}{\wedge} T^*M\right)$ など）にも自然に拡張される。この注は後述の Real case の場合も同様である。

$I_A^*(H(M))$ を $H(M)$-不変反対称多項式環とし，

transgression operator $T : I^k(H(M)) \to I_A^{2k-1}(H(M))$

を考える。 $m_\varphi = T f_\varphi$ とおくことにより，

<u>系 $\mathrm{I}_{\mathbb{C}}$</u>： $\varphi \in I^{n+k}(GL_n(\mathbb{C}))$ に対し，M の複素構造のみから定まる $m_\varphi \in I_A^{2k-1}(H(M))$ が存在する。

<u>主定理 $\mathrm{II}_{\mathbb{C}}$</u>：次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} I^{n+k}(GL_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{F} & I^k(H) \\ {\scriptstyle C}\downarrow & & \downarrow \\ H^{2n+2k}(MH:\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi_*} & H^{2k}(BH:\mathbb{C}) \end{array}$$

ここに H は $H(M)$ の identity component,

$MH = EH \times_H M$,

C は $MH \to BH$ の fiber に沿った接束のなすベクトル束の Chern class を対応させる写像

W は Weil homomorphism

π_* は Gysin map

である。

系 IIc ： 次の図式を可換にする μ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} I^{m+k}(GL_m(\mathbb{C})) & \xrightarrow{F} & \mathrm{Image}(F) \\ S\downarrow & & \downarrow\mu \\ H^{2m+2k-1}(MH^\delta : \mathbb{C}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & H^{2k-1}(BH^\delta : \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

ここに H^δ は H に離散位相を入れたもの，

$MH^\delta = EH^\delta \times_{H^\delta} M$

S は 複素葉層に対する Bott の消滅定理から定まる Simons class を対応させる写像，

π_* は Gysin map。

μ は次のようにして定義される。次の図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[c_1,\cdots,c_m] & & \xrightarrow{F} & & I^k(H) \\ C\downarrow & & & & \searrow W \\ H^{2m+2k}(MH^\delta : \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi'_*} & H^{2k}(BH^\delta : \mathbb{Z}) & \xrightarrow{r'} & H^{2k}(BH^\delta : \mathbb{C}) \\ \downarrow r & & & \nearrow \pi_* & \\ H^{2m+2k}(MH^\delta : \mathbb{C}) & & & & \end{array}$$

において， 主定理 IIc は $r' \circ \pi'_* \circ C = W \circ F$ を主張している。 そこで $\varphi \in \mathbb{Z}[c_1,\cdots,c_m]$ に対し $\mu f_\varphi = S_{f_\varphi,\pi'_* C\varphi}$ と定義できる（[12]）。 さらにこれらに $\otimes\mathbb{C}$ を施して 系 IIc を得る。

（注） 筆者が ［13］で発見したものは $f_{c_1^{n+1}}$ であり，森田氏の指摘したものは $\mu f_{c_1^{n+1}}$ である。

［<u>Real Case</u>］ M を $2m$ 次元向き付け可能閉多様体とし，compact Lie 群 G が effective に左から作用しているとする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X は，$X \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp tX \cdot p)_{p \in M}$ により M 上のベクトル場と同一視することにする。

$\mathfrak{M}(G)$ により G－不変 Riemann 計量の全体の集合を表す。$g \in \mathfrak{M}(G)$ を任意に選び，その Riemannian connection を D とする。このとき $\mathfrak{g}$ の元は g に関する Killing ベクトル場となる。complex case と同様に $X \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$L(X) = L_X - D_X, \quad L_X \text{ は Lie 微分},$$

と定義すると，$L(X)$ は $C^\infty(M, \mathrm{End}\, TM)$ の元を定める。D は torsion free であることから

$$L(X) = -\nabla X \in C^\infty(M, T^*M \otimes TM) \simeq C^\infty(M, \mathrm{End}\, TM)$$

とも書ける（このことは，complex case でも g が Kähler なら同様）。従って正規直交標構に関して $L(X)$ も曲率形式 Θ も歪対称行列で局所表示される

(complex case でも $X \in \mathfrak{h}(M)$ が isometry を生成するなら，Hermite 計量 g の unitary 標構に関し，$L(X)$ と Θ は歪 Hermite 行列)。

$\varphi \in I^{n+k}(SO(2n))$ に対し $f_\varphi : \overset{k}{\otimes}\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_\varphi(X_1, \cdots, X_k) = \int_M \varphi\left(L(X_1), \cdots, L(X_k), \frac{1}{2\pi}\Theta, \cdots, \frac{1}{2\pi}\Theta\right)$$

とおく。

主定理 $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}$: f_φ は $g \in \mathfrak{M}(G)$ の選び方によらない。従って f_φ は G-action の不変量である。特に f_φ は G-不変多項式となる；

$$F : I^{n+k}(SO(2n)) \longrightarrow I^k(G).$$

系 $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}$，主定理 $\mathrm{II}_{\mathbb{R}}$，系 $\mathrm{II}_{\mathbb{R}}$ も同様に成立する。繰り返しになるので省略する。

§2. 問題

今後混乱を避ける為に complex case に焦点をしぼることにする。我々の興味は次の問題である。

(イ) f_φ, m_φ をどのようにして計算するか。

(ロ) F, $W \circ F$, $T \circ F$, $\mu \circ F$ の image と kernel はどの程度わかるか。

(ハ) これらはどのようにして，幾何学やトポロジーに現れるか。

以下の節ではこれらに対する答を試みる。

m_φ と f_φ の関係は次で与えられる。

<u>命題 2.1</u> (e.g *)) ; ω を $h(M)$ の Maurer-Cartan form とすると

$$m_\varphi = \left((-1)^{k-1} / 2^k \binom{2k-1}{k}\right) f_\varphi(\omega \wedge [\omega, \omega]^{k-1})。$$

従って f_φ が理解されれば m_φ も原理的には理解されることになる。また m_φ と μf_φ は表裏一体であるから μf_φ もある程度理解されることになる。そこで我々は f_φ, F, $W \circ F$ に話をしぼることにする。

<u>§3. 局所化</u>

$X \in h(M)$ が<u>非退化</u>であるとは (i) X の零点集合 $\mathrm{Zero}(X)$ は離散集合（従って有限集合），(ii) $^\forall p \in \mathrm{Zero}(X)$ に対し $L_p(X) : T_pM \to T_pM$ は非退化の時をいう。

*) Chern-Simons, Ann of Math. 99 (1974), 48-69.

<u>定理 3. 1.</u>　$X \in h(M)$ が非退化のとき，$\forall \varphi \in I^{n+k}(GL_n(\mathbb{C}))$ に対し

$$f_\varphi(X) = \sum_{p \in Zero(X)} \varphi(L_p(X)) / \det L_p(X)$$

ここに $f_\varphi(X) = f_\varphi(X, \cdots, X)$，$\varphi(L_p(X))$も同様。

<u>系 3. 2.</u>　$Zero(X) = \phi$ なら $f_\varphi(X) = 0$.

定理 3. 1. の証明は Bott [7] の証明と全く同じである。Real case も同様である。また，X が部分多様体に沿って非退化に消えている時も Bott [8]，real case も Baum - Cheeger [5] と同様にして，同様の公式を得る。この結果を用いると例えば $k = 1$ の時は

<u>命題 3. 3</u>　単項式 $\varphi = c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n}$ $(\neq c_1 c_n)$，$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n+1$，に対し，ある M^n と $X \in h(M)$ が存在して，$f_\varphi(X) \neq 0$。

このような M は $P^n(\mathbb{C})$ の blowing up やその直積を使って作られる。我々を驚かせたのは，どのよう

に M を作っても $\varphi = c_1 c_n$ に対しては 0 になることであった。次節では M が Kähler で X が非退化なら $f_{c_1 c_n}(X) = 0$ であることを証明する。

§4. 消滅定理

本節では，3種類の消滅定理を紹介する。(a) 1つは f_φ の $H(M)$-不変性，(b) 1つは $L(X)$ と Ⓗ が歪Hermite 行列であること，(c) 1つは Dolbeault complex に対する Atiyah-Bott の Lefschetz 定理 [2] または family に対する Atiyah-Singer 指数定理 [3]（[1]も参照）を用いる。

(a) $\varphi \in I^{n+1}(GL_n(\mathbb{C}))$ に対し f_φ は $H(M)$-不変であるから，$X, Y \in \mathfrak{h}(M)$ に対し

$$f_\varphi(\mathrm{ad}(\exp tX)Y) = f_\varphi(Y)。$$

t について微分して，$f_\varphi([X, Y]) = 0$。よって

定理 4.1. $\forall \varphi \in I^{n+1}(GL_n(\mathbb{C}))$ に対し，

$$f_\varphi \mid [\mathfrak{h}(M), \mathfrak{h}(M)] = 0。$$ 特に

(i) $f_\varphi : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ は character。

(ii) $\mathfrak{h}(M)$ が perfect なら $f_\varphi = 0$。

(b) $H(M)$ の identity component H を 実 Lie 群 とみなす。H の極大 compact 群 を K, H の Lie 環 を $\mathfrak{h}$, K の Lie 環 を $\mathfrak{k}$ とする。$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{k}$ の元は M の双正則変換 を生成する実ベクトル場と同一視する。従って $\mathfrak{h} \ni X \longmapsto X' = \frac{1}{2}(X - iJX) \in h(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として同型である。ここに J は M の複素構造。

$\varphi \in I^{n+1}(GL_n(\mathbb{C}))$ に対し, $f_\varphi^r \in I^1(H)$ を

$$f_\varphi^r(X) = \mathrm{Re}\, f_\varphi(X')$$

と定義する。このとき

<u>補題 4.2</u>: f_φ は f_φ^r を $\mathbb{C}$-線型に拡張したものである; $X \in \mathfrak{h}$ に対し

$$f_\varphi(X') = f_\varphi^r(X) - i f_\varphi^r(JX)$$

<u>証明</u> $f_\varphi^r(JX) = \mathrm{Re}\, f_\varphi(iX') = \mathrm{Re}\,(i f_\varphi(X'))$

$$= -\mathrm{Im}\, f_\varphi(X')$$

q.e.d.

<u>定理 4.3</u>: $\varphi \in I^{n+1}(GL_n(\mathbb{C}))$ に対し

$$f_\varphi|_{\mathfrak{k}} = 0$$

<u>証明</u> K は compact だから, metric g は

K－不変であると仮定してよい。よって $\mathfrak{k}$ の元は isometry を生成する。このとき $X \in \mathfrak{k}$ に対し，unitary 標構に関して $L(X)$ と Θ は歪 Hermite 行列で表せる。$\therefore$ $i\,(L(X)+\Theta)$ は Hermite。

$\therefore$ $c_i\,(i\,(L(X)+\Theta))$ は real。よって

$$f_\varphi(X) = \frac{2\pi}{(n+1)\,i}\int_M \varphi\left(\frac{i}{2\pi}(L(X)+\Theta)\right)$$

は pure imaginary。　　　　q.e.d.

系 4.3　$W \circ F = 0$ for $k=1$

証明

$$\begin{array}{ccccc} I^{n+1}(GL_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{F^r} & I^1(H) & \xrightarrow{r} & I^1(K) \\ & & W\downarrow & & \downarrow S \\ & & H^2(BH:\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & H^2(BK:\mathbb{R}) \end{array}$$

$$r \circ F^r = f^r|_{\mathfrak{k}} = 0$$　　　　q.e.d.

(c)　$T_n(y;c_1,\cdots,c_n)$ を一般化された Todd 多項式とする（[15] 参照）。$\chi^p(M)$ を p 次算術種数 $\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim H_{\bar\partial}^{p,q}(M)$ とし，

$$\chi_y(M) = \sum_{p=0}^{n}\chi^p(M)\,y^p$$

とおくと，Riemann-Roch の定理（[3]）により，

$$\chi_y(M) = T_m(y; c_1(M), \cdots, c_m(M))\,[M]$$

が成り立つ。一方 $a \in H(M)$ に対し

$$L_y(a, M) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{q=0}^{m} (-1)^q \operatorname{tr}\left(a^* |_{H_{\bar\partial}^{p,q}(M)}\right)\right) y^p$$

とおくと，Atiyah-Bott [2] により，

$\forall Q \in Fix(a)$ に対し，$da|_Q$ が 1 を固有値に持たないとき，

$$(*)\quad L_y(a, M) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{Q \in Fix(a)} \operatorname{tr}\left(\overset{p}{\wedge} da|_Q\right) \Big/ \det(1 - da|_Q) \right) y^p$$

が成立する。

非退化な $X \in \mathfrak{h}(M)$ に対し，$a_t = \exp tX$ とおく。M が Kähler なら $H_{\bar\partial}^{p,q}(M) \subset H_{DR}^{p+q}(M)$ であるから，$L_y(a_t, M) \equiv \chi_y(M)$。$(*)$ と定理 3.1 より，

$$0 = \left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0} L_y(a_t, M) = k!\, f_{T_{m+k}(y; c_1, \cdots, c_m, 0, \cdots, 0)}(X)$$

を得る。これより

<u>定理 4.4.</u> M を compact Kähler 多様体，$X \in \mathfrak{h}(M)$ を非退化とする。このとき，$\forall y \in \mathbb{C}$ に対し

$$f_{T_{m+k}(y; c_1, \cdots, c_m, 0, \cdots, 0)}(X) = 0$$

系 4.5. 上と同じ仮定のもとに，

$$f_{c_1 c_n}(X) = 0。$$

特に $$\sum_{p \in Zero(X)} L_p(X) = 0。$$

証明 $$\frac{d^2}{dy^2}\Big|_{y=-1} T_{n+1}(y; c_1, \cdots, c_n, 0) = \frac{1}{6} c_1 c_n$$

q.e.d.

(注 1) $T_{n+k}(y; c_1, \cdots, c_n, 0, \cdots, 0)$ は $|\alpha| = n+k$ なる c^α 達の $\mathbb{Q}[y]$-係数の一次結合で書ける。従って定理 4.4 は f_{c^α} 達の一次従属関係を与える。

(注 2) $$T_m(y; c_1, \cdots, c_m) = \sum_{p=0}^{m} T_m^p(y; c_1, \cdots, c_m)\, y^p$$
とおくと，次の関係式は一般的に成立する。

$$T_{n+k}^p(c_1, \cdots, c_n, 0, \cdots, 0) = (-1)^{n+k}\, T_{n+k}^{n+k-p}(c_1, \cdots, c_n, 0, \cdots, 0)$$

$$\sum_{p=0}^{n+k} (-1)^p\, T_{n+k}^p(c_1, \cdots, c_n, 0, \cdots, 0) = 0。$$

従って，これらは自明な f_{c^α} の一次従属関係を与える。

(注 3) M が Kähler でないなら，$H_{\bar\partial}^{p,q}(M)$ の homotopy 不変が成立しない例は知られている。従って

上の証明では Kähler の条件ははずせない。しかし

$T_{n+k}(1;c_1,\cdots,c_n,0,\cdots,0)=L_{n+k}$ (L-polynomial)

に対しては，M が Kähler である必要はない。

(注 4) Real case でも L-polynomial に対して同じ結果が得られる。

(注 5) 上の証明では Atiyah-Bott の結果を用いる為に X は非退化でなければならない。しかし $W\circ F=\pi_*\circ C$ に対しては Atiyah-Singer ([3], IV) を用いて次がいえる。

定理 4.6 M が compact Kähler 多様体ならば $\forall y\in\mathbb{C}$ に対し

$$\pi_* C(T_{n+k}(y;c_1,\cdots,c_n,0,\cdots,0))=0。$$

§5. complex foliation の secondary class

M を n 次元 compact 複素多様体，$W=M\times S^1$，$S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする。$X\in\mathfrak{g}$ (双正則変換を生成する実ベクトル場) に対し，$X_\varepsilon=\varepsilon X+\frac{\partial}{\partial t}$，$\varepsilon\in\mathbb{R}$，とおくと，$X_\varepsilon$ は W 上のベクトル場となる。$\mathcal{F}_\varepsilon$ で X_ε の生成する flow の定める 1 次元 foliation

とする。$\mathcal{F}_\varepsilon$ は complex foliation となる。

$\varphi \in I^{m+1}(GL_m(\mathbb{C}))$ に対し，Bott の消滅定理（[9]）から定まる Simons class $S_\varphi \in H^{2m+1}(W ; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ を考える（[10]，[12]）。

<u>定理 5.1</u>　$\varphi \in I^{m+1}(GL_m(\mathbb{C}))$ に対し

$$\frac{d}{d\varepsilon} S_\varphi(\mathcal{F}_\varepsilon)[W] = -(m+1)\, i\, f_\varphi(X'),$$

ただし $X' = \frac{1}{2}(X - iJX) \in h(M)$。

§6. Einstein-Kähler 計量の存在に対する障害

M を compact 複素多様体とする。M の Hermite 計量 g が <u>Kähler</u> であるとは，$g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$，$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$（これは大域的に定義されている）とおいたとき，$d\omega = 0$ のときをいう。このとき ω を <u>Kähler 形式</u> という。さらに $\gamma_\omega = \frac{i}{2\pi} \bar{\partial}\partial \log \det g$ とおいて；<u>Ricci 形式</u> という。$[\gamma_\omega] = c_1(M)$ は良く知られている。Kähler 計量 g が <u>Einstein 計量</u> であるとは，${}^\exists c \in \mathbb{R}$ に対し，$\gamma_\omega = c\,\omega$ のときをいう。定数 $p > 0$ に対し，$\gamma_{p\omega} = \gamma_\omega$ であるから，我々は

$c = -1, 0,$ 又は 1 であると仮定してよい。次の補題は Einstein-Kähler 計量が存在する為の primary obstruction である。

<u>補題 6.1</u>　compact 複素多様体 M に Einstein-Kähler 計量が存在するならば，$c = -1, 0, 1$ に応じて $c_1(M) > 0$, $= 0$, < 0 でなければならない。ここに $c_1(M) > 0$ (resp. < 0) とは $c_1(M)$ が正 (resp. 負) 定値の Hermite 行列を係数とする実 (1, 1) 形式で代表されるときをいう。$c_1(M) = 0$ は通常の意味である。

<u>例.</u> $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の degree k の hypersurface M は

$$k < n+1 \Rightarrow c_1(M) > 0$$

$$k = n+1 \Rightarrow c_1(M) = 0$$

$$k > n+1 \Rightarrow c_1(M) < 0$$

問題は 補題 6.1 の逆は正しいかである。Yau [16] は $c_1(M) = 0$ 又は < 0 の場合に問題を肯定的に解決して代数幾何や微分幾何に多くの美しい結果をもたらした。

<u>定理 6.2</u>　（[17]; $c_1(M)<0$ のときは Aubin [4] も独立に解いた。）　$c_1(M)<0$ 又は $c_1(M)=0$ なら Einstein-Kähler 計量が存在する。

筆者の結果は，次のように述べられる。

<u>定理 6.3</u>　（[13]）　M を compact 複素多様体で，$c_1(M)>0$ とする。$f_{c_1^{n+1}} \neq 0$ ならば，M は Einstein-Kähler 計量を許容しない。

<u>証明</u>　$c_1^+(M)$ を $c_1(M)$ を代表する正の実 (1,1) 形式全体とする。$c_1^+(M) \ni {}^\forall\omega$ は Kähler 形式とみなせる（もし Einstein-Kähler 計量が存在すれば，その Kähler 形式は $c_1^+(M)$ に属する）。ω の Ricci 形式 γ_ω に対し $\gamma_\omega-\omega$ は exact 実 (1,1) 形式であるから，${}^\exists F_\omega \in C^\infty(M)$ が存在して

$$\gamma_\omega-\omega=\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial F_\omega$$

と書ける。$f_+ : h(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$f_+(X)=\int_M XF_\omega\ \omega^n$$

とおくと，Calabi-Yau の定理（[17]）を用いて，

$f_+ = f_{c_1^{n+1}}$ が証明できる。もし $^\exists\omega \in c_1^+(M)$ が Einstein なら $F_\omega = \text{constant}$ であるから，$f_+ = f_{c_1^{n+1}} = 0$ となり矛盾する。 q.e.d.

（注1） Calabi（[11]）の提案しているある変分問題が解ければ，$f_{c_1^{n+1}} = 0$ が Einstein-Kähler 計量の存在の必要十分となる。

（注2） 定理 6.3 は 筆者 [14]，Calabi [11, II]，Bando [6] により拡張されているが，これらは本稿の文脈では未だ理解されていない。これらは指定された Kähler class に依存する不変量であるが，Calabi [11, II] の例が示すように，Kähler class の選び方に本質的に依存している。一方我々の不変量は複素構造のみに依存する。

References

[1] M. F. Atiyah, The signature of fiber bundles, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, Tokyo Univ. Press, 1969, 73-84.

[2] M. F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complex: I, II, Ann. of Math. 86(1967), 374-407; 88(1968), 451-491.

[3] M. F. Atiyay and I. M. Singer, The index of elliptic operators: III, IV, Ann. of Math. 87(1968), 546-604; 92(1970), 119-138.

[4] T. Aubin, Equations du type Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes compactes, C.R.A.S. Paris, 283 A(1976), 119-121; Bull. Sci. Math., 102(1978), 63-95.

[5] P. Baum and J. Cheeger, Infinitesimal isometries and Pontrjagin numbers, Topology, 8(1969), 173-193.

[6] S. Bando, An obstruction for Chern class forms to be harmonic, preprint.

[7] R. Bott, Vector fields and characteristic numbers, Michigan Math. J. 14(1967), 231-244.

[8] R. Bott, A residue formula for holomorphic vector fields, J. Diff. Geom. 1(1967), 311-330.

[9] R. Bott, On a topological obstruction to integrability, Proc. Symp. Pure Math. 16(1970),127-131.

[10] R. Bott, On the Lefschetz formula and exotic characteristic classes, Symp. Math. 10(1972), 95-105.

[11] E. Calabi, Extremal Kähler metrics, Seminars on Differential Geometry(S. T. Yau, ed.), Princeton Univ. Press & Tokyo Univ. Press, (1982), 259-290; II, preprint.

[12] J. Cheeger and J. Simons, Differential characters and geometric invariants, preprint.

[13] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. 73(1983), 437-443.

[14] A. Futaki, On compact Kähler manifolds of constant scalar curvature, Proc. of Japan Acad. 59(1983), 4o1-4o2.

[15] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1966.

[16] S. T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 74(1977), 1798-1799.

[17] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. pure Appl. Math. 31(1978), 339-411.

A survey on surface diffeomorphisms

東大教養 森田茂之

曲面の研究の歴史は古い．Poincaré, Riemann, Gauß, Euler そして Descartes とたどってゆくと，曲面こそがトポロジーの発祥の"場"であったという気がしてくる．20世紀に入ってトポロジーがようやくひとり歩きをするようになってからも，曲面は重要な研究対象のひとつであり続けた．1920年代後半にはじまる Nielsen そして Dehn によるいわゆる曲面の写像類（mapping class）の研究は質量ともになかでもきわだっている．

しかしホモロジー論の整備をはじめとする代数的手法が確立し，トポロジーがひとつの分野として本格的な活動をはじめてからは，曲面の地位は相対的にさがり続けてきた．現在トポロジーの授業で曲面がでてくるのは例の中だけだし，いわゆる曲面の分類の基本定理は定理ではなく常識になってしまった．

この情況は Thurston の一連の研究をひとつの契機として変わってきた．それは直接的には曲面の微分同相が mapping torus の構成や Heegaard 分解を通して 3 次元多様体論と深くかかわっているという理由によるが，それだけではなく曲面自身についても種々の観点からの研究にはずみがついたようである．実際曲面は非常に具体的である意味では特殊な研究対象だが，またこれほど多くの分野にかかわっている対象もめずらしい．トポロジーは言うに及ばず，基本群を通して無限群論，組み合わせ的群論，リーマン面を通して古典的解析，代数曲線を通して

代数幾何，そしてもちろん微分幾何という具合である．

この講演では以上のことを念頭に主として曲面の微分同相に関する Nielsen 以降の研究をふりかえってみたい．最後に筆者の最近考えていることにもふれてみたい．

3次元多様体上の幾何学的構造の存在について
（W.P. Thurstonの結果を中心に）

鈴木　康正（M.S.R.I.）

§1　序

1981年12月、PrincetonのI.A.S.にて、Thurston教授が、symmetryを持つ既約閉3次元多様体上の幾何学的構造の存在について、次の様な注目すべき結果を発表した。

__定理；__ M^3を非自明な有限群作用をもつ既約閉3次元多様体とする。作用群が、少なくとも次元1の不動点集合をもつ要素（$\neq 1$）をもつならば、M^3はその群で不変な幾何学的分解をもつ。

様々な反響を招いた定理の発表であったが、印刷された証明がないまま、二年半の月日が過ぎている。米国での評判も必ずしも肯定的ではないが、最近Princeton大学大学院での講義の形で続いていた定理の証明の解説が、1981年9月〜1982年5月、1984年2月〜5月ののべ13ヶ月を費してようやく終了した。未だ未整理の状態ではあるが、本学会での講演の機会を利用して、その概略を紹

介し、合わせて関連する結果に言及したい。

内容に入る前に、Thurston 自身の解説による[1]、証明の philosophy を引用しておく。

"証明の技術は、[Thurston の lecture note] で導入した、hyperbolic Dehn surgery である。即ち、3次元多様体上の、cone-like singularities をもつ hyperbolic structure を意味する。

その様な意味で特異的な hyperbolic structure の主要な例として、有限群による hyperbolic manifold の商空間がある。不動点集合は、その商空間上の特異的な hyperbolic structure の singular locus に対応する。この様な場合、singular locus にそった cone angle は $2\pi/n$ の形(n は自然数)となる。

幾何学的構造の構成のアイデアは、既存の特異的な hyperbolic structure から始めて、求める値まで cone angle が到達する様、structure を変動させる事である。[lecture note] で示した様に、cone angle の微小な変動を得る事は容易である。従って、少しだけ求める値に近づけていくことは出来る。

問題は、大域的な変動の場合に有る。我々は、小さく

ではなく、或るきまった量だけcone angleを変動させる必要が有る。即ち、cone angleの組をパラメーターとする特異的なhyperbolic structureの族に対して、極限で何が起こるのか解析することである。何も無ければその族は延長され、何かが起きたら、我々はそれを調べる必要がある。

その調査の鍵は、顕微鏡である。何か悪い事が生じそうな時には、その特異的なhyperbolic structureの小さな近傍を、大きく拡大してながめてみる。すると、singular set以外では、局所的にEuclid的である。後述する通り、特異的なEuclidian manifoldは、有限通りの可能性しか無い。この事実から、特異的なhyperbolic structureどうしのからみつき方や、それらのこわれていくいき方が、限度を有することがわかる。

他の鍵は、幾何学的極限の概念である。適当な条件を満たす距離空間の列に対して、その列が"近づいていく"距離空間が存在する。この概念は、Gromovにより、その著名な定理；群がpolynomial growthをもつ必要十分条件は、有限位数のnilpotentな部分群をもつ。の証明に使われた。

我々は、此の概念を、特異的な hyperbolic structure の列に適用する。極限は、0次元、1次元、2次元、時には3次元であったりする。その極限を調べてみることにより、元々の多様体が既約又は torus 分解の様な分解を有したり、8種類の幾何学的構造のいずれかをもつことがわかる。

最後の帰結の1つとして、群作用で不変な(必ずしも定数でない)正曲率をもつことが示せる。華麗な手法により、R. Hamilton は、正曲率の計量の存在が、正定数曲率の計量の存在を導くことを示した。"

前述した定理は、正確には系と呼ばれるべきで、証明は次を目標に進行する。

<u>定理</u>: Q^3 を既約(= bad な、又は、elliptic な sub-orbifold をもたない)で atoroidal (= essential な euclidian な sub-orbifold は ∂Q^3 に isotopic) な compact、orientable 3-orbifold とし、Q^3 は次元1の singular locus をもち、∂Q は euclidian 2-orbifolds から成るとする。このとき、Q^3 は幾何学的構造をもつ。

orbifold・orbifold 上の幾何学的構造、その他、3次元多様体の諸概念が orbifold 上では如何に対応するかについて

は、[2]を参照されたい。又、幾何学的構造については、[3]を参照されたい。

§2 Geometric Limits ([4])

距離空間X、Yに対して、次の二条件を満たすX×Yの部分集合Rを、X、Yの間のε-近似と呼ぶ。($\varepsilon>0$)

(1) $(x, y), (x', y') \in R \Rightarrow |d_X(x, x') - d_Y(y, y')| < \varepsilon$

(d_X、d_YはX、Y上の距離)

(2) RからX、Yへの自然射影は共に上への写像

このとき、次が成立つ。

<u>命題2-1</u>：コンパクト距離空間X、Yに対して、

$d(X, Y) \Leftarrow \mathrm{Inf.}\{\varepsilon>0 \mid$ X、Yの間にε-近似が存在$\}$

はwell-definedな距離を、コンパクト距離空間のisometry class全体の族に定める。

距離空間の極限の幾何学的な例として、双曲的閉曲面の場合を考えよう。

<u>例2-2</u>：双曲的な、種数2の閉曲面の距離に、$(\text{半径})^{-1}$をかけた距離空間全体の族の境界点には、edgeが3本以上のmetric graphが対応する。

実際、距離空間Xに収束する収束列S_iに対して、その

ε-thin part（＝その点を中心とするε-ballがdiskではない点の全体）を$(S_i)^{\varepsilon}_{thin}$とおくと、(a)或る$\varepsilon>0$に対して、十分大きなすべての$i$に対して$(S_i)^{\varepsilon}_{thin}=\phi$となる場合と、(b)すべての$\varepsilon>0$に対して、常に$(S_i)^{\varepsilon}_{thin}\neq\phi$となる場合とに分かれる。（ここで、距離は$S_i$上の双曲的計量より導かれる距離とし、各$S_i$の半径を$s_i$とおく。）

(a)の場合、s_iは有界なので、収束部分列がとれ、対応する双曲構造の列は、Teichmüller空間の中で収束する。従って、Xは境界点ではない。

(b)の場合、s_iは非有界である。S_iのε-thick part（＝$S_i-(S_i)^{\varepsilon}_{thin}$）を$(S_i)^{\varepsilon}_{thick}$とおくと、$(S_i)^{\varepsilon}_{thick}$の各成分の半径は有界なので、$s_i^{-1}$をかけると収縮していく。よって、Xはmetric graphである。

上述の議論の中に、定理の証明のひな形をみることができる。更に、上述の概念を、非コンパクトの場合に拡張しよう。

基点付き距離空間(X, x_0), (Y, y_0)に対して、前頁の(1), (2)及び

(3) $(x_0, y')\in R$, $d_Y(y_0, y')<\varepsilon$となる$y'\in Y$が存在。

を満たすRを、両者の間のε-近似と呼ぶ。

命題2-1に対応して次が成立つ。

命題2-3；閉球が常にコンパクトである基点付き距離空間(X, x_0), (Y, y_0)に対して、両者が基点を保って isometric である条件は、$\mathrm{Inf}\{\varepsilon>0 \mid \exists_{\varepsilon}\text{-近似} \subset X\times Y\}=0$である。

最後に、極限の存在の十分条件を与えておく。

定理2-4；列$\{(X_i, x_i)\}$が収束部分列をもつ十分条件は、すべての$R>0$に対して、x_iを中心とする閉球$B_R(x_i)$が、一様にコンパクト（＝すべての$\varepsilon>0$に対して、$B_R(x_i)$をおおうε-ball の数の最小数$\leqq K_\varepsilon$となる$K_\varepsilon>0$が存在）となることである。

§3 Hyperbolic Cone Manifolds

局所的に hyperbolic 3-space $\mathbb{H}^3$か、$\mathbb{H}^3$の中の閉領域；

$\{(x, y, z) \mid x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r\geq 0,\ \theta\geq\varphi\geq 0,\ z>0\}$

の境界をz軸を背に折り曲げて（表表紙と裏表紙を）同一視して得る、1次元の特異点集合をもつ cone-like な空間のいずれかに isometric となる metric space を、hyperbolic cone-manifold と呼ぶ。一般には、$\mathbb{H}^3$の convex cone の各面を hyperbolic isometry ではり合わせたものに、局所的に等長となるものをさすが、簡単の為に上述に限る。$\mathbb{H}^3$のか

わりに、euclidian 3-space $\mathbb{E}^3$、spherical 3-space $\mathbb{S}^3$を用いれば、euclidian cone-manifold, spherical cone-manifoldが定義出来、同様の定義は一般の次元でも成立する。

例3-1；$S^3 \supset k_8$をfigure eight knotとする。m, lをk_8の標準的なmeridian, longitudeとし、$\partial(S^3 - \mathring{U}(k_8))$上のsimple closed curve $p\cdot m + q\cdot l$を(p, q)とする（$U(k_8)$はk_8のregular nbd.）。curve (p, q)にそって、$S^3 - \mathring{U}(k_8)$をDehn surgeryして得られるclosed 3-manifoldを$M(p, q)$とおくと、次が知られている。

(i) $M(p, 1)$ $(p = 1, 2, 3)$には、glued solid torusのcoreをsingularityにもつhyperbolic cone-manifoldの構造が、cone angle θが$0 < \theta < 2\pi$を満たす範囲で存在する。

(ii) $M(1, 0) = S^3$には、k_8をsingularityにもつhyperbolic cone-manifoldの構造が、cone-angle θが$0 < \theta < 2\pi/3$を満たす範囲で存在する。

さて、証明の概略に入る前に、簡便の為にorbifoldを、次の様な特殊な形のものに限らせていただく。M^3を、既約でatoroidal（= incompressible torusはboundaryにisotopic）な有向閉三次元多様体とし、$M^3 \supset k$を、$M^3 - k$がcomplete hyperbolic 3-manifold with finite volumeとなる

knotとし、更に、kと4点で横断的に交わる$S^2 \subset M$は、自明なtangleをboundすると仮定する。このとき、kに自然数nを付加した$M(k, n)$は、k上にsingular locusをもち、k上の各点でのisotropy groupが$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$に同型なorbifoldとみなすことができ、4頁目の定理の仮定を満たす。従って、$M(k, n)\ (n \geq 2)$上に幾何学的構造が存在することを示すのが目標である。尚、$\mathbb{H}(k, \theta)$を、M上のhyperbolic cone-manifoldの構造で、k上にcone-angle θのsingularityをもつものとする。このとき、[5]より次が成立つ。

<u>命題3-2</u>；$\mathbb{H}(k, \theta)$が存在する$(0 \leq \theta < 2\pi)$とき、

(i) $\theta = 0$ならば（即ち、$\mathbb{H}(k, 0) = M - k$上のhyperbolic structure）、$\varepsilon > 0$が存在して、$0 \leq \varphi < \varepsilon$なるすべての$\varphi$に対して$\mathbb{H}(k, \varphi)$が存在する。

(ii) $\theta > 0$ならば、$\varepsilon > 0$が存在して、$\overset{0 \leq}{\theta - \varepsilon} < \varphi < \theta + \overset{\leq 2\pi}{\overbrace{\varepsilon}}$なるすべての$\varphi$に対して$\mathbb{H}(k, \varphi)$が存在する。

$\theta_0 = \sup\{0 \leq \theta \leq 2\pi \mid 0 \leq \varphi < \theta$なるすべての$\varphi$に対して$\mathbb{H}(k, \varphi)$が存在する$\}$

とおくと、$0 < \theta_0 \leq 2\pi$である。$\theta_0 > \pi$ならば目標は達するので、$\pi \geq \theta_0$と仮定してよい。$0 \leq \theta_i < \theta_0$なる列$\theta_i$

$(i=1,2,\cdots)$ を、$\lim_{i\to\infty}\theta_i=\theta_0$ にとり、$\mathbb{H}(k,\theta_i)$ を距離空間とみなし M_i とおく。固定した正数 ε に対して、7頁で与えた hyperbolic cone-manifold の model space の ε－球のうちで、中心を singularity にもつものと、中心は singularity にないが、ε－球自身も singularity と交わらない(即ち平常の ε－球)ものとを標準的 ε－球と呼ぶことにする。更に、M_i の ε－球で、標準的 ε－球に等長なものをも標準的と呼ぶことにするとき、M_i の標準的 ε－球の全体の和集合を M_i の ε-thick part と呼び、$(M_i)^{\varepsilon}_{thick}$ で表す。その補集合 $M_i-(M_i)^{\varepsilon}_{thick}$ を ε-thin part と呼び、$(M_i)^{\varepsilon}_{thin}$ で表す。

列 M_i に対して、次の場合分けが可能である。

(場合I) 或る $\varepsilon>0$ に対して、sub sequence i_j $(j=1,2,\cdots)$ が存在して、$(M_{i_j})^{\varepsilon}_{thin}=\phi$ となる。

(場合II) I ではないが、或る $\varepsilon>0$ に対して、sub sequence i_j $(j=1,2,\cdots)$ が存在して、$(M_{i_j})^{\varepsilon}_{thick}\neq\phi$ となる。

(場合III) すべての $\varepsilon>0$ に対して、十分大なるすべての i に対して、$(M_i)^{\varepsilon}_{thick}=\phi$ となる。

場合Iについては、次の、定理2-4の系に注意してお

く。

<u>命題3−3</u>；列M_iが前頁の場合Iを満たすとき、subsequence i_k ($k=1, 2, \cdots$) が存在して、列M_{i_k}は或るhyperbolic cone-manifoldに収束する。更に、その極限は$\mathbb{H}(k, \theta_0)$に等長である。

<u>系3−4</u>：θ_0及び列M_iを9、10頁の様に定めたとき、M自身kを測地線とするhyperbolic structureをもつか、又は10頁の場合II、IIIのいずれかを満たす。

次に、列M_iは10頁の場合IIを満足すると仮定する。

<u>補題3−5</u>；$(M_i)^{\varepsilon}_{thick}$は収束部分列$(M_{i_j})^{\varepsilon}_{thick}$をもつ。その幾何学的極限を$M_\infty$とおくと、$M_\infty$はhyperbolic cone-manifoldで、endはtorus又は4つの、cone-angle πのsingular pointsをもつsphereから成る。

証明は、次節(thin part)で触れる。

M_∞がtorus end Tをもつ場合、8頁のMの仮定より、Tはkのregular nbd.をboundする。M_∞がM上にcone-angle θ_0のhyperbolic cone-manifoldの構造を導かない場合、各$(M_{i_j})^{\varepsilon}_{thick}$上のhyperbolic structureから測った、T上のmeridian curveの長さは、∞に発散しなければならない。

このとき、十分大なるすべてのjに対して、hyperbolic

Dehn surgery の定理より、$(M_{i_j})^{\varepsilon}_{thick}$ は M 上の異る hyperbolic structure を導くことになり矛盾する。

従って、M_{∞} の end はすべて cone-angle π の singular points を4つもつ sphere から成ることになるが、(M, k) の仮定より、上述の場合と同様の議論に帰着する。

以上より、8頁の仮定のもとでは、場合Ⅲが本質的であることがわかる。

§4 Thin Parts の解析

10頁の場合Ⅲについて述べる前に、hyperbolic cone-manifold の thin part が local にはどの様な形状をもつか、そして、それに関連して、cone-angle $\leq \pi$ の Euclidian non-compact cone-manifold の分類、そして thin part の global な形状は如何なるものか、順次調べていくことにする。

(A) Thin Part の Local Shape

M を hyperbolic cone-manifold とし、その ε-thin part $(M)^{\varepsilon}_{thin}$ 上の点 x に対して、$B_{\varepsilon}(x)$ を ε-球とする。

$B_{\varepsilon}(x)$ が M の singular set と交わらない場合、その injectivity radius を r とおく。$B_{\varepsilon}(x)$ に $1/r$ をかけた距離空間は、injectivity radius が 1 で、sectional curvature は

r^2倍となる。例えば、10頁の場合Ⅲを満たす列M_iの場合、部分列i_j及び正数列ε_jを、$\varepsilon_j \to 0$かつ$(M_{i_j})^{\varepsilon_j}_{thick} = \phi$となる様にとり、M上の点$x$が次の仮定(*)を満たすとき、

(*) M_{i_j}でとったxのε_j-球$B_{\varepsilon_j}(x)$は、すべてのjに対してsingular setと交わらない。

$B_{\varepsilon_j}(x)$のinjective radius r_jは、$r_j \to 0$を満たし、距離空間の列$\frac{1}{r_j} B_{\varepsilon_j}(x)$は、non-compactなEuclidian 3-manifoldで、$\mathbb{E}^3$でないものに収束する。従って、xの十分小さな近傍の基本群は、$\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$のいずれかに同型であることがわかる。

一方、$\mathbb{H}^3$のisometricな$\mathbb{Z}$又は$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-actionに対して、$\mathbb{H}^3$は次のいずれかの不変な分割をもつ;

(i) geodesicである軸と、軸から等距離にある曲面をleafとするfoliation

(ii) horosphereをleafとするfoliation

更に、各leafは十分小さなinjective radiusをもつと仮定してよい。よって、M上の点で(*)を満たすものの全体には、十分小さなinjective radiusをもつleafからなるfoliation(及び軸)が存在する。

次に、M上の点xで上述の(*)を満たさない場合、即ち

(**) 無数の j に対して、$B_{\varepsilon_j}(x)$ は singular set と交わる。

を満たす場合、その各 j に対して、$B_{\varepsilon_j}(x)$ に埋め込める x を中心とする標準的球（10頁）の半径の上限を r_j とおくと、列 $\frac{1}{r_j}B_{\varepsilon_j}(x)$ は Euclidian cone-manifold に収束する。更に、極限は cone ではあり得ない。前述と同様の議論を進める為に、次節で non-compact Euclidian cone-manifold の分類に言及する。

(B) 3-dim. Euclidian cone-manifolds

P を 3-dim. Euclidian cone-manifold とし、non-compact と仮定する。基点を1つ固定し、半径 r の球を S_r、その立体角 $\left(=\frac{area(S_r)}{r^2}\right)$ を $A(\log r)$ とおく。即ち、$A(t)=S_{\exp t}$ の立体角である。このとき、Thurston は次を示した。

<u>命題 4-1</u>；

$$\frac{d}{dt}A(t)=2\pi\chi(S_{\exp t})-A(t)-P(t)-\sum(2\pi-\text{cone-angle})$$

ここで、$P(t)$ は S_r の面が3以上集まる点に対して定する曲率の contribution を示し、最後の項の和は、singular set と $S_{\exp t}$ との交点に対応する。更に、$P(t)\geqq 0$ に注意する。

<u>系 4-2</u>；$\chi(S_{\exp t})\geqq 0$．更に、$\chi(S_{\exp t})=0$ のときは、無限に延びる singular set はあり得ないし、$\chi(S_{\exp t})>0$ 即ち $S_{\exp t}\approx S^2$ のときは、$\sum(2\pi-\text{cone-angle})\leqq 4\pi$ である。

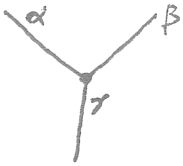
以上を基に、case by case の議論により、次の結果が得られる。

<u>定理4-3</u>；cone-angle が π 以下の Euclidian 3-dim. cone-manifoldは以下のいずれかに同型である。

(i) cones on elliptic 2-dim. cone-manifold、即ち、

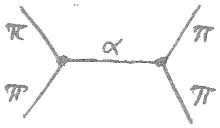
(i-a) $\mathbb{E}^3$

(i-b) cone-angle α in $\mathbb{E}^3$

(i-c) 

$(\alpha+\beta+\gamma>2\pi)$ in $\mathbb{E}^3$

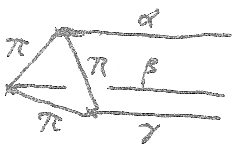
(ii) cone $\times S^1$ 又は cone $\underset{\text{twisted}}{\times} S^1$ 又は

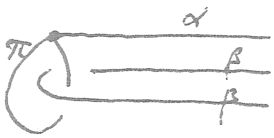


(iii) 2-dim. Euclidian cone-manifold $\times \mathbb{E}^1$ 即ち、

$T^2\times\mathbb{E}^1$ 又は (cone-angle π の singular points を4点もつ sphere) $\times\mathbb{E}^1$ 又は (cone-angle が α, β, γ — $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ — である3つの singular point をもつ sphere) $\times\mathbb{E}^1$

或いは、それらを end を交換する $\mathbb{Z}_2$-action で割ったもの、即ち、



又は


(C) Thin Partの Global Shape

ここで(A)の議論の続きに戻る。M上の点xが14頁の(**)を満たすとき、列$\frac{1}{r_j}B_{\varepsilon_j}(x)$の極限は、前頁の(ii)、(iii)のいずれかを満たす。(尚、そのendをみることにより、11頁の補題3-5が示せる。)従って、xの十分小さな近傍には、軸と、その軸を囲むtorusをleafとするfoliationとによる分割か、軸と、その軸を囲む(4つのsingular pointをもつ)sphereをleafとするfoliationとによる分割か、又は、2-dim. Euclidian cone-manifoldをleafとするfoliationによる分割か、それらいずれかで近似される分割が存在する。

よって、(A)と合わせ、列M_iが場合IIIを満足する場合には、M上に或る(foliation 又は foliation + 軸による)分割が存在し、その成分が十分小さい半径をもつときは、その成分を一点につぶし、そうでないときは、各成分を十分小さな長さ(= injective radius)をもつ閉曲線に分割し、改めて個々の曲線を一点につぶすことにより、13頁のM_{i_j}に対して、高々2次元のhyperbolic cone-mfdに分割できる高々2次元の複体D_jが存在し、D_jはM_{i_j}のε_j-近似となる。

ここで、非自明な次の結果を引用する。

補題4-4；D_jの面積は一様有界である。

また、各D_jに対して、6頁と同様に（2次元の意味で）ε-thick，ε-thinの2つのpartへの分割が可能である。このとき、10頁と同様に次の場合分けが可能である。

（場合Ⅲ－Ⅰ）或る$\varepsilon>0$に対して、部分列j_k $(k=1,2,\cdots)$が存在して、$(D_{j_k})^{\varepsilon}_{thin}=\phi$となる。

（場合Ⅲ－Ⅱ）Ⅰではないが、或る$\varepsilon>0$に対して、部分列j_kが存在して、$(D_{j_k})^{\varepsilon}_{thick}\neq\phi$となる。

（場合Ⅲ－Ⅲ）すべての$\varepsilon>0$に対して、十分大なるすべてのjに対して、$(D_j)^{\varepsilon}_{thick}=\phi$となる。

場合Ⅲ－Ⅰ又はⅡの場合、議論は3次元の場合と同様である。場合Ⅲ－Ⅰが満たされるとき、M_jはhyperbolic 2-cone-manifoldに収束し、しかも、ε_j－近似の作り方より、orbifoldとしてのprojectionが、2-orbifoldへ構成できる。又、場合Ⅲ－Ⅱが満たされるとき、求めるorbifold上の構造は、$(D_{j_k})^{\varepsilon}_{thick}$の極限をDehn surgeryして得られることが示せる。

場合Ⅲ－Ⅲは、次の二つの場合に分かれる。

（場合1）D_jはcircle又はintervalで近似できる。

（場合2） D_j は1点に収束する。

前者の場合、求める構造はSolv-geometryかnil-geometryであり、後者の場合、M_{ij}に戻り、diam of M_{ij}の逆数をかけた距離空間の列を考え、E_jとおく。列E_jの極限により、次の場合に分かれる。

（場合2-a） E_jの極限にthin part（Euclidianの意味で）は存在しない。

（場合2-b） E_jの極限はthin partのみ。即ち、2次元以下のEuclidian cone-manifoldの和となる。

前者の場合、求める構造は、Euclidianかellipticとなるが、elliptic structureは、θ_0が求めるcone-angle（即ち $2\pi/n$）より小さい場合に対応する。この議論では、Hamiltonの定理（正のRicci曲率をもつ3次元実計量は、正定数曲率をもつ実計量に変形出来る）を用いる必要が有る。

後者の場合、前述の場合III－I, III－II, 1 と同様、11、12頁のideaとほぼ同様であり、E_jの極限が2次元のときには、求める構造は2-dim. Euclidian cone-manifold上のS^1又はI-bundleとなり、1次元のときは、2-dim. Euclidian cone-manifoldをfiberにもつS^1又はI上のbundleとなる。

§5 付記

最後に、次の二点に言及したい。

(1) 1頁の定理の完全な証明は、残念ながら部分的にしかまとめられていない。現在、Princeton大学大学院の数名の学生により作業が進められているが、完全な形で発表されるのはかなり時間を要すると思われる。従って、"完全な証明"は唯一人Thurston教授の頭の中にのみ有ると言っても過言ではない。

(2) 幾何学的極限の概念は、$M-k$の基本群の$PSL_2(\mathbb{C})$への表現の"拡張された"基本多面体の概念を用いると、より容易に定義でき、しかも、文中の場合Ⅲに対して別なaspectを提供する。

$\theta_0 \leq \pi$と云う制約をのりこえる方策については、全く方針がみつからないという所の様だが、上述の概念は一つの光明を与えており、注目に値する。

以上、筆者の学位論文のphilosophyだが、頁数も尽きたので、講演にて一部触れることにしたい。([6])

参考文献

1. W. P. Thurston

Geometric Structures on Three-Manifolds with Symmetry.

forthcoming note, Princeton Univ. 1984.

2. F. Bonahon – L. Siebenmann

Seifert 3-Orbifolds and Their Role As Natural Crystalline Parts of Arbitrary Compact Irreducible 3-Orbifolds

I. H. E. S. 1983

3. G. P. Scott

The Geometry of 3-Manifolds

L. M. S. 1983

4. M. Gromov.

Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps

I. H. E. S. 1980

5. W. P. Thurston

The Geometry and Topology of 3-Manifolds

to appear, Princeton Univ. Press, 1984?

6. Y. Suzuki

Geometric Structures on Closed Orientable 3-Manifolds

Ph. D thesis; in preparation, Princeton Univ.

G surgery 理論の応用について

東大 理　枡田幹也

§1. 序（G surgery 理論のこれまでの応用例）

この講演では、Petrie, Dovermann, Rothenbergらの人々によって、最近、構築された、又は、されつつある G surgery 理論の一つの応用について述べたい。主目的は

「S^1作用は許さないが、いくらでも大きな素位数の巡回群の作用を許す閉多様体の存在を示すこと（カテゴリーはC^∞）」である。（詳細は§2を見て下さい。）

言葉からも察せられる通り、G surgery 理論とは、(Browder-Novikov-Wallの) surgery 理論の同変版、つまり、群作用を持っている多様体を対象とした surgery 理論のことである。基本路線は、Browder-Novikov-Wallの方法に基づくものであるが、それを群作用つきのものに拡張しようとする時、いくつもの障害が生じる。Petrieたちは、これらの障害をくぐり抜けるある十分条件を与えたと言える。

普通の surgery 理論が、エキゾチックな多様体を構成するのに、非常に有効な道具であったように、

G surgery 理論にも同様の興味ある応用がある。主なものとして、

[I]. <u>球面上の作用に関するもの。</u> まず、一つのモデルを考えてみる。GをコンパクトLie群とし、VをGの表現で、自明表現を含まないものとする (i.e. $V^G=\{0\}$)。$V\oplus\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$: 一次元自明表現) の単位球面をSと書くと、容易に次のことがわかる。

(1) Sの固定点S^Gは2点からなる。

(2) $S^G=\{x,y\}$とするとき、2つのG表現T_xSとT_ySは同型。

従って、自然に、

<u>問題1.</u> (Montgomery - Samelson)。ホモトピー球面Σに群Gが作用して、$\dim\Sigma^G=0 \Rightarrow |\Sigma^G|=2$?

<u>問題2.</u> (P.A. Smith)。ホモトピー球面ΣにGが作用し、$\Sigma^G=\{x,y\}$ (2点) $\Rightarrow T_x\Sigma\cong T_y\Sigma$ (G表現として)?

これらは、数十年前に提出された問題で、ある条件を満たすG作用に関しては、肯定的に解かれていた。しかし、最近Petrieたちは、G surgery理論を用いて反例を構成した。現在までに、これらに関して分かっていることをまとめると、

<u>問題1に関して</u> Yesの場合: $G=T^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ (p: 素数) (Smith)

Noの場合: $G=SO(3)$, S^3, $SL(2,F)$, $PSL(2,F)$ (F: 標数奇数の体), 少なくとも3つ非巡回群sylow subgroupをもつ奇位数可換群 (Petrie[P3]).

問題2に関して.

Yesの場合: G作用がsemi-free (Atiyah-Bott, Milnor),

Gが奇位数の有限群で, 部分群の固定点がすべてホモトピー球面からなるとき. (Sanchez)

Noの場合; $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n:偶数) (Petrie [P4], Dovermann [D2]),

$G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n:奇数) (Dovermann-Petrie [DP4]),

G=可換群で 2 Sylow subgroupが少なくとも位数8の巡回群 (Suh [S2]),

G=一般四元数群 (特に非可換) (Cho [C]).

問題1,2以外の球面上の作用に関するものとしては, [DP3] などがある。

[II] 円板上の作用に関するもの。 Dovermann-Rothenberg [DR1] が, 円板上の $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (q:素数)作用を分類している。 その他には, Petrie, Tsai のアナウンスがある。

[III] ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ 上の作用に関するもの。 Kakutani [K], Dovermann-Masuda-Schultz [DMS], Masuda [M] において, エキゾチック $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用が構成されている。

§2. S^1作用と $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作用.

ここでは, 講演の主定理とその背景について述べる。

<u>定義</u>（W. Y. Hsiang）．M：閉多様体とするとき．

$$N(M) := \sup\{\dim G \mid \mathrm{Diff}\,M \supset G\ ;\ G \text{ コンパクト Lie 群}\}$$

この $N(M)$ を M の<u>対称度</u>という。

㊟．$N(M) > 0 \iff M$ が S^1 作用を許す。

次の問は．自然であろう。

<u>問</u>　$N(M) = 0$ なる M はあるか？

答えは "yes" である。いくつか例をあげると．

<u>例1.</u>（Atiyah - Hirzebruch）$w_2(M) = 0$（i.e. spin），$N(M) > 0$
$\Rightarrow \hat{A}(M)[M] = 0$．

一方．$\hat{A}(M)[M] \neq 0$ なる Spin 多様体はいくらでもある。

<u>例2.</u>（Dejter, 吉田(朋)）エキゾチックホモトピー $\mathbb{C}P^3$ は対称度 0．

この事実はあとで用いるのでもう少し詳しく述べると．

$\Pi = \{X \mid X \simeq \mathbb{C}P^3\}$ とおくと．Π は $\mathbb{Z}$ と一対一。その対応は

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \longleftrightarrow & \mathbb{Z} \\ \Psi & & \Psi \\ X & \longmapsto & k(X) \end{array}$$

ただし．$k(X)$ は $p_1(X) = (4 + 24k(X))x^2$（$x \in H^2(X;\mathbb{Z})$ 生成元）で定まる整数

で与えられている。従って．$X \simeq \mathbb{C}P^3$ に対しては．

$$N(X) = 0 \iff k(X) \neq 0.$$

<u>例3</u>（矢野．Gromov）$N(M) > 0 \Rightarrow$ Gromov inv. $\|M\| = 0$．

特に．M が負曲率多様体なら $N(M) = 0$．

㊟（Gromov）$\pi_1(M)$ amenable（特に単連結）なら．

作用の存在に関係なく $\|M\|=0$.

これらはいずれも、S^1作用を許す多様体は、非常に少なそうだということを暗示している。

一方、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作用に目を転じると、その非存在性に関しては、あまり分かっていない。$N(M)$の定義にならって、一つ記号を用意しよう。

<u>定義</u> $m(M)=\sup\{m:素数 \mid \mathrm{Diff}\,M \supset G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}$

<u>問.</u> $m(M)<\infty$ となる M はあるか?

これも"yes"である。例えば、

<u>例4.</u> (Conner-Raymond) $m(M)=1$ (i.e. どんな有限群も作用しない) なる $K(\pi,1)$閉多様体 Mが存在する。

<証明のアイデア>. Mが有限群 Gの作用を許すと、これは、Mの基本群の同型写像を導く。基点の取り方のあいまい性を考慮に入れると、$\psi: G \to \mathrm{Out}\,\pi$ 準同型が得られる。Borelの定理より、πの中心が自明の時 ψは単射。従って、自明な中心を持ち、$\mathrm{Out}\,\pi$ も自明であるπを基本群とする$K(\pi,1)$閉多様体を構成する。■

<u>例5.</u> Σ_gを種数 $g \geq 2$ の閉曲面とすると $m(\Sigma_g) \leq g < \infty$.

これらは、いずれも大きな複雑な基本群を持っている。簡単な基本群をもつもの、例えば単連結多様体に関しては、

何の obstruction も見つかっていない様である。

さて、当然のことながら、$N(M)>0 \Rightarrow m(M)=\infty$.

では この逆は正しいかと问うのは自然であろう。つまり、

<u>问</u>. $N(M)=0 \Rightarrow m(M)<\infty$?

まず、$\dim M=2$ の場合は 例15より "yes". 次に $\dim M=3$ の場合にも、最近 小島氏(学会講演 1984)により、現在知られているものに対しては、"yes" であることがわかった。しかし、一般には正しくない。

<u>主定理</u> (Masuda-Tsai [MT]). X_k：ホモトピー $\mathbb{C}P^3$ で、$p_1(X_k)=(4+24k)x^2$ ($x\in H^2(X_k;\mathbb{Z})$ 生成元) とする。もし、素数 m が $m\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ 4(6k+1)(6k-1))$ を満たしているなら、X_k は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作用を許す。

よく知られているように、それぞれの k に対して、上のような素数 m は無限にある。従って、主定理と例2を合わせると、

<u>系</u> $k\neq 0$ のとき、$N(X_k)=0$ だが $m(X_k)=\infty$

§3. 証明の粗筋

m を素数で $m\equiv 1\ (4)$ と仮定し、$G=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とおく。単元からなる乗法群 $G^\times$ は位数 $m-1$ の巡回群であるから、

位数4の元（α と表わす）がある。 t を 1つの非自明複素1次元 G表現とし、

$$A = t + t^{\alpha} + t^{\alpha^2} + t^{\alpha^3} \quad (= t + t^{\alpha} + t^{-1} + t^{-\alpha}) \quad (\alpha^2 \equiv -1 \text{ に注意})$$

とおく。主定理は、次の2つの命題からの帰結である。

<u>命題1.</u> $p, q, \gamma \in \mathbb{Z}$ 次を仮定。

(i) $(p,q) = (p,m) = (q,m) = 1$

(ii) $\gamma \equiv \pm(\alpha^{u} - 1) \pmod{m}$ かつ $\gamma pq \equiv \pm(\alpha^{u'} - 1) \pmod{m}$.

$1 \le u \ne u' \le 3$.

(iii) γ: 偶数

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}$閉G多様体 $X(\gamma, p, q)$ s.t.

(1) $X(\gamma, p, q) \underset{G}{\simeq} P(A)$ （$\underset{G}{\simeq}$ Gホモトピー同値を表わす）

(2) $k(X(\gamma, p, q)) = -\gamma^2(p^2-1)(q^2-1)$ （$k(\ )$ は例2のもの）

<u>命題2.</u> $X \underset{G}{\simeq} P(A)$ とすると ${}^{\forall}k \equiv k(X) \pmod{m}$ に対し、

${}^{\exists}Y \underset{G}{\simeq} P(A)$ s.t. $k(Y) = k$.

〈<u>命題1と2 ⇒ 主定理の証明</u>〉. 天下り式に次の方程式を考える。

$$\begin{cases} ㋑ \ A^2 + B^2 \equiv 1 \pmod{m} \\ ㋺ \ AB \equiv 3k \pmod{m} \end{cases} \qquad (m, k \text{ 固定})$$

<u>主張.</u> $m \equiv 1 \ (4(6k+1)(6k-1))$ のとき方程式は解を持つ。

∵ Legendre の相互法則を用いて初等的に証明できる。∎

さて、㋑㋺の解 A, B を用いて、

$$(*)\begin{cases} p \equiv A\alpha + B \pmod m & (\therefore p^{-1} \equiv -A\alpha + B \pmod m). \\ q \equiv A + B\alpha \pmod m & \\ r \equiv \alpha - 1 \pmod m. & \end{cases}$$
とおくと．

$rpq \equiv \alpha^3 - 1 \pmod m$ であるから．命題 1 の(ii)は満たされている。又．各剰余類の中で，(i)(iii)を満たす p, q, r が取れることも容易にわかる。(例えば．各剰余類の中には、素数が無限にあるという Dirichlet の定理を用いる。) 従って．命題 1 より． $X \underset{G}{\simeq} P(A)$ で

$$\begin{aligned} k(X) &\equiv -r^2(p^2-1)(q^2-1) \pmod m \\ &\equiv 4 + 24k \pmod m \quad (\text{上の}(*)\text{を}\text{代入}). \end{aligned}$$

なるものがある。これに命題 2 を適用すれば，$Y \underset{G}{\simeq} P(A)$ で．丁度 $k(Y) = k$ なる Y がある。例 2 よりこの Y が X_k であるから．主定理が成立。∎

§4. 命題の証明と G surgery 理論．

命題の証明に G surgery 理論を用いる。それは，普通の surgery 理論の同変版である三つの概念とそれに対応する三つのステップからなる．

[I] G fiber homotopy equivalence

[II] G transversality

[III] G normal map と G surgery

命題1, 2 共に証明のアイデアは同じなので、命題1の証明を与えよう。

Step I. t_s : S^1の複素一次元標準的表現。$(p, q)=1$より $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.t. $-ap+bq=1$. これを用いて、写像度1の固有なS^1同変写像

$$V = t_s^{\gamma p} + t_s^{\gamma q} \xrightarrow{\omega} U = t_s^{\gamma} + t_s^{\gamma pq}$$

$$(z_1, z_2) \longmapsto (\bar{z}_1^{a} z_2^{b},\ z_1^{q} + z_2^{p})$$

が定義できる。U, V 上には自明なG作用を考えると、ωより、

$$\begin{tikzcd} \hat{V} = S(A) \times_{S^1} V \arrow[rr, "\hat{\omega}"] \arrow[dr] & & \hat{U} = S(A) \times_{S^1} U \arrow[dl] \\ & P(A) & \end{tikzcd}$$

が得られる。仮定 $(p, m) = (q, m) = 1$ は $\hat{\omega}$ が G fiber homotopy equivalence であることを保証している。

(注) G fiber homotopy equivalenceの構成の一般論については、[P4]を参照して下さい。

Step II. 上の$\hat{\omega}$を固有Gホモトピーを通して、零切断 $P(A) \subset \hat{U}$ に横断的にする。作用を考えない場合には、いつも可能であるが、群作用を考える場合には、障害が生じる。これについては、Petrie [P1] によって完全に

解析されている。特に、我々の場合には、

$\begin{cases} {}^{\forall}x \in P(A)^G \text{ に対し、} (TP(A)+\hat{V}-\hat{U})_x \in RO(G) \text{ が 本当の} \\ \text{表現から来ていることが(必要)十分条件である。} \end{cases}$

さて、これをチェックしてみよう。$p_i = [0; \cdots ; \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0] \in P(A)^G$

とおくと、

$$TP(A)|_{p_i} = \sum_j t^{\alpha^i(\alpha^j-1)}$$

$$\hat{V}|_{p_i} = t^{\alpha^i\gamma p} + t^{\alpha^i\gamma q}$$

$$\hat{U}|_{p_i} = t^{\alpha^i\gamma} + t^{\alpha^i\gamma pq} \overset{((ii)\text{より})}{=} t^{\pm\alpha^i(\alpha^u-1)} + t^{\pm\alpha^i(\alpha^{u'}-1)}$$

従って、特に $\hat{U}|_{p_i} \subset TP(A)|_{p_i}$ であるから、G transversality 条件は満たされている。

<u>Step III</u>　Step II で得られる G transverse な写像を h とし、$W = h^{-1}(P(A))$，$f = h|W$ とおくと、横断性の性質より、stable G vector bundle の同型 $\beta : TW \cong f^*(TP(A)+\hat{V}-\hat{U})$ が得られる。この時、三つ組 $K = (W, f, \beta)$ を <u>G normal map</u> という。これに、G の部分群の固定点ごとに、surgery を施して、f を G ホモトピー同値写像に変えて行く。この操作において、再び、障害に出会う。今の場合、$\hat{U}^G = \hat{V}^G = P(A)^G$ であるから $f^G : W^G = P(A)^G \longrightarrow P(A)^G$ は既にホモトピー同値。しかも、G の位数は素数と仮定しているから、W の

isotropy 型は、$\{G\}$ と $\{1\}$ しかない。よって f の G surgery obstruction は $\{1\}$ に対応する部分から生じるものだけで、

$$\sigma(f) \in L^{h}_{\dim P(A)}(G, 1)$$

にある。

<u>主張.</u> $\sigma(f) = 0$.

これが示せれば、G surgery を施して、

① $W \underset{G}{\cong} P(A)$

② $\beta : TW \cong f^*(TP(A) + \hat{V} - \hat{U})$

なる G normal map (W, f, β) が得られる。②を用いて、$p_1(W)$ の計算をすれば、この W が求める $X(\gamma, p, q)$ であることがわかる。

<主張の証明の概略>. 証明は三つのステップからなる。

<u>Step 1.</u> $P(A)$, W の固定点における実表現は、それぞれ、同じものが対になって現われているから、Dovermann-Rothenberg [DR 2] の結果を用いると、

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & L^{s}_{\dim P(A)}(G, 1) & \longrightarrow & L^{h}_{\dim P(A)}(G, 1) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & {}^{\exists}\bar{\sigma}(f) & \longmapsto & \sigma(f) \end{array}$$

<u>Step 2.</u> multisignature $\mathrm{Sign} : L^{s}_{\dim P(A)}(G, 1) \to RO(G)$ を施すと、

$$\mathrm{Sign}\,\bar{\sigma}(f)(g) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\mathrm{Sign}(g, P(A))} - \underset{\substack{\shortparallel \Leftarrow \text{(ii)より} \\ 0}}{\mathrm{Sign}(g, W)} = 0$$

Step 3. Step 2 より $\bar{\sigma}(f) \in \mathrm{Ker\,Sign}$ 、一方、$\mathrm{Ker\,Sign} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で、これは、$\sigma(f)$ の Kervaire invariant で見分けられる。(iii) の条件（r；偶数）は、これが 0 であることを保証する。

§5. 関連する問題

問題A　すべての自然数（又は、素数）n に対して、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 作用を許すが S^1 作用を許さない多様体はあるか？

もっと強く

問題A′ （S. Weinberger）　$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 作用を許すが $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ 作用を許さない多様体はあるか。

問題B （Löffler-Raussen の予想）

(strong form)　単連結閉多様体は、ほとんどすべての素数 p に対して、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用を許す。

(weak form)．ホモトピー同値を除けば上は正しい。

問題C. $n(M) = \infty \Rightarrow$ Gromov inv. $\|M\| = 0$ ？

㊟ §2 の例 3 で述べたように $N(M) > 0$ のとき正しい。

問題 D. $K(\pi,1)$ 閉多様体 M に対しては、

$$N(M)=0 \iff n(M)<\infty \quad ?$$

又は、πの中心自明 $\Rightarrow$ $n(M)<\infty$?

(注 πの中心自明 $\Rightarrow$ $N(M)=0$ Conner-Raymond)

§2 の例4でみたように、二番目の問は $\mathrm{Out}\,\pi$ 有限群なるπに対しては、正しい。

§6. 結び.

以上見てきたように G surgery 理論は、奇妙な G 作用の例の構成には、非常に有効な道具である。しかし、一方、普通の surgery 理論は、同じホモトピー型をもつ多様体を分類するという側面も持っている。この分類問題に関しては、現在の G surgery 理論は、未だ十分とは言えないように思える。G surgery 理論の立場から作用の分類を試みたものとしては、[DR1] があるぐらいである。今後この方面の進展が望まれる。

文献 (G surgery 理論に関するもの)

[C] Cho, Rutgers Thesis 1984.

[D1] K.H. Dovermann, Z_2 surgery theory, Michigan Math. J. 1981.

[D2] __________, Even dimensional s-Smith equivalent representations, Springer Lect. Notes 1051.

[DMS] K.H. Dovermann, M. Masuda, and R.Schultz, Conjugation type involutions on homotopy complex projective spaces, to appear.

[DP1] K.H. Dovermann and T. Petrie, G surgery II, Memoirs of AMS vol. 260 (1982).

[DP2] __________, An induction theorem for equivariant surgery (G surgery III), Amer. J. Math. 105 (1983).

[DP3] __________, Artin relation for smooth representations, Proc. of the Nat. Acad. Sci. 77 (1980).

[DP4] __________, Smith equivalence of representations for odd order cyclic groups, preprint.

[DR1] K.H. Dovermann and M. Rothenberg, An equivariant surgery sequence and equivariant diffeomorphism and homeomorphism classification, preprint.

[DR2] ______ , Poincaré duality and generalized Whitehead torsion, Preprint.

[K] S. Kakutani, An application of Dovermann's Z_2-surgery theory to 2n-dimensional complex projective spaces with the conjugate involution, Mem. Fac. Sc. Kochi Univ. (Math.) 5 (1984).

[M] M. Masuda, Z_2 surgery theory and smooth involutions on homotopy complex projective spaces, to appear.

[MT] M. Masuda and Y.D. Tsai, Tangential representations of cyclic group actions on homotopy complex projective spaces, preprint.

[Mo] M. Morimoto, G maps and tangential representations at G fixed points of G manifolds, preprint.

[P1] T. Petrie, Pseudoequivalences of G manifolds, Proc. of Symp. in Pure Math. 32 (1978).

[P2] ______ , G surgery I - a survey, Springer Lect. Notes in Math. 664.

[P3] ______ , One fixed point actions, I, II. Advances in Math. 46 (1982).

[P4] ______ , Smith equivalences of representations, Math. Proc. Camb. Soc. 94 (1983).