第 31 回

トポロジー・シンポジウム

講演集

昭和58年7月19日～21日

於　金沢大学

昭和58年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号　57340002

目次

層空間論

——局所有限性から閉包保存性への推移——

玉野研一

§1. 序

局所有限の概念は、位相空間論で重要な役割を果たす。近年、局所有限の一般化である閉包保存性の研究が大きく進展してきている。ここでは、局所有限性によって定義できる距離化可能空間に対し、閉包保存性の概念で規定される層空間（＝M_3空間）の理論を紹介する。後半では、特に、$M_3 \Rightarrow M_1$問題に焦点をあて、現在の研究状況、問題点を概観する。

考察する位相空間は、すべて正則T_1空間とする。

§2. 閉包保存の概念の発生

局所有限の概念は、位相空間論のみならず、種々の数学の分野において基本的である。パラコンパクト空間は、1944年に、J. Dieudonne が導入した。

<u>定義2.1.</u>　空間Xは、任意の開被覆が、局所有限な開被覆によって細分されるとき、<u>パラコンパクト</u>であるという。

1953年から1959年にかけて、E.Michael は、パラコンパクトのいろいろな特徴づけを行なった。その1つに、次の定理がある。

定理2.1. 空間 X がパラコンパクトとなるためには、任意の開被覆が、閉包保存な閉被覆によって細分されることが必要十分である。

ここで、閉包保存とは、次の定義による。

定義2.2. 空間 X の部分集合のなす族 $\mathcal{A}$ は、任意の部分族 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ に対して

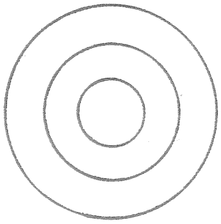
$$\overline{\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}'\}} = \bigcup\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}'\}$$

が成立するとき、閉包保存であるという。

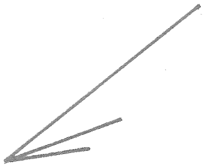
特に、$\mathcal{A}$ が X の閉集合のなす族のときは、$\mathcal{A}$ の閉包保存性は、任意の部分族 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ に対して、$\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}'\}$ が閉集合であることと同値である。局所有限族は、閉包保存である。

局所有限族の閉写像による像は、局所有限とは限らないが、閉包保存族の閉写像による像は、やはり閉包保存である。このように、閉包保存性は、局所有限性とはちがった意味で扱いやすい側面をもっていて、今日、位相空間論において不可欠な概念となっている。

ここで、平面$\mathbb{R}^2$での簡単な閉包保存族の例をあげておこう。2つの例は、ともに、局所有限ではない。



例1.　$F_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqq\frac{1}{n}\}$ とおくとき、$\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、閉包保存な閉集合族である。



例2.　$H_n=\{(t,\frac{t}{n}) : t\in\mathbb{R},\ 0\leqq t\leqq\frac{1}{n}\}$ とおくとき、$\mathcal{H}=\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、閉包保存な閉集合族である。

§3.　距離空間の一般化理論――層空間の登場――

位相空間論の一分野として、距離空間の一般化理論がある。この分野の目標のひとつは、距離空間のもっている有用な性質で、位相的操作（例えば、可算積、部分集合、閉写像による像など）に関して閉じているものを抽出することにある。

例えば、位相幾何学の重要な対象である距離空間とCW複体を考えてみよう。距離空間のクラスは、可算積、部分集合に関して閉じているが、閉写像による像は、第1可算性をみたすとは限らない。また、CW複体の積は、CW複体とは限らない。そこで、距離空間とCW複体を

含むクラスで、さまざまな位相的操作に関して閉じているものを考え、統一理論を構築しようというわけである。

これから述べる層空間のクラスは、未解決な点も多いが、われわれの要求をかなりみたしてくれそうなクラスである。出発点は距離化可能空間を特徴づける次の定理であった。

<u>定義 3.1.</u>　空間 X の部分集合のなす族 $\mathcal{U}$ は、$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ と書くことができて、各 $\mathcal{U}_n$ が局所有限、あるいは閉包保存であるとき、$\mathcal{U}$ をそれぞれ、<u>σ局所有限</u>、あるいは、<u>σ閉包保存</u>という。

<u>定理 3.1</u>（長田，Yu.M.Smirnov，1951）．空間 X が距離化可能であるための必要十分条件は、σ局所有限なベースを持つことである。

この定理と、Michaelのパラコンパクトの特徴づけをにらみ、1961年に、J. Ceder[2]は、M_1，M_2，M_3空間を導入した。

<u>定義 3.2.</u>　空間 X の部分集合の族 $\mathcal{B}$ は、任意の $x \in X$ とその任意の近傍 U に対して、$x \in \mathrm{Int}\, B \subset B \subset U$ となる $B \in \mathcal{B}$ が存在するとき、X の<u>副基</u>と呼ばれる。空間 X に関して次のような条件を考える。

(1)　X は σ 閉包保存なベースをもつ。

(2)　X は σ 閉包保存な副基をもつ。

(3)　X は σ クッション対ベース（定義省略）をもつ。

(1)，(2)，または(3)の条件をみたす空間をそれぞれ<u>M_1，M_2，M_3 空間</u>という。

<u>定理3.2.</u>

$$
\begin{array}{l}
\text{距離空間} \Rightarrow \\
\text{CW複体} \Rightarrow
\end{array}
M_1\text{空間} \Longrightarrow M_2\text{空間} \Longleftrightarrow M_3\text{空間} \Longrightarrow \text{パラコンパクト完全正則空間}
$$

が成立する。

ここで ⇒ 向きは，すべて Ceder により証明された。M_2 空間と M_3 空間が一致するかという問題は，長く未解決であったが，G. Gruenhage [3] (1976)，H. Junnila [9] (1978) によって，独立に，肯定的に証明された。

1966年の C.R. Borges の論文 [1] は，M_3 空間の有用性を確立した。彼は，M_3 空間を改めて<u>層空間</u>(stratifiable space) と名づけた。層空間と呼ばれるのは，M_3 空間の次の特徴づけによる。

<u>定理3.3.</u>　空間 X が M_3 空間であるためには，X の各開集合 U に，開集合列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の条件をみたすように対応づけられることが必要十分である。

(1)　$\overline{U_n} \subset U$ かつ $U_n \subset U_{n+1}$，$n=1, 2, \cdots$

(2) $\bigcup U_n = U$

(3) Vが開集合で$V \subset U$ならば$V_n \subset U_n$, $n=1, 2, \cdots$

上記の対応$U \to \{U_n\}$を層対応という。

距離空間(X, d)においては、各開集合Uに対し、

$$U_n = \{x \in X : d(x, X-U) > \tfrac{1}{n}\}$$

と定義すると、$U \to \{U_n\}$が自然な層対応となる。

CederとBorgesは、層空間の性質をいろいろ調べた。

定理3.4. 層空間のクラスは、可算積、部分集合、閉連続像などに関して閉じている。

定理3.5. 層空間では、Dugundjiの拡張定理が成立する。

さて、ここで、現段階での層空間論の問題点を2つにしぼって指摘しておこう。それは、次元論的問題と、$M_3 \Rightarrow M_1$問題であるが、後者は次節で詳しく検討するので、ここでは、次元論的問題だけに触れておく。

問題3.1. 層空間のクラスで次元論の諸定理が成立するか。

この問題に関しては、岡[15]が、EM_3という層空間の部分クラスを考え、かなりはっきりとした結論を出した。したがって、この問題は、むしろ、次の問題へと発展し

た。

問題3.2（岡）．　層空間のクラスとEM_3は一致するか。

§4.　$M_3 \Rightarrow M_1$問題

問題4.1（Ceder）．　M_3空間は，M_1空間となるか。

この$M_3 \Rightarrow M_1$問題は，Ceder の1961年の提起後，20年以上経た今日でも未解決の，位相空間論の古典的問題の1つである。M_3空間とM_1空間を結ぶ次の定理は，重要な鍵となるだろう。

定理4.1（R. Heath and H. Junnila[5]）．　任意のM_3空間は，M_1空間の完全写像によるレトラクションである。

この定理と定理3.4を比較すると，次のことがわかる。

定理4.2（[5]）．　次の命題は同値である。

(1)　M_3空間は，M_1空間である。

(2)　M_1空間の閉部分集合は，M_1空間である。

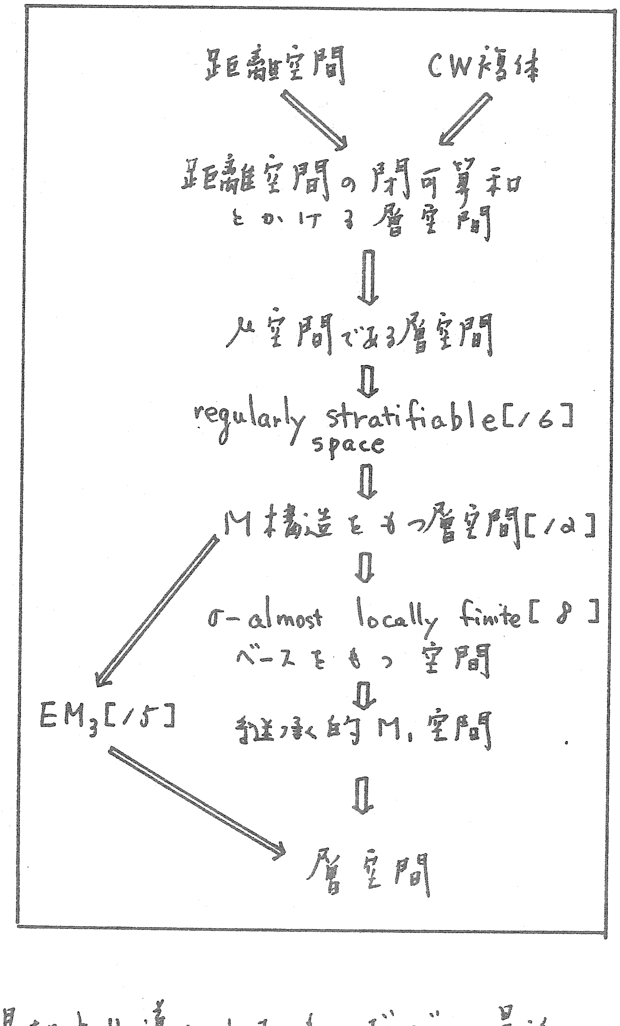
(3)　M_1空間の完全写像による像は，M_1空間である。

$M_3 \Rightarrow M_1$問題への接近の立場には2通りある。第1は，閉包保存族によって定義されるM_3空間に，なんらかの局所有限性がみいだせないかと模索する，局所有限性からの接近である。第2は，閉包保存族の変形，操作によっ

て考えていこうとする立場である。それぞれ§5．§6で詳述しよう。

§5． 局所有限性からの接近

§3で、M_3空間のクラスは、距離空間や、CW複体を含むクラスとして登場したことをみた。距離空間やCW複体は、ともに、距離空間の閉可算和となっている。G. Gruenhage [4] は、この性質をもつ層空間が、継承的M_1（任意の部分空間）となることを示した。



μ－空間（「距離空間の閉可算和とかけるパラコンパクト空間」の可算積に埋めこめる空間）は、永見[13]が、次元論的見地より導入したものだが、最近、

層空間の研究で、1つのキイポイントとなっている。μ空間でない層空間がみつからないのである。

<u>問題 5.1.</u>　μ空間でない層空間は存在するか。

局所有限性からの接近の第一歩として、埋めこみの言葉によって外的に定義されるμ空間のもつ局所有限性を、内的な形で抽出しようとの試みがなされ、まとめると前ページの図式のようになる。溝上[12]は、<u>M構造</u>、玉野[16]は、<u>regularly stratifiable空間</u>の研究を試みた。また、それらの空間は、伊藤・玉野[8]によって定義された、ある種のすっきりしたσ閉包保存ベース、すなわち、<u>σ-almost locally finiteベース</u>をもつことが示される。（M構造をもつ層空間がσ-almost locally finiteベースをもつことは、伊藤によって指摘された。）

このような研究の方向は、次の抽象的問題の解決への判定基準を作りだそうとする努力である。

<u>問題 5.2.</u>　層空間は、どのような局所有限性をもちうるか。

最近、伊藤は次の結果を得た。

<u>定理 5.1.</u>　M_0空間（すなわち、σ閉包保存ベースで各元が開かつ閉集合であるものを有する空間）はμ空間

である。

以下、次元は被覆次元を表すものとする。

<u>問題5.3.</u>　0次元M_1空間は、M_0空間か。

この問題が肯定的に解ければ、定理5.1より、0次元に限ればM_1空間はかなりの局所有限性をもつこととなる。もし、否定的であれば、次の問題の反例を得る。

<u>問題5.4</u>(長田[14])．　n次元M_1空間は、σ閉包保存なベース$\mathcal{B}$で、各$B\in\mathcal{B}$に対して$\dim \partial B \leq n-1$となるものをもつか。

この問題は、M構造をもつ層空間では、肯定的である[　]。次の問題も、この節の方向と大きくかかわるだろう。

<u>問題5.5</u>(永見)　μ空間の完全写像による像は、μ空間か。

§6.　閉包保存族の操作による構造

<u>定義6.1</u>(溝上)．M_1空間Xは、任意の閉集合Fが閉包保存ベース$\mathcal{V}$(すなわち、$\mathcal{V}$は閉包保存な開集合族で、Fの任意の近傍Uに対して、$V\in\mathcal{V}$で、$F\subset V\subset U$となるものが存在する)をもつとき、<u>クラス$\mathcal{P}$</u>に属するという。

<u>定義6.2.</u>　空間Xは、任意の部分空間がM_1空間であ

るとき、<u>継承的M_1空間</u>という。

継承的M_1空間がクラスPに属することは伊藤[6]が示した。定理3.4と定理4.1より、$M_3 \Rightarrow M_1$問題は、右の図式で一番上の継承的M_1空間が一番下の層空間と一致するかという問題と同値である。

継承的M_1空間
$\Downarrow$
クラスPに属するM_1空間
$\Downarrow$
M_1空間
$\Downarrow$
層空間
($=M_3=M_2$空間)

継承的M_1空間とクラスPに関しては、最近の伊藤[6][7]、溝上[11]によって、いろいろとようすがわかってきた。伊藤の次の2定理は重要である。

<u>定理6.1.</u>　継承的M_1空間の閉連続像は、継承的M_1空間である。

<u>定理6.2.</u>　各点が閉包保存な閉近傍ベースをもつ層空間は、クラスPに属するM_1空間である。特に、第1可算性をみたす層空間は、M_1空間である。

<u>問題6.1.</u>　M_1空間は、クラスPに属するか。

<u>問題6.2</u>(伊藤)　継承的M_1空間の積は継承的M_1空間か。

§7.　各クラスの位相的操作による保存性

未解決の点も多い。表にまとめておく。

位相的操作 ＼ クラス	部分集合	有限積 可算積	完全写像による像 閉写像による像	finite to one な開写像による像	閉有限和 閉可算和	Σ-積
μ空間である層空間	○	○	?	?	?	?
M構造をもつ層空間	○	○	?	?	○	○
regularly stratifiable 空間	○	?	?	?	?	?
σ-almost locally finite ベースをもつ空間	○	○	?	○	?	○
継承的 M_1 空間	○	?	○	○	○	?
クラス $\mathcal{P}$ に属する M_1 空間	?	○	?	?	○	○
M_1 空間	?	○	?	?	?	?
層空間	○	○	○	○	○	○

文献

[1] C. R. Borges, On stratifiable spaces, Pacific J. Math. 17 (1966) 1-16.

[2] J. G. Ceder, Some generalizations of metric spaces, Pacific J. Math. 11 (1961) 105-125.

[3] G. Gruenhage, Stratifiable spaces are M_2, Topology Proceedings 1 (1976) 221-226.

[4] __________, On the $M_3 \Rightarrow M_1$ question, Topology Proceedings 5 (1980) 77-104.

[5] R. W. Heath and H. J. Junnila, Stratifiable spaces as subspaces and continuous images of M_1-spaces, Proc.

Amer. Math. Soc. 83 (1981) 146–148.

[6] M. Itō, The closed image of a hereditary M_1-space is M_1, Pacific J. Math., to appear.

[7] ______, M_3-spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1, preprint.

[8] M. Itō and K. Tamano, Spaces whose closed images are M_1, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[9] H. J. K. Junnila, Neighbornets, Pacific J. Math. 76 (1978) 83–108.

[10] 児玉之宏. 永見啓応. 位相空間論. 岩波書店. 1974.

[11] T. Mizokami, On a certain class of M_1-spaces. Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[12] __________, On M-structures, Topology and Appl., to appear.

[13] K. Nagami, Normality of products, Actes Congrès intern. Math. 2 (1970) 33–37.

[14] J. Nagata, On Hyman's M-space, Topology Conference VPI. Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics No. 375, 198–208.

[15] S. Oka, Dimension of stratifiable spaces, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[16] K. Tamano. Stratifiable spaces defined by pair collections, Topology and Appl., to appear.

Uniformizations of orbifolds.
—軌道体の一意化—

九大・理　加藤十吉

§1. 軌道体とその一意化。

Mを連結な第2可算なn次元(位相)多様体とし，GをMの自分自身への同相写像のなす一つの群とする。GがMに properly discontinuous に作用し，局所的に直交変換群となっているとき，(G, M)を単に変換群という。つまり，作用写像 $G \times M \longrightarrow M$; $(g, z) \mapsto g(z)$ が固有で，各点$z \in M$に開近傍M_zが存在し，Gの点zでの isotropy 群G_zがM_zを不変にし，(G_z, M_z)が有限部分群$G'_z \subset O(n)$に対する変換群$(G'_z, \mathbb{R}^n)$と位相同型になるときである。このとき，軌道空間$X = \{G\cdot z \mid z \in M\}$は可分，距離づけ可能で，関数

$$b : X \longrightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$$

が

$$b(x) = \# G_z \qquad (G\cdot z = x \in X,\ z \in M)$$

により定義される。

$$(X, b) = G\backslash M \quad , \quad X = |G\backslash M|$$

と表わし，(X,b) を (G,M) の軌道体，逆に，(X,b) からみて (G,M) を (X,b) の一意化という。

定義．　連結，可分，距離空間 X と関数 $b : X \longrightarrow \mathbb{N}$ を一緒にしたもの (X,b) を b-空間という。b-空間 (X, b) が軌道体（orbifold）であるとは，X の任意の点 x に角近傍 X_x が存在して，$(X_x, b|X_x)$ が有限直交変換群 $(G_x, \mathbb{R}^n)$ を一意化としてもつときをいう。つまり，局所一意化可能な b-空間を軌道体という。このとき，変換群 (G,M) で，$G\backslash M = (X,b)$ となるものが存在するとき，(X,b) は一意化可能であるといい，(G,M) を (X,b) の一意化（uniformization）という。

標準的問題として，

"軌道体はどのような条件下で一意化可能か？　もしそうであれば一意化を分類せよ。"

が生ずる。この問題の一般的解答を与えるのが主目標である。

軌道体 (X,b) に対し，

$$\Sigma b = \{ x \in X \mid b(x) \geq 2 \}$$

と定め，(X, b) の分岐集合という。(X, b) は局所一意化可能であるから，b がその各 stratum 上定値となるような（細分に関して）最大の X の stratification $\mathcal{S}$ が存在する。これを (X, b) の stratification という。（通常のように，$\mathcal{S}$ の stratum は連結で，$\mathcal{S}$ は局所有限とする。）

$\dim X = n$ とすると，

$X_0 = X - \Sigma b$ は唯一の n 次元 stratum である。

$\{A_i \mid i \in I\}$ を $\mathcal{S}$ の $n-1$ 次元 strata の全体とし，

$$\partial_b X = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

と表わす。

$\partial_b X = \emptyset$ のとき，(X, b) を分岐体 (branchfold) という。この名は，分岐体の一意化が次の§で述べる Fox の意味での正則分岐被覆になっていることに由来する。

§2. Fox の分岐被覆論.

X を 連結，局所 0-連結（弧状連結），T_1-空間とし，X_0 を X の稠密な開集合で，半局所単連結，X において局所 0-連結 $((\forall x \in X, \forall V_x : \text{open nbd}) \exists U_x : \text{open nbd. s.t. } U_x \cap X_0$ が 0-連結$)$ であるとする。

以後，この様な対(X, X_0)のみを考える。

定義：　連続写像 $f: Y \to X$ が(X, X_0)の分岐被覆 $f: (Y, Y_0) \to (X, X_0)$ であるとは，

(i) $f: Y \to X$ が spread である；Xの連結開集合Uの逆像$f^{-1}(U)$の連結成分を考えると，それらの全体がYの開基をなす。

(ii) $f: Y \to X$ は完備である；Xの各点xで，xの開かつ連結な近傍Uについて$f^{-1}(U)$の連結成分W_Uが定まり，$U \subset V \Rightarrow W_U \subset W_V$ をみたすならば，

$\cap W_U \neq \emptyset$ となる。

(iii) $Y_0 = f^{-1}(X_0)$ であり，$f_0 = f|Y_0 : Y_0 \to X_0$ は被覆写像である。

このFoxによる分岐被覆写像は，open, light mapping となる。

<u>Foxの定理</u> [1]．対(X, X_0)に対し，X_0の任意の被覆写像 $f_0: Y_0 \to X_0$ をとると，T_1空間Y及びf_0を拡張する分岐被覆 $f: (Y, Y_0) \to (X, X_0)$ が存在する。しかも，Y_0の被覆変換はYの同相写像へ

拡張できる。この $f: Y \to X$ を f_0 の Fox の完備化という。

従って次の図式が成立する.

系 1. 分岐被覆 $f:(Y, Y_0) \to (X, X_0)$ の同型類

$\downarrow$ 制限：全単射 $\uparrow$ Foxの完備化

被覆 $f_0: Y_0 \longrightarrow X_0$ の同型類

$\updownarrow$ 全単射 (well-known)

$\pi_1(X_0)$ の部分群の共役類.

$\pi_1(X_0)$ の部分群 K は (X, X_0) の分岐被覆 $f: Y \to X$ を定めることになる。これを K の定める分岐被覆という。

分岐被覆 $f:(Y, Y_0) \to (X, X_0)$ の自己同型 $h: Y \to Y$ $(f \circ h = f)$ の全体は f の被覆変換群 $G(f)$ をなす。Y_0 に制限することができ，f_0 の被覆変換群 $G(f_0)$ に一致する。商写像 $Y \to |G(f) \backslash Y| = X$ が f と一致するとき，正則分岐被覆という。

系 1 の特別な場合として次の図式が成立する。

系2.　正則分岐被覆　$f:(Y, Y_0) \to (X, X_0)$ の同型類

$\updownarrow$ 制限（$\uparrow$ Fox の完備化）

正則被覆　$f_0 : Y_0 \longrightarrow X_0$ の同型類

$\updownarrow$

$\pi_1(X_0)$ の正規部分群 N

しかも，$G(f) \cong G(f_0) \cong \pi_1(X_0)/N$.

注意：軌道体 (X, b) の一意化 (G, M) の商写像 $q : M \to X$ は $\partial_b X \neq \emptyset$ のとき，分岐被覆にはならないが，$\partial_b X = \emptyset$ ，つまり，(X, b) が分岐体であれば，正則分岐被覆 $q:(M, M_0) \to (X, X_0)$ $(M_0 = q^{-1}(X_0))$ となっている。

§3. 軌道体の一意化の存在条件とその分類.

(X, b) を分岐体とし，$\dim X = n$ とする。

$\pi_1(X_0) = H$ とし，(X, b) の *stratification* $\mathcal{S}$ の $n-2$ 次元 *strata* の全体を $\{B_j \mid j \in J\}$ とする。

各 B_j のまわりの *normal loop* μ_j をとり，基点 $x_0 \in X_0$ に対し，$\mu_j \in \pi_1(X_0, x_0) = H$

とみなす。 $b_j = b(B_j)$ とし，$\mu^b = \{\mu_j^{b_j} \mid j \in J\}$ を含むHの最小の正規部分群（μ^bのHにおける正規閉包）を$H\langle\mu^b\rangle$とする。

Xの各点xで，$(X_x, b|X_x) = G_x\backslash\mathbb{R}^n$ $(G_x \subset O(n))$ となる近傍X_xをとり，$(X_x, b|X_x)$に対し上と全く同様に，$X_{x,0} = X_x - \Sigma b$，$\pi_1(X_{x,0}) = H_x$，μ_x^b，$H_x\langle\mu_x^b\rangle$ 等が定まる。

定義： Hの正規部分群Kがb完備であるとは，
Σbの各点xで，包含写像 $X_{x,0} \hookrightarrow X_0$ 及び $X_{x,0}$の基点からx_0へのX_0における道の定める準同型 $i_x : \pi_1(X_{x,0}) = H_x \to H$ に対し，

$$i_x^{-1}(K) = H_x\langle\mu_x^b\rangle$$

が成立するときをいう。

このとき，$K \supset H\langle \bigcup_{x\in\Sigma b} i_x(\mu_x^b)\rangle = H\langle\mu^b\rangle$
が成立している。そして，$H\langle\mu^b\rangle$もb完備となる。
つまり，$H\langle\mu^b\rangle$は最小のb完備正規部分群となる。

<u>定理1</u>．（分岐体の一意化定理）　(X, b)を分岐体とする。

(1)　(X, b)が一意化可能 $\Longleftrightarrow$ $H\langle \mu^b \rangle$ が b完備。

(2)　(X, b)の一意化の同型類 $\xleftrightarrow{\text{全単射}}$ Hのb完備正規部分群.

(3)　(X, b)が一意化可能であれば，$H\langle \mu^b \rangle$の定める一意化 $(\hat{G}, \hat{M})$ は普遍一意化である。つまり，(X, b)の任意の一意化 (G, M) に対し，全射準同型 $\varphi : \hat{G} \to G$ 及び 被覆 $F : \hat{M} \to M$ が φ-同変であるように存在する。とくに，MがHの正規部分群Kによって定まるとすれば，$\pi_1(M) = \mathrm{Ker}\,\varphi = K / H\langle \mu^b \rangle$ が成立する。$\hat{G} = H / H\langle \mu^b \rangle = H / \{\mu_j^{b_j} = 1 \mid j \in J\}$。

定理1の証明は，軌道体の局所一意化が普遍一意化であり，他方，b完備正規部分群の定める正則分岐被覆 $f : M \to X$ からえられる $(G(f), M)$ を局所的にみると b完備性が普遍一意化であることを保証していることによる。（(3)を示すのは難しくない）。

（注意）　$\partial_b X = \emptyset \Longleftrightarrow \dim \Sigma b \leq n-2$ であり，$\dim \Sigma b \leq n-3$ のときには，$H\langle \mu^b \rangle = \{1\}$ となり，b完備性は i_x が単射ということに他ならない。

$\partial_b X \neq \emptyset$ である軌道体 (X, b) に対し，

$$D(X) = X \underset{\partial_b X}{\cup} X, \quad D(b)(x) = \begin{cases} b(x), & x \in X - \partial_b X \\ b(x)/2, & x \in \partial_b X \end{cases}$$

と定め，$D(X, b) = (D(X), D(b))$ を (X, b) の double という。

定理2.（Double trick）　(X, b) を軌道体で，$\partial_b X \neq \emptyset$ とする。このとき，double $D(X, b)$ は分岐体であり，次のことが成立する。

(1)　(X, b) が一意化可能 $\Leftrightarrow$ $D(X, b)$ が一意化可能。

(2)　$D(X, b)$ が一意化可能であれば，その普遍一意化 $(\hat{G}^+, \hat{M})$ に対し，$D(X)$ の $\partial_b X$ に関する鏡映変換は $\hat{M}$ の同相写像へひきあげられ，これと $\hat{G}^+$ の生成する同相群 $\hat{G}$ を考えると，$(\hat{G}, \hat{M})$ が (X, b) の普遍一意化となっている。$1 \to \hat{G}^+ \to \hat{G} \rightleftarrows \mathbb{Z}_2 \to 1$（完全）が成立している。

§4. 鏡映変換群，回転変換群そして Thurston 予想。

(G, M) を変換群とする。

定義：　G の元 γ が鏡映（reflection）であるとは，

rの固定点集合$F(r)$がMを分離する, i.e., $M-F(r)$が連結でない, ときをいう。Gが鏡映で生成されるとき, (G, M)を鏡映変換群という。このとき, $G\backslash M=(X, b)$において,

(i) Xは(Mの中の)境界をもつ同次元(部分)多様体で,

$\Sigma b = \partial_b X = \partial X$ をみたし,

(ii) 任意の$n-2$次元 stratum $B \in \mathcal{S}$ に対し,

相異なる$n-1$次元 strata A_i, $A_j \in \mathcal{S}$ が存在し,

$B \subset \overline{A_i} \cap \overline{A_j}$

となり, $b(B)$ は A_i と A_j のみに依存する値 b_{ij} をとる。

軌道体(X, b)が(i)をみたすとき, 鏡映軌道体(reflection orbifold)といい, (ii)をみたす鏡映軌道体は正則であるという。

定理3. 軌道体が鏡映変換群の軌道体となる必要十分条件はそれが正則な鏡映軌道体になっていることである。

Xが単連結であれば, 正則な鏡映軌道体(X, b)の任意の一意化は鏡映変換群である。

定義： 軌道体(X, b)において，Xの部分空間Yが切断（section）であるとは，Yの各点xで，xの近傍X_xに対する$(X_x, b|X_x)$の局所直交一意化$(G_x, \mathbb{R}^n)$ $(G_x \subset O(n))$が存在し，商写像$q : \mathbb{R}^n \to X_x$によるYのひきもどし$q^{-1}(Y)$が$\mathbb{R}^n$のいくつかのm次元$(m < n)$線形部分空間からなり，その1つLのG_xのstabilizerをG_x'とすると，

$$|G_x' \backslash L| = Y \cap X_x$$

となるときをいう。このとき，$b'(x) = \# G_x'$により$b' : Y \to \mathbb{N}$が定義され，(Y, b')を(X, b)の部分軌道体あるいはYによる切断という。

3次元で次の予想をThurstonは与えている。

Thurstonの予想の一般化： 軌道体が一意化可能である為の必要十分条件はその任意の切断による部分軌道体が一意化可能となることである。

定理3の系. 次元$n \neq 4, 5$において，鏡映軌道体に対しThurstonの予想の一般化は成立する。

(G, M) を 向きづけられた多様体の向きを保つ変換群とする。

定義：　$g \in G$ が回転 (rotation) であるとは，g の固定点集合 $F(g)$ の次元が $n-2$ のときをいう。G が回転で生成されるとき，(G, M) を回転変換群 (rotation group) という。このとき，$G \backslash M = (X, b)$ は分岐体であり，B_j への normal loop μ_j の集合 $\{\mu_j \mid j \in J\}$ を μ とすると，

(iii)　$X_0 = X - \Sigma b$ は向きづけ可能な多様体で，μ の $H = \pi_1(X_0)$ での正規閉包を $H\langle\mu\rangle$ とすると，包含写像 $X_0 \hookrightarrow X$ は 同型 $H / H\langle\mu\rangle \cong \pi_1(X)$ をひきおこしている。

分岐体 (X, b) が(iii)をみたすとき回転軌道体 (rotation orbifold) という。

定理4.　分岐体 (X, b) が回転変換群の軌道体となる為の必要十分条件は一意化可能な回転軌道体になってい

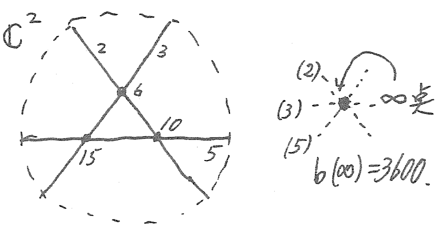
ることである。Xが単連結であれば，回転軌道体(X, b)の任意の一意化は回転変換群である。

（注意）(1)　Xが向きづけ可能多様体であれば，分岐体(X, b)は回転軌道体である。とくに鏡映軌道体(X, b)においてXが向きづけ可能であれば，double $D(X, b)$は回転軌道体となる。Xが単連結であるような正則な鏡映変換群は多く存在し，その普遍群$\hat{G}$はCoxeter群である。（[4]，[2]，[3]）。$\hat{G}$の元で，"偶数長"のもの全体のなすindex 2の部分群$\hat{G}^{+}$は$D(X, b)$の普遍群である。

(2)　一般には，回転変換群(G, M)に対し，$|G \backslash M|$が多様体になるとは限らない。

定理5、　次元$n \geq 4$において，Thurstonの予想の一般化は成立しない。

例　複素2次元空間$\mathbb{C}^2$で一般の位置にある3直線を考え，その一点コンパクト化$S^4 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$をとる。（$b$は上図の如く定める。）



参考文献

[1] R. Fox, *Covering spaces with singularities*, Algebraic Geometry and Topology, Princeton Univ. Press (1957), 243-257.

[2] M. Kato, *On uniformizations of orbifolds*, (preprint).

[3] 加藤十吉, 位相的鏡映変換群, 都立大学数学教室セミナー報告 (1982).

[4] E. Straume, *The topological version of groups generated by reflections*, Math. Z. 176 (1981), 429-446.

[5] W. Thurston, *The geometry and topology of three manifolds*, Princeton Univ. (mimeographed notes 1978-1979).

The Existence of Expansive Maps in Group Spaces

都立大 理 青木統夫

§1 Introduction

Expansive homeomorphism に関連した講演が数年前に、このSymposiumで郡山彬氏(Expansive and entropy-expansive on compact manifolds)によってなされた。今回はpositively expansive map (P. exp. map と略記) と expanding diff. map との関係と、P. exp. map の存在論を中心にした内容を報告したい。

Expanding diff. map は Anosov endomorphism の例として最初に Smale, Shub 等によって研究された。P. exp. map は expansive homeo. の存在と諸性質を研究するなかで、Eisenberg [9], Williams [27] によって取り扱われた。[28]の中で Williams は P. exp. map の研究から Expanding attractor に彼の研究を発展させ大きな成果をえている。

M を compact diff. manifold とする。$f: M \circlearrowleft$ が <u>expanding diff. map</u> であるとは、Riemannian 計量 $\|\cdot\|$ と定数 $\lambda > 1$ が存在して、

$$\|Df^n(v)\| \geqq \lambda \|v\| \quad (\forall n \geqq 1,\ \forall v \in TM)$$

となることである。

<u>ex. 1.</u> S^1 上の $f(z) = z^2$ $(z \in S^1)$ によって定義される map f は expanding diff. map である。

Ruelle は expanding diff. map を compact metric space 上の continuous map に拡張し，統計力学での平衡測度の存在を明らかにした。

$X = (X, d)$ は metric d をもつ compact metric space とする。continuous map $f : X \circlearrowleft$ が <u>expanding map</u> であるとは，次をみたす距離 d，定数 $\delta > 0$，$\lambda > 1$ が存在することである；

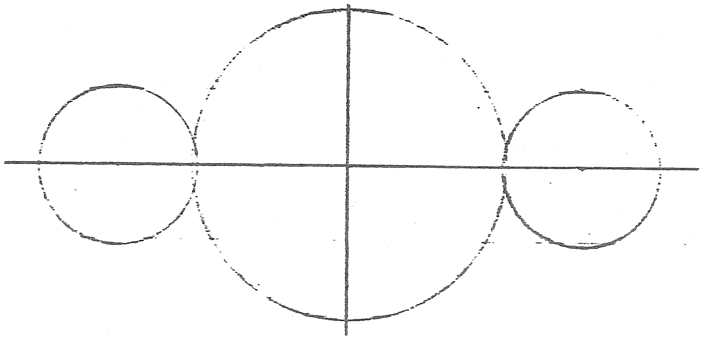
$$\text{(i)} \quad d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) \geqq \lambda\, d(x,y),$$

$$\text{(ii)} \quad d(f(x), z) < \lambda\delta \implies U(x,\delta) \cap f^{-1}(z) \neq \phi.$$

ここに $U(x,\delta) = \{ y \in X : d(x,y) < \delta \}$.

<u>(注1)</u> $f : X \circlearrowleft$ が expanding map であれば，f は open map であることがわかる。f が (i) だけの条件をみたすとき，f を <u>local expansion</u> であるという。local expansion と expanding map は同値ではない。

<u>ex. 2.</u> $X = \{z : |z| = 1\} \cup \{z : |z - \frac{3}{2}| = \frac{1}{2}\} \cup \{z : |z + \frac{3}{2}| = \frac{1}{2}\}$ とおく。



X上に continuous map f を定義する；

$$f(z) = \begin{cases} 2(z - \frac{3}{2}) & \text{if } Re(z) \geq 1 \\ 2(z + \frac{3}{2}) & \text{if } Re(z) \leq -1 \\ \frac{1}{2}z^6 - \frac{3}{2} & \text{if } \frac{1}{2} \leq Re(z) \leq 1 \\ z^3 & \text{if } -\frac{1}{2} \leq Re(z) \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}z^6 + \frac{3}{2} & \text{if } -1 \leq Re(z) \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

このとき f は X上で local expansion であるが，expanding map ではない（f は open map でない理由による）.

$f: X \circlearrowleft$ が <u>positively expansive</u> であるとは，expansive constant とよばれる正数 $c = c(d, f)$ が存在して，$x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対して，

(*) $\quad d(f^n(x), f^n(y)) > c \quad$ for some $n \geq 0$

となることである。 ex.1 の map f は p. exp.

<u>ex.3.</u> Expanding diff. map ではない p. exp. map が存在する。 $g: \mathbb{R} \circlearrowleft$ は C^1-map とし次の条件をみたすと

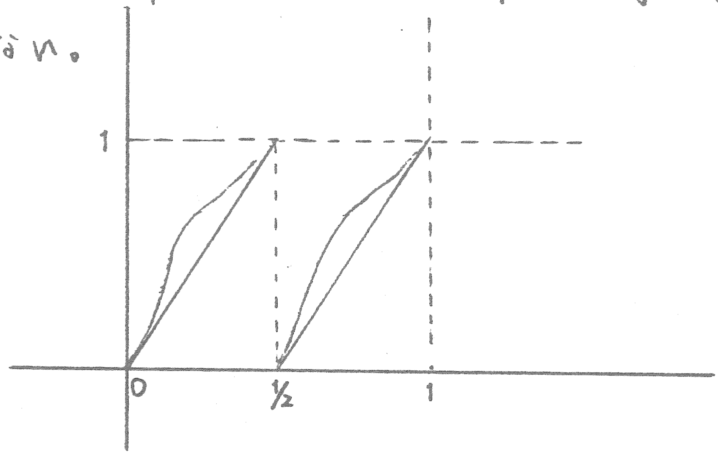
する；

(1) $g(0)=0,\quad g(1)=2$

(2) $g'(0)=g'(1)=1,\quad g'(x)>1\ (0\leq x\leq 1)$

(3) $g(x)=2n+g(x-n)\quad (n\leq x\leq n+1,\ n\in\mathbb{Z})$

例えば，$g(x)=x+x^2(x-2)^2$ (on $[0,1]$)．g は S^1 上で p．exp．であるが，expanding diff. map ではない。



<u>ex. 4.</u> n-torus $T^n\ (=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ 上の group endomophism のすべての固有値の絶対値 >1 であれば，p．exp．(expanding diff. map)．

<u>(注2)</u> 特に，$f: X \circlearrowleft$ が homeomorphism で，(*) が

$$d(f^n(x), f^n(y))>c \quad \text{for some } n\in\mathbb{Z}$$

なるとき，f は <u>expansive</u> であるという。

<u>(注3)</u> Compact metric space X は totally disconnected であるとする。X 上で expanding map, local expansion,

p. exp. map を構成することができる。例えば，$k>1$ として，直積位相空間 $X=\{0, 1, \cdots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$ 上に shift map σ を定義する。σ は X 上で p. exp. であり，expanding map でもある。E は X の閉部分集合で，$\sigma(E)=E$ とする。このとき

(i) $\sigma_{|E}$: p. exp.

(ii) $\sigma_{|E}$: local expansion なる距離が存在する。

(iii) $\sigma_{|E}$ は local expansion であるとする。このとき

$\sigma_{|E}$: open map $\Leftrightarrow$ $\sigma_{|E}$: expanding map,

ところで space X が connected，特に manifold の場合に，p. exp.，locall expansion，expanding map の間にいかなる関係があるか。このことを中心にして解説を進めてゆきたい。

§2 Positively expansive map と local expansion

上で述べた map に対する三つの概念に関する次の結果がある。

2.1 Th. (Reddy [21]). X は Compact metric space $f: X \circlearrowleft$ は continuous map とする。このとき

f: p. exp. $\Leftrightarrow$ f: local expansion

この定理によって p. exp. map と local expansion は

区別する必要がなくなった。以後統一して p. exp. の用語を使用する。

2.2 Th. ([5]). M は compact manifold とする。
$f: M \circlearrowleft$: p. exp. $\Rightarrow$ f : covering map.

$X=(X, d)$ を距離 d をもつ metric space, $f: X \circlearrowleft$ を homeo. とする。点列 $\{x_i : i \in (a, b)\}$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ が $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ $(i \in (a, b-1))$ をみたすとき, δ-pseudo orbit であるという。$d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$ $(i \in (a, b))$ なる $x \in X$ が存在するとき $\{x_i\}$ は ε-trace されるという。$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $\forall \delta$-pseudo orbit が或る点によって ε-trace されるとき, f は pseudo orbit tracing property をもつという。(P.O.T.P. と略記)

pseudo orbit tracing property は continuous map に対して定義される。

この概念は Anosov によって発見され, Sinai によって統計力学に応用された。その後 Bowen によって現在の形で定義が与えられた。力学系理論において重要な概念の一つとされている。

ex. 5. P.O.T.P. をもつ homeo. の例を与えよう。こ

の概念は以後の解説で重要な役割をはたす。

距離 d_0 をもつ compact metric space X の直積位相空間 $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ 上に

$$d(x,y) = \max_{i\in\mathbb{Z}} d_0(x_i, y_i)/2^{|i|} \quad (x=(x_i), y=(y_i)\in\Sigma)$$

なる距離 d を定義する。σ は Σ 上の shift ($\sigma(x_i) = (x'_i)$ $x'_i = x_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}$) とする。σ は Σ 上で P.O.T.P. をみたすことが簡単に示される。$\forall\varepsilon>0$ に対して，$2\delta<\varepsilon$ なる $\delta>0$ をえらぶ。$\forall\delta$-pseudo orbit $\{x^i\}$ が ε-trace される $x\in\Sigma$ の存在を示せばよい。$\forall i, k\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\delta > d(\sigma(x^i), x^{i+1}) \geq d_0((\sigma x^i)_k, x^{i+1}_k)/2^{|k|} = d_0(x^i_{k+1}, x^{i+1}_k)/2^{|k|}.$$

$$\therefore \quad d(x^i_{k+1}, x^{i+1}_k) < 2^{|k|}\delta \quad (\forall i, k\in\mathbb{Z}).$$

$x = (\cdots, x_0^{-1}, x_0^0, x_0^1, \cdots)$ とおけば，$x\in\Sigma$.

$$\begin{aligned} d_0(x^i_k, (\sigma^i x)_k) &= d_0(x^i_k, x_0^{i+k}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{|k|-1} d_0(x^{i+j}_{k-j}, x^{i+j+1}_{k-j-1}) < 2^{|k|+1}\delta. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad d_0(x^i_k, (\sigma^i x)_k)/2^{|k|} \leq 2\delta < \varepsilon.$$

よって $d(x^i, \sigma^i(x)) < \varepsilon$ $(\forall i\in\mathbb{Z})$.

$k\in\mathbb{Z}$ $(k>1)$ を固定し，$X = \{0, 1, \cdots, k-1\}$ とする。$\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ の σ-不変閉部分集合 S ($S = \sigma(S)$) が <u>subshift of finite type</u> であるとは，

$N \in \mathbb{Z}$ $(N>0)$ と 部分集合 $C \subset \prod_{0}^{N} \{0, 1, \cdots, k-1\}^{N}$ が存在して

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x \in \Sigma : \ ^{\forall}x \in S \text{ の長さ } N+1 \text{ の任意の block } (x_i, \cdots, x_{i+N}) \\ \qquad\qquad \text{は } C \text{ の元である} \end{array} \right\}$$

をみたすことである。

2.3 Th. (Walters [30]) $S \subset \Sigma$ は σ-不変閉部分集合、

$\sigma_{|S}$: P. O. T. P. をもつ $\Leftrightarrow$ $\sigma_{|S}$: subshift of finite type

2.4. Th. M は compact manifold, $f: M \circlearrowleft$ は cont. map、 $f: M \circlearrowleft$, p. exp. $\Rightarrow$ f : P.O.T.P. をもつ。

2.5. Th. X は compact metric space, $f: X \circlearrowleft$ は p. exp. map とする。

$f: X \circlearrowleft$, open map $\Leftrightarrow$ f : P.O.T.P. をみたす。

(注4) manifold でない compact connected metric space 上の expanding map (i.e. p. exp.. open map) の例は未発見である。ex.1 の例は p. exp. であるが open map ではない。

§3 Positively expansive map の基本的性質

(注5) X が compact ならば, f が p. exp. であることは X の metric に依らない。

(注6) $f: X \circlearrowleft$ が p. exp. ならば, $0 \neq {}^{\forall}m > 0$

に対して，$f^m : X$ ⟲ も p. exp.

(注 7) X, Y は任意の metric sp.，$f : X$ ⟲ を p. exp. とする。$h : X \to Y$ が homeo. かつ h^{-1} が一様連続ならば，$hfh^{-1} : Y$ ⟲ も p. exp.

(注 8) X は compact metric sp.，$f, g : X$ ⟲ は cont. map. f が p. exp. で $g \sim f$ は top. conj. ならば，g も p. exp.

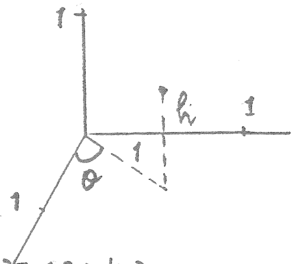
(注 9) (Rosenholtz [23]) f は compact metric sp. 上の cont. map. f が p. exp. open map であれば，f は fixed point をもつ。

ex. 6. f が open でなければ，f は必ずしも fixed point をもたない（ex.1. の例でわかる。）X が connected でなければ，f が open であっても fixed point をもつとは限らない。例えば，$Y = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ として，Y 上の metric d を $d((x, \varepsilon_1), (y, \varepsilon_2)) = d(x, y) + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$，$Y$ 上の cont. map g を $g((x, 0)) = (f(x), 1)$，$g((x, 1)) = (f(x), 0)$ とする。g は p. exp. open map で fixed point をもたない。

(注 10) (Mañé [17]) X は compact とする。$f : X$ ⟲ が p. exp. $\Rightarrow$ top.-dim $(X) < \infty$.

(注 11) (Hemmingsen, Reddy [10]) 2-dim. compact mfd. M が p. exp. map を許容すれば, Euler ch. $\chi(M)=0$.

(注12) ([10]) Klein bottle 上に p. exp. map が存在する。$Y=\{(1,\theta,h) : \theta, h \in \mathbb{R}\}$ とし, $(1,\theta,h)$ と $(1,-\theta,h+1)$ を同一視することによって, Klein bottle K 上への covering map をつくる。



Y 上で $g(1,\theta,h)=(1,2\theta,3h)$ なる g は p. exp. map で, K 上の map f の lift である。このとき f も p. exp. map が証明される。

§4 Expanding diff. maps

Expanding diff. map に対して Shub [25] は次をえている;

<u>4.1. Th.</u> M は compact connected Lie group, $f : M \circlearrowleft$ は exp. diff. map とする。このとき M は torus である。

<u>4.2. Th.</u> torus 上の exp. diff. map は toral auto. と top. conj.

<u>4.3. Th.</u> f は comp. mfd. M 上の exp. diff. map. $\Longrightarrow$

(a) f は fixed point をもつ。

(b) $\overline{M}$ は M の univ. covering sp. $\Rightarrow$ $\overline{M} \cong \mathbb{R}^n$

(c) $\mathrm{per}(f)$: dense in M.

Th. 4.2 に関連して Hirsch [11] は次をえている;

<u>4.4. Th.</u> M は infrahomogeneous sp., $f : M \circlearrowleft$ は exp. diff. map とする。このとき M は infranilmanifold

で，f は M 上の exp. endomorphism と top. conj.

<u>(注13)</u> Th. 4.2, 4.4 に関連して，Manning は infrani. 上の Anosov diff. は hyperbolic auto. と top. conj. であることを示している。

<u>(注14)</u> 最近 平出氏（都立大理）は上の Manning の結果を torus 上の homeo. に拡張した：n-torus T^n 上の homeo. f が P.O.T.P. と expansiveness をみたせば，f は T^n 上の toral auto. と top. conj. である。さらに 2-dim. comp. mlf. M が P.O.T.P., expansiveness をもつ homeo. を許容すれば，Euler ch. $\chi(M)=0$ で，Klein bottle はこのような homeo. を許容しない。

§5 Positively expansive map in compact group spaces

compact connected abelian group が位相的次元有限であるとき，<u>solenoidal group</u> であるという。有限次元 torus は solenoidal である。

<u>5.1. Th.</u> (Wu, [29]) comp. conn. group X が top. dim. 有限とする。このとき X 上の auto. が exp. であれば，X は abelian.

<u>5.2. Th.</u> (Eisenberg [9]). comp. conn. finite dim. group X が p. exp. endo. を許容すれば，X は abelian.

<u>5.3. Th.</u> (Eisenberg [7, 8]) X は locally comp. conn. group, $k \in \mathbb{Z}$ $(|k| \geq 2)$、 $f : x \longmapsto x^k$ なる X 上の map f に対して,

(i) f : p. exp. $\Rightarrow$ X : Lie group

(ii) X : compact, f : p. exp. $\Rightarrow$ X : torus

Th. 4.2, Th. 5.2, 5.3 に関連して, comp. conn. group X 上の cont. map g に対して次が云られる;

<u>5.4. Th.</u> g : X ↺ cont. map とする。

(i) g : p. exp. open map $\Rightarrow$ X : torus.

(ii) g は X 上の toral endo. と top. conj.

証明に対して, 次の二つの Lem. を必要とする。

<u>5.3. Lem.</u> S : r-dim. solenoidal group 、このとき

(1) $\exists \varphi : \mathbb{R}^r \rightarrow S$, into cont. homomorphism

(2) $\exists F$: totally disconnected subgroup s.t. $S = \varphi(\mathbb{R}^r)F$

(3) $S = \overline{\varphi(\mathbb{R}^r)}$

(4) $S = \varphi(\mathbb{R}^r) \Rightarrow S$: torus

<u>5.4. Lem.</u> (Frink's metrization lemma) X は任意の集合とし, X×X は直積集合を表わす。 $\{U_n : n \geq 0\}$ は X×X の部分集合族とする。

(1) ${}^{\forall}U_n$: symmetric

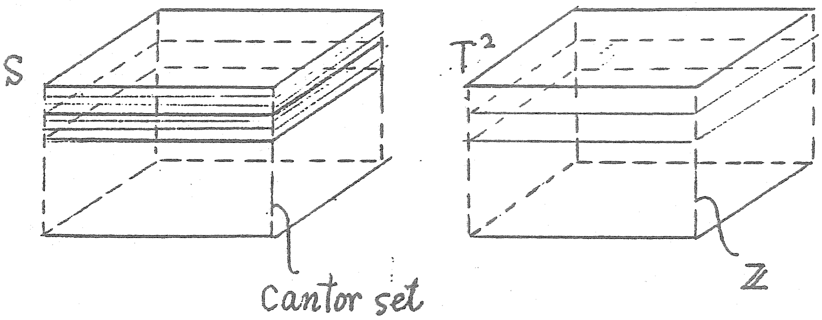
(2) $X\times X = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset \bigcap U_n = \{(x,x) : x\in X\}$

(3) $U_n\circ U_n\circ U_n \subset U_{n-1}$ $(\forall n\geq 1)$

$\Longrightarrow \exists\, d$: metric of X s.t.

$U_n \subset \{(x,y) : d(x,y) < 1/2^n\} \subset U_{n-1}$ $(n\geq 1)$.

(注15) 2-dim. torus T^2 と 2-dim. solenoidal S の相異を図で示すと, 次のようになっている;



(注16) $\gamma : \mathbb{R} \circlearrowleft$ は linear map, 特に $\gamma : v \mapsto \frac{3}{2}v$ であるとする。$G = gp \bigcup_0^\infty \gamma^i \mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ で稠密な群、G は離散群であると考える。X は G の指標群とすれば, X は 1-dim. solenoidal で torus ではない。$\sigma : X \circlearrowleft$ は γ の dual auto. とするとき, Th. 5.4 によって, σ は p. exp. ではない。

(注17) Th. 5.4 において, f が open である仮定が必要であるかどうかわからない。

References

[1] N.Aoki, Topological stability of solenoidal automorphisms, Nagoya Math. J. 90 (1983), 119-135.

[2] N. Aoki, Dense orbit of automorphisms and compactness of groups, (to appear)

[3] R.Bowen and P. Walters, Expansive one-parameter flows, J. Diff. Equations 12 (1972), 180-193.

[4] B.F.Bryant and P. Walters, Asymptotic properties of expansive homeomorphisms, Math. Syst. Theory 3 (1969), 60-66.

[5] E.M.Coven and W.Reddy, Positively expansive maps of compact manifolds, Lecture Notes Math. 819, Springer, 96-110.

[6] P.F.Duvall and L.S.Husch, Analysis on topological manifolds, Fund. Math. 77 (1972), 75-90.

[7] M.Eisenberg, Expansive automorphisms of finite-dimensional vector spaces, Fund. Math. 59 (1966), 307-312.

[8] M.Eisenberg, Expansive transformations semigroups of endomorphisms, Fund. Math. 59 (1966) 313-321.

[9] M.Eisenberg, A note on positively expansive endomorphisms, Math. Scand. 19 (1966), 217-218.

[10] E. Hemmingsen and W.L. Reddy, Lifting and projecting expansive homeomorphisms, Math. Syst. Theory 2 (1968), 7-15.

[11] M.Hirsch, Expanding maps and transformation groups. Proc. Sympos. Pure Math. 14, (1970), 125-131.

[12] H.B.Keyness and J.B.Robertson, Generators for topological entropy and expansiveness, Math. Syst. Theory 3 (1969), 51-59.

[13] A. Koriyama, Expansiveness on compact piecewise linear manifolds, Math. Z. 177 (1981), 143-146.

[14] P.F.Lam, On expansive transformation groups Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 131-138.

[15] P.F.Lam, Homeomorphisms of expansive transfomation groups, Math. Syst. Theory 4 (1970), 249-256.

[16] W. Lawton, The structure of compact connected groups which admit an expansive automorphism, Lecture motes Math. 318 (1973), 23-34.

[17] R. Mané, Expansive homeomorphisms and topolgical dimension, Trans. Amer Math. Soc. 252 (1979), 313-319.

[18] A.Morimoto, The method of the pseudo-orbit tracing property and stability, Tokyo Univ. Seminary notes 39, 1979.

[19] T. O'Brien, Expansive homeomorphisms on compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 769-771.

[20] T.O'Brien and W.Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphisms, Pacific J. Math. 35 (1970), 737-741.

[21] W.Reddy, Expanding maps on compact metric spaces, Topology Appl. 13 (1982) 327-334.

[22] H. Rosen, Fixed points of sequences of locally expansive maps, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (179), 383-389.

[23] J. Rosenholtz, Local expansions derivatives and fixed points, Fund. Math. 91 (1976) 1-4.

[24] K. Shiraiwa, Theory of dynamical system, Structure stability, Seminary notes of Tokyo Metropolitan Univ. 1982.

[25] M. Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer, J. Math. 91 (1969), 175-199.

[26] W.R.Utz, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 764-774.

[27] R.F.Williams, A note on unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 308-309.

[28] R.F.Williams, Expanding attractors. I.H.E.S. 43 (174), 169-203.

[29] T.S.Wu, Expansive automorphisms in compact groups, Math. Scand. 18 (1966), 23-24.

[30] P. Walters, On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability, Lecture notes Math. 668, Springer,(1979), 231-244.

Recognizable 3-Bridge Link Types and Genus 2 Heegaard Splitting Classes

東工大　理　根上生也
学習院大　理　沖田一雄

1.はじめに

3次元球面 S^3 の中の互いに交わらない有限個の1次元球面 S^1 の和集合を"link"という。特に、連結成分が1つのlinkを"knot"という。S^3 上の位相同形写像によって2つのlinkが移り合うとき、それらは同じ"link type"を持つという。本稿では与えられた2つのlinkのlink typeが同じであるかどうかをどの程度判定できるかを考察する。

linkが S^3 の中の互いに交わらない円板の境界になっているとき、"trivial"であるといい、S^3 の中でそれと交わらない球面で2つに分けられるとき、"splittable"であるという。Haken[H]のnormal surfaceの理論を用いると、与えられたlinkがtrivialであるか、splittableであるかは判定できる。しかしながら、その判定方法は非常に複雑である。そこで、紙に描かれたlinkの絵(これを"projection"と呼ぶ)を見ながら判定できる、より簡単なものがほしい。

linkのprojectionにおいて、図1-1のように、各交差点で上を走る太線の部分を"over bridge",下を走る部分を"under bridge"と呼び、overおよび under bridge n本ずつからなるprojectionを "n-bridge projection"と呼ぶ。link L のprojection p(L) において、1つのbridgeを他と交わらないで結ぶ弧 ω があれば、そのbridgeを ω を通るように変えて新しい L のprojection p'(L) が得られる。p'(L)の交差点の数が p(L) のそれより少ないとき、ω を"wave"と呼び、p(L)から p'(L) を得られる操作を ω にそった"wave move"という。

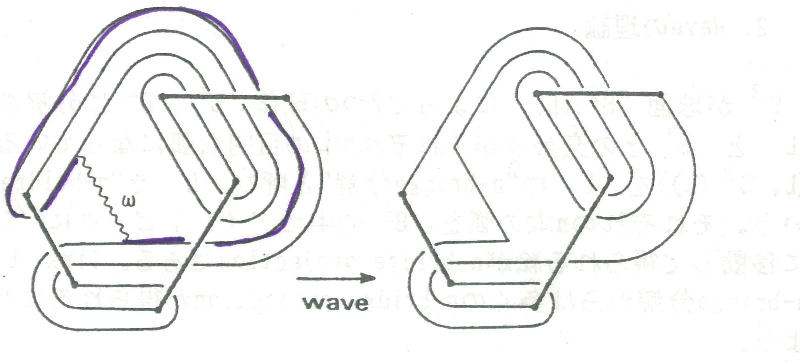


図1-1

trivial knotの3-bridge projectionに関しては本間-落合[HO]により次の定理が示されている:

定理1-1.（本間-落合） trivial knotの3-bridge projectionは有限回のwave moveによって標準的なprojection（図1-2)に変形できる。

この定理はtrivial knotの2-fold branched coverが3次元球面 S^3 になる事実を用いて、Heegaard diagramに関する本間-落合-高橋[HOT]による次の定理より導かれた。(Heegaard diagramについては5節を参照):

定理1-2.（本間-落合-高橋） S^3 の種数2のHeegaard diagramは有限回のwave moveによって標準的なdiagram（図1-3)に変形できる。

我々は3-bridge projectionの一般的なwaveの議論を展開して、こうした事実が他の多くのlinkや3次元多様体に対しても成立することを示す。(詳細については[NO], [N]を参照して下さい。）

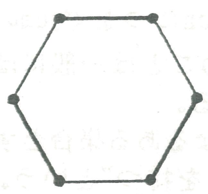


図1-2

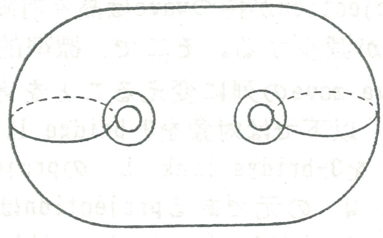


図1-3

2. Waveの理論

S^3 が球面 $S^2(L)$ によって2つの球体 B^+, B^- に分解され、link L と $B^\pm$ との交わりがそれぞれn本の自明な弧になっているとき、組 $(L, S^2(L))$ を L の"n-bridge分解"と呼び、L を"n-bridge link"という。それぞれのn本の弧を $B^\pm$ の中でアイソトピックに $S^2(L)$ 上に移動して得られる絵がn-bridge projectionである。link L の1つのn-bridge分解からは多くのn-bridge projectionが得られることに注意しよう。

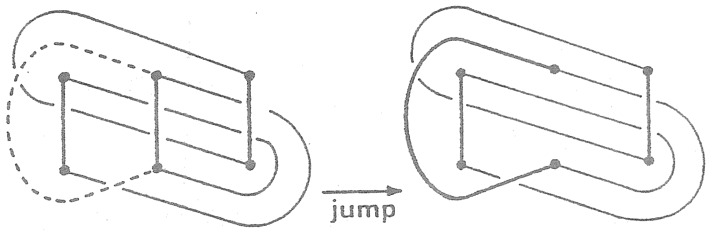


図2-1

link L のn-bridge projectionにおいて、1つのbridge,例えばover bridgeを他のover bridgeをいくつか飛び越えたところに移す操作を"jump move"という(図2-1参照)。このとき、次が成り立つ:

定理2-1. link L の1つのn-bridge分解から得られる任意の2つのprojectionは有限回のjump moveで互いに移り合う。

1つのprojectionに対して行えるjump moveは無限にある。したがって、上の定理は2つのprojectionが同じn-bridge linkを表現しているかどうかを判定するアルゴリズムを与えているわけではない。一方、1つのprojectionが持つwaveは高々有限個しかなく、wave moveにより交差点の数が減少する。そこで、標準的なprojectionにつなぐjump moveの列をwave moveの列に変えることを考える。このことは一般には不可能なので、以下では対象を3-bridge linkに制限する。

Q を3-bridge link L のprojectionからなるある集合とする。このとき、Q の元であるprojectionは"性質 Q を持つ"という。性質 Q が"W-admissible (wave-admissible)"であるとは Q がつぎの条件(*) を満たすことである。

(*) 1回のjump moveで性質 Q を持つものに変形できるprojectionはwave moveの有限列で性質 Q を持つものに変形できる。

すべての3-bridge link L に対して $Q_\omega(L)$ をwaveを持たない L のprojection全体とすると、明らかに $Q_\omega(L)$ はW-admissibleな性質である。$Q_\omega(L)$ と他のW-admissibleな性質との関係を明らかにしたのが、次の基本定理である:

定理2-2. (Wave Theorem) Q を3-bridge link L の任意のW-admissibleな性質とする。このとき、$Q_\omega(L)$ の元 P(L)は性質 Q を持つか、あるいは非連結なprojectionである。特に、L がsplittableでない場合は、P(L) は常に性質 Q を持つ。

この定理は3-bridge link L の分解 $(L, S^2(L))$ から得られる任意のprojectionはwave moveの有限列により、性質 Q を持つものに変形できることを意味している。しかし、異なる分解から得られるprojectionに関しては何も述べていない。

trivial knotの標準形であることや、非連結であるという性質がW-admissibleであることは容易に示される。さらに、trivial knotおよび splittable linkのn-bridge分解が一意的であることがわかっている([O1], [NO]参照)。したがって、定理1-1および次の結果が得られる:

定理2-3. Splittable linkの3-bridge projectionは、有限回のwave moveによって非連結なprojectionに変形できる。実際、その非連結なprojectionは、1-bridgeのtrivial knotとSchubertの2-bridge formの和になっている(図2-2)。

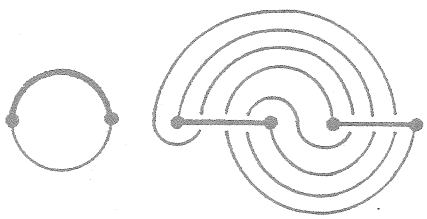


図2-2

3. $Q_\omega(L)$ を決定する手続き

前節の議論により $Q_\omega(L)$ のリストが決定できるならば、与えられたprojectionが L の3-bridge分解を表現しているかどうかを判定できることになる。そこで、$Q_\omega(L)$をどのようにして決定したらよいかが問題になる。そのために、3-bridge projectionとjump moveとの関係を

調べる。

各over bridgeのまわりの状況は図3-1のいずれかになっている。図に示されているjump move以外のjump moveによって得られるprojectionはwave moveによってもとに戻ることがわかる。([N]参照) 図のように、over bridgeが左右どちらに飛ぶかによって、それぞれ"left jump move"または"right jump move"と呼ぶ。

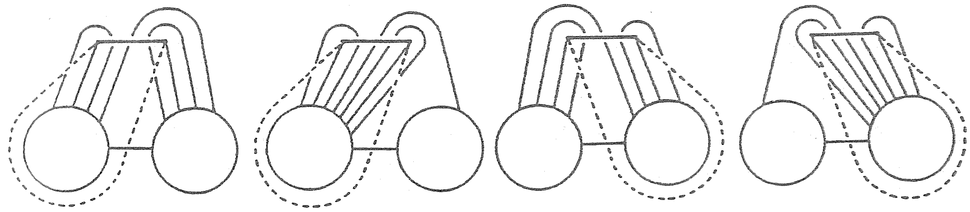


図3-1

3-bridge link L のwaveを持たないprojectionの1つを $p_0(L)$とし、$p_0(L)$ から有限回のleftおよびright jump moveにより得られるwaveを持たないprojectionの全体を $Q_0(L)$ とする。ここで、$Q_0(L)$ は $p_0(L)$ から(有限終了するかどうかはわからないが)アルゴリズミカルに構成できることに注意する。このとき、上の観測から $Q_0(L)$ がw-admissibleな性質であることがわかる。したがって、定理2-2により $Q_0(L)$ と $Q_\omega(L)$ が一致することが示されるので、$Q_\omega(L)$ も決定できると考えてよいだろう。

例えば、L がtrefoil knotやHopf linkのときには、$Q_\omega(L)$ は図3-2のような有限集合になる。しかし、一般には $Q_\omega(L)$ が有限集合になるとは限らない。Whitehead link (図3-3)がその1つの例である。

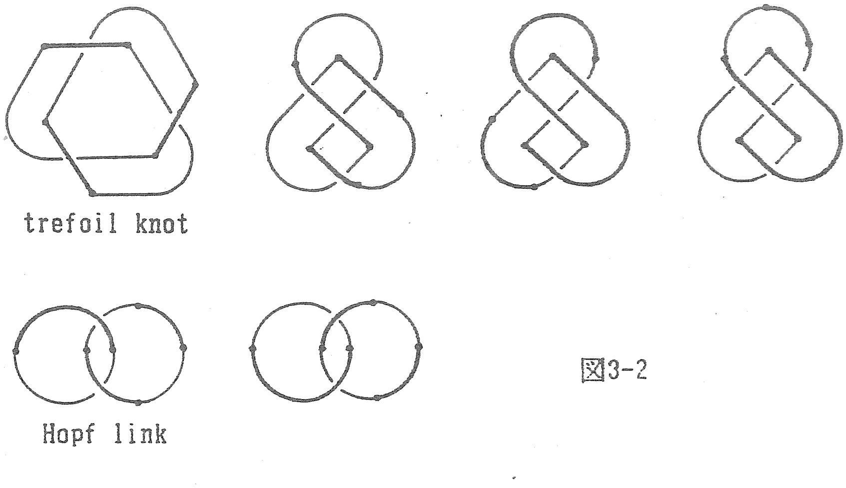
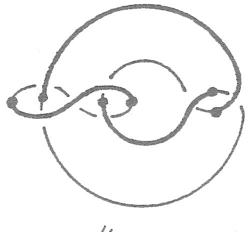
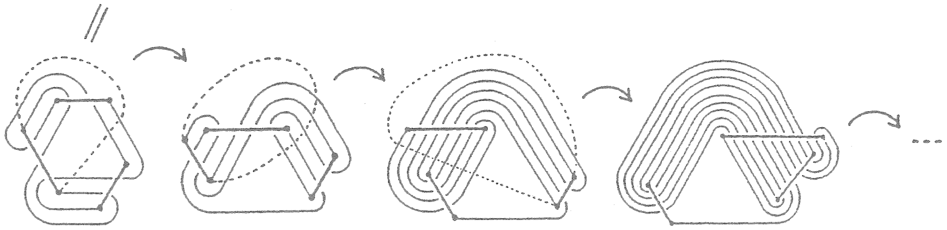


図3-2



Whitehead link 　　　　　　図3-3



4. 3-Bridge link typeの判定のアルゴリズム

ここまでの議論をまとめると、あたれらえた2つの3-bridge projectionが同じlinkを表現しているかどうかを判定するための次の手順が考えられる。

Step 1. 2つの3-bridge link L_1, L_2 のprojection $p(L_1)$, $p(L_2)$ を与える。

Step 2. 各 $p(L_i)$ (i=1,2)に対して、wave moveを可能な限り行い、waveを持たないprojection $p_0(L_i)$ を作る。

Step 3. $Q_\omega(L_1)$ を3節における定義にしたがって作成しながら、$p_0(L_2)$ が $Q_\omega(L_1)$ に含まれるかどうかを調べる。

(i) もし、含まれていれば、L_1 と L_2 の3-bridge分解は等しい。

(ii) もし、含まれていなければ、L_1 と L_2 の3-bridge分解は異なる。

$Q_\omega(L_1)$ が有限のとき、この手続きは有限終了する。さらに、L_1 の3-bridge分解が一意であることがわかっていれば、この手続きは L_1 と L_2 が同じlink typeを持つかどうかを判定するアルゴリズムになっている。例えば、Birman-Hilden [BH]とOtal [O2]の結果から、2-bridge linkの3-bridge分解の一意性が示されるので、3-brdge linkがtrefoil knotであるか、Hopf linkであるかが判定できる。一方、あらかじめ L_1 と L_2 を同じlinkにしておけば、この手続きはそのlinkが異なる3-bridge分解を持つかどうかを調べることに利用できる。

5. Heegaard diagramへの応用

"種数nのHeegaard diagram"とは、種数nの閉曲面上に描かれた、2組の、互いに交わらない n本の単純閉曲線によってできる図式である。それは、閉曲面に、それぞれの組に対応した側から、n個の2-handleを各組の閉曲線にそって貼り、さらに、2つの3-handleでふたをして得られる、3次元閉多様体を表わしている。このとき、その3次元閉多様体 M^3 と閉曲面 F^2 の組(M^3 , F^2)を"種数nのHeegaard分解"という。

Birman-Hilden [BH]によれば、種数2のHeegaard分解を持つ3次元閉多様体 M^3 は、3-bridge linkの2-fold branched coverとして得られる。さらに、M^3 の種数2のHeegaard分解と3-bridge linkとが、1対1に対応することが示されている。その対応は図5-1が示すように、種数2のHeegaard diagramと3-bridge projectionとの間の対応を与える。したがって、2つの種数2のHeegaard diagramが同じHeegaard分解を表現しているかどうかの判定は、前節までの3-bridge projectionの議論に帰着される。特に、Heegaard分解の一意性がわかっている3次元閉多様体に対しては、多様体自身の判定問題を考えていることになる。

例えば、S^3 , $S^2 \times S^1 \# L(p,q)$, $L(3,1)$ および 3次元射影空間 P^3 はtrivial knot, splittable 3-bridge link, trefoil knot および Hoph linkの2-fold branched coverである。したがって;

定理5-1. 種数2のHeegaard diagramが S^3 , $S^2 \times S^1 \#$ $L(p,q)$, $L(3,1)$ および P^3 を表現しているかどうかを判定するアルゴリズムが存在する。

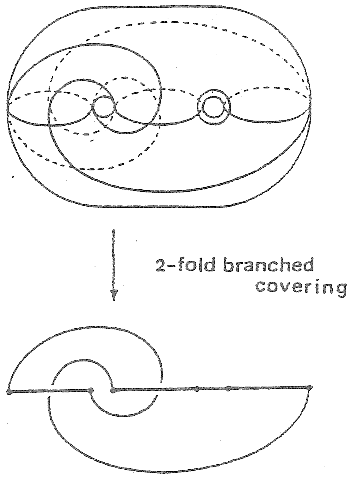


図5-1

6.むすび

4-bridge以上のlinkに対しては、我々の議論は成立しない。実際、それらの判定問題はかなりむずかしく、効果的なアルゴリズムは見つかっていないようである。今後の研究が期待される。

参考文献

[BH] J.S. Birman and H.M. Hilden, Heegaard splittings of branched coverings of S^3, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 315-352.

[H] **W. Haken, Theorie der Normal Flachen, Acta. Math. 105 (1961), 245-375.**

[HO] T. Homma and M. Ochiai, On relations of Heegaard diagrams and knots, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 383-393.

[HOT] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi, An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus 2, Osaka J. Math. 17 (1980), 625-648.

[N] S. Negami, The minimum crossing of 3-bridge link, preprint.

[NO] S. Negami and K. Okita, The splittability and triviality of 3-bridge links, preprint.

[O1] J.P. Otal, Présentations en ponts du nœud trivial, C. R. Acad.Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), 533-556.

[O2] J.p. Otal, Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math 294 (1982), 585-587.

Self-H-maps の周辺

九大理　丸山研一

低い rank の Hopf space の self-H-maps 及び，それと関連して self-H-equivalences group について解説する。

§1. Self-H-maps of H-spaces of low rank.

空間 X が Hopf space であるとは，連続写像 μ: $X\times X \longrightarrow X$ で次を満たすものが存在するときを言う。すなわち，$\mu(x,*)=x=\mu(*,x)$ なる単位元 $*\in X$ が存在する。このとき μ は積と呼ばれる。二つの Hopf space (X,μ_X), (Y,μ_Y) のあいだの写像 $f: X\longrightarrow Y$ が H-map であるとは $\mu_Y(f\times f) \simeq f\circ\mu_X$ ($\simeq$ は homotopic を表わす。) であるときを言う。X を finite CW-complex の Hopf space とすれば，Hopf space に対する Hopf の定理から，$H^*(X;\mathbb{Q}) \cong \Lambda(x_1,\cdots,x_l)$ となり，l を X の rank と言う。Hopf space の特徴として，その積は一般に多く存在するが，その homotopy 類の order は，homotopy set $[X\wedge X, X]$ のそれ

に等しい。

さて，rank = 1 の finite-CW-Hopf space は S^1, S^3, S^7, RP^3, RP^7 のうちのいづれかと homotopy 同値となる (Browder)。このうち S^1 については，積は一つで，任意の map $f: S^1 \to S^1$ は H-map と homotope である。

$[S^3 \wedge S^3, S^3] \cong \pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}/12$ で，generator を w とすれば，任意の S^3 の積は $m_t = m_0 + tw\pi$ と書ける。但し，m_0 は通常の積，$\pi: S^3 \times S^3 \to S^3 \wedge S^3$ は projection。Arkowitz-Curjel は次を示した。(実際のところこの辺がこの分野の origin であると言えるかもしれない。)

定理 1.1 (Arkowitz-Curjel [2]).
$N: (S^3, m_r) \to (S^3, m_t)$ が H-map
$\Longleftrightarrow$ $N^2(2t+1) \equiv N(2r+1)$，ただし，
$N: S^3 \to S^3$ は degree N の map.

この定理の証明は，$[S^3 \times S^3, S^3]$ の nilpotency が 2 以下であること，先に述べた w が通常の積

の commutator に対応しているものでとれるという，James の結果などを使い，群論的方法で得られている。

同様に S^7 についても次が知られている。

定理 1.2 (Arkowitz − Curjel) ([1]) S^7 の通常の積に関して，$N : S^7 \longrightarrow S^7$ が H−map $\longleftrightarrow$ $N(N-1) \equiv 0 \ (240)$.

さらに 定理 1.1 の 2−localization−version が成り立つ。

定理 1.3 (Arkowitz − Ewing − Schiffman) ([3]). $a/b \in Z_{(2)}$，$a/b : (S^3_2, \mu_r) \longrightarrow (S^3_2, \mu_t)$ が H−map $\longleftrightarrow$ $a^2(2t+1) \equiv ab(2r+1) \bmod 8$，ただし，$Z_{(2)} = \{ n/m \in \mathbb{Q} \mid (m, 2) = 1 \}$。

このことなどを使って彼らは次のよく知られた定理の別証明を与えている。

定理 1.4 (Slifker) S^3 の 12ヶの積のうち 8ヶは loop 積で 4つは homotopy associative でない。

以上球面の場合を述べたが，RP^3, RP^7 については still open のようである。

次に rank = 2 の場合を述べる。simply connected rank 2 Hopf space X は次のいずれかと homotopy 同値であることが知られている。$S^n \times S^n$ $(n=3,7)$, E_k $(k=0,1,3,4,5)$, $SU(3)$, $G_{2,i}$ $(-2 \leq i \leq 5)$. (Zabrodsky, Mimura-Nishida-Toda).

まず，E_k と $SU(3)$ について；$X = E_k$ or $SU(3)$ とすれば，そのコホモロジーは

$$H^*(X) = \Lambda(x_3, x_i) \quad \deg x_i = i,$$

$i = 5$ or 7 for E_k, $SU(3)$. となっている。今，次の写像を定義する。

$$\deg ; [X, X] \longrightarrow Z + Z$$

$f \in [X, X]$, $\deg f = (m, n) \in Z + Z$, $f^* x_3 = m x_3$, $f^* x_i = n x_i$。deg は homomorphism となる。

（$[X, X]$の演算はXの積から誘導されたもの。）。
notation：$[X, X]_H$ で $[X, X]$ のうち H-map で代表されるもの全体を表わす。

定理 1.5（Maruyama-Oka [7]）

$$\deg [E_k, E_k]_H \subset \{(m,n) \mid m \equiv n \bmod 12,\ m \equiv 0, 1 \bmod 4\}$$

定理 1.6（Maruyama [6]）

$$\deg [SU(3), SU(3)]_H \subset \{(m,n) \mid m \equiv n \bmod 2,\ m \equiv 0, 1 \bmod 4\}$$

これらの定理において積は任意のものでよい。証明は二つとも同様であるので、定理1.6の方を解説しよう。方法はHopf spaceの構造を知るのによく使われるもので、射影平面を用いる。

SU(3)の射影平面とは次のmapping cone P^2のことを言う。

$$SU(3) * SU(3) \xrightarrow{H(\mu)} \Sigma SU(3) \longrightarrow P^2$$

$H(\mu)$は積μのHopf construction　$*$はjoin。
もし、map $f : SU(3) \longrightarrow SU(3)$ がH-mapなら、

f は P^2 の間の写像を induce する。これを g とかく。

$$g: P^2 \longrightarrow P^2$$

P^2 の Kー群に関して次が成り立つ。ψ^2 を Adams operation とすると，

Lemma 1.7 $\tilde{K}^0(P^2) = Z\{u, v, u^2, v^2, uv, w\}$ ($Z\{\ \}$ は $\{\ \}$ で generate される free abelian group）と適当な basis で書けて， $\psi^2(u) = 4u + hu^2 + 2y$ ただし，h は odd，y は $\cancel{u^2}\, v^2, uv, w$ の linear combination.

そこで $\psi^2 g^*(u) = g^*\psi^2(u)$ をくらべてやると，$\deg f = (m, n)$ とするとき $m^2 \equiv m \pmod 4$ が示され，定理が得られる。

Hopf-space は，homotopy associativity を持つ場合（i.e. $\mu(\mu\times 1) \simeq \mu(1\times\mu)$ なる積を有する場合），associativity を保存するような map を A_3-map と呼ぶが，(A_3-map $\rightarrow$ A_2-map = H-map)，N. Iwase は $E_1 = Sp(2)$ に関して次を得た。

定理 1.8 (N. Iwase [4])

$$\deg [Sp(2), Sp(2)]_{A_3} \subset \{(m,n) \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ m \equiv k^2 \bmod 360,\ \exists l \in \mathbb{Z},\ n = m + 12l \text{ かつ } 3 \mid k \longrightarrow 3 \mid l\}$$

この定理の証明には homotopy associativity から定義される P^3 (射影空間) の K－群を調べることが使われている。なお同論文ではさらに高い associativity (A_n－structure) に対する $K^*(P^n)$ も (一般に) 決定していることを付け加えておく。

次に rank = 2 の内で product spaces についての N. Sawashita の結果を解説しよう。空間は $S^n \times S^n$ ($n=3,7$) と $S^3 \times S^7$ ($=E_0$) で, E_0については すでに述べたが, product space としての考察により さらに詳しい結果が得られる。

$X = X_1 \times X_2$ を Hopf space X_i ($i=1,2$) の product space, 積はおのおのの積の product を採ることにしよう。次の短完全系列 (split) が存在することはよく知られている。(splitting を ψ とする)。

$$0 \to [X_1 \wedge X_2, X] \xrightarrow{\pi^*} [X, X] \underset{\psi}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} [X_1 \vee X_2, X] \to 0$$

Lemma 1.9 (N. Sawashita [10])

$$\psi j^* = id \quad \text{on} \quad [X, X]_H$$

が成り立つので，H-map は $[X_1 \vee X_2, X]$ の元と思ってよい。ところで，

$$[X_1 \vee X_2, X] \cong M(2, \Lambda_{ij})$$

ここに，$M(2, \Lambda_{ij})$ は 2×2-行列で，その成分 a_{ij} は $\Lambda_{ij} = [X_j, X_i]$ の元。行列の積も普通に定義できる。よって $f \in [X, X]_H$ は行列表示ができ，各成分は H-map で表わされることが分かる。

例 1.10 $S^n \times S^n$ ($n=3, 7$, 積 canonical)

$$[S^3 \times S^3, S^3 \times S^3]_H = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij}(a_{ij}-1) \equiv 0 \mod 24 \right\}$$

$$[S^7 \times S^7, S^7 \times S^7]_H = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij}(a_{ij}-1) \equiv 0 \mod 240 \right\}.$$

S^7 から S^3 への H-map は任意の積に関して trivial

なものしかない(Sigrist)ので，次を得る。

例 1.11　$S^3 \times S^7$（積 canonical）

$$[S^3\times S^7, S^3\times S^7]_H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a(a-1)\equiv 0 \mod 24 \\ b(b-1)\equiv 0 \mod 240 \end{array} \right\}.$$

§2. The group of self-H-equivalences.

Self-H-map のうち，homotopy 同値であるものを集めると，写像の結合によって群となる。ここではこの群について述べる。

空間 X に対して次を定義する。

$$\mathcal{E}(X) = \{[f]\in[X,X] \mid f: X \xrightarrow{\simeq} X \text{ homotopy同値}\}$$

$\mathcal{E}(X)$ は写像の結合によって群となる。(the group of self homotopy equivalences of X)。さらに X, μ が Hopf space ならば，

$$\mathcal{E}_H(X,\mu) = \mathcal{E}(X) \cap [X,X]_H$$

という $\mathcal{E}(X)$ の部分群が定義され，the group of self H-equivalences of X と呼ばれる。$\mathcal{E}_H(X, \mu)$ の group structure を決定することは，例えば次のような応用を伴っている。（N. Sawashita）

$$M(X) = \{\mu : X \times X \to X \text{ 積の homotopy 類}\}$$

$$\hat{M}(X) = M(X)/\sim$$

$\sim$ は $\mu \sim \mu' \Longleftrightarrow {}^{\exists} f : X \longrightarrow X$ homotopy 同値，s.t. $f\mu = \mu'(f \times f)$（このとき μ と μ' は H-equivalent であると言われる。）$\mathcal{E}(X)$ は $M(X)$ に $f \cdot \mu = f \circ \mu \circ f^{-1} \times f^{-1}$ と定義することによって act するが，

$$\hat{M}(X) = M(X)/\mathcal{E}(X)$$

とも書ける。次が成り立つ。([10])

定理 2.1（N. Sawashita）$\#\{\mathcal{E}(X)/\mathcal{E}_H(X, \mu)\}$ が μ によらず一定（$= N$ とする）ならば，$\#\hat{M}(X) = \#M(X)/N$。ただし，$\#$ は order を表わす。

例えば後で述べるように $\mathcal{E}_H(X,\mu)=\{1\}$ for $X=S^3$, S^7, E_k, であるので，$\#\tilde{M}(X)=\#M(X)/\#\mathcal{E}(X)$ となる。今の場合は$\#M(X)$もわかっており，$\#\mathcal{E}(X)$のorderも知られているので実際に計算できることを注意しておこう。

さて，$\mathcal{E}_H$の話に戻ろう。rank $=1$ の場合は上で述べた通り，$\mathcal{E}_H(S^n,\mu)=\{1\}$ $(n=3,7)$ ([ ]) である。同じく rank $=2$ の場合，$X=S^n\times S^n$ $(n=3,7)$, $S^3\times S^7$ の時は1章で述べた行列表示を見ることによって $\mathcal{E}_H(X,\mu)$ を知ることが出来る。([10])。

以下 E_k, $SU(3)$ について述べよう。まず，次のことが成り立つ。

定理 2.2 (Maruyama－Oka)([9]) $\mathcal{E}_H(E_k,\mu)=\{1\}$ $(k=0,1,3,4,5)$, μ は任意の積。

$E_0=S^3\times S^7$, および $E_1=Sp(2)$ で canonical な積については Sawashita ([10], [11])。$SU(3)$ については，

定理 2.3 (Sawashita [11]), $\mathcal{E}_H(SU(3),\text{canonical})$

$= \mathbb{Z}/2$, generator は $C: SU(3) \longrightarrow SU(3)$, complex conjugation map.

$SU(3)$ の他の積についても見るとまず次の事が言える.

Proposition 2,4 (Maruyama [6]). $SU(3)$ にはある積 M_3 が存在して $C: SU(3) \longrightarrow SU(3)$ を H-map としない。このことは prime 7 で localize したあとでも成り立つ。

この M_3 を使って,

定理 2.5 (Maruyama [6]) 積 M_3 に対して, $\mathcal{E}_H(SU(3), M_3) = \{1\}$ となり, さらに任意の積 μ に対して $\mathcal{E}_H(SU(3), \mu) = \{1\}$ or $\mathbb{Z}/2$ となる。

定理の証明は, Y. Nomura の Postnikov 分解に対する exact sequence ([9]) などによって

$$\mathcal{E}(SU(3)) \cong G \times \mathbb{Z}_2\langle c\rangle \qquad ([11])$$

ただし，$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{K} G \to \mathbb{Z}/2$ (split). $\mathrm{Im}\,K$ がH－map を含まないことは Sawashita の lemma ([11]) によって示されること，1章の定理1.6によって degree を制限し，さらに localization して Proposition 2.4 を使うことによって出てくる。

なお最近 Propo 2.4 の拡張として次が得られた。

定理 (Maruyama－Oka [8]) $SU(n)$ $(n \geq 3)$ に積 M_n が存在して $C : SU(n) \to SU(n)$ (conjugation) をH－map としない。

$SU(n)$ を C－action で $\mathbb{Z}_2$－space と思うと少なくとも一つは Hopf－$\mathbb{Z}_2$－space でない積があるということになる。

参照

[1] M. Arkowitz－C.R. Curjel, On maps of H－spaces, Topology 6 (1967), 137－148

[2] M. Arkowitz－C.R. Curjel, Some properties of the exotic multiplication on the three sphere, Quat. J. Math. Oxford (2) (1969) 171－176

[3] M. Arkowitz - J. Ewing - S. Schiffman, H-structures on localized and completed spheres. Quat. J. Math. Oxford (3), 26 (1975), 295-307.

[4] N. Iwase, On $K^*(XP^n)$ to appear.

[5] K. Maruyama, Note on the group of H-equivalences of principal S^3-bdl over S^7. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 1981.

[6] K. Marayama, On self H-maps of SU(3), to appear.

[7] K. Maruyama - S. Oka, On self H-maps of H-spaces of type (3, 7). Mem. Fac. Sci Kyushu Univ 1981.

[8] K. Maruyama - S. Oka, Note on the some exotic multiplication on SU(n), to appear.

[9] Y. Nomura, Homotopy equivalences in a principal fibre space, Math. Z., 92 (1966), 380-388.

[10] N. Sawashita, On the self-equivalences of H-spaces, J. Math. Tokushima Univ., 10 (1976) 17-33

[11], N. Sawashita, On H-equivalences of SU(3), U(3), SP(2) J. Math. Tokushima Univ., 11 (1977), 33-47.

連続体の可縮性について

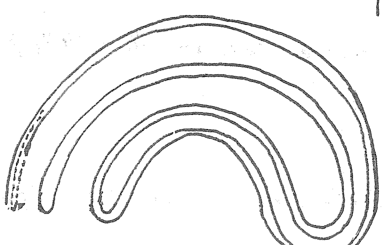
大阪教育大学　小山　晃

はじめに。

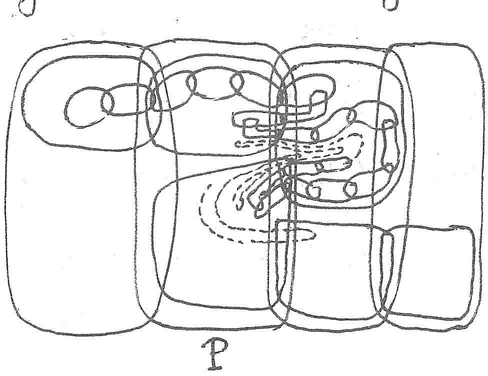
ここで考える空間はすべて連続体(=連結なcompact距離空間)である。単に連続体について考えると言っても複雑怪奇?なものがたくさんあり、一般的にはhomotopy論，さらにshape論さえも適用できそうになく思えてくる。たとえば、dyadic solenoid Σ, Knasterのindecomposable continuum K などは真部分連続体は1点またはarcに限る連続体，Bing-Moiseのpseudo-arc P, Bingのpseudo-circle C (一般にhereditarily indecomposable continuum) などは部分連続体としてarcをまったく含まない連続体であるから

$$\pi_i(X,x)=\begin{cases}\text{連続体の濃度をもつ集合} & \text{if } i=0\\ 0 & \text{if } i>0\end{cases}$$

for every $X\in\{\Sigma, K, P, C\}$ and every $x\in X$.



K

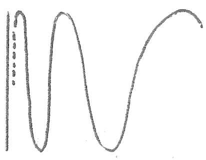


P

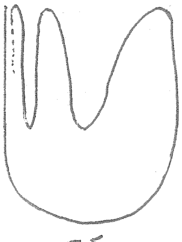
また、それほど複雑でない $\sin\frac{1}{x}$-curve S や Warsaw circle W についても、

$$\pi_i(Y,y)=0 \quad \text{for every } Y\in\{S,W\},\ \text{every } y\in Y \text{ and every } i>0$$

である。



S



W

一方、$Sh(C)=Sh(W)$、$Sh(K)=Sh(P)=Sh(S)=Sh(\{*\})$，$Z$は他の連続体とshape equivalentではない。ですから、homotopy群やshape論を使うという方法では、連続体本来の性質に目をつぶりすぎるように思える。

私自身、連続体について未知の部分がたくさんありますし、前述のような例もありますので一般的に連続体について話をすることはできません。そこでここでは、特別な弧状連結な連続体について、一番単純なhomotopy型である可縮性に焦点をしぼって、どの程度ならわかるか話をしてみたいと考えています。

なお、連続体についての一般論は、[11] 及び [14] を参考にしてください。

1. 1次元の場合

定義: simple closed curve を含まない局所連結な連続体を dendrite という。

連続体 X が unicoherent であるとは、X = A∪B となる X の任意の部分連続体 A, B に対して、A∩B がまた連結であることをいう。任意の部分連続体が unicoherent である連続体は hereditarily unicoherent であるという。

hereditarily unicoherent である弧状連結な連続体を dendroid という。

連続体 X が decomposable であるとは、X = A∪B となる X の真部分連続体 A, B が存在することをいう。任意の部分連続体が decomposable である連続体は hereditarily decomposable であるという。

次のことが知られている。ただし、逆向きの implications はすべて成り立たない。

(tree) ⟶ (dendrite) ⟶ (dendroid)

⟶ (hereditarily unicoherent かつ hereditarily decomposable な連続体)

⟶ (hereditarily decomposable な連続体)

⟶ (1次元連続体)

decomposable でない連続体は、indecomposable であるという。任意の部分連続体が indecomposable である連続体は、hereditarily indecomposable であるという。たとえば、Σ, K は indecomposable, P.C. は hereditarily indecomposable である。

ところが、弧状連結な連続体は decomposable だから、今回の目的では

indecomposableな連続体のようなwildなものは考えないでおくことにする。

連続体がdendriteであることと1次元ARであることとは同値であるから、dendriteは特に、可縮である。

一方、可縮な連続体は弧状連結だから、ここではdendroidの可縮性について考えることにする。ただ、dendroidは一意的弧状連結であることに注意しておく。

すなわち、dendroid Xでは、任意の2点$x_0, x_1 \in X$に対して、x_0, x_1を結ぶ弧が一意に存在する。以後、その弧を$[x_0, x_1]$と表わすことにする。

最初に、可縮なdendroidについての典型的な例と結果を与える。

定義([2]) dendroid Xが、$p \in X$においてsmoothであるとは、Xにおける任意の収束する点列$\{x_n\}$に対して

$$\mathrm{Lim}\,[p, x_n] = [p, \lim x_n]$$

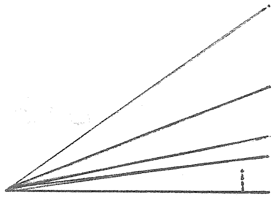
であることをいう。

ある点においてsmoothになるdendroidをsmooth dendroidという。

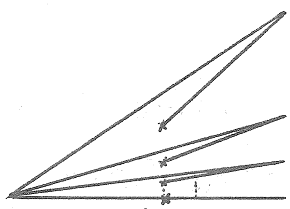
定理1 ([2]) smooth dendroidの任意の部分連続体は可縮である。

(注) dendroid X_3の任意の部分連続体は可縮であるが、X_3は smooth dendroidではない。

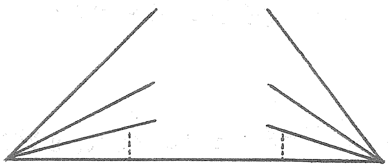
(いろいろな dendroids の図)



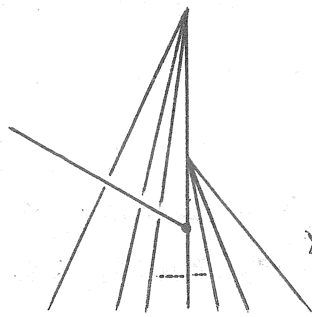
X_1



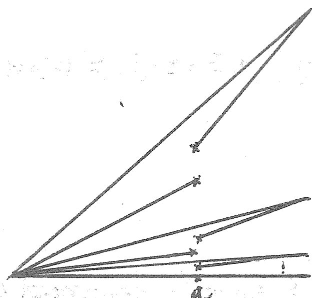
X_2



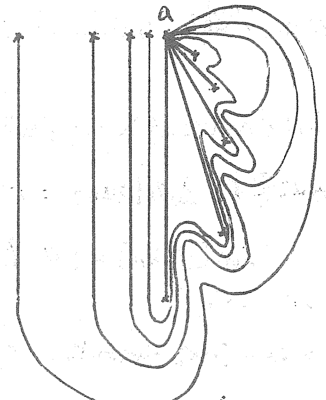
X_3



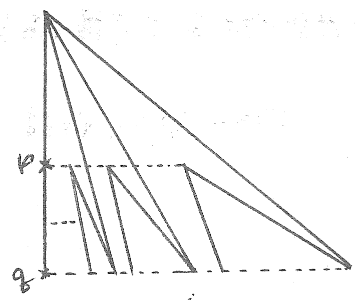
X_4



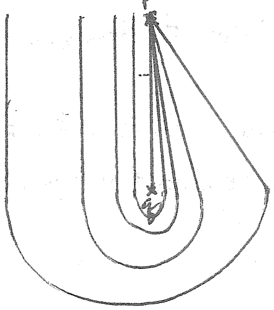
X_5



X_6



X_7



X_8

定理2（[5]）任意の部分連続体が可縮となる連続体は次の性質(P.S)をみたすdendroidである。

(P.S) 任意の $x \in X$ に対して

$p(x) \in X$ s.t. x に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して

$$\operatorname{Lim}[p(x), x_n] = [p(x), x]$$

である。

が存在する。

(注1) "性質(P.S)をみたすdendroidの任意の部分連続体が可縮になるか" は未解決である。

(注2) dendroid X が可縮であっても、その部分連続体が可縮であるとはかぎらない。たとえば $X_2 \supset X_5$ とみると、X_2 は可縮であるが、後で示す定理5から X_5 は可縮ではない。

定義（[1]）dendroid X の point $x \in X$ について、

$y_1, y_2, y_3 \in X$ s.t. $[x, y_2] \cap [x, y_j] = \{x\}$ if $i \neq j$

が存在するとき、$x \in X$ を branch point という。

branch point がただ1つであるdendroidを fan という。

定理3（[3]）fan について、その任意の部分連続体が可縮となる必要十分条件は、それが smooth dendroid であることである。

(注) X_2 と（注2）をみると、定理3は fan であることが必要である。

<u>定理</u>4([13]) 可縮な fan は平面に埋蔵できる。

(注) X_4 の dendroid は可縮だが平面に埋蔵できない。
すなわち定理4は fan についての特別な性質である。

次に可縮でない dendroids について考える。

<u>定義</u>([4]) dendroid X の空でない真部分連続体 K が、X における R^3-continuum であるとは、X における K の開近傍 U と U の連結成分から成る列 $\{C_n\}$ で

$$\liminf C_n = K$$

となるものが存在することをいう。

たとえば、$\{g\} \subset X_5$ 及び $\{a\} \subset X_6$ はそれぞれ X_5 及び X_6 における R^3-continuum である。

<u>定理</u>5([4]) R^3-continuum を含む dendroid は可縮ではない。

<u>定義</u>([12]) dendroid X と points $p, q \in X$ について、X が type N between p and q であるとは、

arcs $A_i = [p_i, p_i']$, $B_i = [q_i, q_i']$, points $p_i'' \in B_i - \{q_i, q_i'\}$
$q_i'' \in A_i - \{p_i, p_i'\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$

s.t. $\operatorname{Lim} A_i = \operatorname{Lim} B_i = [p, q]$

$$\lim p_i = \lim p_i' = \lim p_i'' = p$$

$$\lim q_i = \lim q_i' = \lim q_i'' = q$$

が存在することをいう。

(注) たとえば、X_7, X_8 はいずれも type N between p and q である。

また、$X_5 \sim X_8$ をみると type N の条件と R_3-continuum の条件は互いに独立であることがわかる。

<u>定理</u>6 ([12]) dendroid X が type N between p and q となるような points $p, q \in X$ をもつとき、X は可縮ではない。

2. 高次元の場合

dendroidの可縮性を調べる場合、一意的弧状連結であることを用い、Xのarcsにそったhomotopyを考えてきた。高次元の連続体の可縮性を考える場合は、そのかわりになるものが必要である。そこで、次の構造を考える。

定義([6],[7]) 連続体Xについて、$C(X)$をXの部分連続体から成る集合にHausdorff距離をいれた連続体とする。

このとき、次の条件をみたす写像$A : X \times X \longrightarrow C(X)$をXのarc-structureという。

(1) 任意の異なる2点$x, y \in X$に対して$A(x, y)$はxとyを結ぶ弧である。

(2) $A(x, x) = \{x\}$ for every $x \in X$

(3) $A(x, y) = A(y, x)$ for every $(x, y) \in X \times X$

(4) $A(x, z) \subset A(x, y) \cup A(y, z)$ かつ $y \in A(x, z)$ ならば
$A(x, z) = A(x, y) \cup A(y, z)$ である。

arc-structure Aをもつ連続体Xを、組(X, A)で表わす。

(X, A)を用いて、smooth dendroidの高次元化を次のように定義する。

定義([6],[7]) (X, A)が、$p \in X$においてarc-smoothであるとは、
$$A_p(x) = A(p, x) \quad \text{for } x \in X$$
で定義した写像$A_p : X \longrightarrow C(X)$が連続であることをいう。

ある点においてarc-smoothになるとき、(X, A)はarc-smoothであるという

<u>定義</u>([7]): 組(X, A)とする。部分集合 $Y \subset X$ が <u>Aに関して凸である</u>とは、任意の $y_0, y_1 \in Y$ に対して、$A(y_0, y_1) \subset Y$ であることをいう。

smooth dendroid の結果(定理1.1)に対応して次のことが知られる

<u>定理1</u>([7]) (X, A) が arc-smooth ならば、任意の A に関して凸である X の部分連続体が可縮である。

(注) X が dendroid ならば、その arc-structure は自然にただ1つ定まるから、定理2.1 は定理1.1 の高次元化になっている。

また、arc-smooth な連続体の諸性質については [7], [8], [9], [10] を参照にせよ。

§1 では fan についておもしろい結果を紹介したが、(X, A) について fan を次のように定義する。

<u>定義</u>([10]) (X, A) が <u>$p \in X$ を頂点とする a-fan</u> であるとは、$x, y \in X$ について、

$$A(p,x) \cap A(p,y) \neq \{p\} \Longrightarrow A(p,x) \subset A(p,y) \text{ または } A(p,y) \subset A(p,x)$$

であることをいう。

a-fan と可縮性について調べてみると、arc-smooth の場合その強い条件にかくされてしまった arc-structure A のもっていてほしい性質がうかびあがってくる。それは次のようなものである。

定義([10]) 組(X, A)が $p \in X$ において weakly arc-smooth であるとは、任意の収束する点列$\{x_n\}$に対して、

$$\liminf A(p, x_n) = A(p, y) \quad \text{for some } y \in X$$

であることをいう。

ある点において(X, A)が weakly arc-smooth であるとき、(X, A)は weakly arc-smooth であるという。

このとき、次のことがわかる。

定理2([10]). (X, A)を頂点$p \in X$をもつ A-fan とする。このとき、(X, A)が arc-smooth である必要十分条件は、(X, A)が weakly arc-smooth at p かつ任意の凸部分連続体が可縮なことである。

実際、arc-structure をもつ連続体の可縮性を研究すると、weak arc-smooth 性がどうしてもなくてはならない大切な性質であることがわかる。よって、組(X, A)の可縮性を調べるというより、weakly arc-smooth な組(X, A)の可縮性を調べるということが第一歩であると考えられる。

そこで、weakly arc-smooth な組(X, A)の非可縮性を考えたいが、contraction に適当な条件をつけることによって1次元の場合(すなわち、dendroid の場合)と同様な結果を得ることができる。

よって、詳細は省略する。

参考文献

[1] J. J. Charatonik, On fans, Dissertationess Math. 54 (1967)

[2] ______ and C. A. Eberhart, On smooth dendroids, Fund. Math. 67 (1970), 297-322.

[3] ______ and Z. Grabowski, Homotopically fixed arcs and the contractibility of dendroids, Fund. Math. 100 (1978), 229-237.

[4] S. T. Czuba, R^i-continua and contractibility, Proceedings of the international conference on geometric topology 1978, PWN

[5] ______, On pointwise smooth dendroids, Fund. Math. 114 (1981), 197-207.

[6] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr. and Lewis Lum, On arc-smooth continua, Topology Proceedings, 2 (1977), 645-656.

[7] ______, Arc-smooth continua, Trans. A.M.S. 265 (1981), 545-561.

[8] J. J. Goodykoontz, Jr., Hyperspaces of arc-smooth continua, Houston J. Math. 7 (1981), 33-41.

[9] ______, Arc-smoothness in hyperspaces, Top. and its Appl. 15 (1983), 131-150

[10] A. Koyama, Weakly arc-smooth continua I~III,

[11] K. Kuratowski, Topology vol. 2, Academic Press - PWN, 1968.

[12] L. G. Oversteegen, Non-contractibility of continua, Bull. Acad. Pol, 26 (1978), 837-840

[13] ______________, Every contractible fan is locally connected at its vertex, Trans. A.M.S. 260 (1980), 379-402.

[14] G. T. Whyburn, Analytic Topology, A.M.S. Colloq. Publ. 1942.

同変安定ホモトピー論

京都大学，理　西田吾郎

§1. Gを有限群とする. 同変G－ホモトピー論の目標はもちろんG－空間X, Yに対し, G－ホモトピー集合$[X, Y]_G$を計算することにある。そのためには, これまでの代数的トポロジーの手法の同変化が考えられる。このような方向での初期の結果として, Conner－Floyd, Differential periodic maps (1964) があり, また Atiyah－Segal による同変K－理論があった。一方, T. Matumoto によって, G－CW複体の概念が定義され, Bredon によりG－CW複体上の非安定同変ホモトピー論が確立された。

G－CW複体とは, G-cell $G/H \times e^n$をその境界である G-sphere $G/H \times S^{n-1}$で順次接着して得られる空間である。従ってG－空間Xのホモトピー群は

$$[G/H \times S^n, X]_G \cong \pi_n(X^H)$$

で定義されるが, Gの部分群Hを動かすことにより Bredon はこれをGの部分群のなす圏$\mathcal{O}_G$からの関手としてとらえた。同様に chain complex $C_*(X^H)$ も $\mathcal{O}_G$上

の関手であり，$\mathcal{O}_G$ から加群の圏への関手全体のなす圏 $\mathfrak{M}$ におけるホモロジー代数が展開された。例えば"係数群" $\underline{M} \in \mathfrak{M}$ に対し同変通常コホモロジーは

$$H_G^*(X;\underline{M}) = H^*(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(C_*(X), \underline{M}))$$

と定義される。この定義は Borel のコホモロジー $H^*(X_G) = H^*(X \times_G EG)$ をその特別な場合として含む。また，障害理論や Eilenberg-MacLane G-空間 $K(\underline{M}, n)$ の存在が示され，同型 $H_G^n(X;\underline{M}) \cong [X, K(\underline{M}, n)]_G$ も証明される。更に同変一般コホモロジー論も G-CW 複体の圏から加群の圏への反変関手 h_G^*, $* \in \mathbb{Z}$, で通常の axiom の自然な拡張をみたすものとして定義された。

§2. 1970年の Nice congress での報告で，Segal は同変安定ホモトピー論を提起し，いわゆる Segal-tom Dieck 分解定理を示した。その特別の場合が，安定ホモトピー群と Burnside 環との同型 $\{S^0, S^0\}_G \cong A(G)$ である。この事実が以後の同変安定ホモトピー論の出発点となったのだが，Segal の理論の背景には対称積や無限ループ空間論，さかのぼれば Steenrod 作用素にあらわれる有限群の安定ホモトピー論における役割があった。

更に Segal 分解は Kahn-Priddy 定理の簡単な別証を与えるが，このことは安定ホモトピー論の同変理論への拡張が本質的意味をもつことを示している。

同変安定ホモトピー群は

$$\{X, Y\}_G = \varinjlim_V [X \wedge \Sigma^V, Y \wedge \Sigma^V]_G$$

と定義される。ここで V は G の実表現を動き，Σ^V は V の一点コンパクト化である。この定義を階数付きに拡張するには，G の表現環の元 $\alpha \in RO(G)$ に対し，$\{X, Y\}_G^\alpha = \{X \wedge \Sigma^U, Y \wedge \Sigma^W\}_G$，$\alpha = W - U$ と置けばよい。表現環に階数をもつ理由は，同変 S-duality の存在にある。コンパクト G-多様体あるいは G-CW 複体 X は適当な表現 V を選んで $X \subset V$ とできる。従って通常の場合と同様に X の "V"-dual が定義され $RO(G)$-graded な安定ホモトピー群において duality が成立する。

同変ホモトピー論における安定性が上のように定式化される以上，同変一般コホモロジー論も $RO(G)$-graded とするのが自然である。その定義を述べるために，まず G の既約表現の同型類から代表系 $V_1, V_2, \cdots$ を選んで固定する。この choice を Λ と書く。このとき $RO(G)$-graded な同変一般コホモロジー論（以下では単に一般

G−コホモロジーと書く）とはG−CW複体上の反変関手 $h_G^*(\ )$, $*\in RO(G)$ であって $\mathbb{Z}$−graded なコホモロジー論の suspension axiom の代りに，

<u>axiom</u>. 各 V_i に対し次の自然な同型が存在する。

$$\sigma_{V_i}\ ;\ h_G^*(X) \longrightarrow h_G^{*+[V_i]}(X \wedge \Sigma^{V_i})$$

をみたすものとする。この定義は後述するように Λ に依存する事に注意する必要がある。

次に G−spectrum の最も簡単な定義を述べよう。ω を G の正則表現 $\mathbb{R}[G]$ とする. このとき G−空間 E_n, $n=0,1,2,\cdots$ と G−写像 $f_n\ ;\ E_n \wedge \Sigma^{\omega} \longrightarrow E_{n+1}$ の集り $\mathbb{E}=\{E_n, f_n\}$ を G−spectrum という。$RO(G)\ni\alpha$ に対し正整数 k と表現 V が存在し $\alpha=k[\omega]-[V]$ と書ける。choice Λ が与えられたときそれに付随して $[V]$ の代表元が一意に定まることに注意する。今 G−spectrum $\mathbb{E}$ が与えられたとき，一般G−コホモロジー $h_G^*(\ ;\mathbb{E})$ が

$$h_G^{\alpha}(X;\mathbb{E}) = \varinjlim_{g} [X \wedge \Sigma^{g\omega+V}, E_{k+g}]$$

によって定義される。また逆に $RO(G)$−graded な一般G−コホモロジーの G−spectrum による表現定理も通常の場合と同様に成立する。一般G−コホモロジーの最もよく知られた例は同変K−理論 K_G^* である。G−spectrum

$\mathbb{S}_G = \{\Sigma^{nW}, id\}$ は G-sphere spectrum とよばれ，$h_G^*(\ ;\ \mathbb{S}_G)$ は安定 G-コホモトピー論とよばれる。先に述べた Bredon の $\mathbb{Z}$-graded なコホモロジー $H_G^*(X;\underline{M})$ は一般には安定理論ではない，つまり $RO(G)$-graded に拡張できず，そうなるための必要十分条件は $\underline{M}$ が Mackey 関手であることが知られている。

§3. $RO(G)$-graded な理論の最大の特徴は equivariant transfer の存在である。これは本質的には S-duality に帰着されるが，最も簡単な G-多様体の有限被覆 $p;\ \tilde{M} \longrightarrow M$ について云えば，p に G-ホモトピックなうめ込み $\tilde{M} \longrightarrow M \times V$ を選んでその Pontrjagin-Thom 構成 $\hat{p};\ (M\times V)^c = (M \amalg *) \wedge \Sigma^V \longrightarrow \nu(\tilde{M})^c = (\tilde{M} \amalg *) \wedge \Sigma^V$ が導く準同型 $p_!;\ h_G^*(\tilde{M}) \longrightarrow h_G^*(M)$ が equivariant transfer である。

次に一般 G-コホモロジー h_G^* と G の部分群 H との関係について考える。自然に定義されるコホモロジー（例えば K_G^*）の場合，各部分群 H に対して h_H^* が定義され，$RO(G) \ni \alpha$ と H-空間 X に対し自然な同型

$$h_G^{\alpha}(G \times_H X) \cong h_H^{r(\alpha)}(X)$$

が成立する。但し $r=\mathrm{res}^G_H ; RO(G) \to RO(H)$ は制限準同型である。このようなコホモロジー論の族 $\{h^*_H\}_{H\subset G}$ は完備とよばれる。一方，G-spectrum $\mathbb{E}$ は作用の制限により自然に H-spectrum となる。従って $h^*_H(\ ;\mathbb{E})$ が定義され，$\{h^*_H(\ ;\mathbb{E})\}_{H\subset G}$ は完備である事は容易に知られる。

以下，完備な族 $\{h^*_H\}_{H\subset G}$ を考えよう。G-空間 X を固定すると，対応 $H \mapsto h^*_G(G\times_H X) = h^{r(*)}_H(X)$ は，部分群の圏 $\mathcal{O}_G$ 上のいわゆる Mackey 関手となる。Mackey 関手のよく知られた例は表現論 $H \longmapsto R(H) \cong K^0_H(pt)$ で，部分群 $K\subset H$ に対し制限 $\mathrm{res}^H_K ; R(H) \to R(K)$ と，誘導 $\mathrm{ind}^H_K ; R(K) \to R(H)$ が存在しいわゆる double coset formula が成立する。$\{h^*_H\}$ の場合，res^H_K，ind^H_K は，$p ; G\times_K X \longrightarrow G\times_H X$ を自然な射影とするとき，それぞれ p^*，$p_!$ で与えられる。従って RO(G)-graded な一般 G-コホモロジーは，群の立場からみると Green の云う一般表現論である。

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{O}_G$ 上の Mackey 関手のなす圏とする。非安定の場合に Bredon が行ったように，安定理論は $\mathcal{M}$ における代数的トポロジーと云える。この立場から例えば，

$\mathcal{M}$ における algebra object を考えよう。表現論においてはこれは Green 関手とよばれるが，一般 G-コホモロジー h_G^* が $\mathcal{M}$ の algebra object になるとき，h_G^* は multiplicative とよぶのが自然である。また，加群の圏における $\mathbb{Z}$ にあたるのは Burnside 関手，つまり各 H に対し Burnside 環 $A(H)$ を対応させる関手である。従ってすべての $h_G^*(X)$ は universal に $A(G)$-加群となり，環 $A(G)$ の構造，例えば idempotent による分解，units の群 $A(G)^\times$，prime ideal による局所化，完備化等は一般 G-コホモロジー論の研究に欠かせない。ここではその一つの例として Segal 予想について述べよう。

$I(G)$ を $A(G)$ の augumentation ideal，EG を可縮自由 G-複体，$\pi : EG \to *$ を自明な写像とする。$A(G)$-加群 M に対し，$M^\wedge_{I(G)}$ を $I(G)$-adic completion とする。完備な G-コホモロジー論 h_G^* に対し，次の準同型

$$\pi^* : h_G^*(X)^\wedge_{I(G)} \longrightarrow h_G^*(X \times EG)^\wedge_{I(G)}$$

を考える。よく知られた G-コホモロジー（例えば K_G^*，G-安定コホモトピー等）の場合，$h_G^*(X \times EG)$ はすでに $I(G)$-adic complete であり，更に同型 $h_G^*(X \times EG) \cong h^*(X \times_G EG)$，$* \in \mathbb{Z}$，が成立する。一般の h_G^* に対して

準同型 π^* は必ずしも同型でないが, K_G^+ の場合は同型である (Atiyah-Segal, 1968)。Segal予想は, 同変安定コホモトピー論 $h_G^*(\ ;\mathbb{S}_G)$ の場合も π^* が同型であろうと主張する。この予想は昨年 Carlson等により解決されたが, これは有限群と安定ホモトピー論の関係における最も重要な結果の一つで, 種々の応用が期待される。

§4. 最後にG-コホモロジー論の一般論における問題点について述べる。第一の問題は $RO(G)$-graded なG-コホモロジーの定義における既約表現の choice Λ である。非同変の場合は, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し標準的に単位球面 S^n がとれるが, 同変の場合このような事は不可能である。別の Λ' を選んだとき各 $\alpha \in RO(G)$ に対し, 同型 ${}_{(\Lambda)}h_G^\alpha \cong {}_{(\Lambda')}h_G^\alpha$ が存在することは明らかであるが標準的な同型は存在しない。h_G^* が積をもつ場合, cup 積の交換律は $A(G)^\times$ の適当な元 $c_{\alpha,\beta}$ を用いて $x \cdot y = c_{\alpha,\beta}\, y \cdot x$ と書ける, 但し $x \in h_G^\alpha$, $y \in h_G^\beta$, しかしこの $c_{\alpha,\beta}$ は Λ に依存する。この種の ambiguity を取り除く方法を求める事が第1の問題である。

第2にG-多様体あるいはG-ベクトル束における

orientationについて考える。h_G^* を積をもつ $RO(G)$-graded な一般 G-コホモロジー，$\xi : E \to X$ を G-ベクトル束，X^ξ を Thom 複体とする。0-sectionを用いて，$h_G^*(X^\xi)$ が $h_G^*(X)$-加群となることは明らかである。$h_G^*(X^\xi)$ が $h_G^\alpha(X^\xi) \ni u$ を生成元とする自由巡回 $h_G^*(X)$-加群となるとき，ξ は h_G^*-oriented で，u を Thom class と定義する。今 X が local，つまり G-orbit G/H の場合 ξ は h_G^*-orientable でなければならないが，この場合 H の表現 V が存在して $E = G \times_H V$，$X^\xi = (G \amalg *) \wedge_H \Sigma^V$ と書ける。従って $h_G^*(X^\xi) \cong h_H^{r(*)}(\Sigma^V) \cong h_H^{r(*)-[V]}(pt)$ であり，また $h_G^*(X) \cong h_G^*(G/H) \cong h_H^{r(*)}(pt)$ である。従って $V \in \mathrm{Im}(r)$ でなければ，h_G^* にある種の periodicity が必要となる。よく知られた一般 G-コホモロジーでこの種の periodicity をもつのは K_G^* のみである。実際，複素 G-ベクトル束は常に K_G^*-orientable であることはよく知られている。上のような periodicity をもたない h_G^* に対して orientable な G-ベクトル束は，従ってその local な構造に強い制限をもつことになる。これが一般 G-コホモロジー論の応用面における一つの欠点と思われる。

A survey of Smith equivalent representations

Ted Petrie

Rutgers University
& Tokyo University

An old question of P.A. Smith asks: If a finite group G acts smoothly on a closed homotopy sphere Σ with fixed set Σ^G consisting of two points p and q, are the tangential representations $T_p\Sigma$ and $T_q\Sigma$ of G at p and q equal? Put another way: Describe the representations (V,W) of G which occur as $(T_p\Sigma, T_q\Sigma)$ for Σ a sphere with smooth action of G and $\Sigma^G = p \cup q$. Under these conditions we say V and W are Smith equivalent and write $V \sim W$. A stronger equivalence relation is also interesting. We say representations V and W are s-Smith equivalent if $(V,W) = (T_p\Sigma, T_q\Sigma)$ and Σ is a semi-linear G sphere i.e. Σ^K is a homotopy sphere for all K and $\Sigma^G = p \cup q$. In this case we write $V \approx W$.

The problem of characterizing Smith equivalent representations and s-Smith equivalent representations has a rich history which we mention to motivate and compare with the results of this paper. The first striking results on this topic are due to Atiyah-Bott and Milnor and rest on the Atiyah-Bott fixed point theorem. The set of isotropy groups $\{G_x | x \in X\}$ of a G space X is denoted by $\mathrm{Iso}(X)$.

<u>Theorem 0.1</u> (Atiyah-Bott). Let V be a representation of a finite group G such that $\mathrm{Iso}(V-0) = \{1\}$. If W is a representation of G with $V \sim W$, then $V = W$.

Until 0.7 only, $R(G)$ denotes either the complex or real representation ring of G and $K_G(X)$ denotes the Grothendieck group of complex or real G vector bundles over the G space X.

<u>Theorem 0.2</u> (Bredon). If G is cyclic of 2 power order and $V \sim W$, then $W-V \in 2^{f(V)} \cdot R(G)$ where $f(V)$ is an explicit function of dim V.

<u>Corollary 0.3.</u> Same hypothesis. If dim V is large compared with the cardinality $|G|$ of G, then $V \sim W$ implies $V = W$. This corollary indicates some of the complexity of Smith equivalence. For example $V \sim W$ does not imply $V \oplus S \sim W \oplus S$.

Theorem 0.4 (Sanchez). If $|G|$ is odd and $V \approx W$, then $V = W$.

As an easy corollary we note that if G is cyclic and there are V and W with $V \approx W$ and $V \neq W$, then $|G| \equiv 0(2)$.

All the above work suggests that $V \sim W$ implies $V = W$. This is not the case. The first results to that effect are due to the author. Before mentioning it and the main results of this paper we note some simple observations about these equivalence relations: If $V \sim W$ and $K \subset G$ is a p group (p odd), $res_K V = res_K W$ where $res_K: R(G) \to R(K)$ denotes restriction to K. If $V \approx W$ and $K \in Iso(V-0)$, then $res_K V = res_K W$. For if $(V,W) = (T_p\Sigma, T_q\Sigma)$, then Σ^K is a homotopy sphere of positive dimension so p and q lie in the same component of Σ^K. This menas $res_K T_p\Sigma = res_K T_q\Sigma$. For G abelian $fix_K: R(G) \to R(G/K)$ is the homomorphism induced by sending a representation V of G to V^K. If $V \approx W$, then $fix_K V \approx fix_K W$. So if $|G/K| \not\equiv 0(2)$, $fix_K V = fix_K W$. Thus Smith (s-Smith) equivalence of V and W singles out a subgroup of $R(G)$ of the form

$$\mathcal{I} = \mathrm{Ker}(R(G) \to \prod_{K \in \mathcal{S}_1} R(K) \times \prod_{L \in \mathcal{S}_2} R(G/L))$$

which depends on V such that if W is equivalent to V, $W-V \in \mathcal{I}$. Subgroups of this type play a central role here. For example let $\mathcal{P}$ be the set of groups of prime power order.

<u>Theorem 0.5</u> (Petrie). i) Let G be an odd order abelian group with at least four non-cyclic Sylow subgroups. Every element of $\mathcal{I} = \mathrm{Ker}(R(G) \to \prod_{P \text{ Sylow}} R(P) \times \prod_{G/H \in \mathcal{P}} R(G/H))$ occurs as a difference $W-V$ with $W \sim V$. ii) Let G be cyclic of order $2d$ and H the subgroup of index 2 with 2 Sylow subgroup H_2. Let U and V be complex representations of G. If

$$U-V \in 2^{\Delta(V)}\mathrm{Ker}(R(G) \to R(H) \times R(G/H_2)),$$

then $U \approx V$ provided U and V satisfy

$$V^g = 0,\ U^g = 0 \quad \text{iff} \quad g^d = -1 \quad g \in G$$

and some other explicit conditions. Here $\Delta(G)$ is an explicit function of G.

As a very simple example of ii), suppose G is cyclic of order $2^{\ell} = n$. Then $R(G) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^n-1)$ and the representations $4t^d + 2^8 t^i = V$ and $U = 4t^d + 2^8 t^{i+d}$ are s-Smith equivalent provided $2^{\ell-1} \geq 2^8$ i.e. $\ell \geq 9$. The integer $\Delta(V)$ in this case is 8 and we need $(i, 2d) = 1$.

We are chiefly concerned with two questions about s-Smith equivalence:

> 0.6 Given a representation V of G. What are the conditions which a representation W must satisfy so that $V \approx W$?

The answer is most conveniently expressed in terms of the difference $W-V \in R(G)$.

> 0.7 Given $z \in R(G)$, when is $z = W-V$ with $W \approx V$?

One should recognize at the outset that 0.6 is a technically difficult question. A precise answer for any V depends among other things on the Wall groups $\{L_n^h(G/K,w)\ K \in \mathrm{Iso}(V-0),\ n = 0,1,2,3\}$ which are not even explicitly known for G cyclic unless n is odd. Results of Schultz and Rothenberg often imply that $V \approx W$ implies V is topologically equivalent to W; so $\approx$ is a rather deep relation. Question 0.7 is designed to remove some of the technical complications of 0.6 while retaining the conceptual aspects of the question.

Here is a brief discussion of the method for determining whether a representation W is s-Smith equivalent to a given representation V. Let $Y = S(V \oplus R)$ and let ξ_+ and ξ_- be two G vector bundles over Y with $\mathrm{Iso}(\xi_+) = \mathrm{Iso}(\xi_-) = \mathrm{Iso}(V)$ and suppose $\theta\colon \xi_+ \to \xi_-$ is a proper fiber preserving equivariant map such that the fiber degree of θ^K is 1 for all $K \subset G$. Temporarily we summarize this condition as $J(\xi) = 0$ for $\xi = \xi_+ - \xi_- \in K_G(Y)$. We seek a proper G homotopy of θ to a map h transverse to the zero section $Y \subset \xi_-$. Achieving this set $X = h^{-1}(Y)$ and $f\colon X \to Y$ $f = h|_X$; so degree $f^K = 1$ for all K and TX is stably G

isomorphic to $f^*(TY+\xi)$. Let (X,f) abbreviate this (and some additional bundle data associated with a stable G isomorphism between TX and $f^*(TY+\xi)$). All this data abbreviated by (X,f) is called a normal map. Now we seek a normal cobordism between (X,f) and (X',f') where $f'\colon X' \to Y$ is a G homotopy equivalence. Then TX' is stably $f'^*(TY+\xi)$ and f'^G is a bijection which we use to identify X'^G with $p \cup q$. Since $T_pY = T_qY = V$, we have $T_pX' = V+\xi_p$ and $T_qX' = V+\xi_q$ where $i^*\xi = (\xi_p,\xi_q) \in R(G) \oplus R(G)$; so if $i^*(\xi) = (0,W-V)$, then $T_pX' = V$, $T_qX' = W$ and $V \approx W$.

To get started with this method of deciding whether W is s-Smith equivalent to V we must first determine whether there is a $\xi \in K_G(Y)$ with $J(\xi) = 0$ and $i^*(\xi) = (0,W-V)$. This already is a strong condition on $W-V$. For example, it means that $W-V \in \mathrm{Ker}(\tau_V\colon R(G) \to K_G(SV))$; so the first task is to describe $\mathrm{Ker}\,\tau_V$. It depends intricately on V; However, $\mathrm{Ker}(\tau_V)$ contains $2^{\nu(V)}\mathrm{Ker}(\mathrm{res}_H\colon R(G) \to R(H))$ where $\nu(V)$ is an integer. This inclusion gives a very simple means of producing elements in $\mathrm{Ker}\,\tau_V$

and at the same time illustrates again the appearance of powers of 2 in the problem of Smith equivalence.

It is not enough to produce just any ξ. We must have $\xi = \xi_+ - \xi_-$ with ξ_+, ξ_- G vector bundles over Y with $\mathrm{Iso}(\xi_+) = \mathrm{Iso}(\xi_-) = \mathrm{Iso}(V)$. If V has a certain property and $\xi \in K_G(Y)$ (remember $Y = S(V \oplus R)$) with $i^*(\xi) = (0, W-V)$), we can suppose ξ is of this required form.

We must also arrange that $J(\xi) = 0$. This leads to equivariant versions of the Adams conjecture.

If we have a ξ with all these properties, we can use a transversality result (provided V satisfies some conditions as in 0.5 ii) to produce a normal map (X,f) $f: X \to Y$ with $TX = f^*(TY+\xi)$. If we ever expect to achieve a normal cobordism between (X,f) and (X',f') with f' a G homotopy equivalence, the equivariant signatures $\mathrm{Sign}(G, X^K)$ must vanish for all $K \subset G$. By the Atiyah-Singer G-Singnature Theorem, these signatures are functions of $TY^K \oplus \xi^K$, so their vanishing imposes conditions on ξ (and hence $W-V$ as $i^*(\xi) = (0,W-V)$). If we suppose $H \in \mathrm{Iso}(V)$ $V^{G_2} = V^G$ and $\mathrm{res}_H(\xi) = 0$, then these equivariant signatures all vanish. This involves the equivariant signature theorem and is the connection between this study and the Atiyah-Bott result. Equivariant surgery provides the relation between the equivariant signature and the problem of converting a normal map to a G homotopy equivalence. Basically the vanishing of the equivariant signatures means that the equivariant surgery obstructions vanish. This means we can convert (X,f) to (X',f') where f' is a G homotopy equivalence. Then X' is a semilinear sphere and its tangential representations are s-Smith equivalent.

Very briefly here is a summary of the history and status of information on Smith and s-Smith equivalent representations which are not equivalent as representations. The author's first results on Smith equivalence 0.5 i) showing the existence of inequivalent Smith equivalent representations have been followed by several papers. Cappell-Shaneson showed the existence of representations V and W with $V \approx W$ but $V \neq W$ for some special representations of cyclic groups of even order. Siegal in his thesis and the author treated a much larger class of representations of the even order cyclic groups. Suh and Cho in their thesis show the existence of representations V and W with $V \neq W$ but $V \approx W$ when G is any abelian group whose 2 Sylow subgroup is cyclic of order at least eight resp. G is a generalized quaternion group of order 2^{ℓ} at least 16. The groups which have given the most difficulty to date have been the odd order cyclic goups. By Sanchez's theorem if G is such a group and V and W are representations with $V \times W$, then $V = W$. Dovermann and the author feel we can exhibit a large class of odd order cyclic groups having representations V and W with $V \sim W$ and $V \neq W$. By a result of Atiyah-Bott G can not have p power order and by a theorem in Sanchez's thesis at least 3 distinct primes must divide the order of G.

全葉層に昇格しない横断葉層

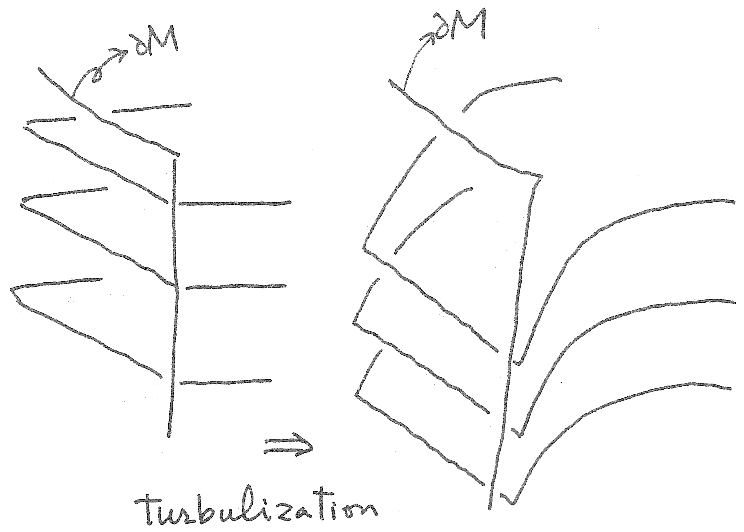
東大理　佐藤篤之

数年前から多様体の1つの葉層に対しそれに横断的な葉層の研究が始まった．一方 n 次元 C^∞ 多様体 M が平行性を持つとき M には向き付け可能 $n-1$ 次元接平面場の n 個の組 $(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ であって各点で一般的な位置にあるものが取れるが『各 τ_i は M のある余次元1葉層 $\mathcal{F}_i$ の接平面場として取れるか？』という問題が以前からあった（Tischler [11], 1968）．3次元閉多様体の場合にはこれは Hardorp [1] によって解決された．このような余次元1葉層の組 $(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n)$ を<u>全葉層</u>と呼ぶ．ここでは3次元多様体の場合にこれらの周辺に位置する結果について概観する．

§1. 定義

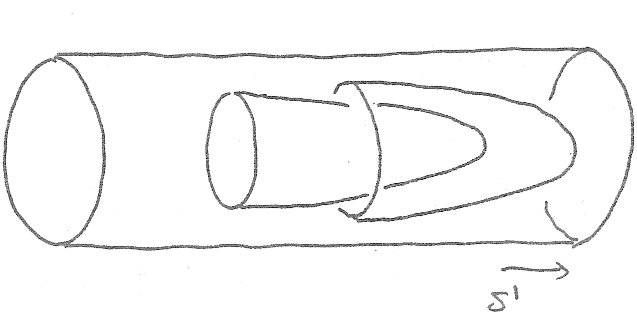
Mをn次元C^∞多様体とし，$\mathcal{F}$及び$\mathcal{G}$をMの余次元q及びq'のC^r ($r \geq 1$) 葉層とする．$q+q' \leq n$ のとき $\mathcal{G}$が$\mathcal{F}$に**横断的**とは各点$x \in M$において $T_x\mathcal{F} + T_x\mathcal{G} = T_xM$ となるときを云う．このとき$\mathcal{F} \pitchfork \mathcal{G}$とかく．また$\mathcal{F}$の葉と$\mathcal{G}$の葉の交わりによって得られるMの余次元$q+q'$の葉層を$\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$と表わす．Mのn個の余次元1葉層の組$(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n)$が**全葉層**とは各$x \in M$において $T_x\mathcal{F}_1 \cap \cdots \cap T_x\mathcal{F}_n = \{0\}$ のときを云う．

ここで葉層に対して基本的な操作であるturbulizationについてのべる．いま3次元多様体Mの境界∂Mは2次元トーラスT^2に同相とし，Mの余次元1葉層$\mathcal{F}$は∂Mに横断的でしかも∂Mのカラー$K = \partial M \times [0,1]$，$\partial M \times \{0\} = \partial M$，において$S^1 \times [0,1]$を葉とする積葉層であるとする．このとき$\mathcal{F}|K$を図のように$\partial M$を1つの葉とし近くの葉が$\partial M$にまきつくように修正する操作を**turbulization**と呼ぶ．また$S^1 \times D^2$の積葉層$\{\{t\} \times D^2\}_{t \in S^1}$



を $\partial(S^1\times D^2)$ のカラーで turbulize して得られる葉層
$\mathcal{F}_R$ を Reeb 成分 と呼ぶ.

以下, 多様体は向き付け可能, C^∞ とし
葉層は横断的向き付け可能で 特にことわらない
限り C^∞ のものを考える.



Reeb 成分 $\mathcal{F}_R$

§2. 諸結果

いかなる開多様体に全葉層が存在するかという問題について次のような結果が知られている。なお開多様体については Liang [2] を参照のこと。

<u>定理1</u>（Tischler [11], 1968） 向き付け可能閉曲面上の向き付け可能 S^1 バンドルには全葉層が存在する。

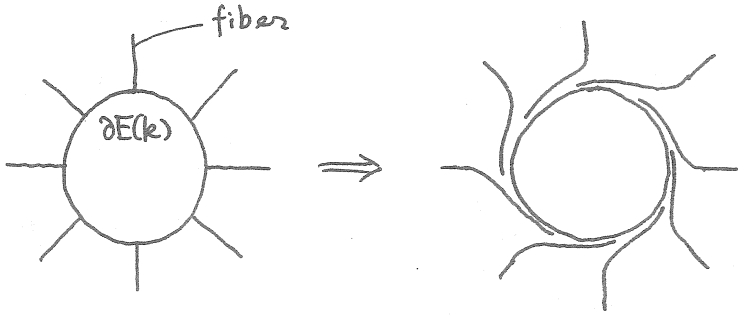
<u>定理2</u>（Silberstein [8], 1977） M^n を安定平行性をもつ n 次元開多様体とするとき，$M \times S^1$ には全葉層が存在する。

<u>定理3</u>（Hardorp [1], 1980） 3次元閉多様体には全葉層が存在する。

<u>注1</u> 4次元以上では全葉層の存在問題は未解決である。

一方，与えられた余次元1葉層に対し，それに横断的な余次元1葉層が存在するかという問題に関して次の結果がある．

定理4（Tamura-Sato [10], 1981） non-trivial fibred knot $K \subset S^3$ から得られる $S^3 = N(K) \cup E(K)$ の葉層 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_R \cup \mathcal{F}_K$ はそれに横断的な余次元1葉層を持たない．但し，$\mathcal{F}_K$ はバンドル $\pi : E(K) \longrightarrow S^1$ の fiber から成る葉層 $\{\pi^{-1}(t) ; t \in S^1\}$ を $\partial E(K)$ のカラーで turbulize して得られる葉層であり，$N(K) \cong S^1 \times D^2$ は K の tubular neighborhood である．



注2　S^3 は単連結なので上の $\mathcal{F}$ はそれに横断的な2次元平面場を持つ．

定理5 (Nishimori [5], 1981) S^1上の $(T^2-\mathring{D}^2)$ バンドル $E \xrightarrow{\pi} S^1$ の葉層 $\mathcal{F}_E$ に対して

$\mathcal{F}_E$ に横断的な余次元1葉層が存在する

$\Longleftrightarrow$ trace $\phi \geqq 2$

但し, $\mathcal{F}_E$ は fiber による葉層 $\{\pi^{-1}(t) : t \in S^1\}$ を ∂E のカラーで turbulize して得られる葉層, ϕ はバンドルの monodromy 写像 $\in SL(2, \mathbb{Z})$ である.

この定理により定理4において k が trefoil knot のときは すでに $E(k)$ の葉層 $\mathcal{F}_k$ が横断的余次元1葉層を持たないことがわかる.

このような葉層の存在問題に関しては田村の observation により次のことが示された.

定理6 3次元閉多様体 M^3 には それに横断的な2次元平面場を持つが, 横断的余次元1葉層を持たないような葉層が存在する.

証明は M^3 の余次元1葉層の1部分を $S^1 \times D^2$ の特殊な葉層 $\mathcal{F}$ でおきかえることによって行なわれ, $\mathcal{F}$ が

望ましい性質をもつことを示すために Nishimori [4] の結果を用いる.

以上の状況のもとに今回の話の主結果をのべる.

<u>定義</u> $\mathcal{F}$ 及び $\mathcal{G}$ を 3次元閉多様体 M^3 の余次元1葉層とし $\mathcal{F} \pitchfork \mathcal{G}$ とする. このとき対 $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が<u>全葉層に昇格しない</u> とは $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ が全葉層となる M の余次元1葉層 $\mathcal{H}$ が存在しないときをいう.

<u>注3</u> $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が全葉層に昇格しないためには 1次元葉層 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ が横断的余次元1葉層を持たないことが必要十分である.

<u>例</u> 全葉層に昇格しない典型的な例として次のものがある. いま $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ とし, A が 2次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に $A(x, y) = (x+y, y)$ と働く微分同相写像としてこれを monodromy とする S^1 上の T^2 バンドル $P_0 = T^2 \times [0,1] / \sim$

ここに $(x,y,1)\sim(A(x,y),0)$, を考える。
$\pi: P_0 \to S^1$ を射影とし、$\mathcal{F}=\{y=\mathrm{const.}\}$ を T^2 の S^1 による1次元葉層とする。容易にわかるように A は $\mathcal{F}$ の葉を葉に写し、これにより P_0 の余次元1葉層 $\mathcal{G}_0=\mathcal{F}\times[0,1]/\sim$ を定める。また $\mathcal{F}_0=\{\pi^{-1}(t):t\in S^1\}$ も P_0 の余次元1葉層で $\mathcal{F}_0$ 及び $\mathcal{G}_0$ の各葉は T^2 である。さらに $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{G}_0$ は横断的で $\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_0$ はすべての葉が S^1 の1次元葉層である。さらに P_0 は $\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_0$ の各葉を fiber とする T^2 上のオイラー類 $\pm[T^2]$ $(\neq 0)$ の S^1 バンドルの全空間となることがわかる。このとき Milnor-Wood の理論([3],[12])より $(\mathcal{F}_0,\mathcal{G}_0)$ が全葉層に昇格しないことが示される。

我々の主結果は次である。

定理7([7]) 3次元閉多様体には全葉層に昇格しない横断葉層対が存在する。

§3. 判定条件

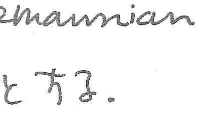
この節では横断葉層対 $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が全葉層に昇格しないための1つの十分条件を与える。これは Tamura [9] で与えられた flow に対する横断葉層の非存在の条件を修正したものである。

M^3 を向き付けられた3次元多様体、φ を M の向きづけられた1次元 C^1 葉層で ∂M が φ の葉からなるものとする。M に Riemannian metric g を1つ固定し $\varepsilon > 0$ とする。

<u>定義</u>　向きづけられた C^1 閉曲線 $C \subset M$ が <u>ε-閉軌道</u> とは C の各点 x において

$$|1 - g(u, v)| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう。但し、$u \in T_x C$, $v \in T_x \varphi$ とし ともに正の向きの単位ベクトルとする。



<u>定理8</u>（[7]）　M^3 は compact と仮定する．$E(\varphi)$ を φ の閉軌道で無限ホロノミーを持つものの全体の和集合とする．このとき $(M-E(\varphi), \varphi|_{M-E(\varphi)}, g|_{M-E(\varphi)})$ において $\forall\varepsilon>0$ に対し ε-閉軌道 C_ε で $M-E(\varphi)$ で null homotopic であるものが存在すれば（この性質を O-N.C.O.P. と呼ぶ）φ は横断的余次元1 C^1 葉層を持たない．

証明には Novikov の定理（[6]）を用いる．

§4. 定理7の証明の概略

次の定理を用いる．

<u>定理9</u>　$S^1\times D^2$ に全葉層に昇格しない横断葉層対が存在する．

まず3次元閉多様体 M^3 に定理3より全葉層を構成し，次にその1部分を定理9の

葉層対でおきかえることにより求めるものを得る.

定理9の証明は2段階に分けて行なう.

I. $S^1 \times D^2$ の横断葉層対の構成.

このために先に定理7の直前の例において構成した横断葉層対をDehn手術と有限被覆を取る操作によって改変し $S^1 \times D^2$ の横断葉層対に拡張する. $(P', \mathcal{F}', \mathcal{G}') \subset (S^1 \times D^2, \mathcal{F}, \mathcal{G})$.

II. 非昇格性の検証.

定理8の中で定義した O-N.C.O.P. が有限被覆を取る操作で保たれることと, 定理8を用いて $(P', \mathcal{F}', \mathcal{G}')$ が非昇格性を持つことを示す。

詳しくは [7] を参照のこと.

REFERENCES

[1] D. Hardorp, All compact orientable three dimensional manifolds admit total foliations, Memoire of A.M.S., No. 233.

[2] C.C. Liang, Multifoliations on open manifolds, Math. Ann., 221 (1976), 143–146.

[3] J. Milnor, On the existence of a connection with zero curvature, Comm. Math. Helv. 32 (1958), 215–223.

[4] T. Nishimori, Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 179–238.

[5] T. Nishimori, Foliations transverse to the turbulized foliations of punctured torus bundles over a circle, to appear.

[6] S.P. Novikov, Topology of foliations, A.M.S. Transl (1967), 268–304.

[7] A. Sato, Transverse pairs of codimension one foliations of 3-manifolds which can not be raised

to a total foliation, preprint.
[8] E. Silberstein, Multifoliations on $M^n \times S^1$ where M^n is a stabley parallelizable manifolds, Proc. London Math. Soc. 35(1977), 463-482.
[9] I. Tamura, Dynamical systems on foliations, to appear.
[10] I. Tamura and A. Sato, On transverse foliations, Publ. Math. of I.H.E.S. 54(1982), 5-35.
[11] D. Tischler, Totally parallelizable 3-manifolds, Topological dynamics, Benjamin, Newyork, 1968, 471-492.
[12] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, Comm. Math. Helv. 46 (1971), 257-273.

ベクトル場の特異点の周辺

市川文男　都立大 理

$\mathbb{R}^n$上のC^∞ベクトル場Xが$0\in\mathbb{R}^n$において特異点、$X(0)=0$をもつとします。この時$0\in\mathbb{R}^n$のまわりでの積分曲線の挙動が我々の興味の対象です。

$\mathfrak{X}(n)$を$(\mathbb{R}^n,0)$での原点を特異点とするC^∞-vector fields germsの集合とし、GをC^∞-local diffeo $\varphi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$全体よりなる群とします。

<u>定義1</u>　$\mathfrak{X}(n)\ni X, Y$がC^∞-同値 (resp. C^0-同値) であるとは local diffeo $\varphi\in G$ (resp. local homeo h) が存在して、$\varphi_*X=Y$ (resp. hはXの積分曲線を時間方向を保ってYの積分曲線にうつす) となることです。

<u>定義2</u>　$J^k(n)$を定数項のない次数k次以下のpolynomial vector fieldsの集合とし、$j^k:\mathfrak{X}(n)\to J^k(n)$を原点における$k$-jetを対応させる写像とします。$\mathfrak{X}(n)\ni X$が$k$-determined (resp. C^0-k-determined) であるとは、$j^kX=j^kY$となるような任意の$Y\in\mathfrak{X}(n)$に対し、XとYがC^∞-同値 (resp. C^0-同値) となることです。

よく知られている古典的定理として次の定理があります。

定理1 (Hartman) $\mathfrak{X}(n) \ni X$ の 1-jet $X_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする。各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し $\mathrm{Re}\,\lambda_i \neq 0$ のとき X は C^0-1-determined である。

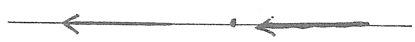
定理2 (Sternberg) $\mathfrak{X}(n) \ni X$ の 1-jet X_1 の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が次の条件 (*) をみたしているとする。

(*) 任意の $\sum_{i=1}^{n} m_i \geqq 2$ となる non-negative integer $m_1, m_2, \cdots, m_n$ に対し $m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n \neq \lambda_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$

このとき X は 1-determined i.e. C^∞ local diffeo φ が存在して $\varphi_* X = X_1$ とできる。

では固有値が退化して定理の条件をみたさなくなった時どのような特異点があらわれて、積分曲線の挙動は何階の jet で決まるのでしょうか？ まず1次元の場合を考えてみます。$X = x^k F(x) \frac{\partial}{\partial x}$, $F(x)$ は C^∞-関数 $F(0) \neq 0$ とすると、明らかに C^0-同値では次の場合にわかれます。

k : even, $F(0) > 0$ 

k : even, $F(0) < 0$ 

k : odd, $F(0) > 0$ 

k : odd, $F(0) < 0$ 

従って、位相型は高々3つのtypeしかなく、XはC^0-k-determinedになります。ではｰC^∞同値による分類ではどうでしょうか？ C^∞同値の場合1次元の場合でもそれ程簡単ではなくTakensによる次の定理があります。

定理3 (Takens) $\mathcal{X}(1) \ni X = x^k F(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $F(0) \neq 0$ とする。このとき、Xは$(2k-1)$-determined 特にXは次のベクトル場とC^∞同値 $(\delta x^k + \alpha x^{2k-1})\frac{\partial}{\partial x}$, $\delta = \pm 1$ $\alpha \in \mathbb{R}$ はXの$(2k-1)$ jetで一意的に定まる (orientation preserving diffeoに制限した下で)

一般に高次元になるとC^0-同値でも分類がうまくいかない事をTakens[3]が示しました。

定理4 (Takens) $n \geqq 5$とする。$J^2(n)$の中にcodimension 3のsubmfd Wで次をみたすものが存在する。Wの殆んど全ての2-jet zはnon-stabilizableである。i.e. $j^2X = z$となる任意の$X \in \mathcal{X}(n)$に対し、XはC^0-finitely determinedでない。

$n=4$の場合にもTakensは[4]でnon-stabilizable jetの例を示しました。$n=3$の場合にもnon-stabilizable jetが存在すると考えられていますが、筆者の知っている範囲ではまだその

例をみたことがありません。$n=2$の場合, non-stabilizable jet は存在しないと予想され, Dumortier [5] の仕事があります。

C^0-finite determinacy や分類問題での基本的手法は"ベクトル場の標準形"と"blowing up"です。以下では標準形について述べます。

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とし, $\mathcal{F}$ を形式的巾級数環 $\mathbb{K}[[x_1, \cdots, x_n]]$ とします。形式的ベクトル場とは $\mathcal{F}$ の derivation のことです。$\hat{\mathcal{X}}(n)$ で定数項のない形式的ベクトル場全体のなす Lie 環をあらわします。$\hat{G}$ を形式的座標変換のなす群とすると, $\hat{G}$ は $\hat{\mathcal{X}}(n)$ に次で作用しています. $\varphi_* X = \varphi^{-1} X \varphi$, $\varphi \in \hat{G}$, $X \in \hat{\mathcal{X}}(n)$

$j^k : \hat{\mathcal{X}}(n) \longrightarrow J^k(n)$ を自然な projection とし, C^∞ vector fields germ と同様に k-determinacy, finite determinacy を定義します。

さて, Sternberg の定理の固有値に関する条件(※)を少し調べてみましょう。今 $\hat{\mathcal{X}}(n) \ni X$ の 1-jet X_1 は対角型 $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ になっているとします。($\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は相異なる)

$$X = X_1 + \text{higher term}$$

$x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ とすると $X(x^\beta) = (\beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_n\lambda_n) x^\beta + \text{higher term}$ となります. $\mathcal{F}$ は無限次元のベクトル空間ですが, $\mathcal{F}$ の

基底として monomial を次数のひくい順に $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_n^2, x_1^3, x_1^2x_2, \cdots \rangle$ ととり、線形写像 $X:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ を無限行無限列の行列で表示すると

$$
\begin{matrix}\text{2-jet}\\ \text{1-jet}\end{matrix}
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{matrix} & & & \\ \hline
* & \begin{matrix}2\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\lambda_n\end{matrix} & & \\ \hline
* & * & \begin{matrix}3\lambda_1 & & 0\\ & 2\lambda_1+\lambda_2 & \\ & & \ddots\end{matrix} & \\ \hline
* & * & * & \ddots
\end{array}\right]
$$

となります。従ってこの場合固有値の条件(*)とは $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が線形写像 $X:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ の固有値で重複度がないことを意味しています。λ_i に対応する固有ベクトル（固有関数）を f_i とし形式的座標変換 φ を $\varphi(x_i)=f_i$ $(i=1,\cdots,n)$ とすれば

$$(\varphi_* X)(x_i) = \varphi^{-1}X\varphi(x_i) = \varphi^{-1}Xf_i = \varphi^{-1}(\lambda_i f_i) = \lambda_i x_i$$

従って $\varphi_* X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ となり線形化できるわけです。

次に一般の場合を考えてましょう。$\hat{\mathfrak{X}}(n) \ni X$ の 1-jet は Jordan 標準形になっていると仮定します。$\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{F}$ の極大イデアルとすると $j^k X$ は自然に $\mathfrak{F}/\mathfrak{m}^{k+1}$ の derivation をひきおこします。$\mathfrak{F}/\mathfrak{m}^{k+1}$ は有限次元ベクトル空間ですから、線形写像 $j^k X : \mathfrak{F}/\mathfrak{m}^{k+1} \longrightarrow \mathfrak{F}/\mathfrak{m}^{k+1}$ は semi-simple part $(j^k X)^s$ と nilpotent part $(j^k X)^n$ の和で表わせます。それぞれ帰納的極限をとり $X^s = \varinjlim (j^k X)^s$、$X^n = \varinjlim (j^k X)^n$ とおくと、X^s, X^n は $\mathfrak{F}$ の derivation で $X = X^s + X^n$, $[X^s, X^n] = 0$ となることがわかります。またこの分解は $\hat{G}$ の作用と compatible です i.e. $\varphi \in \hat{G}$ とすると $(\varphi_* X)^s = \varphi_* X^s$, $(\varphi_* X)^n = \varphi_* X^n$

上と同じように λ_i に対応する固有関数を f_i をとり、(条件(*)が成立たない時 f_i のとり方に一意性が失われますが)。$\varphi \in \hat{G}$ を $\varphi(x_i) = f_i$ $(i=1, \cdots, n)$ で定義すると

$$(\varphi_* X)^s = \varphi_* X^s = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

となり、$\varphi_* X$ の nilpotent part は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ と Lie 積に関して可換なものが出てきますから結局次の定理をえます。

定理 5 $\hat{\mathfrak{X}}(n) \ni X$ の 1-jet X_1 は Jordan 標準形をしているとし、X_1 の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする i.e. X_1 の semi-simple part は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$。このとき $\varphi \in \hat{G}$ が存在して

$$\varphi_* X = X_1 + \sum_{\substack{\langle \mu, \lambda \rangle = \lambda_i \\ |\mu| \geq 2}} a^i_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (**)$$

とできる。但し $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ で $\langle \mu, \lambda \rangle = \mu_1\lambda_1 + \cdots + \mu_n\lambda_n$, $|\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i$, $\mathbb{Z}_+$ は non-negative integer の集合である.

(**)を X の標準形と呼びます。標準形(**)の semi-simple part は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ で与えられます。

[注意] 上でみたように条件(*)がみたされないと f_i のとり方に一意性がありませんから標準形にも一意性はありません。一般に $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ を不変にする座標変換で標準形内で nilpotent part を変化させることができるわけです。

上の標準形定理を用いて形式的ベクトル場の finite determinacy に関する定理が証明されます。まず 1-jet の固有値に関する条件を述べましょう。1-jet $X_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とします。$K(X_1)$ で集合

$$\{\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n ;\ \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_n\lambda_n = 0\}$$

をあらわします。

定義3. 1-jet X_1 が S.E.C. (strong eigenvalue condition)

をみたすとは，$K(X_1)=\{(0,\cdots,0)\}$ となることです。

定義4　1-jet X_1 が W.E.C (weak eigenvalue condition) をみたすとは，ある $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ が存在して，$K(X_1)=\{r\alpha : r=0,1,2,\cdots\}$ となることです

以上の定義の下で次の定理が成立ちます。

定理6.　$\hat{\mathfrak{X}}(n)\ni X$ の 1-jet X_1 が S.E.C をみたすとき X は finitely determined である。

定理7　$\hat{\mathfrak{X}}(n)\ni X$ の 1-jet X_1 が W.E.C をみたし S.E.C をみたさないとき次は同値である。

(1)　X は finitely determined.

(2).　$X|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ は zero map でない。ここで

$\mathcal{H}=\ker X^s : \mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$，$X^s$ は X の semi-simple part.

定理8　$\hat{\mathfrak{X}}(n)\ni X$ の 1-jet X_1 が W.E.C をみたさない時，X は finitely determined ではない。

[注意] hyperbolic な特異点に関しては，$X\in\mathfrak{X}(n)$ の ∞-jet $j^\infty X$ が形式的に finitely determined であれば C^∞-vector field germ としても finitely determined であることがわかっています。

最後に実2次元のsaddle pointの場合を例に考えてみましょう。
1-jet $X_1 = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$ が $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$　$\lambda_1\lambda_2 < 0$ の場合です。Hartmanの定理から、これはC^0 1-determinedですが、Sternbergの定理から、λ_1/λ_2が無理数のときC^∞ 1-determinedになります。
λ_1/λ_2が有理数の場合、$\lambda_1 = -\frac{q}{p}\lambda_2$　(p, qは互いに素)とすると、Xの標準形は次で与えれます。

$$X_1 + \sum a_\ell x^{\ell p+1} y^{\ell q} \frac{\partial}{\partial x} + \sum b_\ell x^{\ell p} y^{\ell q+1} \frac{\partial}{\partial y}.$$

この時Xがfinitely determinedであるための必要十分条件は、あるLが存在して、$a_L p + b_L q \neq 0$ となることです。また $a_\ell p + b_\ell q \neq 0$ となる最小のℓをLで表わすとXは$(2(p+q)+1)$-determinedになることがわかります。

さらに、この場合は、次のように分類されてしまいます。

__定理9__. $\mathfrak{X}(2) \ni X$ の1-jetは$X_1 = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$ で$\lambda_1\lambda_2 < 0$、$\lambda_1 = -\frac{q}{p}\lambda_2$ (p, qは互いに素)であるとする。この時Xは次のいずれかと同値。

① $X_1 + s\omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + (b_k \omega^k + b_{2k}\omega^{2k}) y \frac{\partial}{\partial y}$.　$(b_k \neq -\frac{p}{q}s)$

② $X_1 + sq\omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + (s(-p)\omega^k + b_L \omega^L + \cdots + b_{2L-k}\omega^{2L-k}$
$\quad + b_{2L}\omega^{2L}) y \frac{\partial}{\partial y}$.　$(b_L \neq 0,\ L > k)$

③ $X_1 + sq\omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + s(-p)\omega^k y \frac{\partial}{\partial y}$.

④ X_1.

ただし、$k=1,2,\cdots$ で k even のとき $\delta=\pm1$、k odd のとき $\delta=1$
$\omega=x^p y^q$ である。

実2次元の場合 固有値 λ_1,λ_2 が pure imaginary になる場合と、いずれか一方が 0 となる場合を W.E.C をみたし形式的に同様の分類ができます。

holomorphic vector field については、[12] [11] を参照して下さい。C^∞-diffeo に対しても同様に、finite determinacy を定義して問題提起出来ます。実際に、Sternberg の定理や1次元の場合 Takens の定理が知られていますが、ベクトル場の場合のような標準形定理がなく、まだ一般の場合は、よくわかっていないようです。

References

[1] E.Nelson: Topics in dynamics I,flows, Math.Note Princeton University Press 1969

[2] K.Shiraiwa: 力学系の理論 ,岩波 1974

C^0-classification に関して

[3] F.Takens: Singularities of vector fields, Publ.Math. I.H.E.S. 43 (1973)

[4] F.Takens: A nonstabilizable jet of a singularity of a vector fields, Dynamical Systems edited by Peixoto, Academic Press 1973

[5] F.Dumortier: Singularities of vector fields on the plane, J.Diff.Eq. 23 (1977) 53-106

[6] D.Arrowsmith: The singularity $x\,\partial/\partial y$, J.Diff.Eq. 33 (1979)

Bifurcation に関して

[7] R.I.Bogdanov: Versal deformations of a singular point of a vector field on a plane in the case of zero eigenvalues, Proceedings of the I.G.Pelrovski Seminer 2, (1976) 37-65

[8] J.Sotomayor: Generic one parameter families of vector fields in two-dimensional manifolds, Publ.Math. I.H.E.S. 43 (1973)

Normal form に関して

[9] R.I.Bogdanov: Modules of C^∞-orbital normal forms for singular points of vector fields on a plane, Funct.Anal. and its appl. 11, 47-49 (1977)

[10] R.I.Bogdanov: Singularities of vector fields on the plane

with pointed direction, Invent.Math. 54, 247-259 (1979)

[11] A.D.Brjuno: Analytical form of differential equations, Trans.Moscow Math.Soc., 25 (1971) 131-288

[12] J.Martinet: Normalisation des champs de vecteurs holomorphes, Seminaire Bourbaki vol. 1980/81, Springer Lecture notes 901

[13] F.Ichikawa: Finitely determined singularities of formal vector fields, Invent.Math. 66,(1982) 199-214

[14] F.Ichikawa: On finite determinacy of formal vector fields, Invent.Math. 70 (1982) 45-52

[15] F.Ichikawa: Classification of finitely determined singularities of formal vector fields on a plane, (preprint)

その他

[16] C.Camacho, N.H.Kuiper, J.Palis: The topology of holomorphic flows with singularity, Publ.Math. I.H.E.S. 48 (1978)

[17] J.Martinet, J.P.Ramis: Problemes de modules pour des equations differentielles non lineaires du premier ordre, Publ.Math. I.H.E.S. 55 (1982)

[18] F.Dumortier, P.Rodrigues, R.Roussarie: Germs of diffeomorphisms in the plane, Springer Lecture Notes 902, 1981

On the fundamental groups of closed aspherical manifolds and related topics

神島芳宣　北海道大学

Introduction. closed aspherical manifoldsの最近の結果を紹介する、1. Closed aspherical manifoldsの例 2. Topological rigidity. 3. geometric structure of closed aspherical manifolds. 4. その他 (cobordism problem) ここではoutlineを話すことにして定理等の証明は講演においてするかあるいはそこで使われた論文を参照することにする。Mをclosed aspherical manifoldとする、定ぎよりuniversal coverがcontractible 従って、$K(\pi,1)$-manifoldである ここで $\pi=\pi_1(M)$。Closedであることから、πは type FP (i.e. Zは $Z\pi$上のfinite projective resolutionをもつ)である また、それで $H^i(\pi, Z\pi)=0$ $\forall i\neq n$, $H^n(\pi, Z\pi)$はZ-torsion free である i.e., duality group となる [B]。πは universal cover $\tilde{M}$に自由かつ properly discontinuouslyに作用する、特にπは torsion free (有限位数の元をもたない)。従って、closed aspherical manifoldの基本群は torsion free (Poincaré) duality group である

torsion free duality group を分類することは一般にむずかしい([B])。また，Poincaré duality group が与えられたとしても，finite $K(\ ,1)$-complex が存在するかそれが多様体として実現できるかというのは極めてむずかしい問題である

[B] K. Brown, Groups of virtual finite dimension Homological group theory, London Math. Soc. Lecture Note 36, 27–71 (1979)

1. Closed aspherical manifold の例.

Torus T^n は典型的な例であるが，これは，Lie group R^n をその lattice (discrete uniform subgroup) Z^n でわった homogeneous space. Lie group の homogeneous space として，実現されている例は，予稿集 [K1],[K2] を参照。次の形の存在定理を紹介する。group extension $1 \to \Delta \to \pi \to Q \to 1$, Δ は torsion free 有限生成 nilpotent group. Q は次の条件をみたす群; contractible manifold W が存在して Q は，W に properly discontinuous に作用し，商空間は compact となる。，この時，仮定より，Δ を

discrete uniform に含む connected

simply connected nilpotent Lie group N が一意的に存在する。

定理1.1 ([LR], [KLR]) π は、$N \times W$ に properly discontinuously に作用し、商空間は compact である。■

従って、特に、π が torsion free とすると、closed aspherical manifold $\pi \backslash N \times W$ が存在する。(この時、$\pi \backslash N \times W \longrightarrow Q \backslash W$ は injective Seifert fibered space with typical fiber nilmanifold という。) 定理より

系1.2 torsion free virtually polycyclic (abelian, nilpotent) を基本群にもつ closed aspherical manifold が存在。■

定理1.1において、π は normal abelian group をもつから、(first) end invariant が消える。(Lee-Raymond) 従って

系1.3 (LR) 系1.2の closed aspherical manifold の universal cover は euclidean 空間に homeomorphic。ただし、次元3, 4を除く。■

古くからの conjecture として、closed aspherical manifold の universal cover は euclidean space に homeo か、またその時、そのような多様体は Lie 群の商空間 (Locally homogeneous space) と同相になるというのがある。確かに系1.2の多様体は、それぞれ infra solvmanifold (

Riemannian flat manifold, infra nil manifold)として，実現できる．しかしながら，最近 Davis により，これが否定された．

定理1.4 [D]　closed aspherical manifold (次元4以上) でその universal cover が euclidean 空間に homeo でないものが存在する ■

これは，ある Coxeter group を構成して，それが それに associate された contractible manifold 上に reflection の群として，properly discontinuous に作用　することを示した．Selberg の結果より，Coxeter group は torsion free (normal) subgroup をもつから，それによりわったものを closed aspherical manifold としてとればよい．この closed aspherical manifold の end が消えないことを Davis は示した．従って，Tits の結果より，この基本群は，non free cyclic $Z*Z$ を含む群として，characterize される．(Tits の結果よりもし，そうでなければ，virtually polycyclic である，これは系1.3に反する)．

1.の references

[D]. M. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by euclidean space Ann. of Math. 117 (1983) 293–324

[K₁] Y. Kamishima, 変換群シンポジウム講演集
金沢大学 昭和55 (edited by 服部晶夫)
[K₂] ——, 数理研変換群シンポジウム 1981
(edited by 内田伏一)
[KLR] —, K. B. Lee and F. Raymond, The Seifert construction and its application to infranilmanifolds (to appear in the Quarterly Journal math.)
[LR] K. B. Lee and F. Raymond, Geometric realization of group extensions by the Seifert construction, (to appear in Advances in math.)
[LR] R. Lee and F. Raymond, Manifolds covered by euclidean space, Topology 14, 49–57 (1975).

2. Topological rigidity

Borel conjecture とは、二つの closed aspherical manifold な基本群が同型ならば homeo であるというものである。これが成り立つことを Topological rigidity という。古くは、Wall により、poly Z group を基本群にもつ closed aspherical manifold (次元3,4を除く) に対しは topological rigidity が成りたつことを示した。この場合、Whitehead group が消える

ことに注意する。しかし，現在の所 virtually poly $\mathbb{Z}$ (= virtually polycyclic = poly-{finite or cyclic}) group については分かっていない。現在，Farrell-Hsiang により次のことが分かっている。

定理 2.1 ([FH]$_1$) 基本群が virtually nilpotent ならば，topological rigidity が成り立つ。ただし次元 3,4 を除く ■

これは，Kirby-Siebenmann の topological surgery theory を発展させ，その方法により成功した。特に，

この surgery theory の一つの結果として，次のことが出る

定理 2.2 ([FH]$_2$). $Wh(\Gamma)=0$ if Γ is torsion free virtually poly $\mathbb{Z}$. ■

Whitehead group が消えるかどうかは別として，Novikov は，rational Pontrjagin class は，homotopy invariant であろうと予測した。i.e., manifold M に対し，map $f: M \to K(\pi,1)$ $(\pi=\pi_1(M))$ が存在する。Novikov higher signature とは $L(x)(M) = \langle L_*(M) \cup f^*(x), [M] \rangle \in \mathbb{Q}$ で定義する。ここで $L_*(M) \in H^{4*}(M;\mathbb{Q})$ は total L-genus of M。上の予想は，M と N が homotopic ならば，$L(x)(M)=L(x)(N)$ と解釈される。さて，Novikov conjecture に対し，Farrell-Hsiang は次の形で，section curvature ≤ 0 である Riemann 多様体

と同じ homotopy type をもつ closed aspherical manifold において、O.K. であることを、示した。

定理 2.3 $[FH]_3$ (stable topological rigidity) M を closed aspherical mfd, N を compact complete Riemannian manifold of non-positive sectional curvature とする。M と N が homotopic ならば、$M \times R^3$ は $N \times R^3$ と homeo である。■

さらに、compact をはずして、

定理 2.4 $[FH]_4$ N を complete Riemannian ~~mfd~~ manifold of finite volume and sectional curvature < 0。この時、M と N が properly homotopic ならば、$M \times R^3$ と $N \times R^3$ は homeo である。■

これらにより、rational Pontrjagin class は homeomorphic invariance であることに注意して、系として、Novikov conjecture ($L(x)(N)$ は homotopy invariance) が O.K. が出る。ここで N は上のような closed aspherical mfd.

2の References

$[FH]_1$ Farrell-Hsiang, Topological characterization of flat and almost flat Riemannian manifolds, Amer. J. Math 1982

$[FH]_2$ —, The Whitehead group of poly-(finite or cyclic) group. J. London Math. 24 308-324 (1981)

$[FH]_3$ —, On Novikov's conjecture for non-positively curved manifolds I. Ann of Math. 113 199-209 (1981)

[FH]$_4$ —, The stable topological-hyperbolic space form problem for complete manifolds of finite volume, Invent. Math, 69 155–170 (1982).

3, Geometric structure of closed aspherical manifolds

closed aspherical manifoldがどのような、幾何構造をもつかをみる。virtually abelianならば、それを基本群にもつRiemannian flat manifoldが存在する（定理1.1）従い、定理2.1より、virtually abelianを基本群にもつclosed aspherical manifoldはRiemannian flat structureをもつ。同じようにして、virtually nilpotentを基本群にもつ、closed aspherical manifoldは、almost flat structureをもつ（[G]$_1$, [R]）さらに、almost flat manifoldは、infranil manifoldにdiffeoである（[R], [K]$_2$（1のreference））。virtually polycyclicの時、topological rigidityが成立するかどうかわからない現在、どのようなgeometric structureをもつか問題である。勿論、virtually polycyclicを基本群にもつ、infrasolv manifoldが存在する（[AJ]）から、virtually polycyclicを基本群にもつ、(left invariant) affine structureをもつaffine manifoldがある。
(Lie groupのaffine connection)

Wallの結果に注意して，次の問題が起こる

問題1. Mを virtually polycyclic な基本群にもつ closed aspherical manifold とする。Mは，infra solv manifold に homeoか，また同値なこととして，solv manifold 上の (smooth free) finite group action は affine action に (topologically) conjugate か？

さらに，Mは affine flat structure をもつかどうかを問う。(この場合もしあれば，この affine structure は，Lie 群の affine connection からくる affine structure とは異なることに注意する) Milnor は，virtually polycyclic な基本群にもつ affine flat manifold があることを示した。即ち $\Gamma \subset A(n)$ (affine group) で $\Gamma \backslash R^n$ として実現できる。しかし残念ながら，compact にはなっていない。

問題2. virtually polycyclic な基本群にもつ，compact complete affinely flat manifold が存在するか？

さらに，Milnor [M], Auslander は次のことを予想した

問題3. Complete affinely flat manifold の基本群は virtually polycyclic か？

問題2,3 に関して，若干の補足をしておく。問題では，次元が3の場合，Fried-Goldman [FG]

(最近 後藤[G]$_2$氏によって,まず証明された)により O.K.がまされた。問題3に関して,3次元 compact なる Goldman-Fried [FG] により,O.K.,また,Goldman-Kamishima [GK] により,

compact Lorentz flat manifold なるO.K.が示されている。

基本群が virtually polycyclic である compact complete affine flat manifold に対しては,smooth rigidity 及び structure theorem が成り立つ。([FG][Ka])

定理 3.1. 基本群が virtually polycyclic である compact complete affinely flat manifold は,基本群が同型ならば diffeo である ■

定理 3.2 ([FG],[Ka]) virtually polycyclic を基本群にもつ compact complete affinely flat manifold は infrasolvmanifold に diffeomorphic である ■

また related work は reference にまとめておく。

3 の references

[AJ] Auslander-Johnson, On a Conjecture of C.T.C. Wall, J. London Math. 14 (1976) 331-332.

[FG] Fried-Goldman, Three-dimensional affine crystallographic groups, Advances in Math. 47 (1-49) 1983.

[G]₁ Gromov, almost flat manifolds, J. Diff. Geom. 13(1978) 231〜241

[G]₂ Gotô, Torsion free rank 3 virtually polycyclic group の分類 修論(東京大学) 1983

[M] Milnor, On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, Adv. in Math. 25(1977) 178−187

[R] E. Ruh, almost flat manifold, to appear 1981

[GK] Goldman-Kamishima, The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic, submitted 1982

[Ka] Kamishima, Properly discontinuous actions of subgroups in amenable algebraic groups and its application to affine motions, submitted 1982

affine manifolds に関するもの

Goldman-Hirsch, A generalization of Bieberbach's theorem Invent. math. 65 1981 (1−11)

Fried-Goldman-Hirsch, Affine manifolds and solvable groups Bull. Amer. Math. 1980 vol. 3, 3.

——, affine manifolds with nilpotent holonomy, Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 487−523

Goldman-Hirsch, Flat bundles with solvable holonomy Proceeding of A.M.S. 83(1981)

——, ibid. II obstruction theory, Proceeding of A.M.S. 83(1981)

Goldman, On the Polynomial cohomology of affine manifolds Invent. Math. 65(1982) 453−457

K.B. Lee, Aspherical manifold with virtually 3-step nilpotent fundamental group, to appear in A.J. Math 1982

—, Geometric realization of $\pi_0 \mathcal{E}(M)$, Proceeding AMS 1982

—, Geometric realization of a finite subgroup of $\pi_0 \mathcal{E}(M)$, II to appear 1982

K. B. Lee - F. Raymond, Topological affine and isometric actions on flat Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 16 (1981) 255-289

—, Ibid II, Topology and its appl. 13 (1982)

4. その他

4.1. Closed aspherical manifold が (effective) な circle action をもてば orbit の基本群は injectively に全体の基本群の中心に含まれる。(Conner-Raymond). 逆は問題である

問題 4.1. Closed aspherical manifold の基本群が中心をもてば、その中心は有限生成で (nontrivial) な toral action T^s (s は中心の rank) が存在するか?

Topological rigidity があるような closed aspherical manifold は O. K. である。例えば poly Z - manifold, virtually nilpotent を基本群にもつ closed aspherical manifold. また、Gromoll - Wolf (also Law Son-Yau [GW], [LY]) により、nonpositive sectional curvature をもつ compact Riemannian manifold も O. K. である。さらに、

定理 4.2 ([Ka] 3 の reference) compact complete affinely flat manifold について、問題 4.1 は正しい。■

4.2. indefinite metric をもつ aspherical manifold. type$(1,n)$ の complete indefinite metric で constant curvature -1 をもつ pseudo Riemannian manifold は complete Lorentz space form とよばれる. どのような群が Lorentz space form の基本群となるかが Kulkarni [Ku] により研究された、結果は省略するが、related work は Kamishima [Ka], Kulkarni-Raymond [KR] を参照。

問題 4.3. Oriented Lorentz space form $\Gamma\backslash S^{1,n}$ は circle action をもつか ($S^{1,n}\cong S^1\times R^n$ より, 基本群は中心 Z をもつ)?

問題 4.4. virtually polycyclic な基本群をもつ compact Lorentz space form は存在するか?

注. complete Lorentz metric をもち, その curvature が 0 である pseudo Riemannian manifold は, 上述の Lorentz flat manifold である. type $(n,1)$ $(n\geq 2)$ の complete metric をもち, constant curvature $+1$ であるものは, relativistic space form とよばれ その形は $F\backslash S^{n,1}$ ($S^{n,1}\cong S^n\times R^1$) で基本群は有限群 F である ([W]).

4.3. Cobordim property. Closed aspherical manifold はいつ bound されるかという問題がある (C-F). 例えば, stationary point free な toral action 及び $(Z_2)^k$-action があれば, rational Pontrjagin (resp. Stiefel-Whitney) numbers は vanish する. Riemannian flat manifold は rational Pontrjagin numbers は vanish するから, $(Z_2)^k$-action を構成

して，その fixed point data を調べることによって，Hamrick-Royster は，次のことを示した

<u>定理 4.5</u> [HR]. Riemannian flat manifolds は boundaries. ■

最近，Farrell-Smilka は，almost flat manifold (従って infranil manifold に diffeo である) に対し，次のことを示した

<u>定理</u> 4.6 [FS]. M を closed aspherical manifold とする．もし $\pi_1(M)$ が index 2 の nilpotent subgroup をもつならば，M は boundary となる ■

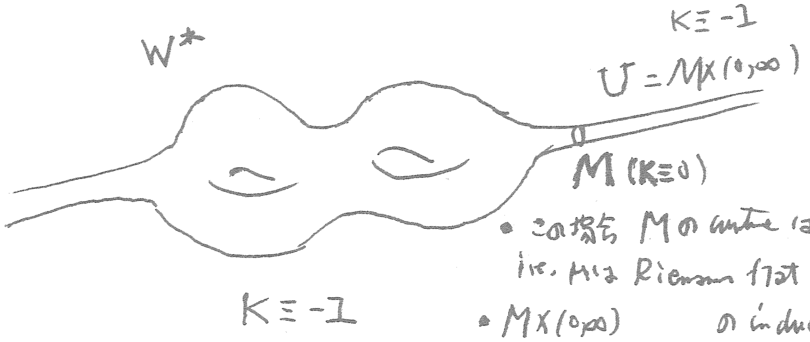
従って特に，index が $2m$ (m odd) の nilpotent subgroup をもつような M に対して，定理は正しい．

この時，Farrell は，次の予想を立てた．

<u>Conjecture</u> 4.7. M を flat Riemann manifold．この時，$M=\partial W$ で，$W-\partial W$ が complete hyperbolic structure with finite volume をもつものがとれる．

<u>Conjecture</u> 4.8. M を almost flat manifold とする．この時，$M=\partial W$ で $W-\partial W$ が complete Riemannian structure with finite volume and of sectional curvature $K<0$ をもつものがとれる．

最後にこれらのconjecturesの幾何学的意味を調べる。W^*を complete Riemannian manifold with finite volume and of sectional curvature <0 とする $(b<K<a<0)$。この時, W^*は finitely many ends をもつ。各 end は Riemannian collared i.e., end E のある neighborhood U に対し, compact codim 1 submanifold M が存在して, $M\times(0,\infty)\to U$ が diffeo になる。E_i ($i=1-k$) を ends, $M_i\times(0,\infty)$ をその Riemannian collared とする。$W = W^* - \bigcup_{i=1}^{k} M_i\times(0,\infty)$ とおく。
W^* は W の内部に diffeo である。従って, $\cup M_i = \partial W$, $W-\partial W \cong W^*$。この時, さらに, Gromov-Margulis [G], Eberlein により, $\pi_1(M_i)$ は virtually nilpotent となる。従って, M_i は infranil manifold に homeo である。恐らく, almost flat manifold に diffeo であろう。もし M_i が高々一つであれば, 上の conjecture をみたす almost flat manifold があることを示している。(図は, 特別の場合, conjecture 4の例に当る)。



- この場合 M の curvature は 0. i.e. M は Riemann flat manifold.
- $M\times(0,\infty)$ の induced metric に関する curvature は -1。特に, $M\times(0,\infty)$ はよく知られた Warped product である。

4 の References

Gromoll-Wolf, Some relations of the fundamental groups, Bull. Amer. Math. 77 (1971) 545-552

Yau, On the fundamental group of compact manifolds of nonpositive curvature, Ann. of Math. 93 (1971) 579-585

Kulkarni, Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, Adv. in Math. 40 (1981) 10-51

Kulkarni-Raymond, in preparation.

Kamishima, Closed aspherical manifolds dominated by Lorentz space forms and virtually polycyclic groups, Preprint 1983.

Wolf, Homogeneous manifolds of constant curvature, Comment. Math. Helv. 36 (1961) 112-147

Conner-Floyd, Differentiable periodic maps, Springer-lecture Notes 1964

Hamrick-Royster, Flat manifolds are boundaries, Invent Math 66 405-413 (1982)

Farrell-Smilka, Do almost flat manifolds bound?, Preprint 1982

Gromov, Manifolds of negative curvature, J. Diff. Geom 13. 223-230 (1978)

Eberlein, Lattices in spaces of nonpositive curvature, Ann. of. Math 111, 435-476 (1980)

Browder-Hsiang, G-actions and the fundamental group, Invent. Math. 65. 411-424 (1982)

Donnelly-Schultz, compact group actions and maps into aspherical manifolds. to appear

Kulkarni, Pseudofree actions and Hurwitz's 84(g-1) theorem, Math. Ann. 261, 209-226 (1982).

——, Surface Symmetries, Holomorphic maps and tessellations, preprint. 1982.

北海道大学 理学部 数学教室. (6月3日, 1983 提出).

SYMMETRIES ON 3-MANIFOLDS

Sadayoshi Kojima

§ 1 Introduction

Let M be a smooth manifold. A symmetry on M is a periodic automorphism with non empty fixed point set. It can be regarded as a generator of a finite cyclic group action with fixed point property mentioned above. In the study of symmetries, 3-dimension seems to have some special interest since we can visualize problems by drawing pictures. For example. the Smith conjecture, which was completely solved in 1978, had been rejecting quite many challenges by topologists in the last 40 years and had been continuously supplying new interesting problems.

The affimative solution of the Smith conjecture, in contrast with earlier counterexamples to its generalization for more than 4 dimensions, tells us that the 3-sphere admits only visually obvious symmetries. This seems to be caused by extremely beautiful geometric properties of 3-dimensional manifolds which are recently noticed. Such a special set up could turn out to give another reason of strong interest in dimension 3.

In the successful challenge to the Smith conjecture in 1978, were involved so many mathematical tools which seem quite new for the 3-dimensional topologists before Meeks-Yau and Thurston. Since then, the proof of the Smith conjecture has been reviewed by several geometers . And now we all are convinced that the new viewpoint of 3-manifold theory appeared in the solution, which is based on the framework by Thurston, is important. As a matter of fact, we can see how it works out from quite many new results which have been being recently produced. Among them, there is a new proof of the Smith conjecture by Culler-Shalen.

In his course of 1981/82 at Princeton University, Thurston has tried to give a completely geometric proof of the Smith conjecture without involving the minimal surface theory. The idea is to give geometric structures on the orbifolds by the hyperbolic Dehn surgery. The result he got does not only stay at giving a new proof of the Smith conjecture, but also supplies great progress towards his geometrization conjecture.

Since I learned this theorem at Hawaii, I have been trying to understand its meaning and have found it reducing topological questions on symmetries to geometric ones. So I studied geometric symmetries on geometric manifolds and could answer a few questions concerning finiteness peoperties of symmetries. In my talk, I will try to sketch Thurston's idea in the first half and then would like to discuss several non immediate consequences I got.

§ 2 Orbifolds

For the stuuy of finite group actions on manifolds, the most fundamental tool is the orbit space with local isotropy data. The orbifold defined in [2] is considered as a space with just local data. Strictly speaking, the orbifold is a topological space locally modelled on the quotient of an euclidean space by some finite orthogonal action. Of course there is an obviuous compatibility condition for patching of local charts. Thus for each point of an orbifold, an isotropic group action on the euclidean space is assigned. Since orfifolds are locally modelled on euclidean spaces over orthogonal actions, we can naturally define riemannian structure on them by modelling riemannian euclidean spaces over isometric actions. In this case, the isotropic group action for each point is a tangential representation of the isometric action. When a riemannian structure on the euclidean space is homogeneous, i.e. the group of isometries on it acts transitively, the structure is called geometric. Geometric structures on orbifolds especially in dimension 2 and 3 come into our interest later.

Let us see first 2-dimensional orbifolds just topologically. Since there are only three types of finite subgroups of $O(2)$, namely generated by a reflection, a rotation of rational angle and their combination, we can describe all types of singularities in 2-orbifolds by the following figure :

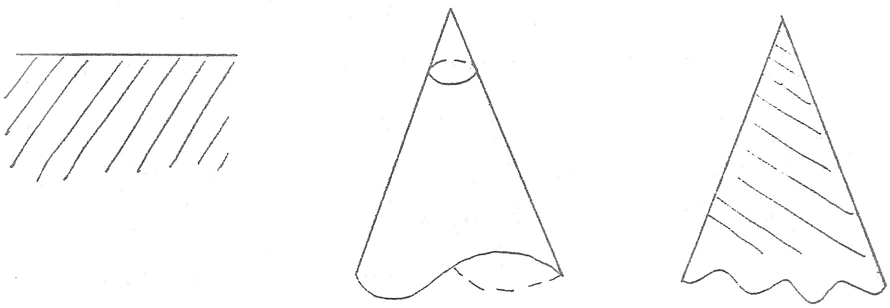


FIGURE 1

These singularities are named by a mirror boundary, an elliptic point and a corner reflector respectively. We now think of the case when a 2-orbifold O is obtained as a quotient of a closed surface S by a finite group action. We can then naturally define the euler characteristic $\chi^{orb}(O)$ of O by $\chi(S)/|G|$ where G is a finite group in question acting effectively on S.

Now there are three well known geometries in dimension 2. Those are the spherical geometry $(S^2, SO(3))$, the euclidean geometry $(E^2, Isom^+E^2)$ and the hyperbolic geometry (H^2, PSL_2R). A closed surface admits precisely one of these geometric structures according to whether its euler characteristic is greater than, equal to or less than 0. In the surely incredible book by Thurston [2], he points out that this is also true for good 2-orbifolds. Namely

Lemma. *The 2-orbifold S/G admits a spherical, euclidean or hyperbolic structure according to whether* $\chi^{orb}(S/G)$ *is* $\gneq$, $=$ or $\lneq$ 0.

Let us see some examples to make the meaning of the lemma clear. Take a triangle orbifold O with corner reflectors of order p, q and r. Its euler characteristic $\chi^{orb}(O)$ is equal to $(1/p + 1/q + 1/r - 1)/2$ and as is well known, it admits a geometric structure (sometimes called a geometric triangle). This is a typical sample to see what the lemma says. See the following Figure.

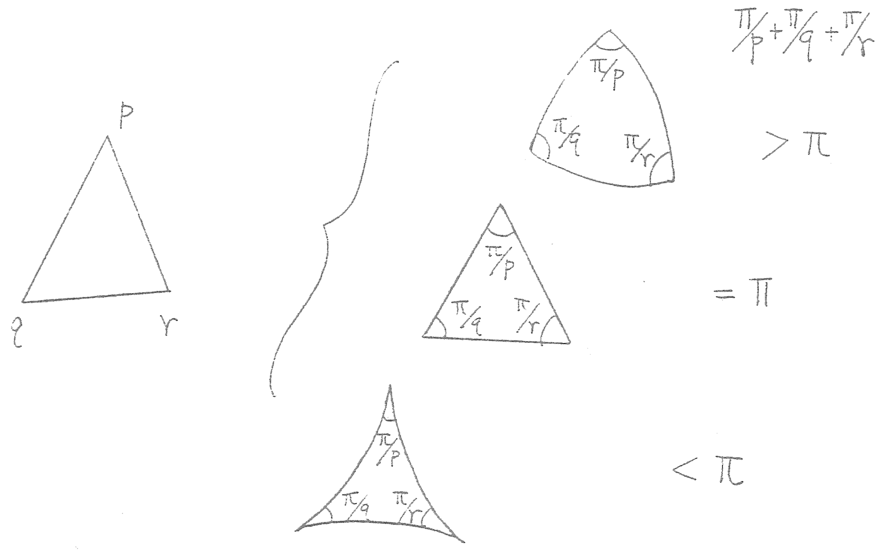


FIGURE 2

In the lemma, there is no metrical assumption on S and G, however the conclusion asserts the existence of a compatible metric on S with the action by G. More precisely we can conclude from the lemma that

Proposition. *For any finite group action on S, there is a geometric structure (a metric of constant curvature) with respect to which the action is isometric.*

This shows that a finite group action on S^2 is actually conjugate to an orthogonal action. The Smith conjecture in the most general sense states that the same fact also holds for S^3. Namely every finite group action on S^3 is conjugate to an orthogonal action. However the restricted version of this conjecture to orientation preserving symmetries has been actually famous and often refered as the Smith conjecture. The Smith conjecture solved is in fact this restricted version and the other parts are still open except for a few cases.

Since the 2-dimensional case can be known from the proposition, we may expect similar results in dimension 3 to prove the Smith conjecture. That is what Thurston was attempting in his course.

§ 3 Thurston's theorem

There are precisely eight geometries in 3-dimensional case. Those are the spherical geometry, euclidean geometry, hyperbolic geometry, nilpotent geometry, Lorentz geometry, solvable geometry and two product geometries. The well detailed description of these geometries can be found in Thurston's expository article [3], so I do not try to give their precise definition here. However you can see there that every geometries are more or less familiar with us especially anyone specializng in 3-dimensions or transformation groups.

In the case of dimension 2, every closed surface admits a geometric structure, however we can not expect such facts for 3-manifolds. But an incredible fact in dimension 3 is that we can do expect the existence of a canonical decomposition of a 3-manifold each piece of which admits a geometric structure. This is Thurston's conjecture. Such a decomposition with geometric strctures on each piece is called a geometric decomposition and a 3-manifold which has a geometric decomposition is called geometric. Then Thurston's conjecture states that every closed 3-manifold is geometric. This conjecture is true for quite large class of 3-manifolds, such as Haken, almost all results of Dehn surgeries, in the light of Thurston's work with Jaco-Shalen, Johannson's torus decomposition. Thurston's theorem (see [4]) proved in his course is

Theorem (Thurston). *Let M be a closed orientable prime 3-manifold which admits an orientation preserving symmetry f. Then M admits a geometric decomposition with respect to which f is an isometry.*

As you can see from the 2-dmesional case, this was proved by gving a geometric structure on the orbifold. The idea is based on the hyperblic Dehn surgery. In the original version, several conditions on the theorem are replaced by weaker ones, however we won´t discuss them to avoid insignificant confusion. Also we won´t try to figure out the proof. Here we do discuss several non immediate consequences from the theorem.

§ 4 Consequences

Let M be a 3-manifold and let f be its orientation preserving symmetry. Since f preserves orientation, the fixed point set forms a link in M. In the orbifold M/<f>, the image of the fixed point set by the projection again forms a link. If the isotropy group of any point not staying on this link is trivial, then M can be viewed as a branched covering space of $X_{M/\langle f\rangle}$, the underlying topological space of M/<f>, branched along the link. Thus the study of symmetries on 3-manifolds is closely related to the study of branched covering spaces. Say, there is a knot theoretical form of the restricted version of the Smith conjecture. That is,

<u>Smith Conjecture</u> : <u>Only the trivial knot can be a fixed point set of an orientation preserving symmetry of</u> S^3.

It is easy to check the equivalence of two distinct statements. Now think of the orbifold $S^3/\langle f\rangle$ where f is an orientation preserving symmetry. Since $S^3 \longrightarrow X_{S^3/\langle f\rangle}$ is regarded as a branched covering, the underlying space of $S^3/\langle f\rangle$ is a homotopy 3-sphere. If the image of the fixed point set in $X_{S^3/\langle f\rangle}$ bounds a disk there, then lifting it and we get a embedded disk bounded by the fixed point set in S^3. And therefore we have a stronger conjecture :

<u>Branched Covering Conjecture</u> : <u>If the branched covering space of a knot in a homotopy 3-sphere is simply connected, then this knot bounds a disk</u>.

The easiest generalization of the knot theoretical version of the Smith conjecture when f is an involution is the conjecture by Birman and Montesinos.

<u>Birman-Montesinos Conjecture</u> : <u>If the 2-fold branched covering space of a knot (or a link) in</u> S^3 <u>is a lens space, then the knot (link) must be 2-bridge</u>.

The class of 2-brige knots and links is supposed to be the simplest non trivial one from a decompositional view point.

Now I will sketch how the proofs of these conjectures are derived from Thurston´s theorem. First of all, the Smith conjecture is the direct consequence of the theorem since the geometric structure on S^3 is unique and finite cyclic subgroups of $SO(4)$ are well known to be classified. f must be a rotation along some axis.

We then derive a proof of the branched covering conjecture by the following argument. Let N be a simply conneted branched covering space branched along the knot in the homotopy 3-sphere. Suppose that N is prime, then we can use Thurston´s theorem. It says that N admits a geometric structure. Since only the 3-sphere is a simply connected geometric manifold, N must be S^3. And also since the symmetry in question is an isometry, it must be a rotation along some axis. Hence the fixed point set in downstairs must bound a disk. When N is not prime, by the equivariant sphere theorem by Meeks-Simon-Yau, we can derive from the same argument that the symmetry in question is essentially linear in the sense of Davis-Morgan. Namely there is a system of equivariant spheres which splits the action into the linear part and parts of switching homotopy spheres. Thus we got a stronger assertion. That is, any symmetry on a homotopy 3-sphere is essentially linear. This generalizes a theorem by

Davis-Morgan for the case of cyclic group actions.

To see how we derive a proof of Birman-Montesinos conjecture, we must study every involutions on lens spaces. However Thurston's theorem says that the symmetry in question may be assumed isometric with respect to a metric of constant curvature. Thus all we need is to study isometric involutions on lens spaces. Then by a little careful study of orthogonal actions on lens spaces, we can show that any symmetry is fiber preserving with respect to a geometric Seifert fibration of a lens space, where geometric here means a fibration induced from a geometric structure. Then the rest is just drawing pictures as in the section 13 of Thurston's book. This conjecture has been also earlier and independently proved by Hodgeson and Bonnahon.

Next I would like to discuss some results I got. It concerns with finiteness properties of symmetries. There are several conjecture concerning this property.

Tollefson's question : Are there only finitely many conjugacy classes of a finite cyclic group of given order in Diff M, where M is a closed 3-manifold ?

Thurston's question : Is there an upper bound of the order of finite subgroups in Diff M when M does not admits a circle action ?

Both questions seem likely to be answered affimatively, however we have not had complete solutions yet. What I got is partial but considerably wide answers to these questions. Roughly speaking, I got affimative answers to the finiteness questions for manifolds without $S^1 \times S^2$ summands and for finite cyclic subgroups in Diff M generated by an orientation preserving symmstry. The precise statements are given in my paper [1] and also in the abstract for the anual meeting of the Japan Mathematical Society of 1983 and I would like to refer them.

These two questions were concerning with properties of general 3-manifolds. However before such questions arose, there must be strong evidence. Usually in dimension 3, the evidence for the conjecture could be often found in the knot theory. For these questions, there are not actually an evidence but very likely conjectures related.

Montesinos Conjecture : No closed 3-manifold admits infinitely many involutions with orbit space S^3.

Fox-Sakuma Conjecture : Any non trivial knot (link) has only finitely many periods.

Both conjectures are then immediately follow from my theorems and now they are theorems. I should point out that very recently Flapan and independently Hillman got a proof of the Fox-Sakuma conjecture without using Thurston's theorem but with using the least area surface theory of Freedman-Hass-Scott.

In the proofs of theorems I got, what I did is to have shown finiteness properties of geometric symmetries on geometric manifolds. Then by using Thurston's theorem, I got conclusions.

References

[1] Kojima, S. : Finiteness of symmetries on 3-manifolds, preprint.

[2] Thurston, W. : The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Note, Princeton University (1978/79).

[3] Thurston, W. : Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. (New Series) Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357 - 381.

[4] Thurston, W. : Three manifolds with symmetry, preliminary report (1982).

Department of Mathematics

Tokyo Metropolitan University

Elementary ideals in knot theory

Florida State University

樹下眞一

狭い意味での *knot theory* は3次元ユークリッド空間内での単純閉曲線の空間内での同位の研究であるが, J.W. *Alexander* [1] によつて定義された多項式 (*Alexander polynomial*) は計算可能な基本的な不変量の一つである。その後 *Alexander polynomial* と *knot* の *complementary domain* の基本群との関係が R.H. Fox によつてより広い視野に立つて研究され, *free differential calculus* が形成された [2]. この *free group-ring* の上での *free differential calculus* にもとづく理論はもともとより広い範囲に応用出来るように代数的に構成されているにもかかわらず実際上の応用は余りされていないようなので, ここでは例をあげて論じてみたい。

1. まず *finitely presented group*
$G=\{x_1,\cdots,x_n\,;\,r_1,\cdots,r_m\}$ $(m\geq n)$ が与

えられたとき，*free group* $F=\{x_1, \cdots, x_n\}$ からGへの *natural* な *homomorphism* をϕ，またGからある（乗法的）*abelian group* Hへの *homomorphism* をψとする。またJを整数全体の集合とし，JF, JG, JHをそれぞれF, G, HのJの上での *group-ring* とすれば，ϕ, ψはそれぞれJFからJG，JGからJHへの *ring homomorphism* に *natural* に拡張される。*Fox* の *free derivative* を使って $r_{ij}=\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\psi\phi} \in JH$ と定義し，$m \times n$行列$M=(r_{ij})$ を考える。一般に *commutative ring* Rの上の$m \times n$行列 $M=(m_{ij})$ $(m \geqq n)$が与えられたとき，その *i-th elementary ideal* $E_i(M)$は次のようにして定義される：

(1) $0 \leqq i < n$ のときは，M の $(n-i)\times(n-i)$ 部分行列の行列式から生成されるRの *ideal*，

(2) $i \geqq n$ のときは R自身。

そして $M=(r_{ij})$ としたときは，$E_i(M)$ はGとψにだけ *depend* する不変量になる。

2. 古典的なS^3の中の $K=S^1$ の場合，Gを $\pi_1(S^3-K)$

とし H を t で生成される（乗法的）*infinite cyclic group* とすれば $H \approx G/[G, G]$。しかし $\psi: G \to H$ は一意的にはきまらないが K の *orientation* を考慮すれば一意的になり，E_i は JH の *ideal* で K の同位の不変量になる。この E_1 は *Alexander polynomial* $\Delta_K(t)$ によって生成される *ideal* である。S^{n+2} の中の *oriented* S^n に対しても 1 次元の E_i が同様にして定義される。

S^3 の中の μ 個の互に交わらない方向づけられた単純閉曲線の集りを L とする。$G = \pi_1(S^3 - L)$ とし，H を $t_1, t_2, \cdots, t_\mu$ から生成される（乗法的）*free abelian group* とすれば $H = G/[G, G]$。ただし $\psi: G \longrightarrow H$ は一意的ではないが L の *orientation* を考慮すれば一意的にきまり，JH の *ideal* E_i は L の同位の不変量になる。この E_1 は *fundamental ideal* $(1-t_1, 1-t_2, \cdots, 1-t_\mu)$ と *Alexander polynomial* $\Delta(t_1, t_2, \cdots, t_\mu)$ から生成される *ideal* の積として表せる。

3．L を S^3 内の *linear graph* とすれば事情はも

っと複雑になる。この場合，またもっと一般にS^nの中の多面体Lの場合でも，次のように考えるのがよいようである［3］（ここではS^n-Lの *connectedness* を仮定する）。まずlをLの上の整係数の *cycle* とすれば任意の$g \in \pi_1(S^n-L)$に対してlとgとの間の *linking number* $link(l, g)$がきまる。Hをtで生成される（乗法的）*infinite cyclic group* とし $\psi(g) = t^{link(l,g)}$ とすればψはGからHへの *homomorphism* になる。従ってJHの *ideal* $E_i(l)$はGとlによってきまる。それでLのS^nの中での同位の不変量を求めるためにはあらゆるlに対する$E_i(l)$の集合を考えなければならない。

S^3の中の *linear graph* の研究はS^4の中の 2-*link*（S^4の中のいくつかのS^2の集り）の研究に応用出来ることを注意したい［4］。また上記の理論がS^3の中の境界のある開曲面Fに対しても適用されるので，それが *knot* の *minimal spanning surface* の研究に応用出来ることを S. Suzuki が示した［6］。

S^nの中のLがμ個の *component* からなれば Hを$t_1, t_2, \cdots, t_\mu$から生成される（乗法的）*free* abelian group として上述の link の場合とよく似た理論が形成される。

4. S^4の中のP^2の場合は Alexander duality theorem により $H_1(S^4-P^2)=Z_2$ なので，P^2の2次元基本 cycle (mod 2) と $g \in \pi_1(S^4-P^2)$との間の linking number も mod 2 で定義され $\psi: G=\pi_1(S^4-P^2) \rightarrow G/[G,G]=H_2$ が一意的にきまる。ただし，H_2は(乗法的) cyclic group of order 2。 従って JH_2 の ideal E_i が同位の不変量として得られる[5]。

空間内に2点A，Bをえらび，AとBとをn個の互に交わらない単純曲線で結べばθ_n-curve が得られる。この場合もθ_nの上で基本 cycle l (mod n) が得られるので l と $g \in \pi_1(S^3-\theta_n)$ の間の linking number が mod n で定義され $\psi: G \rightarrow H_n$ が一意的にきまる。ただし，H_nは(乗法的) cyclic group of order n。 従って JH_n の ideal E_i が同位の不変量として得られる[5]。

このθ_nの場合と前に述べた linear graph の場合とは同位の equivalence の定義が違っていることに注

意されたい。

5. S^3の中の境界のない閉曲面Fの場合は，S^3-Fが2つのcomponentからなるので上記の理論はそのままでは適用出来ないが，$S^3-F=A\cup B$と2つのcomponentの和に分ければ，A，Bはともにlinear graphのcomplementary domainとhomeomorphicなので，A，Bそれぞれについて上記の理論が適用され，このことからFの同位の性質を研究することが出来る。