第30回

トポロジー・シンポジウム

講　演　集

昭和57年7月20日～22日

於　山　梨　大　学

昭和57年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号　57340002

序

この講演集は、昭和57年7月20日から22日の間、山梨大学で開催される第30回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費補助金・総合研究（A）「トポロジーの総合的研究」（課題番号 57340002）により作られたものであることを附記しておく。

昭和57年7月

総合研究（A） 57340002

研究代表者 菅原 正博

今年は全日本トポロジーシンポジューム30周年に当ります．過去の開催場所を書きます（誤りがありましたらお知らせ下さい．誤がないことを祈ります．　横田一郎記）．

第1回	昭和26年	東大駒場	16	41	御殿場（国際キリスト大学）
2	27	東北大学	17	42	妙高高原（新潟大学）
3	28	大阪市立大学	18	43	熊本大学
4	29	新潟大学	19	44	群馬大学
5	30	九州大学	20	45	信州大学
6	31	信州大学	21	46	北海道大学
7	32	愛媛大学	多様体国際シンポジューム の為 2年間お休		
8	33	山形大学	22	49	琉球大学
9	34	富山大学	23	50	東北大学（宮城教育大学）
10	35	六甲（神戸大学）	24	51	信州大学
11	36	信州大学	25	52	島根大学
12	37	金沢大学	26	53	新潟大学
13	38	浅虫温泉（弘前大学）	27	54	北海道大学
14	39	山口大学	28	55	茨城大学
15	40	北海道大学	29	56	高知大学
第30回	昭和57年	山梨大学			

目次

古典を読む

— Gauss とトポロジー —

寺阪英孝

Gauss がトポロジーについて深く思を凝らすようになった因縁のようなものを考えてみると，Gauss が19才になろうとしていたある朝，正17角形の作図可能性を発見したこと，Gauss が Göttingen 大学時代，ハンガリーの W. Bolyai と知り合ったこと，1801年の元日に Piazzi が小惑星第1号 Ceres を発見したことがあげられる．その理由は次にあげる Gauss 関係の資料から読みとれると思われるが，講演の折かんたんに説明する．

資料の最後にあげた『曲面論』に秘められたトポロジーについては，講演のとき臆測を述べるつもりである．

1775.2.9. Wolfgang(=Farkas) Bolyai
Bolyaで生れる。いわゆる神童であったが少年時代良師に恵まれず，数学を志ざすようになり，た1796年には特に幾何学の基礎（平行線公理の証明が目標）について自己流の考をもつようになった。

1777.4.30. Carl Friedrich Gauss:
ドイツのBraunschweigに生れる。
Bartels(1769~1836)という良師（この人は後年Lobačevskiiの先生でもあった）に恵まれBraunschweigというよい環境が幸したので，数学の早熟的学力はとみに進み。

1795.10.15. Göttingen大学入学
このときは既にEuler, Lagrange, Legendreを上廻る数論の結果を得ていたことを知り，遂に

1796.3.30: Gauss: "円分割の原理，これより円の幾何学的17分割，等．Mart.30. Br."と研究メモいわゆるTagebuchの1°に記入し．彼の整数論をほぼ完成することができた

同年 10.11. W. Bolyai göttingen 入学

Gauss を知り, Gauss はまた W. が特に幾何学の基礎について独特の見解をもっているのに驚き、両人意気投合する

1' Gauss は幾何学の基礎について考えるようになり

1797.7.28 Gauss: Tagebuch 72°. "平面の可能性を証明せり" と記入.

Gauss はその後、郷里に戻ることとなり

1798.9.28 (月曜日) Gauss: götting を出, 車中に一泊を明かし, 翌29日長雨にたたられた後, Braunschweig に安着.

9.30. 以上を W. Bolyai に報告している

その後 W. Bolyai は国に引上げることとなり, 談合の末

1799.5.24～25: Gauss と W. Bolyai: Harz 地方の Clausthal (göttingen からも Braunschweig からも直線的にほぼ 50 km) に会合して, 最後の別れを惜しむ.

〃 12.16 Gauss (Helmstedt より) W. Bolyai

宛の書信で、göttingen時代、彼がW.の幾何学の基礎研究について、もっと深く問い糺さなかったことを悔いている。

1801.1.1 イタリアのG. Piazzi (1746～1826)が新星(小惑星第1号 Ceres)を発見したが、僅かの観測の後、姿を見失う。

この年 Gauss: Disquisitiones Arithmeticae (整数論) 出版

9月中旬: Tagebuch 119° "極めて簡単に、迅速に天体の軌道の要素を調べる新法"(Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi. Brunsv. Sept. m[edie])

8月中旬: Tagebuch 120° "月の運動の理論を手掛けた" Theoriam Lunae aggressi sumus. Aug.

10月: Tagebuch 121° 理論天文学に極め

て有効な、多くの新法式を発見せり
(Formulas permultas novas in
Astronomia Theorica utilissimas
eruimus. 1801. Mense Octobr.)
これにより Gauss は Ceres の軌道を決定し、
12月 これを Monatliche Correspondenz に発
表。(Gauss 全集 VI, p.199)
12.7 Ceres は von Zach によって再発見
1802.1.1 Ceres、Olbers によって再確認
Gauss が Schedae と記したメモ帳 Aa, ..
An (Gauss 全集 X1, p.576 参照) の Af
に重要データとして 次の記載があるという
(全集 X1, p.488)

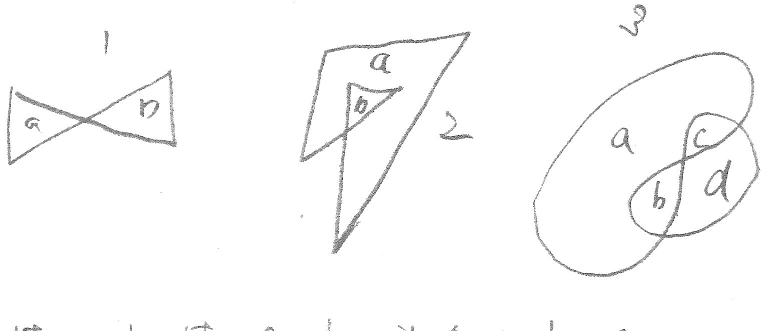
1. Jan.	1801	⚳	entdeckt
19. Febr.	1803	⚴	wiedergefunden
28. März	1802	⚴	entdeckt
30. März	1796		Construction des 17 Ecks
30. April	1797	*	
7. Dec.	1801	⚳	wiedergefunden

ただし ⚳ は Ceres，⚴ は小惑星第2号
Pallas (Olbers (1758~1840) 発見)
* は誕生
尚 Ceres の再発見については Gauss 全集 X_1
p.563.

1804. 11.25 Gauss：W. Bolyai の平行線公理証明の論文に根本的な誤があることを説明，指摘した書簡.
1807. 7月 Gauss：Göttingen 大学に招聘され，天文台長を兼任する.
1809. Gauss：天体運動論 Theoria motus corporium coelestium 出版
1817. 4.28 Gauss：Olbers 宛の書信で従来の幾何学の必然性は証明できないことを確信するに至った，と述べている.
1822~1832 頃，Gauss は三角測量に本格的に従事する．地球の形状を定めること，地図を精密に画くことなどから起ったと思われるこの研究

1822. 12月 Gauss: "曲面間の等角写像の一般解法" を Copenhagen 王立科学院に懸賞論文として提出する.

1825 10.30 Gauss より Olbers 宛の書信
(参考文献(5), p.73~2 に一部紹介のもの、Gauss 全集 VIII, p.398~400):
…面積を式で表わす場合には負の値をもたせてやることも立派な意味をもつので、これが明確に合うような面積の概念を決めなければなりません。ただそう致しますと、一歩進んで、周囲が一度ならず何度も自身と交わるような図も考えなければなりません。例えば



では 1 は $a-b$ または $b-a$

2は $a+2b$

3 は $a-d$ か $d-a$

となります。……これらは曲面の場合にも
応用しなければなりませんが、閉曲面の
場合だと（下線筆者）まずまず様々
の変更や決め方が必要になります……

同年 11.21：Gauss より Schumacher への書
信（参考文献(5) p.74 に一部紹介。
ただしシューマッハ宛をオルバース宛と誤記し
てある）：……少し前から、私が計画している
高等測地学 Höhere Geodäsie の基礎
になる曲面論の一部を、またやり始めました
これは内容豊富であると同時にむずかしい
問題でもあるので、他の仕事をやる気へは
ならないでいます。困ったことに、今まで既知で
あったことも、それと別の新らしい研究へ適合
するように展開しなおさなければならず、大
変大きなようになってしまうのです。様々の枝を
それからそれへとたどって行かなければならず、
何週間も続く緊張した深思を必
要とするものがいくらでもあります。その多
くは、まだ殆んど全く手がつけられていない

分野にある。いわゆる位置の幾何(Geometria situs)に属するものだが…

この頃のものと思われる(Stäckel) geometria situs 関係のメモが、図入りで Gauss 全集 VIII, p.271 以下に収めてある

1827. 10月 Gauss: Disquisitiones generales circa superficies curvas(曲面の一般的研究)、Göttingen 王立科学院に提出。

Gauss は測地学に数学的の基礎を与えるために曲面論を作ったわけであるが、その動機の中には Nicht-euklidische Geometrie の成立を実証しようとした目的が入っていたようであり、曲面論が出来て見ると、その中から様々のトポロジー的の疑問点もでてきた。非ユークリッド幾何、曲面のトポロジーは『曲面論』には表面上でていないところが、この論文が吾等として非常に面白いわけである。

参考文献

(1) P. Stäckel: Wolfgang und Johann Bolyai. (Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie, II), 1918.

(2) Carl Friedrich Gauss Werke (全集) IV, VIII, X_1, X_2.

(3) F. Schmidt - P. Stäckel: Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai, 1899. (復刻版, 1972)

(4) 高木貞治：近世数学史談，共立出版

(5) 寺阪英孝，静間良次：19世紀の数学，幾何学III（数学の歴史 8b，1982，共立出版）

昭和初期までの、トポロジーの話、小松醇郎

昔の数学の話は、現代の数学にはつながらないので、若い人には関心が薄いかもしれませんが、今一寸調べた事だけでもこの機会に述べさせて頂きます、半世紀以上も昔の事なので、著しい業績もありますが、つまらないものもあります。遠藤利貞（有名な和算史家）も言っているのですが、昔の仕事をただ馬鹿にしてはいけない、その仕事は当時の人は、それなりに苦労して考えてきた事であるからですと。

さてこの話に登場してくるだろう学者は
岡本則録、和田健雄、米山国蔵、原富慶太郎、W. Süss、の5人位になり
宮崎忠保、林鶴一、(三上義夫)、辻正次、寺阪英孝
岡本のあと 原富のあと
ましょう。

まず岡本則録は1847（弘化4）年江戸に生れ、長谷川弘に和算を学び、関流の免許を得た人である。洋算を学んだ経路はよく分らないが、主として独学であったといわれる。

明治10年には、学習院学監であった、そして数学会社社員と成り、11年から2年間位数学会社社長を勤めた、洋算を相当に学び、当時菊池大麓等洋学者と共に一流の学通家であった、明治16年には査氏（Church）微分積分学（上巻）の翻訳本を刊行した、

この岡本則録が明治22年より Königsberg の橋渡りの問題から、1筆書きの問題の解決までを雑誌"数理会堂"に連載している。こんなやさしい問題をと思われるかもしれないが、今から90年以上昔であり、当時代数・初等幾何を理解すること、つづいては初等解析幾何の理解に皆大いに勉強していた時代である。高木貞治（敬称略）が、数学小景（昭和18年）に Königsberg の橋渡りを長々と書いているが、それより40年以上昔であり、岡本の頭の柔軟さを感ずる、

次は和田健雄のトポロジーである。和

田は解析学者というべきかもしれないが、所謂集合論的トポロジーの論文を最初に著した人である。そして"和田の湖"はブロウエル（L. E. J. Brouwer）の構成を面白く叙述したことで有名である。和田はまず1911（明治44）年集合的概念で曲線を定義しジョルダン曲線の定義に及ぶまでを述べている。*（Memoirs Kyoto Univ）和田はまた同年、到る処長さの無い（nowhere rectifiable）曲線で、しかも導函数は稠密（dense）に存在する実例を与えた。（Memoirs Kyoto Univ. v. 3）。和田は大学卒業だけに高級な問題の取扱いになってきている。

次いで米山国蔵の大論文が刊行された。（Tohoku M. J. v. 12, 13, 18, 1917～1920）。米山は和田健雄より3年後の1908（明治41）年京大数学科を卒業し、和田の集合的手法を学んだ。

*）脚注．この方法で最初に果したのはN. J. Lennes，という。

米山は既に1912年(Memoirs V3, Kyoto)
に"principal point"なる概念を使
い curve の definition を与えている。p.p.
とは、連続体が異なる2点A, Bを含み、
A, Bを含む連続体(真部分集合で)が
存在しないときA, Bをp.p.という。米山は
このp.p.から連続体を(1)p.p.を持た
ないもの(2)唯一組のp.p.を持つもの、
(3)無限個のp.p.の組を持つものという
3種に分類し大理論を展開している。
irreducible continuum の例として早く
から例の"和田の湖"を紹介している。
米山はこれらのpaperで林鶴一から学
位を得ている。所で米山の何百頁にも
及ぶ理論を(全く解析は使わない)
すっかり読んだ日本人は寺阪英孝1人
であろう。寺阪にはまた、後になってであるが、
領域を可附番無限個のdomainに、共通
境界を持つように分割するBrouwerの構
成を"g-strahl"で行ふ方法のpaper
の Ende

がある、もっと一般論の構成であるが、
次に富山高校教授の原富慶太郎の論文が数学輯報や数物に出された、原富は独学で中等教員検定試験・高等教員検定試験の数学科に合格し高校教授になった人である、検定試験に合格するのはいかに大変なことか、その頃の試験問題を見て頂きたい（少し配布）。
原富は昭和6年の東北数学雑誌に抽象空間の高階（höher stufige）コンパクト性、セパラビリティと題し、これらを少し拡張（濃度をいろいろにする）して多少の性質を述べた、今日から見れば全く問題にならない様なものであるが、当時日本では東大・京大・東北大で抽象空間の概念はなかったのではなかろうか。コンパクトの言葉も殆んど知られていなかった、この時期に、検定試験で抽象概念と無関係の計算数学に熟達してきた原富が最初に取扱ったのは偉とするに足る。

数学は"頭の切り換え"がだいじである。原富は数物記事にも抽象空間の論文を発表している。原富はHausdorffの集合論やMengerのDimensionstheorie等を読んで勉強したように見える。Fréchetの本もよんだように見える。

この原富の論文の頃から、大学卒業である学者功力金二郎、寺阪英孝、近藤基吉たちの論文が多く発表されだしたのである。これらの論文は矢張り大学卒業生だから高級な意義のある論文であった。

最後に一寸異色の学者W. Süssの日本語による著書"幾何学概要"（昭和8年、弘道閣発行）を述べよう。

Süssは1895（明治28）年5月7日フランクフルト、マイン（Main）で生れた。1915年ジュスは戦争に参加させられた（一次大戦）。ジュスは兵士としてヒルベルトの"幾何学基礎論"を持参した。1922（大正11）年に彼は鹿児島の七高の教授となった。その前

には(1919〜1920) ビーベルバッハの助手として勤めていたのであった。
鹿児島では鴨池海岸の小さな日本家屋に住み、romantische Wohnung といって大いに気に入っていた。5年後グライフスワルドの小さな大学に移った。(後に彼はフライブルグ大学総長、独逸数学会会長、そしてオーベルボルファッハ Oberwolfach に数学研究所建設を果した。このOberwolfach には日本の数学者も多勢呼ばれている)。
グライフスワルドにいたとき、松村宗治(台北帝大)の世話で前記"幾何学概要"を著した。此の本は前篇は微分幾何・後篇はトポロジーが主に述べてある。後篇第二章は'位置学導入'と題し、§3は「ぢよるだん曲線ニ関スル定理」§4は「ちめん数の不変」§6「しえーんふりーす-依ルぢよるだん曲線定理の逆ニ就いて」
§8「位置的變形」§9「定点学理」§10「結合位置学」 etc.

ジラス自身「この本は誤植も多いし失敗であった」と言っているが、その通り誤植も多いし妙な訳語も多く読む気の起こらない本である。（仲介者に疑問を提する）。しかしとにかく、日本で初めてケーレクヤルトの流儀のトポロジーの解説書が出たのはこれが最初であろう。

間もなく中村幸四郎の"位相幾何学（代数的）"、河田敬義?の"抽象空間論"が岩波講座数学で出版されるようになるのであった。

以上。

W. Süss の履歴は、H. Gericke (München) : W. Süss zum Gedächtnis, Jahr. DMV, Bd 69 (1968) 参照。

力学系の発展

名古屋大学 教養部 白岩謙一

§0 はじめに

力学系の研究の歴史は古く，その扱う範囲は広い．そして，その発展のすべてについて概要を述べることは到底不可能である．従って，私が興味をもつ範囲とその周辺に限って，力学系の発展について1つの試みを行うことにする．数学史を専攻しているわけではないので，歴史的な事実について，誤解や見落し等もあると思はれるが，それらについては，識者の御教示を頂ければ幸いである．

なお，この小論の作成に当って，斉藤利彌先生の著書・論文・講演や静間良次先生の著書を大いに参考とさせて頂いた．ここに記して感謝の意を表する．

§1 Poincaréまで

力学系理論は中国，エジプト，バビロニア等の古代社会における天体観測に端を発する．天体の運動に関する

古代の理論はPtolemaios (85?-165?) の著書 Almagest (邦訳恒星社) に集大成されているが，これは主として地球を中心とする円運動を基本とする天動説である．この理論は現代数学の中のエルゴード理論や群の表現論の分野に生かされている (Cf. Sternberg [2]).

ルネッサンス期に入り Copernics (1473-1543) の地動説が現れた．そして，Tycho Brahe (1546-1601) の観測結果と地動説をもとにして，Kepler (1571-1630) の3法則が発見された．Galileo (1564-1642) は自作の望遠鏡を用いて天体を観測し，地動説を確固たるものとした．さらに彼は物体の自由落下が等加速度運動であることを実験によって験証し，慣性法則を発見した．

このようにして得られた物体の運動法則をもとにして，Newton (1642-1727) は運動の3法則を基礎として Newton 力学を構築した．また，Kepler の3法則などから，万有引力の法則を発見し，これを用いて天体の運動を説明した．Newton は Leibniz (1646-1716) と共に微分積分学を発見したが，Kepler の法則を説明するに当っては微積分を用いず，幾何学的な方法を用いて説明した．(Cf. Principia Mathematica Philosophiae Naturalis，邦

訳中央公論社）

Newton 力学を微積分を用いて研究することは Euler (1707-1783) に始まり，Lagrange (1736-1813) によりその基礎が築かれた．その後 Laplace (1749-1827)，Poisson (1781-1840)，Hamilton (1805-1865)，Jacobi (1804-1840) 等の研究により，解析力学として大いに発展した．

n 個 $(n \geq 2)$ の質点が万有引力のもとで運動するとき，その運動を記述せよという問題を n 体問題という．2 体問題は Newton によって見事に解決された．そこで，解析力学では n 体問題 $(n \geq 3)$，特に 3 体問題が中心課題となった．また，これに附随して太陽系の安定性が重要な問題となった．

3 体問題に関して最初に得られた重要な結果は Lagrange による正 3 角形解と直線解である．解を既知関数の級数として得ようという試みが Dirichlet (1805-1859) や Weierstrass (1815-1897) を含む多くの数学者によってなされたがはかばかしい結果は得られなかった。

§2 Poincaré と力学系理論

Poincaré (1854-1912) は数学のみならず，天体力学，

数理物理学，哲学等多くの分野で多くの重要な貢献を行ったが，3体問題とこれに関連する問題は彼の興味の中心の1つであった．彼は3体問題に関連して常微分方程式の定性的理論を創設し，さらに，これと関連して，位相幾何学の基礎を建設した．そして，現代的な意味での力学系理論の創設者の1人となった．

1885年スウェーデン王 Oscar 2世は数学解析の分野で賞を設定し，Weierstrass，Hermite，Mittag-Leffler をその審査員に任命した．彼等は4つの問題を出題したが，Poincaré は n体問題に関する第1の問題に応募し，受賞した．

3体問題は18次元空間の1階常微分方程式で表わされるが，これを求積法で解くという試みがなされ，重心の運動に関する第1積分が6個，面積速度に関する第1積分が3個，エネルギーに関するものが1個，合計10個の第1積分が発見されていた．しかし，1887年に Bruns [1] は既知のもの以外には代数的な第1積分が存在しないことを示し，Poincaré はその受賞論文 [2] で，既知のもの以外に1個解析的な第1積分が存在しないことを証明した．これは定量的な方法では3体問題が解決しな

いことを示すものであって，解析力学の危機をもたらした．しかし，この危機はPoincaré自身によって解決の方向が見出された．すなわち，彼は論文 *Sur les courbes définies par une équation différentielles* (Poincaré [3]) において，位相的方法を駆使した定性的理論を展開し，その新しい方向を示した．この論文には次のようなことが含まれている．

1．平面上のベクトル場の特異点の分類 (node, saddle, focus, center 等)．

2．平面上のベクトル場の特異点の個数 (Poincaré-Hopfの定理)．(Cf. H. Hopf [1])．

3．平面上のベクトル場のcross-sectionとPoincaré mapに関する理論．

4．limit cycleに関する理論 — Poincaré-Bendixsonの定理とlimit cycleの中にfocusまたはnodeが存在すること．(Cf. Bendixson [1])．

5．centerの理論

6．2次元の正規形でない方程式を曲面上のベクトル場として考察すること．

7．曲面上のベクトル場の特異点のindexとPoincaré-

Hopf の定理.

8. 平面上のベクトル場の理論の曲面上のベクトル場の理論への拡張.

9. 2次元トーラス上の non-singular ベクトル場と回転数. (Cf. Denjoy [1])

10. 以上の理論の高次元への拡張.

上述の論文以外に力学系理論の分野で Poincaré の残した重要な貢献は, 次のものであろう.

(a) Poincaré-Carathéodory の再帰定理 (Poincaré [4], Carathéodory [1]).

(b) Poincaré-Sternberg の線形化定理 (Poincaré [1], Sternberg [1]).

(c) homoclinic point と heteroclinic point (Poincaré [4]).

(d) bifurcation (Poincaré [4]).

(e) Poincaré-Birkhoff の geometric theorem (Poincaré [5], Birkhoff [1]).

この最後の geometric theorem は, Poincaré が死の直前に書き, 彼の死後発表されたものである. 制限3体問題の周期解の存在に関係して生じたもので, 2つの周

心円に囲まれた平面領域の面積を保存する同相写像は，ある条件の下で不動点をもつという定理（予想）である．Poincaré はこの予想の妥当性を示し，その証明を若い数学者にゆだねた．これを解決したのが Birkhoff である．

§3 Birkhoff と Ljapunov ―力学系理論の共同構築者

Lefschetz は [1] で Birkhoff (1884–1944) と Ljapunov (1857–1918) の2人を Poincaré に次ぐ現代の力学系理論の共同構築者としてあげている．

Birkhoff は彼の成熟期に力学系を研究した。彼は直接 Poincaré に習はなかったが，真の師は Poincaré であったといえよう．彼の力学系理論に対する貢献は大きく分けて2つある．オ1は位相力学的諸概念を導入し力学系理論の内容を豊富にしたこと，オ2は Lebesgue の測度論を用いて，ergod 理論の創始者の1人となったことである．

彼の定義した重要な力学的諸概念の中には non-wandering set, central motion, recurrent motion, α-(ω-) limit set, topological transitivity 等がある．また，彼は [6] で Poincaré の method of sections (cross-section と Poincaré map) を用いて, homoclinic point の近くに無限個の周期点が存在することを示している. 彼は P. A. Smith と共に (Birkhoff-Smith [1]) metrical transitivity (ergodicity) の概念を導入し, Birkhoff の個別 ergod 定理を証明した (Birkhoff [4], [5]). また, 彼は Poincaré や Hadamard 以上に曲面上の測地線を研究し, Morse や Hedlund の symbolic dynamics 及び Morse の大域変分学の先駆けとなった.

Ljapunov (Cf. Liapunov [1]) は特異点や周期軌道の安定性に関する理論によって, 力学系理論に大きく貢献した. 彼の理論は Ljapunov 函数を用いて, 具体的に解を求めることなく, 特異点や周期軌道の安定性を調べるということであって, 定性的理論に重要な方向を示した. これは制御理論にも応用される.

§4 初期の発展

(a) 工学において, 常微分方程式は線形のもので十分であるという時代もあったが, van der Pol は 1922年に van der Pol 方程式が limit cycle をただ1つもつということを予想し, これを用いて真空管の発振現

象が説明できることを示した（van der Pol [1], [2]）．この予想は Liénard [1] によって証明されたが，これに続き，Cartwright, Littlewood, Levinson 等が非線形振動論を研究し，力学系の定性的理論の発展に大きな影響を与えた．

(b) 平面のベクトル場の相図（phase portrait）の研究は Poincaré 以前には Riemann, Kummer, Goursat による Gauss の超幾何微分方程式の相図の研究以外にはなかった．Poincaré は相図の研究を定性理論の中心に置き，その研究を進めた．

1924年 Kneser [1] は2次元トーラス上のある種のベクトル場の相図を位相的に分類した．次いで1940年 Kaplan [1] は平面上の特異点をもたないベクトル場の相図の完全な分類に成功した．その他 Markus [4] による研究もある．

(c) 1939年 Hedlund [1] と E. Hopf [1] は負の定曲率曲面の測地流のエルゴード性を証明した．測地流は Hamilton 系の研究に関して最も重要なものであるが，そのエルゴード性の証明が与えられたものとして最初のものである．

(d) 記号力学系 (Symbolic dynamics) は最も重要な位相力学系の1つであるが，その起源には2つの系列がある．その1つは負の定曲率空間の測地流の研究からくるものであって，Hadamard [1] から Birkhoff [2], [6] および Morse-Hedlund [1] へと発展したものである．他の1つは非線形振動論からくるものであって，Cartwright-Littlewood および Levinson [1] によるものである．

§5 構造安定性と Lefschetz 学派

1937年 Andronov-Pontrjagin [1] は Systèmes grossiers (粗い系) と題して，構造安定の概念を定義し，2次元の閉円板の上のある種の解析的な力学系に対してそれが構造安定であるための必要十分条件を与えた．この仕事の重要性を認識し，systèmes grossiers の訳語として structurally stable systems を採用し，積極的な研究を推進したのが Lefschetz (1884-1972) である．

彼は代数幾何学と位相幾何学に大きな足跡を残したが，晩年は力学系理論 (geometric theory of ordinary differential equations) と制御理論に全力を傾けた．

彼はもともとWestinghouseの技師であったが，事故で両腕をひじの下から失い，数学者に転向した．技師の出身ということもあって応用数学に関心をもっていたが，1944年（Birkhoffが死亡した年）頃から常微分方程式に興味を示しはじめ，アメリカにおける力学系理論興隆の祖となった．彼はアメリカ合衆国のみならず南北の両アメリカ大陸において，力学系理論の研究を組織化し，今日の力学系理論研究の基礎を築いた．

Lefschetzの不動点定理は，彼が常微分方程式を研究する以前の仕事であるが，Poincaré-Hopfの定理と共に基本的である．彼は工学者出身らしく，Hamilton系よりはむしろdissipativeな系に着目した．彼の弟子にはde Baggis，Peixoto，Markus，LaSall等があり，Smaleの出現を準備した。

Lefschetz学派による構造安定性に関する成果としてはde Baggis[1]，Markus[2]，Peixoto[1]がある．特にPeixotoはAndronov-Pontrjagin及びde Baggisのあとを受けて，向き付け可能な2次元閉曲面上のベクトル場の構造安定性について基本的な結果を得た．

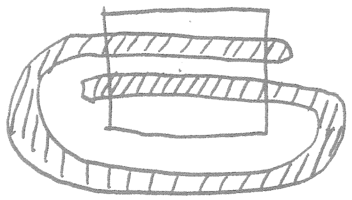
§5 Smale－微分可能力学系の理論の建設

Smale (1930—)が力学系を研究するようになった経緯がSmale [7]に記されている．以下その要約を述べることにする．

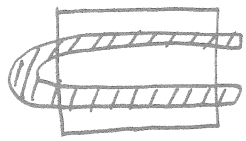
Smaleは1956年Bottの下でPh. d.を得た（Univ. of Michigan）．その秋Chicagoへ行き，そこでThomやHirschに会った．1958年頃彼はPeixotoに会い，構造安定性の問題に興味をもった．そして，構造安定性に関するAndronov-Pontrjaginの条件の1つ"no saddle connection"をThomの横断性の概念を用いて"安定多様体と不安定多様体が横断的に交わる"という条件に変えてよいことに気付いた．これはPeixotoの結果の高次元への拡張として，Morse-Smale力学系（Thomの命名）への端緒となった（Cf. Smale [1]）．この時には，Poincaré, Birkhoff, Cartwright-Littlewoodの仕事を知らなかったので，Morse-Smale力学系が力学系の空間の中で稠密な開集合であるという間違った予想を行った．これについては論文発表後Levinsonが Morse-Smale系が一般的であるとは思われないと注意する手紙をSmaleに送った．実際Levinson及びCartwright-Littlewoodの論文の中に反例があ

った．

Smale は Levinson の例の幾何学的モデル化を行い第1図のような系を作った．これを1960年夏 Berkeley で話したとき，Neuwirth はこれを更に単純化して，第2図のようにしたらどうかと提案した．Smale は "fine" といい，horseshoe と命名した．



第1図



第2図

当時彼は自分を topologist と考えていたが，勾配力学系を考察しているうちに（Cf. Smale [2]），高次元 Poincaré 予想の解決を見出した（Cf. Smale [8]）．

1961年夏頃から Smale は力学系に熱中した．特に S^2 の微分同相写像を位相共役で分類する問題に力学系の本質が表われていると感じた．ソ連へ行き，Kiev の非線形振動論の国際会議で horseshoe を発表し，それが無限個の周期点をもつ構造安定な力学系であると述べた．Anosov には Kiev で会った．その後 Steklov 研究所へ行き，講義を行ったが，その際 toral diffeomorphism や負曲率空間の測地流が構造安定ではないかという予想などを述べた．toral diffeomorphism は Thom の助言により研究したが，これは無限個の周期点をもち，十分小さい摂動によって周期点が消滅しないこと等を知った．

1962年 Stockholm の国際数学者会議で Sinai に会ったが，その時 Smale の予想を Anosov がすべて解決したことを聞いた．その後3年間は無限次元多様体と変分問題の研究を行い，力学系から遠ざかった．

以上が Smale [7] の要約である．

上に言及されている仕事の他に Smale が得た重要な結果は次の通りである．

(a) Kupka-Smale の近似定理（Kupka [1], Smale [3]）．

(b) 横断的な homoclinic point の近傍における力学系の構造に関する Smale-Birkhoff の定理（Smale [4]）．

(c) 公理A力学系の基礎理論（スペクトル分解定理等）（Smale [5]）．

(d) Ω安定性定理（Smale [6]）．

(e) Morse-Smale 力学系の構造安定性定理（Palis-Smale [1]）．

微分可能力学系の理論は，このような彼の仕事を中心とし，さらに彼の弟子や仲間達の協力でまとまった．例えば，Robbin[1] と Robinson [1], [2] は「強横断性条件を満たす公理A力学系は構造安定である」ことを示し，Anosov や Palis-Smale の構造安定性定理を含む一般的な定理を打ち立てた．また，Bowen[1] は公理A力学系の基本集合が Markov 分割をもつことを示し，Sinai の結果を拡張したが，この結果を用いて Ruelle と共に公理A力学系のエルゴード理論を建設し，統計力学との関連を深めた（Bowen[2]）．

Smale は一般的な (generic) 力学系と構造安定性を微分位相幾何学的な手段で研究し，公理A力学系に到達した．公理A力学系は双曲型という概念の究極の姿と考えられる．彼はまた，微分同相写像の定める離散力学系の研究からベクトル場の定義する連続力学系の理論も平行して得られるとし，離散力学系の研究を重視した．実際，離散力学系の理論の方が連続力学系のそれより単純明快であるし，それ自身興味深くもある．彼は時に間違った予想を立てることもあるが，常に研究を正しい方向に向け，今日の微分可能力学系の理論の開拓者となった．

§6 ソビエトにおける研究

(a) Anosov と Sinai　Smale の予想を出発点として，Anosov [1], [2] は一般次元のコンパクト負曲率空間の測地流の構造安定性とエルゴード性を証明した．これは，Hedlund と E. Hopf の結果を一般化したものであるが，Anosov はその際，上述の測地流のもつ性質（双曲性）を抽象化し，Anosov 力学系（始めは C-system または U-system とよった）の概念を導入し，Anosov 力学系について論じた．彼の理論では Anosov 力学系のもつ自然な葉層構造が重要である．また，Anosov 力学系は Smale が公理 A 力学系の概念を形成する上で大きな役割りを果たした．

Sinai は統計力学やエルゴード理論に大きな貢献を行っている．力学系理論に関係の深いものとしては，Anosov と共に負曲率空間の測地流のエルゴード性等を研究し，Anosov 系の Markov 分割（前述のように Bowen によって公理 A 力学系に拡張された）を発見し，Anosov 系のエルゴード理論を研究したこと，及び Billiard 問題のエルゴード性の研究等がある（Sinai [1], [2]）．

(b) Kolmogoroff-Arnold-Moser — 太陽系の安定性

Poincaréの受賞論文によって，3体問題の解を既知関数の級数で表わすということは不可能であるかのように思はれていたが，Weierstrassが指摘したように，Poincaréは必ずしも，上のような級数展開が不可能であることを証明したわけではなかった．そして，1954年のKolmogoroff [1]のideaによって，1962年Arnold [1]はn体問題にquasi-periodic solutionsが存在すること，及びLebesgue measureの意味で，この解が例外的ではないことを示し，長年の難問に大きな進歩をもたらした．この理論にMoserのtwist theorem（Moser [1]）が用いられることから，Kolmogoroff-Arnold-Moserの理論，略してKAM理論と呼ばれる．

(c) 非線形振動論のグループ

LjapunovやAndronov-Pontrjaginの伝統をついでソビエトでは常微分方程式，非線形振動論，制御理論等が盛んに研究されている．Kievでは非線形振動論の国際会議がしばしば開催される．研究者も多いが，力学系理論と関連して，Plissの名前をあげておこう．

§7 おわりに

力学系理論の現況や展望について述べることはこの小

論の目的でもないし，与えられた紙面では到底不可能であるので，日本における微分可能力学系の研究が開始された頃のことに少し触れて，この小論を終えることとする．

1960年代に我が国において非線形振動論は割り合い盛んであったようで「数学」第13巻第4号（1962年）には非線形振動が特集されているが，その研究者の中には次のような諸先輩の名前が見られる．すなわち，清水辰次郎，林千博，占部実，吉沢太郎，古屋茂，南雲仁一，渋谷泰隆，前沢成一郎等である．また他に，Poincaré の定性的理論を継承する斉藤利弥，浦太郎の諸氏，常微分方程式論の福原満洲雄，南雲道夫等の大先輩もある．

微分可能力学系の理論は，非線形振動論の研究者によって注目されていたようであるが，topologists の側からの注目は少なかったようである．

1966年 Thom が初来日し，各地で講演を行った．そして京都では Thom を囲んでシンポジウムが開催された．そこで Thom は catastrophe 理論を述べたが，その際 Smale の仕事に言及し，力学系理論の重要性を強調した．私はこのシンポジウムに参加していたが，この

講演を聞き，力学系理論を研究することを決意した．そして名古屋で力学系理論の研究会（セミナー）を組織した．そのメンバーの中には，森本明彦，森川寿，飛田武幸，岩橋亮輔，垣内伸彦等の諸氏が含まれている．丁度その頃大阪では四方義啓氏（堅田もこのシンポジュウムには出席していた）が Smale の理論を紹介し，池上宜弘氏も研究を始めていた．

これらの準備のもとで，1967年11月21－24日京大数理解析研で「力学系の研究」と題する研究集会（代表者森本明彦）を開催した．講演は次の通りであった．

1．白岩謙一：Smale systems について．

2．　同　：minimal set について．

3．垣内伸彦：Structurally stable systems on 2-manifolds．

4．森本明彦：Decomposition and equivalence of vector fields around an elementary critical point．

5．四方義啓：Topological flows の smoothing．

6．岩橋亮輔：Bruns の非存在定理．

以上

Bibliography

Abraham-Marsden[1],Foundations of mechanics,2nd edition,Benjamin,1978.

Andronov-Pontrjagin[1],Systèmes grossiers,Dokl. Akad.Nauk SSSR,14(1937),247-251.

Anosov[1],Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Soviet Math. Dokl.,3(1962),1068-1070.

Anosov[2],Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature,Soviet Math. Dokl.,4(1963),1153-1156.

Arnold[1],On the classical perturbation theory and the stability problem of planetary systems, Dokl.Akad.Nauk SSSR,145(1962),481-490.

Bendixson[1],Sur les courbes définies par des équations différentielles,Acta Math.,24(1901), 1-88.

Birkhoff[1],Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans.Amer.Math.Soc.,14(1913),14-22.

Birkhoff[2],Dynamical systems,Amer.Math.Soc.Colloq.Publ.9(1927),Amer.Math.Soc..

Birkhoff[3],On the periodic motions of dynamical systems,Acta Math.,50(1927),359-379.

Birkhoff[4],Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems,Proc.Nat.Acad.Sci., 17(1931),650-655.

Birkhoff[5],Proof of the ergodic theorem,Proc. Nat.Acad.Sci.,17(1931),656-660.

Birkhoff[6],Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques,Mem.Pont.Acad.Sci.Novi Lyncaei,1 (1935),85-216.

Birkhoff-Smith[1],Structure analysis of surface transformations,J.de Math.(liouville)S.9,Vol. 7(1928),345-379.

Bowen[1],Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms,Amer.J.Math.,92(1970),725-747.

Bowen[2],Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms,Lecture Notes in Math.,470(1975),Springer.

Bruns[1],Über die Integrale des Vielkörper-Problems,Acta Math.,11(1887-8),25-96.

Carathéodory[1],Über den Wiederkehrsatz von Poincaré,S.-B. Preuss.Akad.Wiss.XXXIV(1919),580-584.

deBaggis[1],Dynamical systems with stable structures,Contributions to the theory of nonlinear oscillations II(1952),37-59,Ann.of Math.Studies, Princeton Univ.Press.
Denjoy[1],Sur les courbes définies par les équations différentielles a la surface du tore, J. Math.Pure et Appl.,(9)11(1932),333-375.
Hadamard[1],Les surfaces à curbures opposés et leurs lignes géodesiques,J. de Math.,(5)4 (1898),27-73.
Hedlund[1],The dynamics of geodesic flows,Bull. Amer. Math.Soc.,45(1939),241-260.
E.Hopf[1],Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krummung,Ber.Verk. Sachs.Akad.Wiss.Leipzig,91(1939),261-304.
H.Hopf[1],Abbildung geschlossener Mannigfaltigkeiten auf Kugeln in n Dimensionen,Jahresbericht der Deutch.Math.-Vereing.,34(1925).
Kaplan[1],Regular curve families filling the plane, I,II,Duke Math. J.,7(1940),154-185;8(1941), 11-40.
Kneser[1],Kurvenscharen auf den Ringflächen,Math. Ann.,91(1924),135-154.
Kupka[1],Contribution à la théorie des champs génériques,Contributions to differential equations,2(1963),457-484;3(1964),411-420.
Kolmogoroff[1],On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian,Dokl.Akad.Nauk SSSR,98(1954), 527-530.
Lefschetz[1],Geometric differential equations: Recent past and proximate future,Differetial equations and dynamical systems,Academic Press, 1967,1-14.
Levinson[1],A second order differential equation with singular solutions,Ann.of Math.,50(1949), 127-153.
Liapunov[1],Problème générale de la stabilité du mouvement,Soc.Math. de Kharkow,1892(Ann.of Math. Studies 17(1949),Princeton Univ. Press.
Liénard[1],Étude des oscillations entretenues, Revue générale de l'électricité,23(1928),901-912,946-954.
Markus[1],Global structure of ordinary differential equations in the plane,Trans.Amer.Math. Soc.,76(1954),127-148.

Markus[2],Structurally stable differential systems, Ann.of Math.,(2)73(1961),1-19.
Morse-Hedlund[1],Symbolic dynamics,Amer.J.Math., 60(1938),815-860.
Moser[1],On invariant curves of area preserving mappings of an annulus,Nachr.Akad.Wiss.Göttingen Math.-Phys.Ki,II(1962),1-20.
Moser[2],Stable and random motions in dynamical systems,Ann. of Math. Studies,77(1973),Princeton Univ. Press.
Palis-Smale[1],Structural stability theorems,Proc. Sympo.Pure Math.,14(1970),223-231,Amer.Math.Soc.
Peixoto[1],Structural stability on two-dimensional manifolds,Topology,1(1962),101-120.
Poincaré[1],Sur les propriétés des fonctions définies par les equations aux differences partielles, Thèses,1879,Œuvres I.
Poincaré[2],Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique,Acta Math.,13(1890), 1-270.
Poincaré[3],Sur les coubes définies par une équation différentielles,J. de Math. pur et appl. (3)7(1881),375-422;(3)8(1882),251-296;(4)1(1885) 16-244;(4)2(1886),151-217.
Poincaré[4],Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,I,II,III,Gauthier-Villars,1892; 1893;1899
Poincaré[5],Sur un théorème de géometrie,Rend.del Circ.Mat.Palermo,33(1912),375-407.
Robbin[1],A structural stability theorem,Ann. of Math.,94(1971),447-493.
Robinson[1],Structural stability of vector field, Ann. of Math.,99(1974),154-175.
Robinson[2],Structural stability of C^1 diffeomorphisms,J.Diff.Eq.,22(1976),28-73.
Ruelle-Takens[1],On the nature of turbulence,Comm. Math. Phys.,20(1971),167-192.
斉藤利弥,解析力学入門,至文堂,1964.
Sinai[1],Markovian partitions and Y-diffeomorphisms,Funct.Anal.Appl.,2,No.1(1968),64-89.
Sinai[2],On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics,Soviet Math. Dokl.,4(1963),1818-1822.
Smale[1],Morse inequalities for a dynamical system, Bull.Amer.Math.Soc.,66(1960),43-49.

Smale[2],On gradient dynamical systems,Ann. of Math.,74(1961(,199-206.
Smale[3],Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms,Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa,3(3)7(1963),97-116.
Smale[4],Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and combinatorial topology,Princeton Univ. Press,1964,63-80.
Smale[5],Differentiable dynamical systems,Bull. Amer.Math.Soc.,73(1967),747-817.
Smale[6],The Ω-stability theorem,Proc.Sympo. pure math.,14(1970),289-297,Amer.Math.Soc.
Smale[7],On how I got started in dynamical systems, The mathematics of time,Springer,1980,147-151.
Smale[8],Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four,Ann. of Math.,74 (1961),391-406.
Sternberg[1],Local contractions and a theorem of Poincaré,Amer. J. Math.,79(1957),809-824.
Sternberg[2],Celestial Machanics,I,II,Benjamin, 1969.
寺坂英孝-静間良次,数学の歴史,Ⅷb,19世紀の数学,幾何学Ⅱ,共立出版,1982.
van der Pol[1],On oscillation hysterisis in a triode generator with two degrees of freedom, Philos.Mag.,6(1922)No.43,700-719.
van der Pol[2],On relaxation oscillations,i.b.i.d.,7(1926)No.2,978-992.

Acta Math. 38(1921) Poincaré Memorial Issue
Contributions to the theory of nonlinear oscillations I,II,III,IV,V, Ann.Math. Studies, 20,29, 36,41,45, Princeton University Press,1950,1952, 1956,1958,1960.

周期的常微分方程式の周期解の個数について

阪大理　松岡隆

C^1 級写像 $f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ で条件

$$f(t+1, x) = f(t, x) \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

をみたすものに対し、常微分方程式

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

を考える。この方程式に対し"周期解"という言葉を次の意味で使うことにする。

<u>定義 1.</u> (1) の解 $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が、自然数 P に対し、P-周期的

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x(t+P) = x(t) \\ x(t+q) \neq x(t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{for } {}^\forall t \in \mathbb{R} \\ {}^\forall q: \text{自然数 } q < P \end{array}$$

(1) の解 $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が周期的。

$\Longleftrightarrow$ 自然数 P が存在して x が P-周期的。

(p−)周期的な解を(p−)周期解と呼ぶことにする。

本稿の目的は、周期解の個数について、それらの"からみ方"との関連に注意しながら調べた論文[3]を紹介することにある。主定理を§1で述べ、従来の結果を§2で要約する。更に§3において主定理の証明の概略を与える。

1. 主定理

ここでは $n=2$ と仮定する。時刻 $t=t_0$ で $x_0 \in \mathbb{R}^2$ を通る(1)の解を $\varphi(t; t_0, x_0)$ とかくことにするとき、次を仮定する。

「$\varphi(t; t_0, x_0)$ は $\forall(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ で定義可能」

このとき、ポアンカレ変換と呼ばれる微分同相 $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が $T(x) = \varphi(1; 0, x)$ で定義される。

さて、今、C_1, C_2, C_3 を(1)の相異なる3個の1−周期解とする。このとき、これらの"からみ方"を以下の様に文字 a, b の列で表わすこ

とができる。

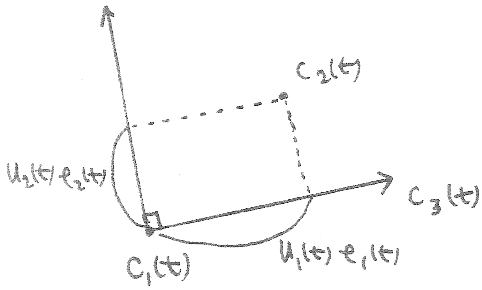
$\mathbb{R} \ni t$ に対し、

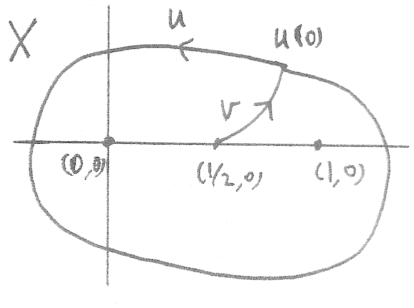
$$e_1(t) = c_3(t) - c_1(t), \quad e_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_1(t)$$

とおくと、これらは一次独立だから、$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ が存在して

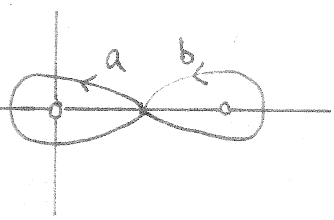
$$c_2(t) - c_1(t) = u_1(t)\, e_1(t) + u_2(t)\, e_2(t)$$

とかける。$X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0), (1,0)\}$ とおくと、u は X 内の閉曲線となる。$(1/2, 0)$ から $u(0)$ への道





$v : [0,1] \to X$ を1つ選び、道 $v \cdot u|_{[0,1]} \cdot v^{-1}$ の $\pi_1(X, (1/2, 0))$ での class を考えると、この class の共役類は v の取り方によらずに決まる。これを $[c_1, c_2, c_3]$ とおこう。

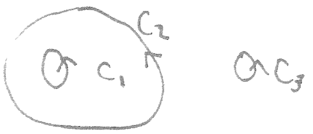


$\pi_1(X, (1/2, 0))$ の basis を右図の様に決めてやれば、明らかに

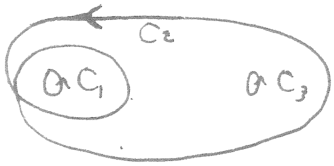
$[c_1, c_2, c_3] = [a^j], [b^j]$ 又は $[a^{i_1} b^{j_1} \cdots a^{i_d} b^{j_d}]$

が成りたつ。ここに $j \in \mathbb{Z}$, $i_1, \cdots, i_d, j_1, \cdots, j_d \in \mathbb{Z} - 0$, [ ] は共役類。

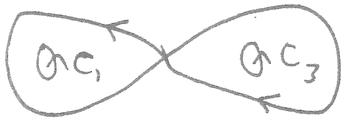
例



$[c_1, c_2, c_3] = [a]$



$[c_1, c_2, c_3] = [a^2 b]$



$[c_1, c_2, c_3] = [a b^{-1}]$

主定理を述べる前に、仮定のいくつかを先に抜き出して示しておこう。但し、p は自然数。

(2) $\quad \mathbb{R}^2 \supset {}^\exists K \underset{\text{同相}}{\approx}$ 閉円板 s.t. $T(K) \subset K$

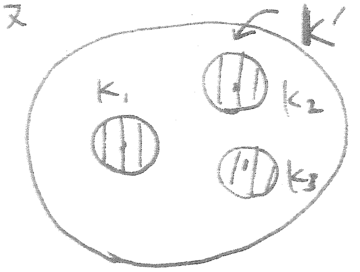
(3) $\quad i = 1, 2, 3$ に対し、$K \supset {}^\exists K_i \ni c_i(0)$ s.t.

$K_i \approx$ 閉円板

$T^p(K_i) \supset K_i$ 又は $T^p(K_i) \subset K_i$.

K_1, K_2, K_3 は互いに disjoint.

(4) $K' = K - \bigcup_{i=1}^{3} \mathrm{Int} K_i$ を $t=0$ で通過する p-周期解はすべて、双曲的で、その通過点は、K' の内点である。



以上の準備の下に、主定理を述べよう。自然数 p に対し、$N(p) = \#\{c : (1)$ の p-周期解 s.t. $c(0) \in K'\}$ ($\#$ は個数) とおく。

<u>定理1</u> 条件(2)を仮定し、pを自然数とする。c_1, c_2, c_3 を (1) の相異なる 1-周期解で、仮定(3)をみたすとする。

i) $[c_1, c_2, c_3] = [a^{i_1} b^{j_1} \cdots a^{i_d} b^{j_d}]$

$$(i_1, \cdots, i_d, j_1, \cdots, j_d) \neq (1, 1, \cdots, 1), (-1, -1, \cdots, -1)$$
$$\in (\mathbb{Z} - 0)^{2d}$$

$\Longrightarrow N(p) \geq p^2$

ii) i) の仮定と条件(4)が成り立つ。

$\Longrightarrow N(p) \geq p \cdot 2^p$

<u>注意1</u> 仮定(2)は、摩擦が働いている系を表わす方程式により、みたされる。たとえば、Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx + cx^3 + d\cos(2\pi t) = 0$$

$$(a, b, c, d > 0)$$

を一階連立方程式に直したものは(2)をみたすことが知られている。

<u>注意2</u> 仮定(3)は、C_1, C_2, C_3 が双曲的な attractor 又は repeller であればみたされる。

定理1の評価は、次の命題が示す様に一般的には、かなり悪い。

<u>命題1</u> 仮定(2),(3)がみたされたとする。(但し $p=1$)。このとき $\#\{C : 1\text{-周期解} \mid C(0) \in K\}$ は

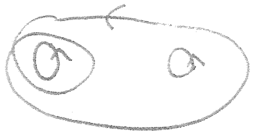
$$3|m||n| + |m| + |n| - 3 \quad \text{以上}$$

$$\text{if } [c_1, c_2, c_3] = [a^m b^n], \quad mn > 0$$

$3|m||n| + |m| + |n| + 1$ 以上

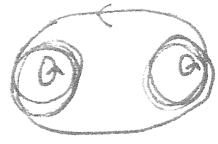
if $[c_1, c_2, c_3] = [a^m b^n]$, $mn < 0$.

例



$[c_1, c_2, c_3] = [a^2 b]$ のとき

6個以上



$[c_1, c_2, c_3] = [a^{100} b^{100}]$ のとき

30,197個以上

2. 従来の結果

ここでは (1) の周期解の個数について、現在までに知られていることを紹介する。

次の定理は $n=2$ の場合、Levinson [1], Massera [2] によって示され、白岩 [5] が一般化した。

定理2 (2) を仮定する。もし $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(K)$ ですべての周期解が双曲的ならば、

1) $N(1)$ は奇数

2) 奇数 $k > 1$ に対し $N(k)$ は $2k$ で割り切れる。

3) 偶数 k に対し、もし次がなりたつなら、$N(k)$ は $2k$ で割りきれる。

$$\#\left\{x:T\text{の}k/2\text{-周期点}\ \middle|\ \begin{array}{l}\dim E^u_x=\text{偶数},\\ \det DT^{k/2}(x)|_{E^u_x}<0\end{array}\right\}$$

$$=\#\left\{x:T\text{の}k/2\text{-周期点}\ \middle|\ \begin{array}{l}\dim E^u_x=\text{奇数},\\ \det DT^{k/2}(x)|_{E^u_x}<0\end{array}\right\}$$

ここに、$N(k)=\#\{k\text{-周期解}\}$、E^u_x は x の不安定多様体の接空間。

最近、次が示された。

<u>定理3</u>(Nakajima - Seifert [4])。

$n=2$ とする。次を仮定する。

1) f: analytic in x.

2) f の発散 $=\operatorname{trace} Df(x)<0 \quad x\in\mathbb{R}^2$

3) $\exists K$: コンパクト $\subset\mathbb{R}^2$ s.t. $\forall x(t)$: (1) の解に対し、$\exists t_0\in\mathbb{R}$, $x(t_0)\in K$.

このとき

$\forall p$: 自然数に対し、$N(p)<\infty$.

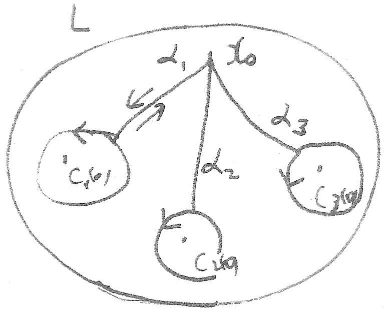
上述の Duffing 方程式は両定理の仮定を

みたしている。

3. 定理1の証明の概略

$i=1$ の場合だけ証明する。

$L = K - \{c_i(0) \mid i=1,2,3\}$ とおき、$x_0 \in L$ とする。$\alpha_i \in \pi_1(L, x_0)$ を右図の元とし α_i が代表する $H_1(L; \mathbb{Z})$ の元を b_i とかく。



一般性を失なわずに

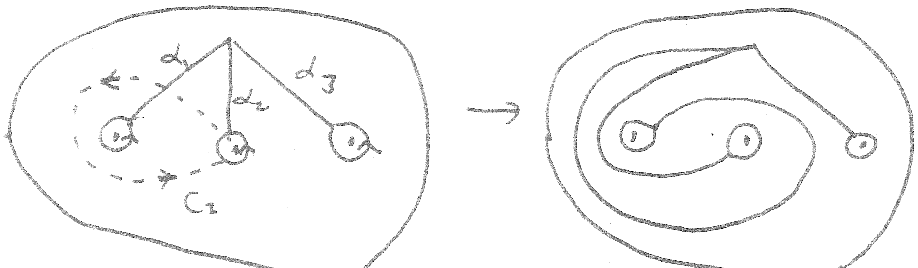
$$c_1(t) \equiv (0,0), \quad c_3(t) \equiv (1,0)$$

$$c_2(0) = (1/2, 0), \quad \varphi(t, 0, x_0) \equiv x_0$$

と仮定できる。このとき c_2 が $c_1 = (0,0)$ のまわりを反時計方向に一回まわる毎に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ はそれぞれ

$$\rho_1(\alpha_1) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}, \quad \rho_1(\alpha_2) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1},$$

$\rho_1(\alpha_3) = \alpha_3$ に変換される。



同様に、C_2 が C_3 のまわりを一回まわれば、α_1, α_2, α_3 はそれぞれ、

$$\rho_2(\alpha_1)=\alpha_1,\quad \rho_2(\alpha_2)=\alpha_2\alpha_3\alpha_2\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1},\quad \rho_2(\alpha_3)=\alpha_2\alpha_3\alpha_2^{-1}$$

に変換される。そこで、$\pi_1(L, x_0)$ の同型写像 ρ_1, ρ_2 を上式によって定義し、$I=(\gamma_1,\cdots,\gamma_\lambda)$ $J=(\delta_1,\cdots,\delta_\lambda)$ に対し、

$$\rho(I,J)=\rho_2^{\delta_\lambda}\rho_1^{\gamma_\lambda}\cdots\rho_2^{\delta_1}\rho_1^{\gamma_1}$$

とおけば、次を得る。

<u>補題1</u>　$T_* = \rho(I,J) : \pi_1(L, x_0) \longrightarrow \pi_1(L, x_0)$

次の補題の証明は、さほど難かしくない。

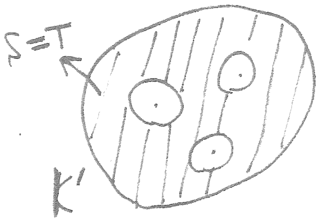
<u>補題2</u>　連続写像 $S: L \to L$ で

1) $S = T$ on K'

2) S は $\mathrm{Int}\,K_\lambda - C_\lambda(0)$ に不動点をもたない。

3) $S(L)$: コンパクト。

をみたすものが存在する。



上記二補題より、定理の証明のためには
連続写像 $h: L \to L$ で

$h(L)$：コンパクト

且 $h_* = \rho(I, J): \pi_1(L, x_1) \to \pi_1(L, x_0)$

をみたすものの不動点を調べればよいことがわかった。

さて、環 $\mathbb{Z}[a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, a_3, a_3^{-1}]$ を Λ とかくことにする。$k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ に対し、
$a^k = a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}$ とおくと、

$$\Lambda = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} r_k a^k \;\middle|\; r_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

である。

Λ の元を成分にもつ $(2, 2)$-行列 B_1, B_2 を

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 1 - a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2(1 - a_3) & a_2 a_3 \end{bmatrix}$$

で定義し、$B(I, J) = B_2^{j_d} B_1^{i_d} \cdots B_2^{j_1} B_1^{i_1}$ とおく。更に

$$A(I, J) = -\operatorname{trace} B(I, J) \in \Lambda$$

とおいて、$r_k \in \mathbb{Z}$ を

$$A(I, J) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} r_k a^k$$

で定義しよう。このとき

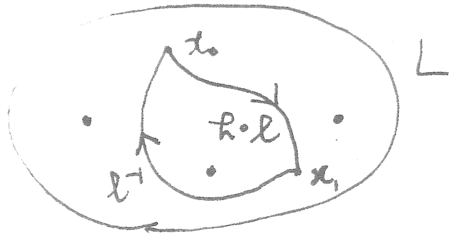
<u>命題2</u>　$h: L \to L$ を $h(L)$ がコンパクトな連続写像で，$h_* = \rho(I, J): \pi_1(L, x_0) \to \pi_1(L, x_0)$ をみたすものとする．このとき

$k \in \mathbb{Z}^3$, $\nu_k \neq 0$

$\Rightarrow$ $^\exists x_1$: h の不動点 s.t.

「x_0 から x_1 への任意の道 ℓ に対し，

$$[\ell^{-1}(h\circ\ell)] = \sum_{i=1}^{3} k_i b_i \in H_1(L).」$$



但 $b_i = [\alpha_i]$

<u>注意</u>　上の「　」の条件をみたす不動点の集合は一つの（Nielsen の定義した）fixed point class である。

<u>証明</u>　L の被覆空間 $\tilde{L}$ と h のリフト $\tilde{h}: \tilde{L} \to \tilde{L}$ をうまく選べば，

$$
\begin{cases}
P_r\{h' \text{の不動点}\} \\
\quad = \{x_1 : h \text{の不動点で「　」をみたす}\} \\
\Lambda(h') = r_K \cdot \alpha^3
\end{cases}
$$

をみたす様にできる。ここに、（αは被覆度）$P_r : L' \to L$ は射影，$\Lambda(S_r)$ は S_r のレフシェッツ数．よって．レフシェッツの不動点定理より、命題を得る。 ■

命題より、定理の証明のためには．

$$\#\{K \in \mathbb{Z}^3 \mid r_K \neq 0\} = \#\{A(I, J) \text{の項}\}$$

$$\geq p$$

$$\sum_{K \in \mathbb{Z}^3} |r_K| \geq 2^p$$

を示せば良いが、これらは．具体的に、多項式 $A(I, J)$ の計算を実行することにより．証明できる。

$p \geq 2$ の場合の証明は．今までの議論を、T^p に適用し．発見できた周期解のうち．最小周期が真に p であるもののみを取り出してやることによって、行なわれる。

4. 補足

定理1の仮定のうち、$[C_1, C_2, C_3]$に関するものは、それ以上ゆるめる事はできない。実際、方程式(1)で、周期解を5個しかもたず、その内の3個 C_1, C_2, C_3 が attractor で $[C_1, C_2, C_3] = [a^j], [b^j], [(ab)^j]$ $(j \in \mathbb{Z})$ であるものが簡単に構成できる。

定理1は3個の1-周期解が与えられた時いかなる条件の下に系に無限個の周期解が存在するかという問題を扱っているが、与えられる周期解の周期と個数に条件を課さない場合、それらの"からみ方"は組系(braid)として表わされる。この場合も、環 $\mathbb{Z}[a_1, a_1^{-1}, \cdots, a_n, a_n^{-1}]$ の元(Laurent多項式)が定義され、その多項式の係数を求める事により、周期解の個数を下から評価する事ができる。しかし、実際に計算する事は、なかなか面倒である。詳しくは[3]参照。

References

[1] N. Levinson, Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math.45(1944),723-737. Corrections,ibid.49 (1948),738.

[2] J.L.Massera, The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, Ann.of Math.50(1949),118-126.

[3] T. Matsuoka, The number and linking of periodic solutions of periodic systems, preprint.

[4] F. Nakajima and G. Seifert, The number of periodic solutions of 2-dimensional periodic systems, preprint.

[5] K. Shiraiwa, A generalization of the Levinson-Massera's equalities, Nagaya Math. J. 67(1977), 121-138.

Scissors congruence and homology of Lie groups

J. Dupont (Aarhus Univ.)

Conjecture

$$H_*(BG^\delta, M) \longrightarrow H_*(BG, M)$$

is an isomorphism for all finite abelian groups M.

c.f. Friedlander - Milnor

Theorem 1

Conjecture for H_3 is true for $G = SL(2,\mathbb{C})$.

In fact $H_3^{EM}(SL(2,\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ is divisible.

Scissors congruence in X (space-form)

G = group of isometries of X

two polytopes P and P' are scissors congruent if

$$P = \coprod_{i\in I} P_i, \quad P' = \coprod_{i \in I} P_i', \quad \forall i \in I \ \exists g_i \in G \ \text{s.t.}\ P_i = g_i P_i'$$

c.f. Hilbert 3rd problem.

$$P(X) = \overset{\text{Grothendieck}}{\text{Group}} \text{ of s.c. classes of polytopes}$$

Known if $n \leqq 2$, $Vol : P(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ is isom.

Theorem 2 $P(\mathcal{H}^3)$ is a divisible abelian group.

Theorem 3 $P(\mathcal{H}^n) \longrightarrow P(\bar{\mathcal{H}}^n)$ is an isom. for $n > 1$.

Theorem 4 $0 \longrightarrow \mu^* \longrightarrow H_3(SL(2,\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Lambda^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*) \rightarrow K_2(\mathbb{C}) \rightarrow 0$ is exact.

Theorem 5 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ is a divisible group.

ホモトピー論の発展

京都大学　戸田宏

上記の主題については，すでに G.W.Whitehead の講演記録

Fifty years of Homotopy theory

がある。また，「数学34号1巻」に

ホモトピー論50年

を書いた。これらを読んで頂ければ，今回の講演は必要がないともいえるが，どちらも手許にないものとして話を進めることにしたい。

ホモトピー論を広く解釈すれば，代数的位相幾何学全般に及ぶことなり到底話にならない。ここでは，限定された意味のホモトピー論を考える。しかし，これも人によって，時代によって限定の仕方が異るのであるが，少くとも1950年頃までは，ホモトピー論の範囲もはっきりしている様であるから，この頃までを詳しくのべる。それ以後のホモトピー論については，個人的偏見の入るのは止むを得ないであろう。

1. 1930年まで

この頃までのトポロジーについてよくは知らないが，多面体のホモロジー論が確立し，ホモロジー論はより一般な空間への拡張が各種の手法で試みられていた。一方多様体に関しては，Alexander，Poincaré の双対定理，Hopf-Lefschetz の不動点定理が証明されており，交叉(intersection)や linking の理論もえられていた。

ホモトピーに関しては，Poincaré の基本群とその被覆空間や一次元ホモロジー群との関係が知られ，同じ次元の多様体の間の写像のホモトピー不変量として Brouwer の写像度がえられていた。

ホモトピー論の一つの主題として，与えられた位相空間 X，Y の間の写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

の写像類(ホモトピー類)をきめることがある。勿論各種の制限をつけて考えるのが普通であるが，最も単純化された形がこれであり，最も本質的であると思われていたのが球面写像(の類)

$$f : S^m \longrightarrow S^n \qquad (m, n \text{ は球面の次元})$$

である。

1940年頃までの，ホモトピー論研究の主要な手段は単体近似(定理)である。これを使って，容易に

$$m < n \Longrightarrow {}^\forall f \simeq 0 : S^m \longrightarrow S^n$$

また，$m = n$ のときは，f のホモトピー類は Brouwer の写像度 $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ で特徴づけられる：

$$f \simeq g : S^n \longrightarrow S^n \Longleftrightarrow \deg(f) = \deg(g)$$

これらの外に，普遍被覆 $\mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1$ を使って

$$m > 1 \Longrightarrow {}^\forall f \simeq 0 : S^m \longrightarrow S^1$$

以上が，1930年までに知られていた球面写像類の全てである。従って，残っている問題は，

$$m > n > 1$$

の場合であり，その代表が

$$f : S^3 \longrightarrow S^2$$

ということになる。

これらの場合

$$f_* = 0 : H_i(S^m) \longrightarrow H_i(S^n) \quad (i \neq 0)$$

であって，ホモロジー群は役に立たない。一方，S^n は単連結であるから，被覆空間は自明である。そこで何等かの新しい手段を導入しなければならない事情にあった。

2. 1930年代のホモトピー論

$f: S^3 \to S^2$において，$f_* = 0$であるから，$f \simeq 0$であろうと予想するのが人情であろう。ところが，そうではなく，上のfのホモトピー類は無限にあることを示したのが，1931年にH. HopfがMath. Ann. に発表した"3次元球面から球面への写像について"という論文である。既に故人となられたHopf先生の考えを確かめる手段はないが，多分次のようなものであったろう。

まず，常套手段として，

$$f: S^3 \longrightarrow S^2$$

は単体写像であるとし，適当な点pの逆像$f^{-1}(p)$を考えると有限個の円周からなっている。ここで，円周の個数はあまり問題にならない（適当なホモトピーで動かすと円周は1つと思ってよい）。この円周はfがホモトピーで変化すると連続的に変り，$f \simeq 0$ならば1点から空集合になる。そこで，もう1点p'をとって，$f^{-1}(p')$を考えると，これについても同様でしかも$f^{-1}(p) \cap f^{-1}(p') = \phi$である。もしも，$f^{-1}(p)$と$f^{-1}(p')$がからみ合っているときは，$f \simeq 0$とはなりえないことがわかる。一般に言って，$f^{-1}(p)$と$f^{-1}(p')$のlinking係数を$\gamma(f)$とす

ると，これはホモトピー不変

$$f \simeq g : S^3 \longrightarrow S^2 \quad \Rightarrow \gamma(f) = \gamma(g)$$

である。

実際，Hopf の写像

$$h : S^3 \longrightarrow S^2, \qquad h(q) = q i \bar{q}$$

（S^3 は絶対値 1 の四元数全体，S^2 はそのうち実部が 0 のものと考える）では，

$$h^{-1}(i) = S^3 \cap \mathbb{C}, \quad h^{-1}(\bar{i}) = S^3 \cap j \cdot \mathbb{C}$$

で，$\gamma(h) = \pm 1$ であることがわかる。

$k_n : S^3 \longrightarrow S^3$ を $\deg(k_n) = n$ の写像とすると，

$$\gamma(h \circ k_n) = n, \qquad \text{一般に } \gamma(g \circ k_n) = n\gamma(g)$$

が成り立つことから，$S^3 \to S^2$ のホモトピー類は無限個あることがわかった。

このHopf の不変量 γ を一般次元に定義するには，linking に関する正確な知識があれば十分である。実際 Hopf は 1935 年（Fund. Math. 25）に，

$$f : S^{2n-1} \longrightarrow S^n \quad \Rightarrow \quad \gamma(f) \in \mathbb{Z}$$

を定義し，

$$\gamma(f \circ k_n) = n\gamma(f), \qquad \gamma(k_n' \circ f) = n^2 \gamma(f),$$

$$n : \text{奇数} \Rightarrow \gamma(f) = 0$$

n：偶数 $\Longrightarrow$ $\gamma(f)=2$ となる f がある。

$n=2,4,8$ $\Rightarrow$ $\gamma(h)=1$ となる h がある。

を証明した。特に，最後のもの $h: S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ ($n=2,4,8$) は Hopf の fibering とよばれるものである。

これら Hopf の仕事の意義は，Brouwer の写像度の他にも自明でないホモトピー不変量のあることを示し，ホモトピー論発展の端緒になったことが最も大きいが，その他にも Hopf の写像 h は典型的なファイバーバンドルであること，写像（単体近似）による1点の逆像の作る多様体がホモトピーの研究に役立つことは後の Pontrjagin Thom の研究に対する啓示となっていること，などであろう。

基本群を拡張したものとして，球面からの写像

$$f: S^n \longrightarrow X \qquad \text{（基点を保つ）}$$

のホモトピー類が群をなすことは，Čech が言い出したことらしいが，W. Hurewicz はこの群 $\pi_n(X)$ を研究し，有名な Hurewicz の定理を含む一連の結果を 1935～6年 (Proc. Akad. van Wetens. Amsterdam 38-39) に発表した。 このホモトピー群の記号 π_n は Hurewicz 以来のものである。

Hopfの不変量 γ は，準同型

$$\gamma : \pi_3(S^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

で，これが全射であることがHopfの最初の結果であるが，これが同型であることは上記Hurewiczの論文の中で次のように示されている。

当時は完全系列の概念は使われていなかったので表現は若干まわりくどいが，現代的な表現を借りると，Hurewiczは，Lie群 G とその閉部分群 H について，

$$\pi_n(H) \to \pi_n(G) \to \pi_n(G/H) \to \pi_{n-1}(H) \to \pi_{n-1}(G)$$

は完全であることを示し，とくに，$G = Sp(1) = S^3$，$H = U(1) = S^1$（従って，$G/H = S^2$）のときを考えて同型

$$\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2) \quad (n > 2)$$

が得られることを結論した。ここで，同型を与える写像（射影）$S^3 = G \longrightarrow S^2 = G/H$ はHopfのfiberingと一致する。

かくて，未知であった $\pi_m(S^n)$，$m > n > 1$，のうち $(m, n) = (3, 2)$ の場合が解決した。Hurewiczによって，$\pi_4(S^3) \cong \pi_4(S^2)$ であるから，次の目標は，$(m, n) = (4, 3), (4, 2)$ のどちらかである。

H. Freudenthal が 1937年 (Compositio Math. 5) に発表した結果は，懸垂 (Einhängung, suspension) の概念がホモトピー論において非常に有効に作用することを示したものとして画期的なものである。懸垂とそれに関する安定性の理論は，様々に形を変えて現在も盛んに使われている。

ホモトピー論発展の過程において，懸垂の概念が唐突に生じたのではなく，必然的にそれに到達したという立場をとりたい。

$f: S^4 \longrightarrow S^3$ について，Hopf と同じことをやってみよう。$f^{-1}(p)$ は円周であるとしてよい。4次元球面内で，2つの円周が link することはないから，Hopf の与えた障害（不変量）はない。それでは，ホモトピーによって，$f^{-1}(p)$ を空にすることができるであろうか。

$f^{-1}(p) = \phi \Rightarrow f \simeq 0$ は容易にわかるから，これは話がうますぎる。実際にやってみれば，$f^{-1}(p) = \phi$ にはできなくても，$f^{-1}(p) = 1$点にはできる。ここで若干の考察を施せば，一般の $f: S^m \longrightarrow S^n$ について，

$$f^{-1}(p) = q\,(1\text{点}) \Longleftrightarrow f(q) = p,\ f(S^m - q) \subset S^n - p$$

$$\Longleftrightarrow f \simeq f',\ f'(E^m_+) \subset E^n_+,\ f'(E^m_-) \subset E^n_-$$

がいえる。ここで $E_+^r(E_-^r)$ は S^r の上(下)半球を表す。

$E_\pm^n$ が可縮なことから，上のような f' のホモトピー類は，制限

$$g = f'|S^{m-1} : S^{m-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

のホモトピー類できまる。逆に，g から f' を標準的に作ったものを $Eg : S^m \to S^n$ とすると，

$$f^{-1}(p) = 1\text{点} \iff f \simeq Eg \text{ となる } g \text{ がある。}$$

Eg を g の懸垂と名づける。ホモトピー類をとって，

$$E : \pi_{m-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_m(S^n)$$

が Freudenthal の懸垂準同型である。

Freudenthal は多分以上の様な考察で懸垂の概念に到達し，Hopf の考察を推し進めて次の結果を得た。

(I) $E : \pi_{m-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_m(S^n)$ は $m \leq 2n-1$ のとき全射，$m < 2n-1$ のとき同型。

(II) $\pi_{2n-2}(S^{n-1}) \xrightarrow{E} \pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}$ は完全。

(III) $\alpha \in \pi_{2n-1}(S^n)$ (n：偶数) について，$E\alpha = 0$ ならば，$\gamma(\alpha)$ は偶数。

この論文は簡潔すぎるので，(I) の証明は解るが，(II) は若干微妙，(III) の証明は難解といえる。学生時代に，この論文の証明は怪しいのではないかという話を聞いた。

結果的には正しいので，話を進めると，Hopf fibering は何回懸垂しても $\neq 0$ であることがわかる。つまり，

$\pi_{n+1}(S^n)\ (n\geq 2)$，$\pi_{n+3}(S^n)\ (n\geq 4)$

$\pi_{n+7}(S^n)\ (n\geq 8)$ はすべて 0 ではない。

さらに，$\pi_{n+1}(S^n)\cong \mathbb{Z}/2\ (n\geq 3)$ であることを次のようにして示している。これには，(I)–(III) と $\pi_3(S^2)\cong \mathbb{Z}$（生成元は Hopf の類 $[h]$）より，

$$2E[h]=0$$

を示せば十分である。懸垂の一つの性質として

$$(\alpha+\alpha')\circ E\beta=\alpha\circ E\beta+\alpha'\circ E\beta$$

がある。とくに，恒等写像の類 $\iota_2\in\pi_2(S^n)$ について，

$$0=(E\iota_2-E\iota_2)\circ E[h]=E\iota_2\circ E[h]+E(-\iota_2)\circ E[h]$$

$$=E[h]+E((-\iota_2)\circ[h])$$

一方，$\gamma((-\iota_2)\circ h)=(-1)^2\circ\gamma(h)=\gamma(h)$ より，

$(-\iota_2)\circ[h]=[h]$，よって，$0=2E[h]$。 □

Freudenthal は名工の切れ味をもって，このような結果を出したが，それを推し進めるには大きな困難があった。この頃の主要手段である単体近似によって議論を進めると，どうしても曖昧なことになって，わからなくなってしまうのである。

この年代におけるホモトピー論関係の仕事としては，Hopf による，n 次元多面体 P^n から球面 S^n への写像類の研究と，Hurewicz の aspherical 空間 ($\pi_i(X)=0$ $i\geqq 2$ となる X) の研究がある。所謂 Hopf の定理

$$[P^n, S^n] \cong H^n(P^n; \mathbb{Z})$$

は今日的表現であって，コホモロジー群のなかった当時では当然ホモロジー群で表されている。Hurewicz は aspherical 空間 (即ち $K(\pi, 1)$) のホモロジー群は基本群 ($\pi=\pi_1$) で定まることを示した。

3. 1940年代のホモトピー論

この年代では，basic なものとして，Eilenberg-Steenrod のホモロジー論の公理的導入，その代表としての特異(型) ホモロジー，単体複体を拡げた J.H.C. Whitehead の CW-複体がある。そして，完全系列の概念が一般に使われるようになった。

Hurewicz の定理の拡張として，多面体の間の写像類が Pontrjagin の $P^3 \longrightarrow S^2$ をはじめとして多くの人によって研究された。その際，$\pi_{n+1}(S^n)$ の生成を detect するものとして，Steenrod の Sq^2 が有効に使われた。

写像のホモトピーによる分類問題は，写像の拡張問題と表裏の関係にある。例えば，複素射影平面 $\mathbb{C}P^2 = S^2 \cup e^4$ において，写像 $f: S^2 \to S^2$ が $\bar{f}: \mathbb{C}P^2 \to S^2$ へ拡張できるかどうかは，cup積を利用して，$\deg f = 0$ であるかどうかできまることがわかる。これを懸垂した状態 $f: S^3 \to S^3$，$\bar{f}: E\mathbb{C}P^2 = S^3 \cup e^5 \to S^3$ で考えるときは，cup積ではだめで，1-cup積 $\cup_1: H^p \otimes H^q \to H^{p+q-1}$ を使えばうまくいく。Steenrod (Ann. of Math 48(1947)) はこのようにして，n-cup積 $\cup_n: H^p \otimes H^q \to H^{p+q-n}$ から，平方作用素

$$Sq^k: H^n(X; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{n+k}(X; \mathbb{Z}/2)$$

に到達し，$P^{n+2} \longrightarrow S^2$ の写像の拡張問題に応用した。後に，Steenrod は $\mathbb{Z}/p$ 係数での素約巾作用素を定義するが，このようなコホモロジー作用素の重要性はホモトピー論の発展と共に明らかになってくる。

この年代には，ファイバーバンドル（ファイバー空間）の研究も盛んであり，各種の特性類や，等質空間のホモロジー，ホモトピー等が調べられた。Steerod の著書 The topology of fibre bundle (1951) はこの年代の研究を集約したものと考えてもよい。

この年代の研究でもう一つ重要な概念は $K(\pi, n)$ であろう。Hurewicz の $K(\pi,1)$ に関する結果は形式的なものであるが，Hopf (1942) は $H_2(K(\pi,1))$ を π で実際に表している。Eilenberg-MacLane は，はじめ $K(\pi,1)$，つぎに $K(\pi,n)$ （$\pi_i(K(\pi,n))=0$ $(i\neq n)$，$\pi_n(K(\pi,n))=\pi$）の(コ)ホモロジー群は π と n から代数的に定まることを示した。以後，彼等は $H_*(K(\pi,n))$ を代数的に研究したが，最終的には H. Cartan (1954-5) がその形を決定した。

Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi,n)$ はホモトピー群が最も簡単な空間で，CW-複体の胞体に対応するものである。そして，胞体分割またはホモロジー分解に対応するものとして Postnikov 分解がある。また，コホモロジー群やコホモロジー作用素との関係は，次の年代に至って明らかとなる。

4. 1950 年代のホモトピー論

この年代の話題は非常に多い。思いつくまま挙げると，

- Hopf 不変量の一般化と EHP-系列

○ ホモトピー切除定理とそれに関するもの

○ Thom のコボルディズム

○ Serre のスペクトル系列と応用

○ Adem 関係式と Steenrod 代数

○ Adams のスペクトル系列

○ Bott 周期性と K-理論

等，その他いろいろある。これらは独立なものではなく時期も入れ交っている。また，限定された意味のホモトピー論からはみ出すものもある。それらの中から恣意的にとり上げて話を進める。

この年代になって，単体近似の手法から完全に脱却することができた。その最も大きな原動力は，Serre の研究であり，ファイバー空間に特異ホモロジー論が使えるということである。今日では，Serre の理論は代数的位相幾何学の基本事項の一つであるが，当時は非常な驚きをもって迎えられた。ここでは，Serre の一般論は省略して自由に使う立場でいくことにしよう。

この年代の初頭，$\pi_{n+2}(S^n)=0\ (n\geqq 3)$ という10年来使われてきた結果が誤りで，$\pi_{n+2}(S^n)\cong \mathbb{Z}/2$ であることが明らかとなる。このことの証明は，G. W. Whitehead

Pontrjaginの証明をとっても容易ではない。しかし，Ademの関係式 $Sq^2Sq^2=Sq^3Sq^1$ を使って簡単に証明できることはよく御存知であろう。

ここに至って，球面写像論が息を吹き返してくる。その研究には二つの流れがある。一つは，Hopf-Freudenthalの流れを汲む懸垂にまつわるものであり，もう一つは，Cartan-Serreに始まる"殺しの手法"であって，夫々一長一短がある。

空間及び写像の懸垂Eは，球面と同様に一般に定義される。また，懸垂Eとloop Ωとは全単射

$$[EX, Y] \cong [X, \Omega Y]$$

によって密接な関連にある。このことは，可成り古くから知られていたようである。例えば，Hurewiczのホモトピー群の定義は $\pi_n(X)=\pi_1(\Omega^{n-1}X)$ であり，40年代に，EとWhitehead積の関係が曲線空間を使ってすでに論じられていた。ただ異なる点は，ΩYのホモロジーが容易には求められなかったということである。

Serreの理論以前に，ΩS^nのホモロジーを調べる手段は，Freudenthalの定理，Blakers-Masseyの切除定理の外には，少々高級なMorseの理論位で，それも不

完全であった。例えば，G.W. Whitehead や P.J. Hilton が Hopf 不変量の一般化によって，多数の 0 でない球面写像類を見出していたが，球面のホモトピー群を決めるには致らなかった。また，筆者が球面のホモトピー群の一部を Serre 以前に決めた時には，Eilenberg-MacLane の結果を引用するしかなかったわけである。

Cartan-Serre の killing method はある意味では万能であるが，非安定の場合はやはり面倒である。例えば，$\pi_{n+k}(S^n)$ $(6 \le k \le 8)$ の結果を示した Serre の報告では，まず安定な場合 $(n > k+1)$ をもとめ，J-準同型を補助にして非安定な場合を定めている。なお，この方法による非安定な場合の計算として，山ノ下氏の労作がある。

killing method を整理し直し，代数的な方法でアプローチすることは，Adams のスペクトル系列（1958）で完成された。安定ホモトピー群を求めるには，これは一番よい方法であろう。

一方，EHP 系列は非安定ホモトピー群の決定に威力を発揮した。G.W. Whitehead は，彼の一般 Hopf 不変量 H が懸垂 E との関係で，

$$\xrightarrow{P} \pi_{n-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{E} \pi_n(S^m) \xrightarrow{H} \pi_n(S^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_{n-2}(S^{m-1})$$

の形の完完列を作ると予想した。ここで，P は J.H.C. Whitehead の積で書ける（場合がある）ので product の意味で使われる記号である。

この G.W.Whitehead の予想は，James (1955-6) によって解決された。n が偶数の時は EHP 系列の完全性はつねに正しく，n が奇数の時は 2-成分の上で正しい。James は最初の論文で，懸垂の loop は彼のいう約積とホモトピー同値であることを示した。基点 $*$ をもつ空間 X の約積 X_∞ は

$$X_\infty = \coprod_n X^n/\sim, \quad X^n = X\times\cdots\times X \ (n\text{ケ})$$

で与えられる（$\sim$ は $*$ を単位元のように見て cancell する関係）。X が連結 CW-複体のとき，ホモトピー同値

$$X_\infty \simeq \Omega EX$$

がある。これを使えば，一般懸垂定理

$$X: r\text{-連結},\ \dim K \leq 2r \Rightarrow [K,X] \overset{E}{\cong} [EK,EX]$$

が直ちに得られる。

さらに，James は一般 Hopf 不変量

$$H: [EK,EX] \to [EK, E(X\wedge X)]$$

を構成するために，これと同値な対応

$$[K, X_\infty] \to [K, (X\wedge X)_\infty]$$

を誘導する連続写像 $X_\infty \longrightarrow (X\wedge X)_\infty$ の存在することを示した。そして，球面 $X=S^{m-1}$ の場合に EHP 系列の完全性定理を証明したわけである。

この年代で特筆すべきものとして，Bott の周期性と K-理論があるが，いまの話のすじと少し外れるので割愛する。

この年代は現在のような情報過多の時代ではなく，情報遅延の時代であった。離れた場所で同じような研究が平行して行なわれ，1年以上たってそれがわかるといったことがよくあった。今から考えると，雑音が入らずに好きなように研究できたということは現在では得難い環境ではなかったかと思う。

5。1960年以後のホモトピー論

小節の標題は書いたが，実は予定紙数があとわずかである。講演も多分時間切れで，ここまでは話せないと思う。その上，現在に近くなる程，この種の話はやりにくくなる。あとは，印象に残ることを少しのべるだけに止める。

Hopf の fibering (Hopf 不変量 1 の写像) $S^{2n-1} \longrightarrow S^n$

が$n=2,4,8$以外の場合にあるかという問題は古くから問題になっていた。$n=8$の場合は例外群F_4に関係しているから、E_6, E_7, E_8に関係してもう2つ3つ位の場合があるであろうとFreudenthalは言っていた。筆者が高次元空の球面写像をくわしく調べた動機は、この問題が$n=16$でどうなっているかを知りたかったことにもよる。最終的にはAdams(Ann. Math. 72 (1960))によって、Hopfの場合しかないことがわかった。現在では、AtiyahによるK-理論を使った高次元射影平面の不存在性の証明がエレガントで見易く、mod p Hopf不変量の自明性にも使える方法である(戸田-三村「ホモトピー論」参照)。

K-理論のホモトピー論への応用は、上の場合の外、J-準同型やH-空間、immersion、vector場等色々あるが、通常不存在等のnegativeな結果を出すのに使われて、ホモトピー論をK-理論で全面的におきかえることはできない。K-理論の限界などというものも、もう少しはっきりさせなければならないであろう。

1960年以来、コボルディズムやBPを使った研究が多くなったが、こちらの方は、K-理論の簡潔さとくらべて

大道具であり，取扱い不便という感じはまぬかれ難い。

球面のホモトピー群の p-成分については，50年代の終り頃，$2p^2(p-1)-4$ stem まで決めて，解らぬ分は放置していたところ，ふとした機会から $\alpha_1\beta_1^p=0$ をはじめとした関係式が次々と現れ，球面のホモトピー群がますます複雑怪奇となるもとを作ってしまった。

その他，上の関係式から発展して，西田の巾零性定理，α-series，β-series，γ-series 等の話，スペクトラム $V(n)$ の存在 不存在，Kahn-Priddy の定理等の話題や，もっと近くでは同変ホモトピーの話等は，若い人にしてもらった方がよいと思うので触れないことにする。

文献は最初に挙げた「ホモトピー論の50年」のそれを参照して下さい。また "Fifty years of homotopy theory" の文献表は並べ方が変っている。

群の表現論と同変K－理論

京大・理　河野　明

序文　リー群とくにcompact Lie群の表現論は，同変K－理論を通して，安定ホモトピー論と重要な関連を持っている。とくにその誘導表現の理論はAtiyah－Singer理論を用いると同変K－理論のtransferの話葉で解釈出来る。この講演では，これらの問題のいくつかの話題について述べる。

§1　Compact Lie 群の誘導表現

Gをcompact Lie group，$R(G)$を表現環とする。$R(G)$の元は $M-n$（MはGの表現 nはn-dim trivial表現）と表わされる。$\chi_{M-n}(g)=\chi_M(g)-\chi_n(g)$（右辺の$\chi$は表現の指標）$g\in G$とおくと$\chi$は well defined な map $\chi: R(G)\to\mathbb{C}$ をdefし，しかも $x,y\in R(G)$について $x=y \Longleftrightarrow \chi_x(g)=\chi_y(g)$ $\forall g\in G$ が成立する。さらに $\forall x\in R(G)$に対してχ_xはG上の連続函数になる。

Hをclosed subgroup of G，$\tau(G/H)$をG/Hのcotangent bundle $\tau_{\mathbb{C}}(G/H)=\tau(G/H)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$とする。

K_Gを同変K-理論とすると Thom isomorphism

$$\varphi_{T_{\mathbb{C}}(G/H)}: K_G(G/H) \longrightarrow K_G(T_{\mathbb{C}}(G/H))$$

と proper map $k: T(G/H) \longrightarrow T_{\mathbb{C}}(G/H)$ の誘導する map

$$k^*: K_G(T_{\mathbb{C}}(G/H)) \longrightarrow K_G(T(G/H))$$

の結合 $k^* \varphi_{T_{\mathbb{C}}(G/H)}$ を φ とおく。準同型

$$\mathrm{Ind}_H^G: R(H) \longrightarrow R(G)$$

を可換図式

$$\begin{array}{ccccc} R(H) & & \xrightarrow{\quad \mathrm{Ind}_H^G \quad} & & R(G) \\ \| & & & & \| \\ K_G(G/H) & \longrightarrow & K_G(T(G/H)) & \xrightarrow{t\text{-}ind} & K_G(pt) \end{array}$$

で定義する。Atiyah-Singer 指数定理 [2] より t-ind = a-ind であるから，この symbol class を表現する G不変 elliptic operator を構成して，その a-ind を計算する。この計算は不動点公式により，次の様になる。

Th1.1. (Segal [12]) $g \in G$ を Cartan subgroup の生成元 (この元は G で dense であることが知られている。) とする時，

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(M)}(g) = \sum_{xH \in (G/H)^g} \chi_M(x^{-1}gx)$$

($(G/H)^g$ は finite set になる。)

この式は有限群論の場合の一般化になっている。

Remark G が connected の時 Cartan subgroup = 極大トーラス。

Example 1.2. $G=U(n)$ $H=U(1)\times U(n-1)$

$\beta_n: H\to U(1)$ (1st projection) ι_n $U(n)$ の identity

この時 $\mathrm{Ind}_H^G(\beta_n)=\iota_n$

§2 Transfer

X を based space $1_{\Sigma^n X}:\Sigma^n X\to\Sigma^n X$ の adjoint map $Ad(1_{\Sigma^n X}):\Sigma^{n-1}X\longrightarrow\Omega\Sigma^n X$ の $n-1$ 回 loop

$$\Omega^{n-1}Ad(1_{\Sigma^n X}):\Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X\longrightarrow\Omega^n\Sigma^n X.$$

を利用して $Q(X)=\operatorname*{Colim}_n\Omega^n\Sigma^n X$ を考える。

$B^\ell Q(X)=\operatorname*{Colim}_n\Omega^n\Sigma^{n+\ell}X$ を同様に考えると,

$$\Omega^\ell B^\ell Q(X)\simeq Q(X)$$

となる。よって $Q(X)$ は infinite loop space となる。さらに X 自身が infinite loop space とすると, 構造写像と呼ばれる infinite loop map

$$\xi_X: Q(X)\to X$$

が定義される. $f: X\to Y$ based map に対して

$$Q(f): Q(X)\to Q(Y)$$

は infinite loop map である。さらに f が infinite loop map とすると,

$$
\begin{array}{ccc}
Q(X) & \xrightarrow{Q(f)} & Q(Y) \\
\downarrow \xi_X & & \downarrow \xi_Y \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}
$$

が可換となる。

$E \xrightarrow{p} B$ を fibe 束で,

(1) E, B. compact かつ 構造群 G は compact Lie group

(2) fibre F は compact smooth manifold で G の作用も smooth とする。

この時 Becker − Gottlieb [4] は, stable map

$$t(p, G, F) = t(p) : \Sigma^l \wedge B_+ \longrightarrow \Sigma^l \wedge E_+$$

を定義し, 任意の cohomology theory $h^*(\ )$ に対して transfer homomorphism $p_* : h^*(E) \to h^*(B)$ を可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
h^k(E) \cong \tilde{h}^k(E_+) \cong & \tilde{h}^{k+l}(E_+) \\
p_* \downarrow & \downarrow t(p)^* \\
h^k(B) \cong \tilde{h}^k(B_+) \cong & \tilde{h}^{k+l}(B_+)
\end{array}
$$

で def した(これは F, G に depend する)。

さて　$Ad(t(p)) : B_+ \longrightarrow \Omega^l \Sigma^l E_+$ を考えて

$$t(p) : B_+ \longrightarrow Q(E_+)$$

と考えることにする。

$\hat{E} \xrightarrow{\hat{p}} B$ を $E \xrightarrow{p} B$ の同伴主 G 束とする。この時 Becker [3] は次を得た。

Lemma 2.1. F の G 作用が smooth $G \times S^1$ 作用に拡張され，F_0 が $G \times S^1$ submanifold で $F_0 = F^{S^1}$ とする。$\hat{E} \xrightarrow{\hat{p}} B$ に同伴な F_0 束を $E_0 \xrightarrow{p_0} B$ とし inclusion を $i : E_0 \hookrightarrow E$ とする。この時

$$\begin{tikzcd} B_+ \arrow[r, "t(p_0, G, F_0)"] \arrow[dr, "t(p, G, F)"'] & Q(E_{0+}) \arrow[d] \\ & Q(E_+) \end{tikzcd}$$

は homotopy 可換である。

一方定義から，次は明らか

Lemma 2.2. $E \xrightarrow{p} B$ の構造群が G_0 に reduction 出来る時

$$\begin{tikzcd} B_+ \arrow[r, "t(p, G_0, F)"] \arrow[dr, "t(p, G, F)"'] & Q(E_+) \arrow[d, equal] \\ & Q(E_+) \end{tikzcd}$$

は homotopy 可換.

Brownの表現定理より，$\widetilde{h}^*(\ )$ は infinite loop space T により

$$\widetilde{h}^k(X_+) = [X_+, T]$$

$x : B_+ \to T$ について $p_*(x)$ を表現してみる。

Lemma 2.3. $p_*(x) = \xi_T \circ Q(x) \circ t(p)$

$$\left(E_+ \xrightarrow[t(p)]{} Q(B_+) \xrightarrow[Q(x)]{} Q(T) \xrightarrow{\xi_T} T \right)$$

が成立する。また K-理論の transfer については，次が知られている。

Theorem 2.4. (Nishida[11]) Eを compact free G space Hを closed subgroupとする。この時 $G/H \to E/H \xrightarrow{p} E/G$ について 次は可換

$$\begin{array}{ccc} R(H) & \xrightarrow{\alpha} & K(E/H) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_H^G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ R(G) & \xrightarrow{\alpha} & K(E/G) \end{array}$$

ただし α は $M \mapsto (E \times_H M \to E/H)$ で defされる。

まったく同様な議論が，(RO, KO) (RSp, KSp) でも可能であり (cf. Hashimoto [5]) この事実を後の§で利用する。

$\mathbb{H}P^n$ を n-dim 四元数射影空間とする。

$[a_1, \cdots, a_{n+1}] \sim [a_1' \cdots a_{n+1}'] \Longleftrightarrow \exists \alpha \in H^\times$ s.t.

$a_i = a_i' \cdot \alpha$ で定義するとき，HP^n は（左）$Sp(n+1)$ manifoldになる。これの制限で HP^n を $U(n+1)$ mfd と考えて，$U(n+1)\times S^1$ 作用を 左からの積でdefする $e^{i\theta}[a_1, \cdots, a_{n+1}] = [e^{i\theta}a_1, \cdots e^{i\theta}a_{n+1}]$
この時

Lemma 2.5. $HP^{n\,S^1} = \mathbb{C}P^n$

が成立する。

§3 Segal-Becker splitting

$\mathbb{C}P^\infty$ 上の canonical line bundle の K-theory の Euler class を表わす map を $j: \mathbb{C}P^\infty \to BU$ とする。BU の Bott periodicity に対応する infinite loop stucture を $\xi: Q(BU) \to BU$ とする。

$\lambda = \xi \circ Q(j)$ とおくとき，次が成立する。

Th 3.1. (Becker [3]) (1) $\exists\ \varepsilon: BU \to Q(\mathbb{C}P^\infty)$ s.t. $\lambda \circ \varepsilon \simeq 1_{BU}$

(2) HP^∞, BSp についても同様に $\exists\ \varepsilon': BSp \to Q(HP^\infty)$ s.t. $\lambda' \circ \varepsilon' \simeq 1_{BSp}$.

(3.1) の Beckerによる証明は少しめんどうである。ここでは Th 2.4 を利用した proof を考える。

$B_n = U(2n)/U(n)\times U(n) = \mathbb{C}^{2n}$ の n plane

$E_n = U(2n)/U(1)\times U(n-1)\times U(n) = \mathbb{C}^{2n}$ の line と 直交する $(n-1)$ plane の対

$\overline{E}_n = U(2n)/U(1)\times U(2n-1) = \mathbb{C}P^{2n-1}$

$p_n : E_n \longrightarrow B_n$, $q_n : E_n \longrightarrow \overline{E}_n$ projections とする。

$y_n = q_n^*(\eta_{2n-1})$ (η_j は $\mathbb{C}P^j$ 上の canonical line bundle) とするとき，明らかに $y_n = \alpha(\beta_n)$ が成立する。

$P^*(\ )$ で $Q(\mathbb{C}P^\infty)$ の表現する cohomology を表わし $P^0(\ ) = P(\ )$ と書く。$G = U(n)$ $H = U(1)\times U(n-1)$ とすると，次の図式は可換

$$\begin{array}{ccccc}
R(H) & \xrightarrow{\alpha} & K(E_n) & \xleftarrow{\lambda_*} & P(E_n) \\
\downarrow{\scriptstyle Ind_H^G} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\
R(G) & \xrightarrow{\alpha} & K(B_n) & \xleftarrow{\lambda_*} & P(B_n)
\end{array}$$

Example 1.2 より $\alpha(Ind_H^G(\beta_n)) = \alpha(1_n) = \xi_n$ (= B_n 上の universal vector bundle) が成立する。

$$E_n \xrightarrow{q_n} \overline{E}_n \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow Q(\mathbb{C}P^\infty)$$

の結合を $\hat{q}_n$ と書くとき 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}P^\infty & \hookrightarrow & Q(\mathbb{C}P^\infty) \\
\downarrow{\scriptstyle j} & \swarrow{\scriptstyle \lambda} & \downarrow{\scriptstyle Q(j)} \\
BU & \xleftarrow{\xi} & Q(BU)
\end{array}$$

より $\lambda_*(\hat{q}_n) = q_n^*(\eta_{2n-1}) = y_n$

$p_* y_n = \lambda_* p_* \tilde{\eta}_n = \xi_n$ (B_n 上の universal vector bundle) が成立する。一方 $p_* \tilde{\eta}_n$ を書き直すと

$$B_{n+} \xrightarrow{t(p_n)} Q(E_{n+}) \longrightarrow Q(\bar{E}_{n+}) \longrightarrow Q(\mathbb{C}P^\infty_+)$$

となる。少しくわしい議論をするとこれから

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\varepsilon_n} & Q(\mathbb{C}P^\infty) \\ \downarrow & & \| \\ B_{n+1} & \xrightarrow[\varepsilon_{n+1}]{} & Q(\mathbb{C}P^\infty) \end{array}$$

が homotopy 可換でしかも $\mathrm{Colim}_n\, \varepsilon_n = \varepsilon$ とすると $\lambda \circ \varepsilon = 1_{BU}$ となるものが作れる。(2) も同様 (終)

対応する $\mathbb{H}$ の case をすべて $'$ をつけて書くことにする。

$$\begin{array}{ccc} B_{n+} & \xrightarrow{t(p_n)} & Q(E_{n+}) \\ j_n' \cap & & \circlearrowright \\ B'_{n+} & \xrightarrow{t(p_n')} & Q(E'_{n+}) \end{array}$$

は可換であろうか. $p_n' : E_n' \to B_n'$ を B_n 上に制限したものを $\tilde{E}_n' = j_n'^* E_n'$ とおく。$\tilde{p}_n : \tilde{E}_n' \to B_n$ の構造群は $U(n)$ に reduction 出来また fibre は $\mathbb{H}P^{n-1}$

$\tilde{E}_n' \to B_n$, $E_n \to B_n$ の同伴主 $U(n)$ 束は共に

$\hat{E}_n = U(2n)/U(n) \longrightarrow B_n$

さらに $\mathbb{H}P^{n-1}$ の $U(n)\times S^1$ 作用を考えると Lemma 2.5

より，次は homotopy 可換

$$\begin{array}{ccc}
B_{n+} & \xrightarrow[\;t(p_n)\;]{t(p_n,\,U(n),\,\mathbb{C}P^{n-1}) \;=} & Q(E_{n+}) \\
\| & & \cap \\
B_{n+} & \xrightarrow{t(\tilde{p}_n',\,U(n),\,\mathbb{H}P^{n-1})} & Q(\tilde{E}_{n+}') \\
\| & & \| \\
B_{n+} & \xrightarrow{t(\tilde{p}_n',\,Sp(n),\,\mathbb{H}P^{n-1})} & Q(\tilde{E}_{n+}') \\
j_n' \cap & & \cap \\
B_{n+}' & \xrightarrow[\;t(p_n')\;]{t(p_n',\,Sp(n),\,\mathbb{H}P^{n-1}) \;=} & Q(E_{n+}')
\end{array}$$

よって次が得られる。

Th 3.2. Th 3.1. の (1), (2) の ε, ε' を次をみたす様にとれる：

$$\begin{array}{ccc}
BU & \xrightarrow{\varepsilon} & Q(\mathbb{C}P^\infty) \\
j \downarrow & & \downarrow Q(j') \\
BSp & \xrightarrow{\varepsilon'} & Q(\mathbb{H}P^\infty)
\end{array}$$

が homotopy 可換。

$$\mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{H}P^\infty \longrightarrow \widetilde{\mathbb{H}P}^\infty$$

を mapping cone とする。

filtering の間の homotopy 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega Q(\widetilde{HP}^\infty) & \longrightarrow & Q(CP^\infty) & \longrightarrow & Q(HP^\infty) & \longrightarrow & Q(\widetilde{HP}^\infty) \\
\Omega\tilde{\lambda}\downarrow & & \lambda\downarrow & & \lambda'\downarrow & & \tilde{\lambda}\downarrow \\
Sp/U & \longrightarrow & BU & \longrightarrow & BSp & \longrightarrow & B(Sp/U) \\
 & & \varepsilon\downarrow & & \varepsilon\downarrow & & \\
\Omega Q(\widetilde{HP}^\infty) & \longrightarrow & Q(CP^\infty) & \longrightarrow & Q(HP^\infty) & &
\end{array}$$

が出来る。 これから $\exists\,\tilde{\varepsilon} : Sp/U \to \Omega Q(\widetilde{HP}^\infty)$

s.t. $(\Omega\tilde{\lambda})\cdot\tilde{\varepsilon}$ は self homotopy equi.

Corollary 3.3. $\Omega Q(\widetilde{HP}^\infty) \simeq Sp/U \times F$

($\pi_*(F)$ は finite group).

が得られる。

§4 いくつかの注意

Th 3.1 の少し弱い結果である

Th 3.1′ 任意の finite cell complex X について

$\lambda_* : \tilde{P}(X) \to \tilde{K}(X)$ は split epic

で応用上は十分と思われる。この case の証明は Th 3.1 の証明の前半でよい。この Th 3.1′ は 入江－河野 [7] で同変理論の場合に一般化されている。この splitting についても j と可換にとれる。

Th 3.1 (又は Th 3.1') は次の形で Adams conj の解決になっている。

$$\begin{array}{ccccccc} Q(\mathbb{C}P^\infty) & \xrightarrow{\lambda} & BU & \xrightarrow{(1-\psi^q)} & BU[\frac{1}{q}] & \xrightarrow{J} & Sph[\frac{1}{q}] \\ \| & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow \\ Q(\mathbb{C}P^\infty) & \xrightarrow[Q(j)]{} & Q(BU) & \xrightarrow[Q(1-\psi^q)]{} & Q(BU[\frac{1}{q}]) & \xrightarrow[Q(J)]{} & Q(Sph[\frac{1}{q}]) \end{array}$$

$$Q(J)\circ Q(1-\psi^q)\circ Q(j) = Q(J\circ(1-\psi^q)\circ j) = 0$$

(Adams conj for line bundle)

$$P(X) \xrightarrow{\lambda_*} K(X) \xrightarrow{(1-\psi^q)} K(X)[\tfrac{1}{q}] \xrightarrow{J} Sph(X)[\tfrac{1}{q}]$$

は zero map λ_* epic. 故 $J(1-\psi^q)=0$.

この proof では $1-\psi^q$ が $BU \to BU[\frac{1}{q}]$ の infinite loop map を使っている。同変理論にこの様な問題を一般化する時この方向が良いかどうかは少しうたがわしい。Adams operation と安定ホモトピー論はあまり良い関係にない。実際次が知られている。

Th 4.1. (平田-河野) $q=p^d$ p prime とする。G が compact Lie group の時 ψ^q が $K_G^*(\ )[\frac{1}{p}]$ の stable operation に拡張される $\Longleftrightarrow$ $|G|<\infty$ かつ $(|G|, p)=1$.

一方 Ind_H^G と ψ^q には次の関係がある。

Th 4.2. $(|G/G^0|, q) = 1$ の時 $^\forall H$ closed subgroup

$$\psi^q \circ \mathrm{Ind}_H^G = \mathrm{Ind}_H^G \circ \psi^q$$

とくに G が connected の時には大きな差がある。

(cf. [8], [9]).

References

[1] M.F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math., 19 (1968) 113-140.

[2] M.F. Atiyah - I.M. Singer, The index of elliptic operators I, Ann. Math., 87 (1968), 484-530.

[3] J.C. Becker, Characteristic classes and K-theory Lecture Notes in Math., 428, 132-143.

[4] J.C. Becker - G.H. Gottlieb, The transfer maps and fibre bundle, Topology, 14 (1975), 1-12.

[5] S. Hashimoto, The transfer map in K_G-theory, Osaka J. Math.

[6] K. Hirata - A. Kono, On the Bott cannibalistic classes, (to appear in Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.)

[7] K. Iriye - A. Kono, Segal-Becker theorem for K_G-theory, (to appear in J. Math. Kyoto Univ.)

[8] A. Kono, Segal-Becker theorem for KR-theory, Japan. J. Math., 7 (1981), 195-199.

[9] A. Kono, Induced representations of compact Lie groups and the Adams operations, Publ. R.I.M.S. Kyoto

Univ., 17 (1981), 553–556.

[9] A. Kono, On the order of J(x) and the Adams conjecture, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 17 (1981) 557–564.

[10] M. Nagata – G. Nishida – H. Toda, Segal-Becker theorem for KR-theory, J. Math. Soc. Japan,

[11] G. Nishida, The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), 435–451

[12] G. Segal, The representation ring of a compact Lie group, Publ. I.H.E.S., 34 (1968), 113–128.

C^∞-写像とその特異性

- Codimensions, Unfoldings and Stability -

奈良女子大 理

泉屋周一

La topologie est précisément la discipline mathématique qui permet la passage du local au global. - R.Thom, 1972 -

C^∞-写像 $f:N \to P$ の局所的な形を見る事は，非常に興味深く，且つ又非常に有効な事です。例えば，$f:N \to \mathbb{R}$ という C^∞-関数の局所的な形はほとんどすべての場合 Morse type になり，そのおかげで多様体の大域的な性質の研究がどれほど進展したかは，計り知れないものがあります。本稿では，"$f:N \to P$ の局所的な形を見る" ということが，どのようにして行なわれるのかを低次元の場合を例にあげながら Mather 等の方法にそって紹介し，さらに最近得られた結果により，いくら見ようとしても全容はなかなか見えないのが現実であることを解説しようと思います。

§1. 目に見えるEXAMPLE

ここでは，トーラス T から平面への射影を例にとって，2次元多様体間の C^∞-写像には，本質的にいかなる特異点があらわれるかを調べ，その事実を厳密に証明したWhitneyの古典的結果[10]を紹介する。それは，一般次元の場合に使われる様々なアイデアを本質的に含んでいる。

T を $\mathbb{R}^3$ の中のトーラス，$\pi: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を標準射影として，$f: T \to \mathbb{R}^2$ を π の T への制限とする．

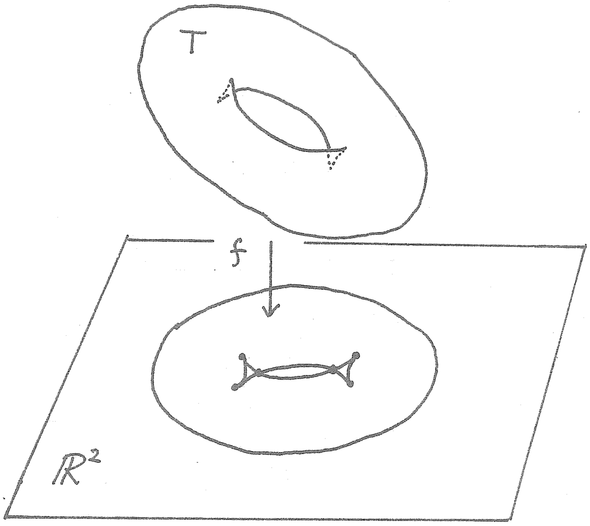


Fig 1.

この写像 f の特異点は T の $\mathbb{R}^3$ へのはいり方に依存しているが，Fig 1 の状況がその典型的な場合である．

この図には本質的に異なる3種類の点がみられる．

それは，以下の図のようなものである；

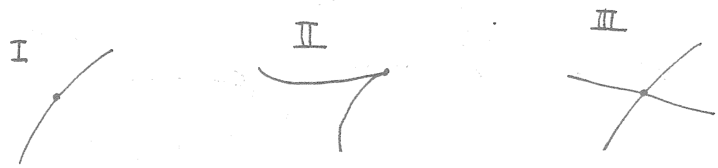


Fig 2

さらに，I，II の場合，その局所的な形は以下のように図示できる；

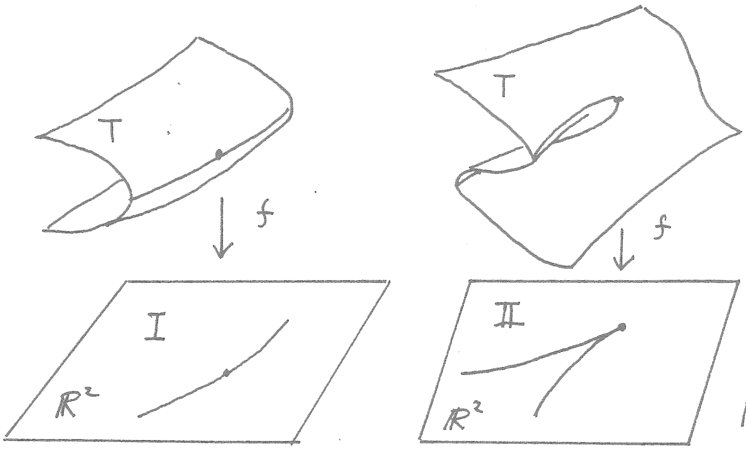


Fig 3.

III の場合は，I の型の点がかさなっている状況であり，従って III は I の亜流と見るとしたら，この f には，特異点として，本質的に I－型と II－型があるとしてよい．しかし一般には，T の $\mathbb{R}^3$ への入り方によっては，他の型の特異点もあってよいはずである．

たとえば，以下の図のような状況を考えてみよう．

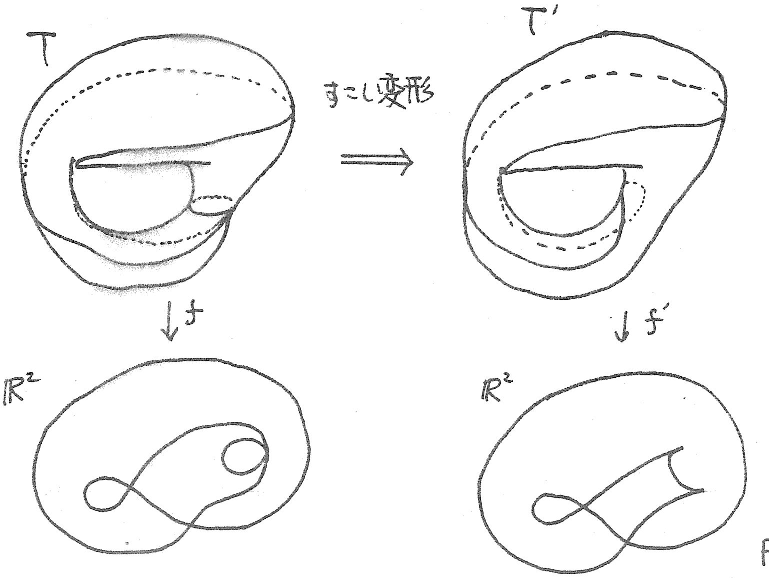


Fig 4.

左図のように，Ⅰ，Ⅱ型以外の特異点をもっている場合もあるが，Tを少し変形することにより，Ⅰ，Ⅱ型しか持たないようにできる．この事実を一般の2次元多様体間の滑らかな写像に対して示したのが，Whitneyによる，平面写像定理である．

<u>定理（Whitney平面写像定理）</u>．Nをcompact 2次元多様体，Pを2次元多様体とする．この時，Whitney平面写像の集合 $W(N,P)$ は $C^\infty(N,P)$ の中で開かつ稠密な集合である．（$C^\infty(N,P)$ を，NからPへの C^∞-写像全体の集合で，Whitney C^∞-位相を持つものとする）．

ここで，Whitney平面写像 $f: N \to P$ とは，以下のものである：

(1) f は I-型及び II-型以外に特異点を持たない.

(2) I-型の特異点の集合 F_f は1次元部分多様体である.

(3) II-型の特異点の集合 C_f は有限集合.

(4) $f|F_f : F_f \to P$ は immersion である.

(5) $p \neq q \in F_f$ が $f(p) = f(q)$ ならば, $f(F_f) \pitchfork f(F_f)$ at $f(p) = f(q)$.

(6) $f(F_f) \cap f(C_f) = \phi$

(7) $p \neq q \in C_f$ ならば, $f(p) \neq f(q)$.

さて, I, II型を数式表示してみると

I. $f(x, y) = (x, y^2)$ (fold)

II. $f(x, y) = (x, -xy + y^3)$ (cusp)

となり, 2次元多様体間の滑らかな写像の局所的な形は, このようにして見ることが出来る. この I, II-型の写像芽は, 後で定義する安定写像芽とよばれるものになっていることもわかる. (§2 参照).

§2. 局所的性質

この節では，写像に対して定義される局所的諸概念の導入と，Mather [6] による結果の紹介を行なう．すべてある点のまわりの写像芽に対して定義される概念なので，この節では，写像 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ という Euclid 空間の間の原点を保存するような原点における滑らかな写像芽のみをあつかう．

$f, g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を smooth map-germs とする．

<u>定義2.1.</u> f と g が $\mathcal{A}$-同値である ($f\sim_{\mathcal{A}} g$) とは，diffeo germs $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$，$h':(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ が存在して，$g=h'\circ f\circ h^{-1}$ となることである．

<u>定義2.2.</u> f と g が $\mathcal{K}$-同値である ($f\sim_{\mathcal{K}} g$) とは，diffeo-germs $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$，$H:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)$ で，ある germ $\theta:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ with $\theta(x,0)\equiv 0$ に対して $H(x,y)=(h(x),\theta(x,y))$ と書けるものが存在して．$(id,g)=H\circ(id,f)\circ h^{-1}$ となることである．

ここで，$\mathcal{A}$-同値はそれぞれの空間の座標変換でうつ

りあうという意味で自然な同値関係であるが，$\mathcal{K}$-同値については，一見，不自然にみえる（注；$\mathcal{A}$-同値ならば$\mathcal{K}$-同値はすぐわかる）．しかし，次のMatherの定理をみれば，この同値がわかりやすいものであることが，納得できる．

<u>定理 2.3 (J. Mather [6] III)</u>　$f \sim_{\mathcal{K}} g$

$\Leftrightarrow$　diffeo germ $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在して

$$h^* : Q(f) \cong Q(g) \quad \text{(as } \mathbb{R}\text{-algebras)}.$$

（ただし，$Q(f) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n) / f^*(m_p) C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で，

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f \mid f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R} : C^\infty\text{-function germ} \}$，

m_p : maximal ideal in $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$，そして $f^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^p) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で f による pull-back homo を表わす．）

さて，各同値関係に対応して，map-germs の codimensions が次のように定義される．

$\theta(f) := \{ f$ に沿う vector field germs $\}$

$\theta(n) := \theta(1_{\mathbb{R}^n})$

$tf : \theta(n) \to \theta(f)$　by　$tf(\xi) := df \circ \xi$

$\omega f : \theta(p) \to \theta(f)$　by　$\omega f(\eta) := \eta \circ f$　とする

定義 2.4.（J. Mather）

$$d(f,\mathcal{A}) := \dim_{\mathbb{R}} \theta(f)/tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p))$$

$$d(f,\mathcal{K}) := \dim_{\mathbb{R}} \theta(f)/tf(\theta(n)) + f^*(\mathfrak{m}_p)\theta(f)$$

をそれぞれ germ f の，0における $\mathcal{A}$-codimension, $\mathcal{K}$-codimension という.

さてこの codimensions の意味を考えてみよう．今，簡単のため $\mathcal{A}$-同値だけを考えると，$\mathrm{Diff}(n)\times\mathrm{Diff}(p)$ という $\mathbb{R}^n$ 上と $\mathbb{R}^p$ 上の原点を保つ座標変換の芽のつくる群が，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^p$ への原点を保つ C^∞-map-germs 全体の空間 $C^\infty(n,p)$ へ $((h,h'),f) \longmapsto h'\circ f\circ h^{-1}$ という作用を持っている．この作用による，f の orbit が $\mathcal{A}$-同値類である．この $\mathcal{A}$-同値類の形式的な接空間を考えるとそれは，$tf(\mathfrak{m}_n\theta(n)) + \omega f(\mathfrak{m}_p\theta(p))$ となる．今，f の原点の像が原点以外の点へも行く場合を考えると，$tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p))$ の方を定義の中に採用した方が良い．即ち，$\mathcal{A}$-同値類の全体の空間の中での"codimension"に相当するのが，$\mathcal{A}$-codimension である．従って，map-germ を $\mathcal{A}$-同値で分類しようとするとき，$\mathcal{A}$-codimension が低いものから，分類しようとするのは，ごく自然なことである．

<u>定義 2.5.</u> $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ が stable であるとは，$d(f,\mathcal{A})=0$，すなわち $\theta(f)=tf(\theta(n))+\omega f(\theta(p))$ が成り立つことである．

注）f が stable という事は，f を少し perturb しても f と $\mathcal{A}$-同値になるという事と同値であることが，Mather によって示されている．

<u>定義 2.6.</u> $F:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^r,0)$ が $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ の r-parameter unfolding であるとは．smooth map-germ $f':(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ で $f'(x,0)\equiv f(x)$ なるものが存在して．$F(x,u)=(f'(x,u),u)$ とかけることである．

unfoldings と codimensions，stability の関係については以下の有名な事実がある．

<u>定理 2.7.</u> $d(f,\mathcal{K})\leq r$ とすると，$\xi_1,\ldots,\xi_r\in\theta(f)$ が存在して，$[\xi_1],\ldots,[\xi_r]$ が $\theta(f)/tf(\theta(n))+f^*(m_p)\theta(f)$ を $\mathbb{R}$ 上生成する．この時，$F:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^r,0)$ by $F(x,u):=(f(x)+u_1\xi_1(x)+\cdots+u_r\xi_r(x),u_1,\ldots,u_r)$ は f の stable unfolding である．

さらに，Codimensionsが有限という事は，その類の代表元として多項式写像芽を持つという事と同値であるという事実が知られている．(Mather [6], III)．このように，Codimensionが有限な写像芽は"テイラー級数の尻尾が犬をふらない"(Zeeman) 写像芽であり，分類ができそうでかつその形も見やすいものなのである．

§3. 1次のThom-Boardman singularitiesとそのdual cohomology classes.

写像の局所的性質と大域的性質をつなげる1つの重要な道具に，Thom-Boardman singularitiesのdual cohomology classesがある．ここでは，当面の応用上必要な1次のThom-Boardman singularitiesについてその性質を紹介する．

$\xi^n \to X$, $\eta^p \to X$ を，manifold X 上の smooth real vector bundle，ξ_x, η_x をそれぞれ ξ, η の $x \in X$ 上の fibreとする．$\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ をそれらの union $\bigcup_x \mathrm{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ と定義すると，これは自然に，X 上の real vector bundle となりその fibre は $\mathrm{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ である．

$\Sigma^i(\xi, \eta) := \{\alpha \in \mathrm{Hom}(\xi, \eta) \mid \dim \mathrm{Ker}\,\alpha = i\}$ と定義すると

これは $Hom(\xi, \eta)$ の subfibre bundle となり，この subbundle を Thom-Boardman singularities of symbol (i) と呼ぶ．

この $\Sigma^i(\xi,\eta)$ の fibre の closure $\overline{\Sigma^i(\xi_x, \eta_x)}$ は $Hom(\xi_x, \eta_x)$ の中で algebraic set となり，Borel-Haefliger の理論により，それは fundamental class を持つことがわかる．[2].

特にこの場合は，Thom，Ronga，Ando ([4]．[8]．[1]) らによってくわしく調べられており，$\overline{\Sigma^i(\xi,\eta)}$ は $H^\nu(X;G)$ の中に dual cohomology class をもつことが知られている．

ただし，ν = codimension of $\Sigma^i(\xi,\eta)$ in $Hom(\xi,\eta)$

$$G = \begin{cases} \mathbb{Z} & : n-p,\ i\ \text{:even \& } X\text{ : orientable} \\ \\ \mathbb{Z}_2 & : \text{otherwise.} \end{cases}$$

さらに，Porteous [7] によってこの class は以下のように計算されている．（この dual class を $C^i(\xi,\eta)$ で表わす）.

<u>定理 3.1.</u> (1) i : odd のとき，$C^i(\xi,\eta)$ は 2-torsion 元である．$C^i(\xi,\eta)$ の $\mathbb{Z}_2$-reduction は

$$\det \left.\begin{pmatrix} W_i(\xi-\eta), & W_{i-1}(\xi-\eta), & \cdots & \\ W_{i+1}(\xi-\eta), & \ddots & & W_{i-1}(\xi-\eta) \\ & \cdots & W_{i+1}(\xi-\eta), & W_i(\xi-\eta) \end{pmatrix}\right\} p-n+i$$

に等しい．

(2) $p-n$, i : even のとき, $c^i(\xi,\eta)$ は

$$\det\begin{pmatrix} P_{\frac{i}{2}}(\xi-\eta), & P_{\frac{i}{2}-1}(\xi-\eta) & & \\ P_{\frac{i}{2}+1}(\xi-\eta), & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & P_{\frac{i}{2}-1}(\xi-\eta) \\ & & P_{\frac{i}{2}+1}(\xi-\eta), & P_{\frac{i}{2}}(\xi-\eta) \end{pmatrix} \Bigg\} \frac{p-n+i}{2}$$

に等しい.

ただし, P, W はそれぞれ $\xi-\eta \to X$ の Pontrjagin class, Stiefel-Whitney class を表わす.

上記の行列式は, 1 番最初に Thom の仕事に表われたもので, 1 次の Thom-polynomial と呼ばれている.

さて, $c^i(\xi,\eta)$ と smooth mappings の特異点との関係を次に述べる.

N, P を smooth manifolds とするとき $\pi_P : N\times P \to P$, $\pi_N : N\times P \to N$ を canonical projections とするとき, jet bundle $J^1(N,P)$ を $\mathrm{Hom}(\pi_N^* TN, \pi_P^* TP)$ と同一視する. この時, $f : N \to P$ に対して $j^1 f : N \to J^1(N,P)$ が自然に定義される.

<u>命題 3.2.</u> (1) $c^i(TN, f^*(TP))$ は, f の homotopy class にのみ依存する.

(2) $\overline{\Sigma^i(N,P)}$にWhitney条件をみたすようにstratified setの構造を入れておき，j^1f がそのstratificationにtransversalであるとする．この時

(i) $\overline{\Sigma^i(f)} = (j^1f)^{-1}(\overline{\Sigma^i(N.P)})$，ただし $\Sigma^i(f) = (j^1f)^{-1}(\Sigma^i(N.P))$.

(ii) $\overline{\Sigma^i(f)}$ はfundamental classを持ち，そのdual cohomology classは $C^i(TN\ f^*TP)$ に等しい．

(3) $\pi^k_1 : J^k(n,p) \to J^1(n.p)$ $(k \geq 1)$ をcanonical projectionとして，$\Sigma^{(i,0,\cdots,0)}(n.p)$ をsymbolが $(i,\overbrace{0,\cdots,0}^{k})$ であるようなThom-Boardman singularitiesとする．この時，$(\pi^k_1)^{-1}(\overline{\Sigma^i(n.p)}) = \overline{\Sigma^{(i,0\cdots0)}(n.p)}$.

Thom-Boardman singularitiesとstable germsとの関係はあまり明らかにされていないが，Ando [1] による以下の結果がある．今，$k \geq p+1$ として，$\Sigma(n.p) \subset J^k(n.p)$ でunstableなk-jet全体の集合とする．($k \geq p+1$ としたのは，写像芽 $f : (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$ がstableかどうかは，その $p+1$ jetで判定できることが知られているからである).

i.e. $\Sigma(n,p) = \{ j^k_0 f \mid \theta(f) \neq tf(\theta(n)) + wf(\theta(p)) \}$.

命題 3.3. $I = (\overbrace{i, 0, \cdots, 0}^{k})$ $k \neq p+1$ とする時,

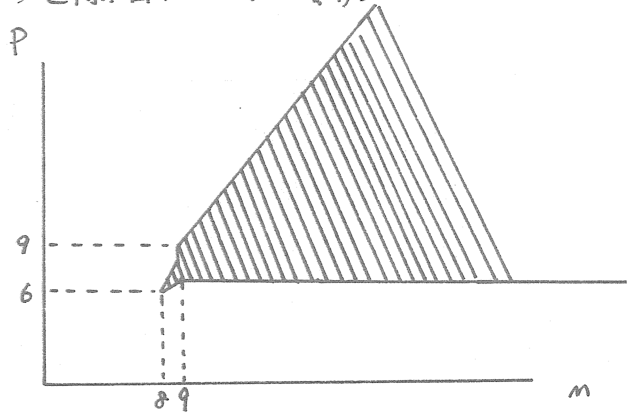
$(p-n+i)\{i+\frac{1}{2}i(i+1)\} - i - i^2 - (p-n+i)^2 > n-i$

ならば, $\Sigma(n,p) \supset \Sigma^I(n,p)$.

§4. 局所的な形が良く見えそうな次元 ("Nice range").

2次元多様体間の写像や functions の場合, §1 で示したようにその局所的な形は良く見えたが, 高次元の場合はどうであろうか? これについても, Mather が決定的な結果を得ている.

定理 4.1. (Mather [G], VI) N を compact n-manifold P を p-manifold とする. この時, stable mappings の集合 $S(N,P)$ が $C^\infty(N,P)$ で稠密である必要十分条件は (n,p) が以下の図の斜線部分以外に属することである.



ここで $f : N \to P$ が stable とは，定義 2.5 における，germs をすべて global にして得られる定義である．(i.e. $\theta(f) = tf(\Theta(N)) + \omega f(\Theta(P))$)．もちろん，$f$ が stable の時各点でのその germ は stable germ であることが知られている．従って，この定理 4.1 がその局所的な形の見やすい次元を表わしているという事は，次の Mather による分類定理を見れば納得できる．

<u>定理 4.2．(Mather [6]; IV)</u>．$f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ が stable の時，$f \underset{\mathcal{A}}{\sim} g \iff f \sim_{\mathcal{K}} g$．

従って．定理 2.3 から，

$$f \sim_{\mathcal{A}} g \iff Q_{p+1}(f) \underset{\mathbb{R}\text{-alg}}{\cong} Q_{p+1}(g).$$

ただし，$Q_{p+1}(f) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \big/ f^*(m_p) C_0^\infty(\mathbb{R}^n) + m_n^{p+2}$

では，この "nice range" の外ではどうなっているか？古典的には，以下の例が知られている．

<u>例 4.3．(Thom [9], [3])</u>

$$S(\mathbb{R}P^{19}, \mathbb{R}^{19}) = \emptyset.$$

§5. 局所的な形がなかなか良く見えないという現実.

この節では，局所的な形はなかなか良く見えないという事を示す我々の結果について紹介する. そのために，次の様な notations を導入する: N, P を smooth manifolds とする時，任意の non-negative integer r に対して，

$$C^\infty_r(N,P:\mathcal{S}) := \{f \in C^\infty(N,P) \mid d(f_x,\mathcal{S}) \leq r, \forall x \in N\}$$

とおく. ただし，f_x は f を代表元とする x における germ，$\mathcal{S} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{K}$ とする. この空間は，$d(f_x,\mathcal{S})$ の定義から $\mathcal{S}$-equivalence class による f の局所的な形が比較的見やすいものの集合と言える. 我々の目的は，この $C^\infty_r(N.P:\mathcal{S})$ を考察することにある. さらに，$C^\infty(N.P:\mathcal{S}) = \{f \mid d(f_x.\mathcal{S}) < +\infty, \forall x \in N\}$ とおく. この時. $d(f,\mathcal{A}) \leq r$ ならば，$d(f,\mathcal{K}) \leq r+p$ ($p := \dim P$) という事がわかり以下の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^\infty(N,P) \supset & C^\infty(N.P:\mathcal{K}) & \supset \cdots \supset & C^\infty_{r+p}(N.P:\mathcal{K}) & \supset \cdots & \supset & C^\infty_0(N.P:\mathcal{K}) & & \\
& \cup & & \cup & & & \cap & & \\
& C^\infty(N.P:\mathcal{A}) & \supset \cdots \supset & C^\infty_r(N.P:\mathcal{A}) & \supset \cdots & \supset & C^\infty_0(N.P:\mathcal{A}) & \supset & S(N.P)
\end{array}$$

これらの subspaces に対して我々の得た結果は以下のものである.

<u>定理 5.1. ([5])</u>　N^nを closed smooth manifold.

Pを smooth manifold とする.

$f \in C^\infty(N, P)$, rを non-negative integer とする. 次の2つの条件を満たす integer iが存在するならば fは $C^\infty_r(N, P : \mathcal{S})$ の元に homotopic でない. ($\mathcal{S} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{K}$)

(1) $(p-n+i)\{i+\frac{1}{2}i(i+1)\} - i^2 - (p-n+i)^2 + 1 > n+r$

(2) $\gamma = TN - f^*TP$ とおく

(i) 次の $(p-n+i)$-matrix の determinant は $H^{i(p-n+i)}(N : \mathbb{Z}_2)$ の 0-element でない

$$\begin{pmatrix} W_i(\gamma), & W_{i-1}(\gamma) & & \\ W_{i+1}(\gamma) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & W_{i-1}(\gamma) \\ & & W_{i+1}(\gamma) & W_i(\gamma) \end{pmatrix}$$

又は (ii) $n-p$, i : even, $N.P$: orientable で, 次の $\frac{(p-n+i)}{2}$-matrix の determinant は $H^{i(p-n+i)}(N : \mathbb{Z})$ の 2-torsion element でない.

$$\begin{pmatrix} P_{\frac{i}{2}}(\gamma), & P_{\frac{i}{2}-1}(\gamma), & & \\ P_{\frac{i}{2}+1}(\gamma), & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & P_{\frac{i}{2}-1}(\gamma) \\ & & P_{\frac{i}{2}+1}(\gamma), & P_{\frac{i}{2}}(\gamma) \end{pmatrix}$$

さらに，例を計算することにより（例 2 ）．次の系が得られた．

<u>系 5.2</u> 任意の non-negative integer r に対して，$C^\infty_r(N, P : \mathcal{Y}) = \emptyset$ なる manifolds N，P が存在する．

先の図式において，$C^\infty(N, P : \mathcal{K})$ は $C^\infty(N.P)$ の中で常に稠密であることが知られている．従って $C^\infty(N.P : \mathcal{K})$ は決して空集合にはならない．しかし，ひとたび codim の値を制限すると，$C^\infty_r(NP : \mathcal{Y})$ は空集合になりうるわけである．この事は，codimension 0 のものから，どれだけ高い codimension r まで germ が分類できたとしても，$C^\infty_r(N.P : \mathcal{Y}) = \phi$ なる N，P が存在するのだから，その N，P に対しては N から P へのどんな smooth map も，どこかある点では codimension が r より高くなってしまう．つまり，局所的な形は codimension が低いものから順に見て行こうとしても全くは見えないという事を示している．

さて，残りのページで，定理 5.1 の証明の概略と，いくつかの例をあげる．

定理 5.1 の証明には，以下の 2 つの補題が key となる．

<u>補題 5.3.</u> $d(f, \mathcal{A}) \leq r$ なる map-germ $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して，f の stable な r-parameter unfolding $F:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0)$ が存在する．

<u>補題 5.4.</u> 任意の non-negative integer r, l について
$\Sigma_{r,l}(n,p) = \{ j_0^k f \mid \dim_{\mathbb{R}} \theta(f) / tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p)) + m_n^{l+1}\theta(f) \neq r$ 又は $m_n^{l+1}\theta(f) \not\subset tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p)) \}$ は $J^k(n,p)$ $(k \geq l+r+p+1)$ の中で代数的集合，よって特に，closed set である．

これらの補題と命題 3.3 を組み合わせると，以下の補題が得られる．

<u>補題 5.5</u> $k \geq l+r+p+1$，$I = (i, 0, \cdots, 0)$ とする．
$(p-n+i)\{i + \frac{1}{2}i(i+1)\} - i^2 - (p-n+i)^2 + 1 > n+r$，ならば $\Sigma_{r,l}(n,p) \supset \overline{\Sigma^I(n,p)}$．

［定理 5.1 の証明］．補題 5.5 及び命題 3.2 より，$\forall g \in C_r^\infty(N, P : \mathcal{Y})$ に対して，$j^k g(N) \cap \overline{\Sigma^I(N,P)} = \phi$．

さらに，$C^i(TN, g^*TP)$ は $\overline{\Sigma}^i(g)$ の fundamental class の dual class に一致し，今 $\overline{\Sigma}^i(g)=\phi$ より $C^i(TN\ g^*TP)=0$ 今，$C^i(TN\ g^*TP)$ は g の homotopy class にのみ依存するので結論が得られる。

証明終り。

例1. n, r を $n=2^l a-1$, $l \geq 2$, a : odd

$2^l < a < 2^{l-1}(2^l-1) + \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{r}{2^l}$ をみたすものとすると

$C_r^\infty(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}^n : \mathcal{S}) = \phi$ $(\mathcal{S} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{K})$ である。

∵ $W(T\mathbb{R}P^n - f^*T\mathbb{R}^n) = W(T\mathbb{R}P^n) = (1+W_1)^{2^l a}$

i.e.
$$\begin{vmatrix} W_i(f) & W_{i-1}(f) & & \\ W_{i+1}(f) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & W_{i-1}(f) \\ & & W_{i+1}(f) & W_i(f) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_i & & 0 \\ & \ddots & \\ & & W_i \end{vmatrix} = W_1^{2^l\cdot 2^l} \neq 0$$

例2. i, r, n を，$\frac{i^2}{2} \leq n \leq \frac{i^3}{4} - \frac{i^2}{4} - \frac{r}{2}$，$i$: even

をみたすものとすると，$C_r^\infty(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}^{2n} : \mathcal{S}) = \phi$.

∵
$$c^i(\mathbb{C}P^n - f^*T\mathbb{R}^{2n}) = \begin{vmatrix} {}_{n+1}C_{\frac{i}{2}}, & {}_{n+1}C_{\frac{i}{2}-1}, & \cdots & \\ {}_{n+1}C_{\frac{i}{2}+1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & {}_{n+1}C_{\frac{i}{2}-1} \\ & & {}_{n+1}C_{\frac{i}{2}+1}, & {}_{n+1}C_{\frac{i}{2}} \end{vmatrix} a^{\frac{i^2}{2}}$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{i}{2}} \left(n - \frac{i}{2} + j + 1\right)^j \times \prod_{k=1}^{\frac{i}{2}-1} (n+k+1)^{\frac{i}{2}-k} \times \prod_{l=1}^{\frac{i}{2}-1} l! \times \left\{\prod_{s=1}^{\frac{i}{2}} \left(\frac{i}{2}+s-1\right)\right\}^{-1}$$

$$\times a^{\frac{i^2}{2}} \neq 0$$

ただし $H^2(\mathbb{C}P^n ; \mathbb{Z}) = \langle a \rangle$.

文 献 表

[1] Ando, Yo. ; Eliminations of certain Thom-Boardman singularities of order two. To appear.

[2] Borel, A. and Haefliger, A. ; La classe d'homologie fundamental d'un espace analytiques, Bull. Soc. Math. de France, 89 (1961), 461-513.

[3] Golubitsky, M. and Guillemin, V. ; Stable Mappings and Their Singularities, G. T. M. 14, Springer, 1973.

[4] Haefliger, A. and Kosinski, A. ; Un Theorem de Thom sur les singulaites des applications differentiables, Seminare Henri Cartan ; 9e annee 1956/1957.

[5] Izumiya, S. and Kogo, Y. ; Smooth mappings of bounded codimensions, To appear in the Journal of the London Math. Soc.

[6] Mather, J. ; Stability of C^{∞} Mappings,

I, Annals of Math. 87 (1968) 89-104,

II, Annals of Math. 89, (1969) 254-291,

III, Publ. Math. I.H.E.S. 35, (1968) 127-156,

IV, Publ. Math. I.H.E.S. 37, (1969) 223-248,

V, Advances in Math. 4, (1970) 301-336,

VI, Liverpool singularities sympo. I Lect. Notes in Math. 192 (1971) 207-253.

[7] Porteus, I. ; Simple singularities of maps, Liverpool singularities sympo. I Lect. Notes in Math. 192 (1971) 280-307.

[8] Ronga, F. ; Le calucul des classes duales des singularites de Boardman d'ordre deux, Comment. Math. Helv. 47 (1972) 15-35.

[9] Thom, R. ; Les singularites des applications differentiables, Ann. Inst. Fourier, 6 (1955-56) 43-87.

[10] Whitney, H. ; On singularities of mappings of Euclidian spaces I, Mappings of the plane to the plane, Annals of Math. 62 (1955) 374-410.

以上.

一般コホモロジーの発展

荒木捷朗（大阪市大理）

General topology における問題点

筑波大学　児玉之宏

1. 次元，一般距離空間

J. G. Ceder [2] は1961年に距離空間の直接の一般化として M_i 空間，$i=1,2,3$，を定義した。

M_1：σ-closure preserving base をもつ正則空間

M_2：σ-closure preserving quasi-base をもつ正則空間

M_3（= stratifiable 空間）：σ-cushioned pair-base をもつ T_1-空間

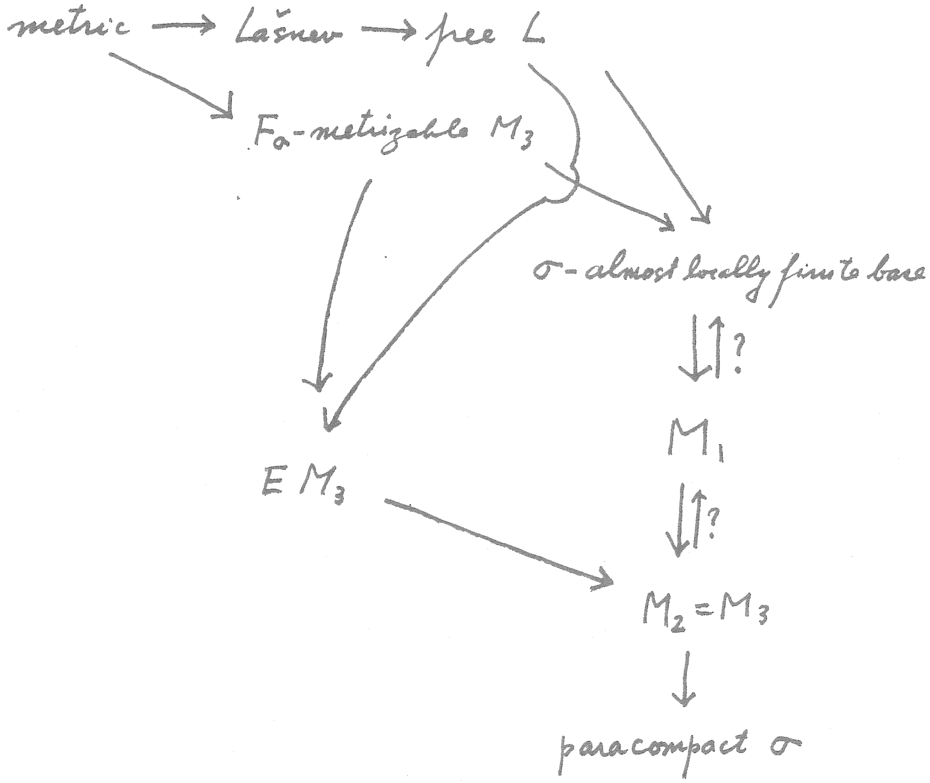
ここで，空間 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ は，各点 x とその近傍 U に対して，$\mathcal{B}$ の元 B が $x \in \mathrm{Int}\, B \subset B \subset U$ となるようにとれるとき，quasi-base といわれる。また $\mathcal{B}$ が closure preserving とは，$\mathcal{B}$ の任意の部分族 $\mathcal{B}'$ について $\overline{\cup\{B' : B' \in \mathcal{B}'\}} = \cup\{\overline{B'} : B' \in \mathcal{B}'\}$ が成立することである。

"metric $\Rightarrow M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_3$" は明らかである。Ceder は問題「$M_3 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_1$?」を提起した。この最初の implication は漸く1978年に解決された。すなわち

定理（G. Gruenhage [5]，H. J. K. Junnila [13]）stratifiable 空間は M_2 空間である。

問題1 stratifiable空間はM_1空間となるか?

これは，目下位相空間論で最も興味のある難問題の1つと思われる。距離空間からM_3空間までの道程には，現在かなりいろいろな興味ある空間族が考えられている。



Lašnev：距離空間の閉写像による像空間

F_σ-metrizable M_3：metrizableな閉集合の可算和となるM_3空間

空間Xの部分集合族$\mathfrak{A}$がその点xでalmost locally finiteとは，xの近傍UとXの有限部分集合族$\mathcal{B}$が存在して $\mathcal{A}|U=\{A\cap U : A\in\mathcal{A}\}\subset\{B\cap V : B\in\mathcal{B}, V$ はxの近傍$\}$が成立することである。各点でalmost locally finiteとなる集合族をalmost locally finiteという。

implication「Lašnev → M_1」はSlaughter[19]，「free L → M_1」は永見[16]，「F_σ-metrizable M_3 → M_1」はGruenhage[6]，「M_3 → paracompact σ」はHeath[9]による。伊藤・玉野[10]は"almost locally finite"の概念を導入し，σ-almost locally finite baseをもつ正則空間が上図の位置に存在することを示し，その諸性質を研究した。例えば，この空間族がcountably productiveかつhereditaryであること，またその閉写像による像空間がM_1となることなどである。

問題2　M_1空間はσ-almost locally finite baseをもつか？

問題2の肯定的解決は問題1の肯定的解決を与える。

上記の空間族は次元論においても興味ある問題を提供する。

問題3　stratifiable空間Xにおいて $\dim X=\mathrm{Ind}\, X$ は成立するか？

次元論の基本定理とよばれるものがある。(1) $\dim X = \mathrm{Ind}\, X$, (2) 次元上昇定理, (3) 分解定理, (4) G_δ-包定理, である。Katetov, 森田によって距離空間における基本定理の成立が証明されて以来, 1974年にLeibo [14] がLašnev空間において, 1980年に永見[16]がfree L空間においてその成立を証明した。岡[18]は上図の位置を占めるM_3空間の部分族EM_3を導入して, それがM_3の中で基本定理の成立する最大の部分族であることを証明した。その他一般距離空間の次元に関しては, 岩田[17], 埔上[16]等がある。

積空間の次元についての古い問題として, どうにかなりそうで未解決なものに次の問題がある。

問題4　Xが連続体ならば, 任意の位相空間Yに対して $\dim(X \times Y) > \dim Y$ となるか?

これはYがコンパクト距離空間の場合にさえ不明である。Xがacyclicのときあるいはmovable curveのとき, 問題4は肯定される(児玉[11])。これから, 次の問の肯定は問題4の肯定を意味する。

問題4′ すべての連続体はacyclicな連続体あるいはmovable curveを含むか?

2. ANR, shape, CE-写像

完全写像 $f: X \to Y$ は，各点 $y \in Y$ の逆像 $f^{-1}(y)$ が trivial shape をもつとき，CE-写像といわれる。CE-写像の重要性は次の定理からも理解される。

定理（West [21]）局所コンパクト ANR X はある Q-多様体の CE-写像による像空間となる。

定理（Edwards [3]）$f: M \to X$ を Q-多様体 M から ANR X への CE-写像とすれば，$f \times 1_Q : M \times Q \to X \times Q$ は near homeomorphism である。

West は上の2定理から，すべての局所コンパクト ANR は局所有限な多面体と同じ homotopy type を持つことを示した。CE-写像と密接に関係する写像として Haver [7] により導入された fine homotopy 同値がある。$f: X \to Y$ は fine homotopy 同値：Y の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ について，$g: Y \to X$ が存在して，$f \circ g \sim 1_Y$ in $\mathcal{U}$ かつ $g \circ f \sim 1_X$ in $f^{-1}\mathcal{U}$ となる。局所コンパクト ANR 上の CE-写像についてはつぎの定理がある。

定理（Haver [7], Kozlowski [12]）X を局所コンパクト ANR，$f: X \to Y$ を CE-写像とする。次は同値となる。(1) f は fine homotopy 同値，(2) hereditary shape

同値，(3) Y は ANR。さらに $\dim X < \infty$ を仮定すれば，(4) $\dim Y < \infty$，(5) $\dim X \geqq \dim Y$，が (1), (2), (3) の各々に同値である。

一般に (1), (2), (3) は成立しない。Taylor [22] 参照。但し，(4), (5) が成立するかどうかは知られていない。

問題 5. 有限次元局所コンパクト ANR X 上の CE-写像 $f: X \to Y$ で次の条件の1つをみたすものが存在するか？ (1) f は fine homotopy 同値でない，(2) f は hereditary shape 同値でない，(3) Y は ANR でない，(4) $\dim Y = \infty$，(5) $\dim X < \dim Y$ (Ancel [1] 参照)

(1)–(5) の何れか1つを満たす f の存在はつぎの Alexandroff の問題と同値となる (Edwards [20])。

問題 6. $\dim X = \infty$ で有限 cohomology 次元をもつコンパクト距離空間 X が存在するか？

以下，shape, ANR についての興味ある問題をぬき出してみる。

問題 7. movable な連続体は pointed movable か？

Hastings-Heller [8] によって，すべての FANR が pointed FANR となったので，この問は最も古い未解決問題となった。

問題8　コンパクト距離空間 X, Y 間の写像 $f: X \to Y$ が shape 同値を誘導すれば，strong shape 同値を誘導するか？

これは Chapman の補集合定理[3]を関係してつぎのように言い換えられる。局所コンパクト距離空間上の完全写像 $f, g: X \to Y$ が weak proper homotopic ($f \underset{wp}{\sim} g$) とは，任意のコンパクト $B \subset Y$ についてコンパクト $A \subset X$ とホモトピー $H: X \times I \to Y$ が存在して，$H_0 = f$, $H_1 = g$, $H((X-A) \times I) \cap B = \phi$，となることである。

問題8'　局所コンパクト ANR X, Y 間の完全写像 $f, g: X \to Y$ について，$g \circ f \underset{wp}{\sim} 1_X$ は $g \circ f \sim_p 1_X$ を意味するか？ ここで $\sim_p$ は proper homotopic を意味する。

次の問題は非常に多くの variation があるが殆んど不明である。（児玉[11]参照）

問題9.　局所コンパクト ANR はつねに movable なコンパクト化をもつか？　FANR となるコンパクト化をもつ条件をもとめよ。

つぎの古典的問も全く不明である。

問題10.　コンパクト ANR は dimensionally full-valued となるか？

CE-写像のほかに，shape または ANR 理論において興味深い写像に refinable 写像がある。コンパクト距離空間の間の写像 $f: X \to Y$ が refinable とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して ε-写像 $g: X \to Y$ が存在して，$dist(f, g) < \varepsilon$ となることである。refinable 写像については，加藤 [23]，Kozlowski-Ford [4] が興味深い。

参考文献

[1] F. D. Ancel, The role of countable dimensionally in the theory of cell-like relations, preprints.

[2] J. G. Ceder, Some generalizations of metric spaces, Pacific Jour. Math. 11 (1961), 105–125.

[3] T. A. Chapman, Lectures on Hilbert cube manifolds, 28, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[4] J. Ford and G. Kozlowski, Refinable maps on ANR's, Topology and its Appli. 11 (1980), 247–263.

[5] G. Gruenhage, Stratifiable spaces are M_2, Topology Proceedings 1 (1976), 221–226.

[6] ———, On the $M_3 \to M_1$ question, Topology Proceedings 5 (1980), 77–104

[7] W.E. Haver, Mappings between ANR's that are fine homotopy equivalences, Pacific Jour. Math. 58 (1975), 457-461

[8] H. Hastings and A. Heller, Splitting homotopy idempotents, Lectures in Math. 870, Springer-Verlag 1981.

[9] R.W. Heath, Stratifiable spaces are σ-spaces, Notices Amer. Math. Soc. 16 (1969), 761.

[10] M. Ito and K. Tamano, Spaces whose closed images are M_1, to appear in Pro. Amer. Math. Soc.

[11] Y. Kodama, Dimension of product spaces, 数理解析研究所講究録 445, 19-21 : Shape of compactifications, 41-44.

[12] G. Kozlowski, Images of ANR's, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[13] H. Junnila, Neighbornets, Pacific Jour. Math. 76 (1978), 83-108

[14] I.M. Leibo, On the equality of dimensions for closed images of metric spaces, Soviet Math. Dokl. 15 (1974), 835-839

[15] T. Mizokami, On Nagata's problem for paracompact σ-metric spaces, Topology and its Appl. 11 (1980), 211-221

[16] K. Nagami, Dimension of free L-spaces, Fund. Math. 108 (1980), 211-224

[17] J. Nagata, On Hyman's M-space, Topology Conference VPI, Lecture Notes in Math. 375, Springer-Verlag, 198 – 208

[18] S. Oka, Dimension of stratifiable spaces, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[19] F. G. Slaughter, The closed image of a metrizable space is M_1, Proc. Amer. Math. Soc.

[20] J. Walsh, Dimension, cohomological dimension, and cell-like mappings, Lecture Notes in Math. 870 Springer-Verlag 1981.

[21] J. E. West, Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: A solution of a conjecture of Borsuk, Ann. of Math. 106 (1977), 1–18

[22] J. L. Taylor, A counterexample in shape theory, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 629–632.

[23] H. Kato, Refinable maps in the theory of shape, Fund. Math. 113 (1981), 119–129

微分位相幾何学における或る展望
(大域 Knot 理論について)

田村 一郎 (東大・理)

「局所的なものから大域的なものへ」というのは，現代数学の特徴的な性格であり，とくに現代数学の代表的なものである位相幾何学の一つの旗じるしである。実際，位相幾何学の対象は歴史的に見て2次元から3次元へ，さらに一般次元へと変化してきたし，ユークリッド空間における問題から一般の多様体における問題へと自然な拡張が行われてきた。

2次元ユークリッド空間の中の単純閉曲線が2次元球体の境界になっているという Schoenflies theorem から，n次元ユークリッド空間に埋め込まれている(n−1)次元球面はn次元球体の境界になっているか？という Schoenflies problem が生じた。これは，C^∞カテゴリーの場合には，$n \neq 4$のとき，Smaleの一般次元 Poincaré 予想の解決によって，肯定的であることが示された。それならば，Schoenflies problem を一

般の多様体に拡張したらどうなるであろうか？

以下，すべて C^∞ カテゴリーで話をすすめる。

n 次元 C^∞ 多様体 M に C^∞ に埋め込まれている $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} が，もしも M に埋め込まれている n 次元球体 D^n の境界になっているとすると，S^{n-1} は M で inessential（すなわち包含写像 $S^{n-1} \to M$ が定値写像にホモトピック）でなければならない。したがって，n 次元 C^∞ 多様体における Schoenflies problem は次のようになる：

「n 次元 C^∞ 多様体 M に C^∞ に埋め込まれている $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} が M で inessential であるとき，この S^{n-1} は M に埋め込まれている n 次元球体 D^n の境界になっているか？」

この問題に対して，多くの多様体についてはこの問題は肯定的に成り立つが，成立しない例も存在することが示せる [1]。すなわち，次の定理が成り立つ：

<u>定理 1</u>. M が向きづけ可能で $\dim M \geqq 5$ であって，次の条件のうち一つが満たされているとき，M についての Schoenflies problem は肯定的に成立する。

(i) M は non-compact である。

(ii) M の Betti 数 $b_q = \dim H_q(M; R)$ が或る $q \neq 0, \dim M$, について, $b_q \neq 0$。

(iii) M の基本群が無限群.

<u>定理 2</u> 単連結な7次元 C^∞ 多様体で Schoenflies problem が成り立たない例がある。

この二つの定理は C^∞ 多様体の Schoenflies problem にほとんど完全な解答を与えている。

以上は, C^∞ 多様体の中の余次元1球面すなわち余次元1の knot の問題である。 C^∞ 多様体の中の余次元2の knot を考えるとどうなるであろうか。

M^n を n 次元 C^∞ 多様体とする。 M^n の部分多様体 K で $(n-q)$ 次元球面 S^{n-q} に微分同相なものを M^n の余次元 q の大域的 knot あるいは単に余次元 q の knot という。二つの knot は M^n の isotopy で重ね合せることが出来るとき, 同じ knot であるとする。余次元 q の knot K に対して M^n に C^∞ に埋め込まれた $(n-q+1)$ 次元球体 D^{n-q+1} で, $\partial D^{n-q+1} = K$ であるものが存在するとき, K を unknotted であるという。

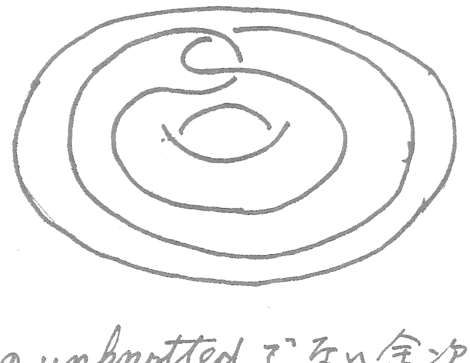
C^∞ 多様体における knot については, 球面における

knotとちがって，次のようにlocalという概念を導入することができる。M^nの余次元qのknot Kに対して，M^nにC^∞に埋め込まれているn次元球体D^nで，$K \subset D^n$となるものが存在するとき，Kをlocalという。Kがlocalなら KはM^nでinessentialである。また，球面におけるknotはすべてlocalである。

前述の余次元1のglobal knotに関する結果から，余次元2のglobal knotについての次の問題が自然に出てくる：

「Inessentialな余次元2のglobal knotは，どのような条件の下でlocalになるか？」

Solid torusには右の図に示すようにinessentialではあるがlocalでない余次元2のglobal knotがある。



また，S^nの中のunknottedでない余次元2のknot $(n \geqq 4)$を使って，$S^{n-2} \times D^2$の中にinessentialであるがlocalでない余次元2

の global knot を構成できる。

ここで球面に関する local knot theory と一般の多様体 M^n に関する global knot theory をまとめてみよう。カテゴリーは C^∞ とする。

	Local knot theory (球面の中の knot)	global knot theory (一般多様体の中の knot)
余次元 1	Schoenflies problem	定理 1, 2
余次元 2	3次元球面 S^3 の中 Classical knot theory	3次元多様体の中 ?
	4次元球面 S^4 の中	4次元多様体の中 ?
	n次元球面 S^n の中の higher dimensional knot theory これには 1965年頃の J. Levine M. Kervaire の結果とそれにつづく仕事がある。	n次元多様体の中の global knot theory ?
余次元 ≧ 3	PL の場合は Zeeman によって unknotted C^∞ の場合には 1965年頃の J. Levine の結果がある。	Engulfing theorem によって inessential なる local.

余次元 ≧ 3 の場合は，例えば M^n が単連結の場合は $M^n - K$ も単連結となり，余次元 2 の場合と全く

異る。以下，余次元2の(global) knot を考えることとし，それを単に(global) knot という。

C^∞多様体M^nに対して，M^nが局所ユークリッド的であることから，"写像"

Local knot theory ⇒ global knot theory

がえられる。前述の inessential であることと，local であることに関する問題はこの"写像"の像の決定についての問題である。

ここで Knot theory の歴史をふりかえってみよう。その歴史は古く，Gauss にさかのぼることができるが，現在行われている classical knot theory が形づくられてきたのは1900年前後のようである。そして1920年代には Alexander その他の人々の仕事がある。高次元 knot についての最初の結果も1920年代に出ている。有名な E. Artin による knot の存在定理である。しかしそれ以後は，classical knot theory については研究がつづけられてきたが，Higher dimensional knot theory の仕事は1960年代までほとんどなかった。理由は classical knot は図で示すことが出来るのに反して，高次元 knot は図で書けないということにある

とされている。高次元 knot にはクローバーも8の字もない。

ところが, classical knot に対して1957年に Papakyriakopoulos が $\pi_1(S^3-k) \cong \mathbb{Z}$ ならば k は unkotted であることを証明したが, これに対応して1964年に Levine は S^m の中の knot K が $\pi_i(S^m-K) \cong \pi_i(S^1)$ $(i=1,2,\cdots)$ であって, $m \geqq 6$ ならば K は unknotted であることを示した。この二つの証明を比べてみると非常に面白い。S^3 の中の任意の knot k に対しては, 常に $\pi_i(S^3-k)=0$ $(1<i)$ が成り立つ。しかし, S^m の中の knot K に対しては一般には $\pi_i(S^m-K)$ $(1<i)$ は 0 とはかぎらない。したがって k については $\pi_1(S^3-k)$ が非常な重要さをもつが, K については たとえば $\pi_1(S^m-K) \cong \mathbb{Z}$ であっても $\pi_i(S^m-K)$ $(1<i)$ によって K を論ずることができる。

Classical knot k に対して Seifert surface V すなわち $\partial V = k$ となる2次元曲面は有効な役割をはたすが, higher dimensional knot K に対する Seifert surface V^{m-1}, すなわち $\partial V^{m-1} = K$ となる S^m の中の compact な

$(m-1)$次元部分多様体は極めて重要で，極言すれば Seifert surface によってのみ研究が可能といってもよい。むしろ K は Seifert surface によって定義されるものであるという立場をとるのが，図で knot を書けない高次元の場合には適切であろう。V^{m-1} に surgery 理論を適用して K をしらべるというのが，微分位相幾何学の方法である。

Seifert surface V^{m-1} を $\left(\left[\frac{m-1}{2}\right]-1\right)$連結であるようにとれる knot K を simple knot という。Seifert surface のホモロジーだけを考えれば，m が奇数の場合の simple knot K が classical knot の高次元への拡張とみることもできる。

Levine は V^{m-1} を surgery して D^{m-1} にすることにより，前述の Unknotting theorem を証明した。一般の simple knot は $H_*(V^{m-1})$ の2次形式論と密接に関係していて，それと S^m の中での V^{m-1} の入り方のホモロジー的表示によって knot は決定される。

ここで，C^∞ 閉多様体 M^m の中の global knot にもどろう。前に示したように，$S^1\times D^2$ や $S^{m-2}\times D^2$ には inessential だが local でない knot が存在する。

閉多様体にすると，これらは $S^1\times S^2$, $S^{n-2}\times S^2$ となって低い次元にホモロジー群がある多様体である。これから，連結度の高い閉多様体すなわち $(n-1)$ 連結の $2n$ 次元閉多様体，$(2n+1)$ 次元閉多様体において inessential だが local でない knot が存在するか？ということが次に問題になってくる。これにはこのような多様体で本質的意味の knot をどう定義するかということも含まれている。

しかし少し考えているうちに，$(n-1)$ 連結の $(2n+1)$ 次元閉多様体における knot の構成をすでに，葉層構造の構成のために行っていたことに気がついた。すなわち上述のような M^{2n+1} に対して，specially spinnable structure という名称で，部分多様体 K でそれは S^{2n-2} に微分同相であり，$M^{2n+1}-K$ が S^1 上のファイバー F が $(n-1)$ 連結であるファイバー・バンドルであるものがいろいろな形でとれることを10年程前にやっていたのである [2]。ここで F が K の Seifert surface である。Knot の言葉でいえば K は fibred knot である。Fibred knot が local でないことはすぐ分かることである。

包含写像 $K \to M^{2n+1}$ を $K \to F \to M^{2n+1}$ と分けると，F はホモトピー型が S^n のブーケであるから $F \to M^{2n+1}$ のホモトピー的性質はすぐわかる。一方，$K \to F$ は $(n-1)$ 連結の $2n$ 次元閉多様体における $2n$ 次元胞の接着写像であることから，Whitehead 積と J によって記述できる[3]。これから或る fibred knot で inessential なものがあることがわかり，inessential であるが local でない knot が M^{2n+1} に存在することがいえる。この事実は，前述の inessential と local についての問題が数学的に内容のあるものであることを示している。(単に inessential で local でないだけならば もっと簡単に構成できる。)

一方，$(n-1)$ 連結の $2n$ 次元閉多様体，$(2n+1)$ 次元閉多様体における knot には球面における knot に関する方法がある程度まで適用できる。たとえば，simple knot が同様に定義できるのである。しかし，この場合における surgery 理論は多様体のホモロジー群が関係してきて，複合的な様相を示し，深い内容のものである。これらについていくつかの

結果が現在えられつつあるが，ここでは最も簡単な次のUnknotting theoremをあげておく。

定理3. M^{2n}を$(n-1)$連結の$2n$次元C^∞閉多様体とし，KをM^{2n}の中のglobal knotとする。このとき，Kがunknottedであるためには$M^{2n}-K$が$S^1 \vee (M^{2n}-D^{2n})$と同じホモトピー型をもつことが必要十分である。ただし，$n \geqq 3$とする。

C^∞多様体Mの中のglobal knot theoryはMの位相幾何学的性質と深くかかわっている。S^{2n+1}と$S^n \times S^{n+1}$とではその中でglobal knot theoryは異るものをもっている。さらに個性の強い4元射影平面QP^2ではS^8や$S^4 \times S^4$とは全く異るKnot theoryをもっている。たとえば，QP^2ではsimple knotはほとんどの場合（多分すべて）localである。

一つ一つの多様体はそれぞれ固有のglobal knot theoryをもっていて，それらが共通に定義されるものであるが故に，多様体の性質を正確に反映している。

これまで高次元の場合を述べてきたが，3次元多様体の中のglobal knotについてもいくつかの結果が知られている。とくに，homology 3-sphere

と *hyperbolic fibred knot* に関する鈴木康正(東大・理)の修士論文[4]はこの方面の新しい注目すべき結果である。また，ごく最近 *inessential* であることと *local* であることに関する問題への一つの解答として，矢野公一(東大・理)は次のことを証明した。

<u>定理4。</u>(矢野)　M^3 を向きづけ可能な *graph* 多様体で，$\pi_1(M^3)$ が有限位数の元をもたないとすると，M^3 の中の *inessential* な *graph knot* は *local* である。但し M^3 の prime decomposition に $S^1 \times S^2$ が含まれていないとする。

これまで大域的なものをあつかってきた微分位相幾何学にも，まだ十分大域的になっていなかったものがあったわけである。微分位相幾何学とは幾何学的なものをK理論化するものであるといった馬鹿の一つおぼえからぬけ出して，対象を曇りない眼で見なおせば，そこに新しい展望が与えられるのではないか。　　(1982年6月11日記)

文献

[1] I. Tamura, Unknotted codimension one spheres in smooth manifolds (to appear).

[2] I. Tamura, Foliations and spinnable structures on manifolds, Ann. Inst. Fourier, 23 (1973).

[3] C. T. C. Wall, Classification of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, Ann. of Math., 75 (1962).

[4] Y. Suzuki, On fibered knots in irreducible, simple homology 3-spheres (to appear).

BIFURCATION OF PERIODIC POINTS
OF
MAPS OF THE INTERVAL

by

S. Matsumoto

§ 0 Introduction

The purpose of this paper is to investigate the appearence of periodic points along a certain kind of one paramater families of differentiable maps of the interval. The main result is the following Theorem 1 .

Let I be a closed interval. A C^2 map $f: I \to I$ is called naive if for each positive integer n , f^n has at most one point of inflexion on each open interval where it is strictly monotone. For a real number u and a map f , $u \cdot f$ is to be a map defined by $(u \cdot f)(x) = u\, f(x)$.

THEOREM 1

(a) Let F be a C^2 map of the interval $[-1,0]$ into itself such that $F(-1) = F(0) = 0$ and that F'' is everywhere positive. Let k be a positive odd integer. If $0 < u < u' \leq 1$ and the map $u \cdot F$ has a periodic point of prime period k , then $u' \cdot F$ must have a periodic point of the same prime period also.

(b) Furethermore if $u \cdot F$ is naive for each $0 < u \leq 1$, then the above statement holds for a positive integer k which is not a power of 2 .

In Jonker- Rand [3] , the existence of periodic points is related to the topological entropy $h(f)$ of the map f as in the next theorem.

THEREM 2 (Jonker-Rand)

Let F be a map as in Theorem 1 (a) .

(a) $h(F) = 0$ if and only if all the periodic points of F have prime periods powers of 2 .

(b) For each integer m (not a power of 2) , there is defined an algebraic number s_m $(1 < s_m < 2)$ such that $h(F) \geq \log s_m$ if and only if F possesses a periodic point of prime period m .

From this one gets the following corollary to Theorem 1 .

COROLLARY 3

(a) Let F be as in Theorem 1 (a) and let k be a positive odd integer. If $0 < u < u' \leq 1$ and $h(u \cdot F) \geq \log s_k$, then $h(u' \cdot F) \geq \log s_k$ also.

(b) Furthermore if $u \cdot F$ is naive for each $0 < u \leq 1$, then the above statement holds for an integer k which is not a power of 2 .

(c) Let F be as in (b) above. If $0 < u < u' \leq 1$ and $h(u \cdot F) > 0$, then $h(u' \cdot F) > 0$ also.

For the one parameter family $g_u(x) = 4ux(1+x)$ $(0 < u \leq 1)$, it is conjectured in Milnor-Thurston [6] that $h(g_u)$ is a monotone increasing function of u. Corollary 3 is a partial support of this conjecture. Notice that quadratic functions are naive, as will be shown in § 4 below.

§1. Preparations from kneading theory

In this section we recall briefly necessary parts of Milnor's kneading theory. The general reference is Milnor[5] and Milnor-Thurston[6] .

Given an integer $r \geq 1$, an interval $I = [a,b]$ and its interior point c , one defines $\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r(I,c)$ to be the set of C^r maps $f: I \to I$ such that $f(a) = f(b) = b$ and $f'(x) = 0$ if and only if $x = c$. Fix a map $f \in \mathcal{E}^r$. For $x \in I$, let $\varepsilon_0(x) = -1, 0$ or 1 according as $x < c$, $x = c$ or $x > c$. Let $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_0(f^i(x))$ and $\theta_i(x) = \prod_{j=0}^{i} \varepsilon_j(x)$ for $i \geq 0$. Note that $\theta_i(x)$ coincides with the signature of $(f^{i+1})'(x)$. The power series $\theta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(x) t^i$ is called the <u>invariant coordinate</u> of x . It is easy to show that the map $x \mapsto \theta(x)$ is order preserving if we endow $\mathbb{Z}[[t]]$ with the lexicographical ordering. We have also that the limits $\theta^+(x) = \lim_{y \downarrow x} \theta(y)$ and $\theta^-(x) = \lim_{y \uparrow x} \theta(y)$ exist. The limits are taken in the formal power series topology. Their coefficients are ± 1 .

The series $\nu(f) = \theta^+(c)$ is an important invariant of f called <u>kneading invariant</u> of f .

Given a power series $\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i t^i$ with $\theta_0 \neq 0$, define $\mathcal{F}(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} (\theta_{i+1}/\theta_0) t^i$. Clearly we have $\theta(f(x)) = \mathcal{F}(\theta(x))$.

Let Λ be the set of formal power series with coefficients ± 1 , endowed with the formal series topology. Then $\mathcal{F}: \Lambda \to \Lambda$ is continuous.

There is a criterion due to Milnor to judge which element of Λ occurs as the kneading invariant of a map of $\mathcal{E}^r$. Let $\mathcal{K} = \{\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i t^i \mid \nu_0 = 1 \,,\, \mathcal{J}^n(\nu) \geq \mathcal{J}(\nu) \ (n=1,2,\cdots)\}$. An element of $\mathcal{K}$ is called <u>admissible</u>.

<u>THEOREM</u> (1.1) <u>Let</u> $r \geq 1$ <u>and</u> $\nu \in \Lambda$. ν <u>is admissible if and only if</u> $\nu = \nu(f)$ <u>for some</u> $f \in \mathcal{E}^r$.

The if part can be shown without much difficulty. The converse is a corollary of Theorem (1.4) below.

The maximal element of $\mathcal{K}$ is $\alpha = 1/(1-t)$ and the next largest is $\alpha^{(1)} = 1/(1+t)$. The minimal is $\omega = 1-t/(1-t)$.

Now let us study the kneading invariant when c is a periodic point. To begin with call a series $\sum_{i=0}^{\infty} \nu_i t^i$ cyclic if there exists a positive integer N such that $\nu_{i+N} = \nu_i$ for $i \geq 0$. If c is a periodic point of $f \in \mathcal{E}^r$ of prime period N, then $\nu(f)$ turns out to be cyclic of prime cycle N.

Let ν be cyclic of prime cycle N; thus $\nu = P(t)(1-t^N)^{-1}$ for some polynomial $P(t)$ of degree $N-1$. Define a series $\tilde{\nu}$ by $\tilde{\nu} = P(t)(1+t^N)^{-1}$. Clearly $\tilde{\nu} < \nu$. Also we have that $\tilde{\nu}$ is admissible if ν is.

For a one parameter family $f_u(x)$, $f_u^{(k)}(x)$ denotes the k-th partial derivative with respect to the variable x and $(\partial f_u/\partial u)(x)$ denotes the partial derivative with respect to u.

The following Proposition plays a crucial role in what follows.

PROPOSITION (1.2) Let $\{f_u\}$ be a one parameter family of maps of $\mathcal{E}^2$ such that $f_u'(x)$ is continuous with respect to x and u and that $(\partial f_u/\partial u)(x)$ exists. Suppose that for some value u_0 of u, f_{u_0} has the critical point c as a periodic point of prime period N. Suppose also that

(1) $(f_{u_0}^N)''(c)\cdot(\partial f_{u_0}^N/\partial u)(c) < 0$.

Then there exists a positive number ε such that

(a) $\nu(f_u) = \nu(f_{u_0})$ if $u_0 - \varepsilon < u \leq u_0$,

(b) $\nu(f_u) = \widetilde{\nu(f_{u_0})}$ if $u_0 < u < u_0 + \varepsilon$ and

(c) if $u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon$, and f_u has c as a periodic point, then $u = u_0$.

REMARK (1.3) In the above proposition, neither $(f_{u_0}^N)''(c)$ nor $(\partial f_{u_0}/\partial u)(c)$ plays an essential role. In fact we have; if $f \in \mathcal{E}^1$ has c as a periodic point, then there exists a C^1 neighbourhood $\mathcal{U}$ of f such that $\nu(g) = \nu(f)$ or $\widetilde{\nu(f)}$ for any $g \in \mathcal{U}$.

Now let us state an important theorem due to Milnor[5].

THEOREM (1.4) (Intermediate value theorem)

Let f_u $(0 \leq u \leq 1)$ be a path in $\mathcal{E}^1$, continuous in C^1 topology. Let $\nu(f_0) > \nu(f_1)$.

(a) If $\nu \in \mathcal{K}$ and $\nu(f_0) \geq \nu \geq \nu(f_1)$, then there exists a value u_0 such that $\nu(f_{u_0}) = \nu$.

(b) <u>Furthermore if</u> $\gamma \in \mathcal{K}$ <u>is cyclic and</u> $\gamma(f_0) \geq \gamma > \gamma(f_1)$, <u>then there exists a value</u> u_0 <u>such that</u> $\gamma(f_{u_0}) = \gamma$ <u>and that</u> f_{u_0} <u>has</u> c <u>as a periodic point</u> .

Finally we shall state a condition due to Jonker[2] , of kneading invariants for the existence of periodic points of a given prime period.

For $\gamma = \sum_{i=o}^{\infty} \gamma_i t^i \in \mathcal{K}$, define a series $D(\gamma) = \sum_{i=o}^{\infty} \gamma_i (t^{2i} - t^{2i+1})$. The map D will be studied in § 3 . For simplicity we shall denote $\gamma^{(k)} = D^k(\gamma)$.

For an odd integer $n > 1$, put

$$S_n = 1-t-t^2+(1-t)(t^3+t^5+ \cdots +t^{n-2}) ,$$

($S_3 = 1-t-t^2$) and $\sigma_n = S_n \cdot (1-t^n)^{-1}$. Then $\sigma_n^{(k)}$ is a maximal element of $\mathcal{K}$ which is cyclic of prime cycle $2^k \cdot n$.

<u>THEOREM</u> (1.5) <u>Let</u> $f \in \mathcal{E}^1$ <u>and let</u> n <u>be odd</u> ≥ 3 <u>and</u> $k \geq 0$. <u>Then</u> f <u>has a periodic point of prime period</u> $n \cdot 2^k$ <u>if and only if</u> $\gamma(f) \leq \sigma_n^{(k)}$.

§2. Reduction of the main theorem

In this section, using the results of the previous section, we shall reduce Theorem 1 to the following Theorem (2.2).

For n odd, > 1 and $m > 1$, let $S_{n,m} = S_n \sum_{j=0}^{m-2} t^{nj} + S_{n+2} t^{n(m-1)}$. $S_{n,m}$ is a polynomial of degree $nm+1$. Let $\sigma_{n,m} = S_{n,m}(1-t^{nm+2})^{-1}$. It is easy to show that $\sigma_{n,m}$ is admissible and cyclic of prime cycle $nm+2$. We have also that $\sigma_{n,m} \downarrow \sigma_n$ as $m \to \infty$.

THEOREM (2.1) Let F be as in Theorem 1, i.e. $F \in \mathcal{E}^2([-1,0],c)$ for some $c \in (-1,0)$ and $F'' > 0$. Let $f_u = u \cdot F$ for $0 < u \leq 1$. Let n be odd ≥ 3, $m \geq 2$ and $k \geq 0$.

(a) Whenever $\nu(f_{u_0}) = \sigma_{n,m}$ and c is a periodic point of f_{u_0}, the condition (1) of Proposition (1.2) holds for $N = nm+2$.

(b) Assume in addition that f_u is naive for $0 < u \leq 1$. Then whenever $\nu(f_{u_0}) = \sigma_{n,m}^{(k)}$ and f_{u_0} has c as a periodic point, then the condition (1) holds for $N = 2^k(nm+1)$.

In what follows we shall show that Theorem 1 reduces to Theorem (2.1). We shall only prove that Theorem (2.1) (b) implies Theorem 1 (b). The remaining part will then be clear.

The proof is devided into two steps.

Step 1. We claim that for n, m and k as above, there exists at most one value $0 < u < 1$ such that $\gamma(f_u) = \sigma_{n,m}^{(k)}$ and that c is a periodic point of f_u. Let $\mathcal{P}$ be the set of such values u. Assume in way of contradiction that $\mathcal{P}$ is an infinite set. Then one can choose a convergent series $\{u_i\}$ of distinct points of $\mathcal{P}$. Let $u_\infty = \lim_{i\to\infty} u_i$ and let $N = 2^k(nm+2)$. Since $f_{u_i}^{\,N}(c) = c$ for any i, we have $f_{u_\infty}^{\,N}(c) = c$. Then by Remark (1.3), either $\gamma(f_{u_\infty}) = \sigma_{n,m}^{(k)}$ or $\widetilde{\gamma(f_{u_\infty})} = \sigma_{n,m}^{(k)}$. But the latter case is impossible because $\sigma_{n,m}^{(k)}$ is not of the form $\tilde{\gamma}$ for any $\gamma \in \mathcal{K}$. Thus we have $\gamma(f_{u_\infty}) = \sigma_{n,m}^{(k)}$. Now by Theorem (2.1), we have that the condition (1) holds for this value. But then by Proposition (1.2) (c), this value u_∞ must be an isolated point of $\mathcal{P}$, contrary to the definition of u_∞.

Thus we have shown that $\mathcal{P}$ is a finite set. Next we shall prove that $\mathcal{P}$ cannot contain two distinct points. Assume the contrary. Let $u_1 < u_2$ be adjacent points of $\mathcal{P}$. By Theorem (2.1), the condition (1) holds for u_1 and u_2. Therefore by Proposition (1.2), we have $\gamma(f_{u_1+\varepsilon}) = \widetilde{\sigma_{n,m}^{(k)}}$ and $\gamma(f_{u_2-\varepsilon}) = \sigma_{n,m}^{(k)}$ for some small $\varepsilon > 0$. But then by Theorem (1.4) (b) there must exists a point of $\mathcal{P}$ between u_1 and u_2, contradicting the assumption.

Step 2. We shall prove Theorem 1 (b). Assume to the contrary that there exist two values $u_3 < u_4$ such that f_{u_3} possesses a periodic point of prime period $2^k\cdot n$, while

f_{u_4} does not. By Theorem(1.5), we have $\gamma(f_{u_3}) \leq \sigma_n^{(k)}$ and $\gamma(f_{u_4}) > \sigma_n^{(k)}$. Now $\sigma_{n,m}^{(k)}$ decreases and tends to $\sigma_n^{(k)}$ as m increases. Notice also that $\gamma(f_u) = 1/(1-t)^{-1}$ for very small u. Take m large so that $\sigma_{n,m}^{(k)} < \gamma(f_{u_4})$. Then again by Theorem (1.4), there must exist two values of p u_5 and u_6 such that $u_5 < u_3 < u_6 < u_4$. . This contradicts Step 1.

Now in the remaining part of this section, we shall compute the condition (1) for such f_u as in Theorem(2.1). In the first place we have

(2) $(f_{u_0}^{N})''(c) = (f_{u_0}^{N-1})'(f_{u_0}(c))\ f_{u_0}''(c)$ and

(3) $(\partial f_{u_0}^{N}/\partial u)(c) = \sum_{i=1}^{N} (f_{u_0}^{N-i})'(f_{u_0}^{i}(c))\ (\partial f_{u_0}/\partial u)(f_{u_0}^{i-1}(c))$

where the 0-th iterate of a map is to be the identity.

Dividing (3) by (2), we have that (1) is equivalent to the following (4).

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{(f_{u_0}^{N-i})'(f_{u_0}^{i}(c))\ (\partial f_{u_0}/\partial u)(f_{u_0}^{i-1}(c))}{(f_{u_0}^{N-1})'(f_{u_0}(c))\ f_{u_0}''(c)} < 0 .$$

Notice that

$(f_{u_0}^{N-1})'(f_{u_0}(c)) = (f_{u_0}^{N-i})'(f_{u_0}^{i}(c))\ (f_{u_0}^{i-1})'(f_{u_0}(c))$,

$(\partial f_{u_0}/\partial u)(x) = u_0^{-1} f_{u_0}(x)$. Thus (4) reduces to the following simpler (5).

(5) $\sum_{i=1}^{N} f_{u_0}^{i}(c)/(f_{u_0}^{i-1})'(f_{u_0}(c)) < 0$, where N is the prime period of c.

Thus Theorem(2.1) reduces to the following Theorem(2.2) .

<u>THEOREM</u> (2.2) <u>Let</u> $c \in (-1,0)$ <u>and let</u> $f \in \mathcal{C}^2([-1,0],c)$. <u>Assume</u> $f'' > 0$ <u>in</u> (a) <u>below and besides</u> f <u>is naive in</u> (b) . <u>Let</u> n <u>be odd</u> ≥ 3 , $m \geq 2$ <u>and</u> $k \geq 0$.

(a) <u>If</u> $\nu(f) = \sigma_{n,m}$ <u>and</u> c <u>is a periodic point of</u> f , <u>then</u> (5) <u>above holds</u>.

(b) If $\nu(f) = \sigma_{n,m}{}^{(k)}$ <u>and</u> c <u>is a periodic point of</u> f , <u>then</u> (5) <u>holds</u>.

§3. The contraction D

In this section we observe that the map D defined in the bottom of § 1 is a sort of contraction of $\mathcal{K}$. Notice first the map D is order preserving. As before we shall abrieviate $\gamma^{(k)} = D^k(\gamma)$ and also $\mathcal{K}^{(k)} = D^k(\mathcal{K})$. Recall that $\alpha = 1/(1-t)^{-1}$ is the maximal element of $\mathcal{K}$ and $\omega = 1-t/(1-t)^{-1}$ is the minimal. The following proposition is obtained by an easy (not short) combinatorial argument. Let $\alpha^{(\infty)} = \prod_{j=0}^{\infty}(1-t^{2^j})$.

PROPOSITION (3.1)

(a) *For a series* $\gamma \in \Lambda$, $D(\gamma)$ *is admissible if and only if* γ *is.*

(b) $\mathcal{K}^{(k)} = \{\gamma \in \mathcal{K} \mid \alpha^{(k)} \geq \gamma \geq \omega^{(k)}\}$

(c) $\gamma^{(k)} \to \alpha^{(\infty)}$ *as* $k \to \infty$, *for each* $\gamma \in \mathcal{K}$.

REMARK (3.2) As is easily shown, there is no admissible series γ such that $\alpha > \gamma > \alpha^{(1)}$. Therefore by the monotony of D^k, there is no admissible series γ such that $\alpha^{(k)} > \gamma > \alpha^{(k+1)}$. That is, if $\gamma > \alpha^{(\infty)}$, then γ must equal to some $\alpha^{(k)}$.

§4. Naive maps

In this section we give a sufficient condition due to Singer[8] for a map to be naive. Let f be a C^2 map of an interval I into itself. Recall that f is naive if for each positive integer n, f^n has at most one point of inflection on each interval where it is strictly monotone. In this paper, a point x is called a point of inflection of a map g if $g''(x) = 0$.

THEOREM (4.1) *Let f be a C^3 map of I into itself. Suppose for each $x \in I$,*

$$(6) \quad \begin{cases} 3(f''(x))^2 - 2f'(x)f'''(x) > 0 & \text{if } f'(x) \neq 0 . \\ x \text{ is a local maximum or a minimum if } & f'(x) = 0 . \end{cases}$$

Then f is naive.

PROOF: Clearly, if f and g satisfy (6), then $g \circ f$ also satisfies (6). Thus one may assume that f^n satisfies (6). From this follows easily that f is naive.

q.e.d.

Notice that important functions such as quadratic functions, $a \sin x$ or $a\,x\,e^{-x}$ satisfy (6) and therefore they are naive.

§5. Iterates of naive maps

In this section we consider the iterate f^{2^k} of a map $f \in \mathcal{E}^r$ whose kneading invariant belongs to $\mathcal{L}^{(k)}$ $= \mathcal{K}^{(k)} \setminus \{\alpha^{(k)}, \omega^{(k)}\}$. To begin with, consider a map $f \in \mathcal{E}^2([a,b],c)$ such that f'' is everywhere positive, f is naive and $\gamma(f) \in \mathcal{L}^{(1)}$. Now $\gamma(f) < 1/(1-t)$ implies $f(c) < c$. There is a fixed point b_1 in (a,c) and a point c_1 in (a,b_1) such that $f(c_1) = c$. Next one can show that $\gamma(f) < \alpha^{(1)}$ implies that $f^2(c) > c$. Thus $f^2(c_1) < c_1$. And therefore there is a point a_1 such that $f^2(a_1) = b_1$. Let $g = f^2\big|_{[a_1,b_1]}$. g maps $[a_1,b_1]$ into itself. In fact, $\theta^+(f^2(c_1)) = \mathcal{J}(\gamma(f)) > \mathcal{J}(\omega^{(1)})$ since $\gamma(f) \in \mathcal{L}^{(1)}$. On the other hand $\theta^+(a_1) = \theta(a_1) = \mathcal{J}(\omega^{(1)})$. By the monotony of invariant coordinates, we have $f^2(c_1) > a_1$, as is required.

Now without much difficulty we can establish the relationship between the kneading invariants of g and f; that is, $\gamma(f) = \gamma(g)^{(1)}$.

For later use it does not suffice however that g is merely a map of $[a_1, b_1]$. It is needed that g thus constructed is in addition convex down like f itself. For this purpose the condition that f is naive proves useful. In the first place, by the chain rule we have $g''(x) > 0$ for $x \in [a_1, c_1]$. Next we have $f'(b_1) < -1$. In fact, otherwise, f^2 must have at least two points of inflexion in a monotone interval (c_1, c), contrary to the hypothesis that f is naive. Now, $(f^2)''(b_1) = f''(b_1)f'(b_1)(1+f'(b_1)) > 0$. Again by the naiveness of f, this implies $g''(x) > 0$ for $x \in (c_1, b_1]$. Finally notice that g is also naive, by the very definition.

In conclusion, if $f \in \mathcal{E}^2([a,b],c)$, $f'' > 0$, f is naive and $\gamma(f) \in \mathcal{L}^{(1)}$, then $g \in \mathcal{E}^2([a_1,b_1],c_1)$, $g'' > 0$, g is naive and $\gamma(f) = \gamma(g)^{(1)}$.

Now, if in addition $\gamma(f) \in \mathcal{L}^{(2)}$, then one has $\gamma(g) \in \mathcal{L}^{(1)}$. Also g satisfies the other conditions needed and one can apply the whole argument again to g. Proceeding in this way, we obtain the following theorem.

THEOREM (5.1) *Let $a < c < b$ and k be a positive integer. Suppose that $f \in \mathcal{E}^2([a,b],c)$, $f'' > 0$ on $[a,b]$, f is naive and $\gamma(f) \in \mathcal{L}^{(k)}$. Define the points a_ℓ, b_ℓ, c_ℓ $(0 \le \ell \le k)$ inductively as follows. For $\ell = 0$, let $a_0 = a$, $b_0 = b$ and $c_0 = c$. For $1 \le \ell \le k$, let b_ℓ be the point of $(a_{\ell-1}, b_{\ell-1})$ which is fixed by $f^{2^{\ell-1}}$, c_ℓ be the point of $(a_{\ell-1}, b_\ell)$ such that $f^{2^{\ell-1}}(c_\ell) = c_{\ell-1}$ and a_ℓ be the point of $(a_{\ell-1}, c_\ell)$ such that $f^{2^{\ell-1}}(a_\ell) = b_\ell$.*

Then these points are well defined and satisfy the following conditions. Let $f_\ell = f^{2^\ell}\big|_{[a_\ell, b_\ell]}$.

(i) $a_\ell < c_\ell < b_\ell$ *and* $[a_\ell, b_\ell] \subset (a_{\ell-1}, b_{\ell-1})$.

(ii) $f_\ell \in \mathcal{E}^2([a_\ell, b_\ell], c_\ell)$, $f_\ell'' > 0$, f_ℓ *is* naive and $\gamma(f_\ell)^{(\ell)} = \gamma(f)$.

(iii) $f_{\ell-1}'(b_\ell) < -1$.

(iv) $f_{\ell-1}$ maps the interval $[a_\ell, b_\ell]$ by an order reversing homeomorphism onto the interval $[b_\ell, f_{\ell-1}(a_\ell)]$. Especially $f_{\ell-1}(x) \geq x$ for any $x \in [a_\ell, b_\ell]$.

We have excluded from Theorem(5.1) the case where $\gamma(f) = \omega^{(k)}$. In fact the theorem holds also for this case. This proof needs some extra care and we shall not use it later.

17頁抜け（これでよい）

$$(7) \quad \sum_{r=1}^{q} \sum_{j=1}^{2^k-1} f^{2^k(r-1)+j+1}(c)/(f^{2^k(r-1)+j})'(f(c)) < 0 .$$

Note that $f(c) = f^{2^k}(c_k)$. Thus by (7) , we have

$$(8) \quad \sum_{r=1}^{q} p_k(g^r(c_k))/(g^{r-1})'(g(c_k)) < 0 ,$$

where $g = f^{2^k}|[a_k,b_k]$. Note that $\gamma(g) = \sigma_{n,m}$ and g has its critical point c_k as a periodic point. Recall also that $g'' > 0$.

Before proceeding to a further reduction of (8) , some preparation in kneading theory is needed. An admissible series γ is called simple if it has no consequtive positive terms and $\gamma \neq \alpha^{(1)}$. For example, $\sigma_{n,m}$ as well as σ_n is simple.

PROPOSITION (6.2) *Let $f \in \mathcal{C}^1([a,b],c)$ and let b_1 be the fixed point in (a,c) . Suppose that $\gamma(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i$ is simple. Then if $\gamma_{i-1} > 0$, then $f^i(c) < b_1$ and if $\gamma_{i-1} < 0$, then $f^i(c) > b_1$.*

The proof is a computation in invariant coordinate and is left to the reader.

No let us return to (8) . The signature of the denominator $(g^{r-1})'(g(c_k))$ coincides with the coefficient of t^{r-1} of $\gamma(g)$. Thus , if $(g^{r-1})'(g(c_k))$ is positive, then $g^r(c_k) > b_{k+1}$ and if it is negative, then $g^r(c_k) < b_{k+1}$, where b_{k+1} is the fixed of g in (a_k, b_k) . Now the function p_k is negative valued and monotone increasing on $[a_k,b_k]$.

Therefore in order to show (8), it suffices to prove

$$(9) \qquad \sum_{q=1}^{r} 1/(g^{r-1})'(g(c_k)) > 0 \qquad (q = nm+2)$$

Thus we have successfully reduced Theorem(2.2) (b) to the following.

THEOREM(6.3) *Let* $a < c < b$, $g \in \mathcal{E}^2([a,b],c)$, n *odd* ≥ 3 *and* $m \geq 2$. *Suppose* $g'' > 0$, $\gamma(g) = \sigma_{n,m}$ *and* c *is periodic. Then* (9) *above holds.*

§ 7 is devoted to the proof of this theorem.

REMARK(6.4) Much more seems to hold than the above theorem. In particular it is conjectured that (9) holds whenever $\gamma(g)$ is simple and the other conditions of the above theorem hold. In fact this is proved for quadratic maps. ([4]) See also [1].

The last section 7, full of tricky computation, is omitted.

REFERENCES

[1] F. Hofbauer, The topological entropy of the transformation $x \mapsto ax(1-x)$, Monatsheft für Math. 90(1980) 117-141

[2] L. Jonker, Periodic orbits and kneading invariants, Proc. London Math. Soc. (3) 39(1979) 428-450

[3] L. Jonker - D. Rand, Une borne inférieure pour l'entropie de certaines applications de l'intervalle dans lui-même, C. R. Acad.Sci. Paris Sér. A-B 287(1978) no.7 A501-A502

[4] S. Matsumoto, On periodic points of quadratic functions, to appear

[5] J. Milnor, The theory of kneading, Handwritten Notes

[6] J. Milnor - W. Thurston, On iterated maps of the interval, I and II, Handwritten Notes

[7] T. Oono, Note om differentiable maps and Liapunov index, to appear

[8] D.Singer, Stable orbits and bifurcation of maps of the interval, SIAM J. Appl. Math. 35 260-267

松元

S. Matsumoto

Department of Mathematics

Fuculty of Science and Technology

Nihon University

Surugadai, Tokyo, Japan

低次元トポロジーの発展

本間龍雄

この題名にふさわしい講演となると，低次元トポロジーの過去の歴史から説きおこして，将来の展望に至る総合的内容を盛った話しでなければならないが，低次元トポロジーが成長してきた過程の正確な情報を持ちあわせていないし，さらに将来どの方向に発展するのか，あるいはすべきか全く見当もつかない。私の狭い経験に基づいて，断片的な感想を述べることで許して頂きたい。

基本予想と三角形分割問題

私が研究を始めた昭和20年代初期には3次元多様体に関する基本予想も三角形分割問題も解けていなかった。2次元多様体に関するこれ等の問題はRadoによって肯定的に解決されていたが，3次元

以上では全く見通しが立っていなかった。一般トポロジー，PLトポロジー，微分トポロジーなどの分野もまだ確立していないで，混沌とした状態であった。例えば一般トポロジーの言葉だけで多様体を記述できるのでないかなどと夢をみている人もいた。このような試みは2次元まではなんとか成功したが，3次元以上では「locally euclidean」を一般トポロジー的な手法で言い換えることは諦める他なかった。

昭和20年代後半，戦後の混乱がやっとおさまってきた頃，E.E. Moise，続いてR.H.Bingによって，3次元多様体の基本予想，三角形分割問題が解決されるに及んで，低次元トポロジーにも新しい時代が開けてきたことが感じられた。私がDehnのlemmaを研究するに至った動機の一つはやはり3次元多様体の同相写像をPL同相近似する必要性からであったが，これが解決すればもちろん，3次元

多様体の基本予想も三角形分割問題も一挙に終ってしまうつもりであつた。Dehn の lemma が解けたと思つたときは，既に Moise や Bing の結果が出た後であつた。

J. Milnor, R.C. Kirby, L.C. Siebenman 等による高次元の基本予想，三角形分割問題の目覚しい発展は，直接的には低次元トポロジーに影響はなかつたように見えるが，低次元トポロジーを高次元の立場から反省させて，引いては低次元トポロジーの研究を推進させるのに役立つたことは否定できない。

基本予想と三角形分割問題は点集合論的トポロジーと PL トポロジーあるいは微分トポロジーとの距離を明らかにする問題である。基本予想，三角形分割問題に関する未だに落ちていない最後のとりでが 4 次元多様体である。　昨年の M. Freedman による 4 次元 Poincaré 予想の部分的解決によつて，4 次元においては点集合論的トポ

ロジーとPLトポロジーとの距離を縮める作業の必要性が更に高まってきたように感じられる。

Unknotting Problem

「n次元球面S^nに埋め込まれたm次元球面S^mはS^nに埋め込まれた$m+1$次元球B^{m+1}の境界$\partial B^{m+1}=S^m$となり得るか?」

これがUnknotting Problemと思って頂きたい。S^mがS^nに埋め込まれる際にwildな場合，さらにlocally flatでない場合が生じるが，先づそのような場合は考えないことにして，PL的でしかもlocally flatに埋め込まれているものとしよう。

S^1がS^3でknotするが，S^1がS^4でunknottedである事実しか知らなかった私は

$$2m+2 \leqq n$$

ではunknottedであるが，それ以外では全く見当がつかないと思って，深くつきつめて考えようとはしなかった。E.C. Zeemanにより

$m+3 \leqq n$

即ち codimension 3以上ですべて unknotted であることを証明された時は自分の不勉強さを思い知らされた。 もちろん $2m+2 \leqq n$ という不等式は一般の位置に関する考察だけですぐ解ける範囲で，トポロジーらしい技巧は殆んど必要としない。

unknotting problem を解く一番大事な技巧は Whitney のトリックと呼ばれる手法で，m次元($m \geqq 3$)の多様体が R^{2m} に埋め込み可能なことを証明する際に，最初に一般の位置の理論ではめこんでおき，その self-intersection を解消するために開発されたトリックであるが，このトリックを精密化して拡張することによって codimension 3 以上の unknotting theorem を得るのである。

codimension 2 になると unknotting theorem は成立しないで結び目の問題に直面するのであるが，低次元トポロジーの面白さと難しさは，結び目が低次元多様体

の構造に本質的に関係してくる点にあると思われる。S^3の中の結び目あるいは絡み目に関するDehn Surgeryにより任意の3次元多様体が構成できること，S^4におけるS^2の埋め込み方の多様性をみても，結び目理論の重要さは明らかであるが，私はunknotting problemのみに関心が向って，本当にknotしているものは，解けるはずがないと思って始めから敬遠してきた。

低次元はなぜ難しいかという質問にはいろいろな答えがあると思うが，一つの答えは「高次元も難しいが，難しさが理解できない」であり，もう一つの答えは「codimension 2の次元が，3次元では1次元，4次元では2次元となって，双対定理とうまくかみあってこない」ということになる。即ちホモロジー群やホモトピー群の代数的情報を幾何学的に実現しようとすると，一番問題になる次元が，3.4次元多様体ではcodimension 2の次元となってしまって，低次元では結び目の問題を避

けて通るわけにはいかない。

codimension 1 の unknotting problem は Schoenflies 予想となるが，condimension 2 の場合と同様に重要である。Poincaré 予想が 5 次元以上で解決したことと，「n 次元 Shoenflies 予想」が「n 次元多様体の n+1 次元多様体への埋め込みの locally flatness」と同等な問題であることを考慮に入れると，n 次元 schoenflies 予想は n≧4 ですべて同等である。即ち ある次元で否定されれば，4 次以上のすべての次元で否定され，肯定の場合も同様である。結局 4 次元の場合が Schoenflies 予想の核心であると思われる。

self-intersection の解消問題

self-intersection の解消問題さらに self-intersection の構造の研究が推進されなければならないと思っている。既に述べたように embedding theorem，unknotting theorem の証明の中心部分が self-intersection の

解消であった。Dehn の lemma, loop theorem, sphere theorem は 3次元多様体内における self-intersection の解消であり，最近の Freedman による 4次元 Poincaré の予想の部分的解決は 4次元多様体内における self-intersection の解消である。両者の違いは前者が有限回の操作ですんだのに対し，後者は無限回の反復を必要とする点である。

Whitney のトリックというのは，self-intersection が有限個の交点である場合，各交点を適当な collapsible set で包んでしまい，各々を実際に collapse することによって，self-intersection を解消する方法が出発点である。この方法は codimension が十分大きい場合には容易であるが，codimension が小さくなるに従っていろいろな工夫が必要となり。codimension が 2, 1, 0 ぐらいになると適当な条件と巧みなトリックが要求され，さらに self-intersection の構造の解析も必要となる。

shoenflies 予想，Poincaré 予想の解決には

言うまでもなく，homotopy を isotopy に修正する作業を避けられない。すなわち self-intersection をもった図形がパラメーター t に従って連続的に変化する時に，それ等の self-intersection をいかにして全部の t に関して解消するかという問題である。図形が連続的に動くと言っても，self-intersection の変化は連続的でないので，その変化を確実に捉えることが大変難しいが，研究する価値のある問題である。

3次元 Poincaré 予想

3次元多様体の基本群が trivial であるということは強烈な条件である。この条件をもっと具体的な条件，幾何学的，あるいは解析的な条件に置き換える必要がある。Thurston が双曲的構造を閉3次元多様体に導入して3次元 Poincaré 予想の解決に一つの方向を示したのは現在段階に於ける最高の結果であり，かなりの種類の3次元多様体の幾何学的特徴を具体的に

据えるのに成功した模様である。

Poincaré予想の重要性に疑問は無いが，Poincaré予想がもしも肯定的に解決されたとしても，つぎのような問題が残る。一般論として群が自明であるかないかという判定ができないのであるから，与えられた3次元多様体が3次元球面であるかということは判定できないのでないか？ Thurstonのように幾何学的あるいは解析的方法でPoincaré予想を解いた場合には，その判定法も自から示されるような気がする。

我々もgenus 2のHeegaard splittingを持つ3次元多様体に関しては非常に単純なAlgorithmで3次元球面の判定できることを確めた。3次元多様体に基本群が自明であるという条件が強烈であると感じたのはこの体験からである。このAlgorithmが生まれるのに多少面白いいきさつがあるので，ここで紹介しよう。

genus 2のHeegaard splittingを持つ

3次元多様体をコンピュータにinputして、1次元のhomology群や基本群をoutputして、homology 3-sphereの基本群のlistをつくっていた時に、homotopy 3-sphereであること、即ち基本群が自明であることの判定は非常に容易なことに気がついた。それはつぎのような事実に基づいている。

genus 2のHeegaard splittingを持つ場合は、基本群は二つの生成元と二つの関係式で表示される。基本群が自明の場合は必らず、関係式を示す二つのwordのどちらかが他方のwordに代入できるのである。関係式が代入された分だけ消去される。さらに残った関係式についても同様のことが成立して、この操作の有限回の反復により、二つの生成元が共に1となることが示される。途中で二つの関係式の一方が他方に代入できなくなれば、homotopy 3-sphereでないことが判明する。

この事実の裏にはgenus 2のHeegaard diagramの持つ幾何学的特殊性があって

その幾何学的な性質を用いれば，以上のAlgorithmがそのまま3次元球面であるか，ないかの判定法となっている。しかしこの方法はgenus 3以上のHeegaard splittingには適用できないのは残念である。

Heegaard splittingを用いる方法の他，Poincaré予想の解決に向っていろいろの試みがなされている。Dehn surgery，被覆空間，スパイン，ボール・カバリング，property P，signature等あらゆる方法でアプローチが試みられているが，現在の所Thurstonの結果を超えるものはなさそうである。反例作りも研究されているようである。私は既に述べたself-intersectionを解消する問題に関連させ，3次多様体内の2-球面のhomotopyをisotopyに修正しようと思っている。これは一種の正攻法である。

4次元多様体

4次元は3次元と随分異なる。低次元

のトポロジーの研究者は3次元多様体の専門家と4次元多様体の専門家に近い将来別かれてしまうかも知れない。3次元族からみると4次元は明らかに高次元である。少くとも高次元多様体の出城である。 そのように感じられるいわれは多くある。

3次元のSchoenfliesの定理は$\mathbb{R}^3$の中に埋め込まれたS^2をいくつかの平行な平面で切って、その切り口を調べれば証明できる。 4次元Schoenflies予想を解決しようとして、3次元と同様の方法を適用してみたが、まるで歯がたたなかった。5次元以上の多様体では、codimension 1のPL的埋め込みではlocally flatかどうかが解らないが、これは4次元以上のSchoenflies予想と同値な問題である。4次元多様体へのcodimension 2のPL的埋め込みでは、localなflatnessが大きな問題であるが、このような問題は3次元では生じない。

3次元多様体を扱っている時は，wildな図形は病的なものとして，例外扱いにして避けて通ってきたが，4次元では避けて通れないような気がする。Freedmanの4次元Poincaré予想へのアプローチは無限反復法を用いている。これは3次元においてwildな埋め込みを構成する時の手法であるが，高次元では点集合論的トポロジーとPLトポロジーを結びつける重要な方法である。

4次元は低次元では無いのかと言うと，そうも言えない。あたりまえのことだが，5次元以上から見れば4次元は低次元である。Schoenflies予想解決の障害は4次元である。基本予想も三角形分割問題も4次元が一番難しい。4次元がなぜこんなに扱いにくいのか，その理由は私などに判るはずはないが，強いて述べると次のようなことも理由の一つにあげられる。

4次元多様体の構造を調べるとき，2次元多様体のその中への写像の研究が必要と

なるが，これはcodimensionがちょうど2なので，Whitneyのトリックが使えない。self-intersectionの解消が最も困難な次元が4次元である。4次元が高次元か低次元かということを議論しても始まらない。要するに4次元を研究するには，それにふさわしいテクニックを身をつけなければならないことは確かである。

分類問題

生まれつき整理整頓が苦手の私は分類問題に関心を持つことが少なかった。しかし分類はトポロジーにおいても重要課題であることに違いないから，触れることにするが，正確な情報は神戸大学の数学教室に問い合わせて下さい。2次元多様体が有向性，境界成分の数，Euler標数で分類できることは良く知られている。4次元多様体に関しては，Gが有限生成の任意の群で，その表示が与えられれば，基本群にGを持つよう

な有向な閉n次元多様体 $(n \geqq 4)$ M^n が必らず存在することが Markov によって示されているから、4次元多様体の同相性による分類などおよびもつかないだろう。

3次元多様体は2次元と4次元の中間に位置して、分類できるともできないとも結論はでていない。3次元多様体の基本群の characterization は進展しているもようなので、基本群の分類は可能性があるのかも知れない。レンズ空間の同相性による分類が可能なことは良く知られている。レンズ空間は Heegaard splitting で言えば genus 1 の場合に相当する。genus 2 となると全く見当がつかないから、一般の場合は非常に難しいのではないか。もちろん Poincaré 予想が一つの key problem になることは確かである。3次元多様体の中でも、Haken 多様体、Seifert 多様体、hyperbolic 多様体は具体的特徴を持ったものであるが、それ以外に有向既約閉3次元多様体が存在

するかという問題は3次元多様体の本質にかかわる重要問題である。

結び目の分類に関して現在までに知られている主なことは，2-bridge knotとTorus knotが，分類ができていることとcrossing pointが11以下の結び目のtableが示されたことである。4次元空間内の結び目(2次元球面の埋め込み)の分類に関しても，またunknotting problemに関しても，明快な答えは得られてないようである。

多様体の自己同相写像の研究も大切である。Smith Conjectureのように，periodic mapに関してはいろいろな研究がなされている。自己同相写像のつくる群の構造も興味ある問題である。

昨年の暮から本年の正月にかけてHawaiiで開催された，低次元トポロジーの日米シンポジウムは期待どうりの成功をおさめることができた。参加者全員が積極的に

しかも水準の高い研究成果を発表できたことが最大の要因であるが，やはりFreedmanの仕事の検討がハイライトであった。国際会議にもかかわらず，和やかな雰囲気の中で円滑にシンポジウムを進行できたのは，九大の加藤教授とHawaii大学のHilden教授のおかげである。これを契機に日本における低次元トポロジーの一層の発展が期待できるが，それと共に低次元トポロジーの中でも研究の専門化と細分化が生じつつあるので，密接な連絡を保ちつつ研究を進めねばならない。

Covering Spaces of Links

大阪市大 理　作間 誠

Branched Covering Space の概念は Classical Knot Theory と 3-manifold Theory を結ぶ一つの重要な懸け橋であり、様々な観点から研究が成されてきているが、ここでは主として、次の問題について述べる。

(☆) どの様な 3-manifold が S^3 の regular branched covering になるか？ 又、与えられた 3-manifold を regular branched covering に持つ S^3 内の link はどの位あるか？

§1. 定義と例

M を closed oriented 3-manifold, $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を M 内の μ-component oriented link とする。L の補空間 $E(L)$ の基本群

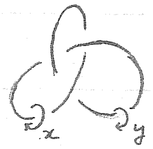
を $G(L)$ で表わし、L の link group と呼ぶ。
今、$G(L)$ から有限群 G への epimorphism φ が与えられたとする。これに対応して、$E(L)$ の regular covering $p: E_\varphi(L) \to E(L)$ が定まるが、その completion として、M の branched covering $p: \Sigma_\varphi(L) \to M$ が得られる。この時、群 G は $\Sigma_\varphi(L)$ に効果的に作用し、(1) $\Sigma_\varphi(L)/G \cong M$, (2) $\mathrm{Fix}(G) = \bigcup \{ \tilde{K}_i \equiv p^{-1}(K_i) \mid \varphi(m(K_i)) \neq 1 \}$ となる。(但し $m(K_i)\ (\in G(L))$ は K_i の meridian)
特に、$\varphi(m(K_i)) \neq 1\ ({}^{\forall} 1 \leq i \leq \mu)$ であるなら、$\mathrm{Fix}(G) = p^{-1}(L)$ となるが、この時、$\Sigma_\varphi(L)$ を L の regular (branched) cover と呼ぶ。又、G が abelian group の時 $\Sigma_\varphi(L)$ を L の abelian cover, G が cyclic group $\mathbb{Z}_n$ の時、$\Sigma_\varphi(L)$ を L の n-fold (branched) cyclic cover と呼び、$\Sigma_n(L)$ で表わす。

<u>例</u> (1) $L = O \subset S^3$ trivial knot.

$\Rightarrow \Sigma_n(O) \cong S^3$

(2) $L = \bigcirc\ \bigcirc \subset S^3$ trivial 2-component link

$\Rightarrow \Sigma_n(L) \cong \#^{n-1} S^2 \times S^1$ 特に $\Sigma_2(L) \cong S^2 \times S^1$

(3) $K =$  $G(K) = \langle x, y \mid xyx\bar{y}\bar{x}\bar{y} = 1 \rangle$

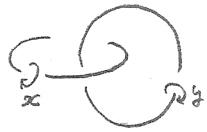
$\Rightarrow \Sigma_2(K) \cong L(3,1)$ (Lens space)

$\Sigma_3(K) \cong S^3/Q$ (Quaternion space)

$\Sigma_5(K) \cong S^3/I^*$ (Poincaré homology sphere)

$\varphi : G(K) \to D_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^3 = 1 \rangle$

とおくと、$\Sigma_\varphi(K) \cong S^3$

(4) $L =$  $G(L) = \langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle$

$\varphi : G(L) \to \langle x \mid x^n = 1 \rangle \oplus \langle y \mid y^m = 1 \rangle$

$\Rightarrow \Sigma_\varphi(L) \cong S^3$

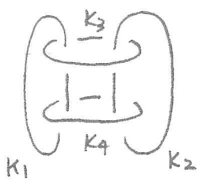
2、$\Sigma_2(L) \cong \mathbb{R}P^3$ (Real Projective space)

(5) $L = \{a, b\} \times S^1 \subset M = S^2 \times S^1$

$\Rightarrow \Sigma_n(L) \cong S^2 \times S^1$

§2. {cyclic cover} $\subsetneqq$ {regular cover} $\subsetneqq$ {3-manifold}

Hilden [5], Montesinos [15] は すべての (closed orientable) 3-manifold は S^3 の 3-fold irregular branched cover になる事を示した。これに対して、Hirsh-Neumann [6], Montesinos [16] により、$S^1\times S^1\times S^1$ は S^3 の branched cyclic cover にならない事が示された。ところが、$S^1\times S^1\times S^1$ は次の link の abelian cover $\Sigma_\varphi(L)$ になる事がわかる。



$$\varphi : G(L) \to \langle x \mid x^2=1\rangle \oplus \langle y \mid y^2=1\rangle$$

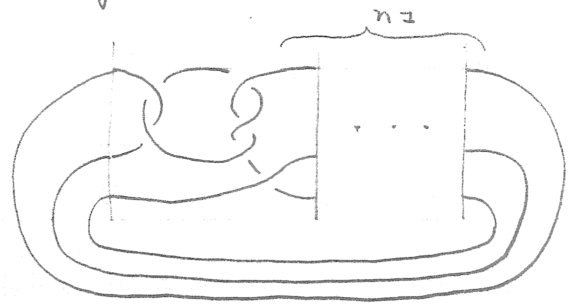
$$\begin{cases} \varphi(m(K_1)) = \varphi(m(K_2)) = x \\ \varphi(m(K_3)) = \varphi(m(K_4)) = y \end{cases}$$

では、すべての 3-manifold は S^3 の abelian (又は regular) branched cover になるかというと、それも成り立たない。例えば、S^1 上の torus-bundle で monodromy が $\begin{pmatrix} 3k+4 & 3k+1 \\ 2k+3 & 2k+1 \end{pmatrix}$ $(k \geqq 3)$ となるものは S^3 の regular cover にならない事がわかる ([19])。更に、もっと詳しく、periodic map を持たない 3-manifold の存在が Siebenmann [22] により証明されている。他方、上とは対照的に、すべての 3-manifold は S^1 上の surface bundle を 2-fold branched covering に持つ

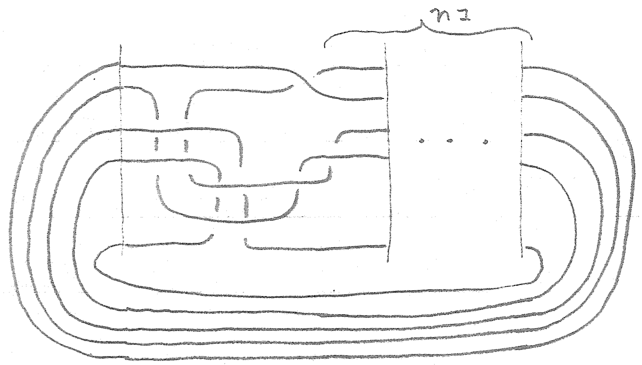
事が [19] で示されている。

§3. Cyclic branched covering の branch line

一般に、S^3 内の二つの knot K, K' に対して、$\Sigma_n(K) \cong \Sigma_n(K')$ であっても、K と K' は同型とは限らない。([1, 4, 12, 17, 18, 20, 24, 27])
例えば、下図の knot K_n, J_n は同じ n-fold branched cyclic cover を持つ。([18, 20])



K_n



J_n

しかし、いくつかの 3-manifold に関しては、branch line の一意性が証明されている。

$\Sigma_2(L) \cong S^3 \Rightarrow L \cong O$ (Waldhausen [28])

$\cong S^2 \times S^1 \Rightarrow L \cong O\ O$ (Tollefson [25])

$\cong \overset{n}{\#} S^2 \times S^1 \Rightarrow L \cong \underbrace{O \cdots O}_{n+1}$ (Kim-Tollefson [10], Kouno [11])

$\cong \mathbb{RP}^3 \Rightarrow L \cong$  (Kim [9])

$\cong$ Torus bundle $\Rightarrow L \cong$  (Sakuma [19])

$\cong$ Lens space $\Rightarrow L \cong$ 2 bridge link (Bonahon [2], Hodgson [7])

以上は 2-fold branched cover に関する結果であるが、一般の branched cyclic cover については、最近、次が Thurston, Bass, Schalen, Meeks-Yau, Gordon-Litherland の合作により証明された。([23])

<u>Branched Covering Theorem</u>　M を homotopy 3-sphere, K をその中の knot とする。この時、もしある $n(\geqq 2)$ に対して $\Sigma_n(K)$ が simply connected であるなら、K は trivial knot である。

§4. S^3 を abelian cover に持つ link

Mayberry - Murasugi [13] は Branched Covering Theorem を用いて次を証明した

<u>Theorem M</u>　L を S^3 内の link とし $\Sigma_\varphi(L)$ を L の abelian cover とする。この時、もし $\Sigma_\varphi(L)$ が simply connected なら $\Sigma_\varphi(L)$ は S^3 に同相である。

(Proof)　$L = \bigcup_{i=1}^{\mu} K_i$ とすると、$H_1(\Sigma_\varphi(L)) = 0$ である事より、φ は次の様になる事がわかる。

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & G(L) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{\mu} \langle t_i \mid t_i^{n_i} = 1 \rangle \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & m(K_i) & \longmapsto & t_i \end{array}$$

従って $\Sigma_\varphi(L)$ は次の様な branched cyclic covering の tower の頂上として得られる。

$$\Sigma_\varphi(L) = M_\mu \to M_{\mu-1} \to \cdots \to M_2 \to M_1 \to M_0 = S^3$$

(ここで $M_i \to M_{i-1}$ は K_i の M_{i-1} での逆像 $\tilde{K}_i$ に沿っての n_i-fold branched cyclic covering。)

この時、$\pi_1(\Sigma_\varphi(L)) = 1$ であるので、$\pi_1(\Sigma_\varphi(M_i)) = 1$ $(0 \le i \le \mu)$ となる。従って、Branched Covering Theorem により、$\tilde{K}_i \subset M_{i-1}$ $(1 \le i \le \mu)$ は trivial knot

となる。 これより $\Sigma_\varphi(L) \cong S^3$ を得る。 □

この証明より、S^3 内の link $L = \bigcup_{i=1}^{\mu} K_i$ が homotopy sphere を abelian cover に持つためには、次の条件(*)を満たす自然数 $\{n_i\}_{i=1}^{\mu-1}$ がある事が必要十分である。

(*) $K_1 \subset S^3$ は trivial knot,

$\tilde{K}_2 \subset \Sigma_{n_1}(K_1) \cong S^3$ は trivial knot,

$\tilde{K}_3 \subset \Sigma_{n_2}(\tilde{K}_2) \cong S^3$ は trivial knot,

$\vdots$

$\tilde{K}_\mu \subset \Sigma_{n_{\mu-1}}(\tilde{K}_{\mu-1}) \cong S^3$ は trivial knot。

筆者はこの条件を満たす(trivial knot 以外の) link は  に限る事を示した([21])。よって次を得る。

<u>Theorem 1</u> L を S^3 内の(trivial knot でない) link とする。この時、もし L が homotopy sphere を abelian cover $\Sigma_\varphi(L)$ として持てば、L は

であり、φ は次で与えられる

$$\varphi : G(L) \longrightarrow \langle t_1 \mid t_1^{n} = 1\rangle \oplus \langle t_2 \mid t_2^{m} = 1\rangle$$

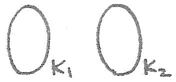
$$m(K_1) \longmapsto t_1$$

$$m(K_2) \longmapsto t_2$$

§5. $S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ link

このセクションでは、前セクションの結果と、Meeks-Yau [14] の Equivariant Sphere Theorem を用いて、$S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ S^3 内の link を決定する。

<u>Theorem 2</u>　L を S^3 内の link, $\Sigma_\varphi(L)$ を L の regular cover とする。この時、$\Sigma_\varphi(L)$ が homotopy $S^2 \times S^1$ であるためには次の (1), (2) のいずれかが成り立つ事が必要十分である。

(1)　$L \cong$ 

$$G \cong D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$$

$$\varphi(m(K_1)) = x, \quad \varphi(m(K_2)) = y$$

(2)　$L \cong$ 

G は次の $G^{\mathrm{I}}(k, n)$, $G^{\mathrm{II}}(k, n)$ のいずれかに同型

$$\begin{cases} G^{\mathrm{I}}(n, k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x, z] = [y, z] = (xy)^n = 1 \rangle \\ \qquad (n,\ k : \text{positive integers}) \\ G^{\mathrm{II}}(n, k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x, z] = [y, z] = (xy)^n z^{k'} = 1 \rangle \end{cases}$$

$$(n,\ k = 2k' : \text{positive integers})$$

$\varphi(m(K_1)) = x$, $\varphi(m(K_2)) = y$, $\varphi(m(K_3)) = z$。

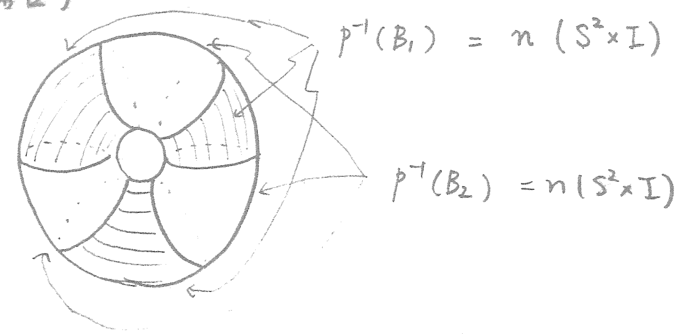
更に、上の時、$\Sigma_\varphi(L) \cong S^2 \times S^1$ である。

<u>Remark</u> $G^{\mathrm{I}\alpha\mathrm{II}}(n,k)$ は 位数 k の cyclic subgroup $\langle z \rangle$ の Dihedral group D_n による extension である。 従って $|G^{\mathrm{I}\alpha\mathrm{II}}(n,k)| = 2nk$

(Proof) 十分性を示す。

(1) の場合。 link を split する 2-sphere を S, K_i を含む $S^3 - S$ の component の closure を B_i とすると $S^3 = B_1 \underset{S}{\cup} B_2$, よって $\Sigma_\varphi(L) = p^{-1}(B_1) \underset{p^{-1}(S)}{\cup} p^{-1}(B_2)$ となる。 ところが、$p^{-1}(B_i)$ は n コの $\Sigma_2(K_i) - \{\text{two 3-balls}\} \cong S^2 \times I$ の disjoint union である事がわかる。 これより $\Sigma_\varphi(L) \cong S^2 \times S^1$ を得る。

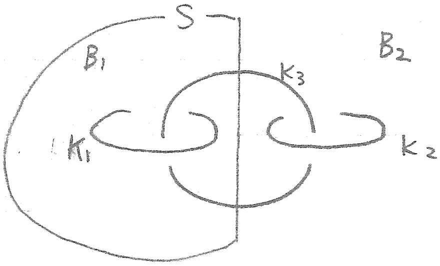
($n=3$ の場合)



㊟ この場合 $\Sigma_\varphi(L)$ は 次の covering の tower の頂上になる

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_\varphi(L) \cong S^2\times S^1 \arrow[dd, "(D_n\text{-branched cover})"'] \arrow[dr, "(\mathbb{Z}_n\text{-unbranched cover})"] & \\
& \Sigma_2(L) \cong S^2\times S^1 \arrow[dl, "(2\text{ fold branched cover})"] \\
S^3 &
\end{tikzcd}$$

(2) の場合。 link を decompose する 2-sphere を S, K_i を含む S^3-S の component の closure を B_i $(i=1,2)$ とすると $\Sigma_\varphi(L) = p^{-1}(B_1) \cup_{p^{-1}(S)} p^{-1}(B_2)$。



この場合にも $p^{-1}(B_i)$ は n コの $S^3-\{\text{two 3-balls}\}$ $\cong S^2\times I$ の disjoint union である事がわかり、従って $\Sigma_\varphi(L) \cong S^2\times S^1$ を得る。

㊟ この時、$\Sigma_\varphi(L)$ は 次の covering の tower の頂上になる。

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_\varphi(L)\cong S^2\times S^1 \arrow[dr, "(\mathbb{Z}_k\text{-branched cover})"] \arrow[dddr] & & \\
& \Sigma_{D_n}(L)\cong S^2\times S^1 \arrow[dr, "(\mathbb{Z}_n\text{-unbranched cover})"] \arrow[dd, "(D_n\text{-branched cover})"'] & \\
& & \Sigma_2(L)\cong S^2\times S^1 \arrow[dl, "(2\text{-fold branched cover})"] \\
& S^3 &
\end{tikzcd}
$$

必要性の証明のためには、次の定理が必要である。

<u>Theorem 3</u>　$L\subset S^3$ の regular cover $\Sigma_\varphi(L)$ に関して次の (1), (2) が成立する。

(1) $\pi_2(\Sigma_\varphi(L)) \neq 0 \iff L$ split 又は composite.

(2) $\Sigma_\varphi(L)$ が $S^2\times S^1$ を factor に含む

$\iff$ (a) L : split link $L_1 \circ L_2$

又は (b) $L = L_1 \# L_2$ (composite link), かつ

$\varphi(G(L_i)) \supsetneqq \langle \varphi(m)\rangle$ が成立する。

(但し $G(L) \cong G(L_1) \underset{\langle m\rangle}{*} G(L_2)$)

更に、この時、$\Sigma_\varphi(L)$ は少なくとも次の個数の $S^2\times S^1$ を factor に持つ。

$$
\begin{cases}
\text{(a)の時} & 1 + |G|\left\{1 - 1/|\varphi(G(L_1))| - 1/|\varphi(G(L_2))|\right\} \\
\text{(b)の時} & 1 + [G:\langle\varphi(m)\rangle]\left\{1 - 1/[\varphi(G(L_1)):\langle\varphi(m)\rangle] - 1/[\varphi(G(L_2)):\langle\varphi(m)\rangle]\right\}
\end{cases}
$$

(Theorem 3 は Meeks-Yau [14] の equivariant sphere theorem を用いて証明される。)

必要性を示す。$\Sigma_\varphi(L)$ が homotopy $S^2 \times S^1$ であるとすると、Theorem 2 により、L は split link $L_1 \circ L_2$, 又は composite link $L_1 \# L_2$ である。この時、$\varphi_i = \varphi | G(L_i)$ とすると、$\Sigma_\varphi(L)$ は $\Sigma_{\varphi_i}(L_i) - \{3\text{ balls}\}$ $(i=1,2)$ の copy を張り合わせて出来る。この事と $\Sigma_\varphi(L)$ が homotopy $S^2 \times S^1$ である事より、$\Sigma_{\varphi_i}(L_i)$ は homotopy 3-sphere で、しかも φ_i は abelian representation である事がわかる。ここで、Theorem 1 を適用する事により、条件の必要性を得る。

References

[1] J. S. Birman, F. González-Acuña and J. M. Montesinos: Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique, Mich. Math. J. 23 (1976), 97–103

[2] F. Bonahon: Difféotopies des espaces lenticulaires, preprint

[3] R. H. Fox: Covering spaces with singularities, Algebraic geometry and topology a symposium in honor of S. Lefshetz 243–257 Princeton 1957

[4] C. A Giller: A family of links and the Conway calculus, Trans. A.M.S. 270 (1982), 75–109

[5] H. Hilden: Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3, Bull A.M.S. 80 (1974) 1243–1244

[6] U. Hirsh and W. D. Neumann: On cyclic branched coverings of spheres, Math. Ann. 215 (1975), 289–291

[7] C. D. Hodgson: Involutions and isotopies of lens spaces, Master Thesis, Univ. of Melbourne

[8] F. Hosokawa and S. Suzuki: Branched Coverings of some links, 数理研講究録 309, 9–37

[9] P. K. Kim: PL involutions on lens spaces and other 3-manifolds, Proc. A. M. S. 44 (1974), 467–473

[10] P. K. Kim and J. L. Tollefson: Splitting involutions of non-prime 3-manifolds, Mich. Math. J. 27 (1980) 259–274

[11] M. Kouno: The irreducibility of 2-fold branched covering spaces of 3-manifolds, 数理研講究録 417, 106–121

[12] C. Livingston: More 3-manifolds with multiple knot-surgery and branched-cover description, preprint

[13] J. P. Mayberry and K. Murasugi: Torsion groups of abelian coverings of links, to appear in Trans. A.M.S.

[14] W. H. III. Meeks and S. T. Yau: Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, Ann. of Math. 112 (1980), 441–484

[15]. J. M. Montesinos: A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3, Bull. A.M.S. 80 (1974), 845–846

[16] ——— : 3 variétés qui ne sont pas des revêtements cycliques ramifiés sur S^3, Proc A.M.S

47 (1975) 495 - 500
[17] —— : Revêtements ramifiés de noeuds, espaces fibrés de Seifert et scindements de Heegard, to appear in Astérisque
[18] Y. Nakanishi : Primeness of Links, Math. Semi. Notes, Kobe Univ. 9 (1981) 415 - 440
[19] M. Sakuma : Surface bundles over S^1 which are 2-fold branched coverings of S^3, Math. Semi. Notes, Kobe. Univ. 9 (1981) 159 - 180
[20] —— : Periods of composite links, Math. Semi. Notes, Kobe Univ. 9 (1981) 445 - 452
[21] —— : On regular coverings of links, to appear in Math. Ann.
[22] L. Siebenmann : On vanishing of the Rochlin invariant and nonfinitely amphicheral homology 3-spheres, Lect. Notes in Math. 788 Springer-Verlag 172 - 222
[23] The proof of the Smith Conjecture, Proc. of Conference at Columbia Univ, New York, 1979, in preparation
[24] M. Takahashi : Two knots with the same 2-fold branched covering space, Yokohama Math. J. 25 (1977)

91-99

[25] J. L. Tollefson : Involution on $S^1 \times S^2$ and other 3-manifolds, Trans. A.M.S. 183 (1973) 139-152

[26] ——— : Periodic homeomorphism of 3-manifolds fibered over S^1, Trans. A.M.S. 223 (1976), 223-234

[27] O. Ya. Viro : Nonprojecting isotopies and knots with homeomorphic coverings, J. Soviet Math. 12 (1979), 86-96

[28] F. Waldhausen : Über Involutionen der 3-Sphäre, Topology 8 (1969), 81-91