第29回

トポロジー・シンポジウム

講演集

昭和56年7月20日～23日

於 高知大学

昭和56年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号 56340003

序

この講演集は、昭和５６年７月２０日から２４日の間、高知大学で開催される第２９回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費補助金・総合研究（A）「トポロジーの総合的研究」（課題番号５６３４０００３）により作られたものであることを附記しておく。

昭和５６年７月

総合研究（A）　56340003

研究代表者　菅原　正博

目次

General Topology 瞥見

永見啓応（愛媛大・理）

標題に更に「日本の」という言葉を付け，その方面で初期にどのようになっていたのかということを考えてみたい。その系譜は次のようなものであろう。

高木貞治，数学小景，岩波，19 　.
（四面体問題，Königsberg の橋の問題）

功力金二郎，Sur la théorie des nombres de Dimensions, Thèse, Paris, 1930.

——，抽象空間論，岩波，1932.

——，Jber. Deutsch. Math. Verein. 19 　.

吉田耕作，~~位相~~ 抽象 空間論講義，1946～.

彌永昌吉，(結び系の理論 ?) 自由群論，岩波，1941.

小松醇郎，位相空間論，岩波，1947.
（R 閉集合，一様空間）

中山正，集合・位相・代数系，至文堂，1949.
（$a^2=a$ ← 岩村聯）

中山正，Zorn の補題，位相数学，1938～42.

中山正，~~全国紙上数学談話会，阪大，1948~~ ?
一様自由位相群，位相数学 4 (1942). ← A. Markhoff

（古典的分離公理に対する序字 T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4）
永田雅宜 の話

近藤基吉，解析学会の話，

寺阪英孝，On Cartesian product of compact spaces, Osaka Math. J. 4 (1952).
角谷静夫，Über die Metrischen der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936).

（第1可算群 → 距離化可能，Haar測度の不変性）

壬生雅道，On Baire functions on infinite product spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944).　← 吉田耕作

森田紀一，star-finite coverings and star-finite property, Math. Japonicae 1 (1948).
（研究方法のgeneralさ）
~~位相~~ 淡中忠郎，位相群論，岩波，1949.

川端直太郎，クラトウスキー位相数学第一巻の訳，共立，1944.
森田紀一，次元論，岩波，1950.
以上が第二次大戦で日本が敗戦する前後までの日本人数学者のこの方面の足跡の概略であって，これがgeneral topologyの前期の歴史を形成している。こんなことを中心に話をしてみたい。

自己ホモトピー同値写像類の群について

徳島大　工　澤下教親

位相空間は基点をもつものとし，写像およびホモトピーは基点をたもつものとする．位相空間Xに対して，Xからそれ自身へのホモトピー同値写像$f: X \xrightarrow{\sim} X$，すなわち　$f^{-1}\circ f \simeq 1$（恒等写像），$f\circ f^{-1} \simeq 1$　をみたす$f^{-1}: X \longrightarrow X$が存在するもの，のホモトピー類$[f]\in[X, X]$の全体

$$\mathcal{E}(X)=\{[f] \mid f: X \xrightarrow{\sim} X\}$$

は，$[f]$，$[g]\in\mathcal{E}(X)$の積を合成のホモトピー類$[f\circ g]\in\mathcal{E}(X)$と定義することにより，一般に非可換な群をなしている。

位相空間XとYがホモトピー同値ならば，明らかに群$\mathcal{E}(X)$と$\mathcal{E}(Y)$は同型である．

たとえば，単連結なCW複体$X=K\cup e^{k+1}$（$\dim K < k$）の場合にはBarcus-Barratt[3]などが得られている．この方法は，一般のコファイバー空間

$$B \longrightarrow E \longrightarrow F$$

における$\mathcal{E}(E)$，$\mathcal{E}(B)$，$\mathcal{E}(F)$の関係を調べる研究（[9]

[18]）に一般化されている。

また，ファイバー空間

$$F \longrightarrow E \longrightarrow B$$

における $\mathcal{E}(E)$，$\mathcal{E}(B)$，$\mathcal{E}(F)$ の関係を調べ，位相空間 X の Postnikov 分解 $\{X_n\}$ を用いて，$\mathcal{E}(X)$ を調べようという研究（[6]，[11]，[18]）がなされている。

ホモトピー同値写像 $f: X \xrightarrow{\simeq} X$ にホモトピー群 $\pi_i(X)$ の誘導された同型写像を対応させることによって，自然な準同型写像

$$\Xi : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \prod_i \pi_i(X)$$

が得られる．この準同型写像および上の方法などにより $\mathcal{E}(X)$ の有限性を調べる研究（[2]，[4]，[5]，[7]，[24]，[25]，[29]）もなされている。

これらの考察では X の単連結性がしばしば必要であり，単連結でない X に対する $\mathcal{E}(X)$ については，さらに困難が多いようである。

ここでは，おもに単連結な空間 X に対して，§1 でファイバー空間について，§2 でコファイバー空間について述べ，§3 で $\mathcal{E}(X)$ の有限性について述べる。

なお写像とそのホモトピー類を同じ文字で表わす。

§1. ファイバー空間における群 $\mathcal{E}$

この節では，ファイバー空間 $\Omega Z \to \Omega(Z;*,Z) \to Z$ から写像 $f:Y\to Z$ によって誘導されたファイバー空間

(1.1) $$\Omega Z \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Y$$

において，$\mathcal{E}(\Omega Z)$，$\mathcal{E}(X)$ および $\mathcal{E}(Y)$ の関係を考察する．以下空間はすべて単連結なCW複体と同じホモトピー型をもつものとする．(1.1)において，ΩZ，Y が条件

(1.2) $$\pi_i(\Omega Z)=0 \ (i\leqq g-1), \quad \pi_i(Y)=0 \ (i\geqq g)$$

をみたすとき，写像

$$p^*:[Y,Y]\longrightarrow[X,Y], \quad i_*:[\Omega Z,\Omega Z]\longrightarrow[\Omega Z,X]$$

は全単射となり，$h\in[X,X]$ に対して，下図

$$\begin{tikzcd}
\Omega Z \arrow[r] \arrow[d, "\psi(h)"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "\varphi(h)"] \\
\Omega Z \arrow[r] & X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

がホモトピー可換となる $\varphi(h)\in[Y,Y]$，$\psi(h)\in[\Omega Z,\Omega Z]$ が一意的に定まる．したがって，準同型写像

(1.3) $$J=(\varphi,\psi):\mathcal{E}(X)\longrightarrow\mathcal{E}(Y)\times\mathcal{E}(\Omega Z)$$

が定義できる．さらに(1.1)における ΩZ の X への作用 $\mu:\Omega Z\times X\longrightarrow X$ により，写像

$$\Delta:[X,\Omega Z]\longrightarrow[X,X], \quad \Delta(\alpha)=\mu\circ(\alpha\times 1)\circ d,$$

（$d: X \longrightarrow X \times X$ は対角写像）が定義でき，

$$I(1) = \{ \alpha \in [X, \Omega Z] \mid \Delta(\alpha) = 1 \}$$

とおくとき，次の定理が得られる．

定理 1.4（野村[11]）．次の系列は集合の間の完全系列である：

$$0 \longrightarrow I(1) \longrightarrow \ker i^* \xrightarrow{\Delta} \mathcal{E}(X) \xrightarrow{J} \mathcal{E}(Y) \times \mathcal{E}(\Omega Z).$$

ここに $i^*: [X, \Omega Z] \to [\Omega Z, \Omega Z]$．

この完全系列において $\mathcal{E}(X)$ の $\ker i^*$ への作用 T:

$\mathcal{E}(X) \times \ker i^* \longrightarrow \ker i^*$ が

(1.5) $\quad g T w = \psi(g) \circ w \circ g^{-1} \quad (g \in \mathcal{E}(X),\ w \in \ker i^*)$

により定義でき，次が得られる（[11]）．

(1.6) $\quad \Delta(w_2 + w_1) = \Delta(\Delta(w_1) T w_2) \circ \Delta(w_1) \quad (w_1, w_2 \in \ker i^*)$.

(1.7) $\quad \Delta(w_1) T w_2 = w_2 \quad (w_1 \in \ker i^*,\ w_2 \in \mathrm{Im}\, p^*)$.

いま（1.2）より強い条件

(1.8) $\quad \pi_i(\Omega Z) = 0 \quad (q \leqq i \leqq n+q-1$ でないとき$)$,

$\quad\quad \pi_i(Y) = 0 \quad (n \leqq i \leqq q-1$ でないとき$)$

ここに $1 < n < q$，が成り立てば，$\ker i^* = \mathrm{Im}\, p^*$ となり（1.6），（1.7）より上の定理の Δ は準同型写像となる．また，$\mathrm{Im}\, J$ は次の群 G と同型であることがわかる（[11]，[18]）

$$G = \{(g, \rho) \in \mathcal{E}(Y) \times \mathcal{E}(Z) \mid g^* f = \rho_* f\}.$$

さらに準同型写像 $h_p : \pi_1(Y^X ; p) \longrightarrow [X, \Omega Z]$ が定義でき，次の定理が得られる．

定理 1.9 (野村[11], Rutter[18])．ファイバー空間(1.1)において，(1.8)が成り立つとき，次の群と準同型写像の系列は完全である：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, p^*/I(1) \longrightarrow \mathcal{E}(X) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

ここに $p^* : [Y, \Omega Z] \longrightarrow [X, \Omega Z]$,

$$\mathrm{Im}\, p^*/I(1) \cong \mathrm{Im}\, p^*/\mathrm{Im}\, h_p,$$

G の $\mathrm{Im}\, p^*/I(1)$ への作用は (1.5) で与えられる．

とくにこの定理は X の Postnikov 分解 $\{X_n\}$ におけるファイバー空間 $K(\pi_n, n) \longrightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$, $\pi_n = \pi_n(X)$, に適用できる．なお Postnikov 分解に関して，Arkowitz-Curjel [1], [2], kahn [6] においても研究されている．

§2. Barcus-Barratt の定理

この節では前節と双対的な考察を述べる．

K を単連結な n 次元 CW 複体とし，

$$K \xrightarrow{i} K \underset{\alpha}{\cup} e^{q+1} \xrightarrow{p} S^{q+1}, \quad q > n$$

を写像$\alpha: S^q \longrightarrow K$により誘導されたコファイバー空間とする．このとき，写像

$$i_*: [K, K] \longrightarrow [K, X], \quad p^*: [S^{q+1}, S^{q+1}] \longrightarrow [X, S^{q+1}]$$

$(X = K \cup_\alpha e^{q+1})$は全単射となり，したがって，準同型写像

$$\varphi: \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(K), \quad i_* \varphi(h) = h \circ i$$

$$\psi: \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(S^{q+1}), \quad p^* \psi(h) = p \circ h$$

$$J = (\varphi, \psi): \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(K) \times \mathcal{E}(S^{q+1})$$

が定義できる．作用$\lambda: X \rightarrow S^{q+1} \vee X$（$e^{q+1}$の赤道$S^q \times \frac{1}{2}$を1点につぶす写像）により定義される写像

$$\Delta: \pi_{q+1}(X) \longrightarrow [X, X], \quad \Delta(\xi) = \nabla \circ (\xi \vee 1) \circ \lambda$$

を$i_* \pi_{q+1}(K)$に制限することにより準同型写像

$$\Delta: i_* \pi_{q+1}(K) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$$

が得られる．さらに準同型写像

$$\alpha_i: \pi_1(X^K; i) \longrightarrow \pi_{q+1}(X)$$

が定義でき，次の定理が得られる．

定理 2.1 (Barcus-Barratt[3])．系列

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow i_* \pi_{q+1}(K) \longrightarrow \mathcal{E}(K \cup_\alpha e^{q+1}) \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は完全である．ここに$H = i_* \pi_{q+1}(K) \cap \mathrm{Im}\, \alpha_i$,

$$G = \{ (h, \tau) \mid h \in \mathcal{E}(K),\ \tau = \pm 1,\ h_* \alpha = \tau \alpha \}$$

さらにGの$i_* \pi_{q+1}(K)/H$への作用は次で与えられる：

$$(h, \tau)\cdot i_* \gamma = \tau(i\circ h\circ \gamma) \qquad (\gamma \in \pi_{q+1}(K)).$$

この定理はより一般に，写像 $f: A \longrightarrow B$ の約写像錐 C_f によるコファイバー空間

(2.2) $\quad B \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{p} SA$

に対して，次のように拡張されている．

(2.3) A, B は単連結なCW複体で，ある $n \geqq m+2$ に対して，

$$H_i(SA) = 0 \quad (n \leqq i \leqq m+n-2 \text{ でないとき}),$$

$$H_i(B) = 0 \quad (m \leqq i \leqq n-2 \text{ でないとき})$$

かつ $H_{m+n-2}(SA)$ と $H_{n-2}(B)$ は自由である，

が成り立つならば，準同型写像

$$J = (\varphi, \psi): \mathcal{E}(C_f) \longrightarrow \mathcal{E}(B) \times \mathcal{E}(SA)$$

が定義でき，さらに定理2.1の準同型写像 α_i を一般化した準同型写像([18])

$$f^i: \pi_1(C_f^B, i) \longrightarrow [SA, C_f]$$

を定義することによって次の定理が得られる．

定理2.4（工藤－土田[9], Rutter[18]）．(2.2)において(2.3)が成り立つならば，系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, i_* / \mathrm{Im} f^i \longrightarrow \mathcal{E}(C_f) \xrightarrow{J} G \longrightarrow 1$$

は完全である．ここに $i_*: [SA, B] \longrightarrow [SA, C_f]$ で，

$$G=\{(h, S\tau) \mid h\in\mathcal{E}(B),\ \tau\in\mathcal{E}(A),\ f_*\tau = f^*h\}.$$

さらに，$\mathcal{E}(C_f)$ の $\mathrm{Im}\, i_* / \mathrm{Im}\, f^i$ への作用は

$$h\cdot w = h^{-1}\circ w\circ\psi(h) \quad (h\in\mathcal{E}(C_f),\ w\in \mathrm{Im}\, i_*).$$

一般には定理2.1の完全系列は分解するかどうかわからないが，分解しない例も知られている（[15],[21]）次は拡大もわかる例である．

定理2.5（岡-澤下-菅原[14]）．$\alpha = S\alpha'\in\pi_{m-1}(S^n)$ $(2\leqq n\leqq m-2)$ と仮定する．このとき，$2\alpha\neq 0$ または $2\alpha'=0$ ならば，分解する完全系列

$$0\longrightarrow H\longrightarrow \mathcal{E}(S^n\cup e^m)\longrightarrow G\to 1$$

が成り立つ。ここに $H=\pi_m(S^n)/(\alpha_*\pi_m(S^{m-1}) + (S\alpha)^*\pi_{n+1}(S^n))$，$G=\{\pm1\}$（$2\alpha\neq0$ のとき），$G=\{\pm1\}\times\{\pm1'\}$（$2\alpha'=0$ のとき）であり，G の H への作用は $a\in\pi_m(S^n)$ に対して $(-1)\cdot a = -(-\iota_n)\cdot a$，$(-1')\cdot a = -a$.

なおCW複体 $S^n\cup e^m$ に対しては，岡[13]，Olum[17]，Sieradski[23]においても研究されている．また，球面上の球面バンドルおよびrank 2, 3のH空間に関しては，Kahn[8]，三村-澤下[10]，野村[12]，岡[16]，Rutter[19]，笹尾[20]，澤下[21]，Sieradski[22]などにおいて研究されている。

§3. 群$\mathcal{E}$の有限性

この節ではArkowitz-Curjel などによる群$\mathcal{E}$の有限性を調べる方法について述べる。以下CW複体Xは単連結で，そのホモトピー群はすべて有限生成であるとする。

$$\{X_n,\ f_n : X \to X_n,\ p_n : X_n \to X_{n-1}\}$$

をXのPostnikov分解とするとき，自然に準同型写像

(3.1) $\varphi_n : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}(X_n),\quad \varphi_n(h) f_n = f_n \circ h,$

が定義できて，次の定理が得られる。

定理3.2 (Arkowitz-Curjel [1],[2]) XがN次元CW複体ならば，φ_n $(n \geqq N)$は同型写像である。

(3.1)による準同型写像$\varphi_{n-1} : \mathcal{E}(X_n) \to \mathcal{E}(X_{n-1})$の制限：

$$\rho_n : \mathcal{E}_\#(X_n) \longrightarrow \mathcal{E}_\#(X_{n-1})$$

($\mathcal{E}_\#(Y)$は自然な準同型写像：$\mathcal{E}(Y) \to \prod_k \mathrm{Aut}\,\pi_k(Y)$の核）および準同型写像

$$\psi = i_n^* \circ f_n^{*-1} : H^n(X;\pi_n) \xrightarrow[\cong]{} H^n(X_n;\pi_n) \longrightarrow H^n(\pi_n, n;\pi_n)$$

($\pi_n = \pi_n(X)$)を考えるとき，§1と同様の考察により完全系列：

(3.3) $\ker\psi \longrightarrow \mathcal{E}_\#(X_n) \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{E}_\#(X_{n-1})$

の存在がわかる([1])。なお単連結でない空間Xに対しても(3.3)と同種の完全系列が築山[26],[27],[28]にお

いて研究されている。定理3.2および(3.3)の完全系列を用いて次の定理が得られる。

定理3.4（[1]）. Xは有限CW複体で，$i \leqq \dim X$のとき$\pi_i(X)$の階数$\rho(\pi_i(X))$が高々1ならば、群$\mathcal{E}(X)$は極大条件をみたす（すなわち，$\mathcal{E}(X)$の任意の部分群は有限生成である）.

群$\mathcal{E}$が有限群であるかどうかについて，1つの結果として，次の定理が得られる.

定理3.5（[1]）. 定理3.4の仮定をみたすXのHurewiczの準同型写像$h_i : \pi_i \to H_i$（$\pi_i = \pi_i(X)$, $H_i = H_i(X)$）に対して，群$\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\, h_i, \pi_i)$はすべての$i$に対し有限群であるとする．このとき，$\mathcal{E}(X)$は有限群で，その位数は

$$\prod_{i=2}^{\dim X} |\mathrm{Aut}\, \pi_i| \, |\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\, h_i, \pi_i)| \, |\mathrm{Ext}(H_{i-1}, \pi_i)|$$

以下である．ここに$|G|$は有限群Gの位数．

さて，一般に非可換群Gの階数が有限であるとはGの正規鎖：　$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_t = 0$　でG_i / G_{i+1}が無限巡回群または周期群（任意の元の位数が有限であるもの）であるものが存在するときをいう．このとき，G_i / G_{i+1}が無限巡回群となるiの個数をGの階数$\rho(G)$

という([2])．Xを有理係数のコホモロジー環が外積多元環 $H^*(X;Q)=\Lambda(a_1,\cdots,a_k)$（生成元 a_i の次数 n_i は奇数）である n 次元CW複体とする．このとき，$\rho(\mathcal{E}(X))$ について次の定理が得られる．

定理3.6([2])．$\mathcal{E}(X)$ の階数が有限であることとすべての n_i が異なることとは同値である．さらに，このとき，

$$\rho(\mathcal{E}(X))=\sum_{i=1}^{k}(\beta_{n_i}(X)-1).$$

ここに $\beta_{n_i}(X)$ は X の n_i 次元Betti数．

この定理より次の系が得られる．

系3.7([2])．$\mathcal{E}(X)$ が有限群であることと，

$$\beta_{n_i}(X)=1\quad(i=1,\cdots,k)$$

は同値である．

なお[2]において $SU(n)$ などに対する階数の具体的な計算例が得られている。

有限生成なホモトピー群をもつ単連結なCW複体 Y が，次の条件(i)または(ii)をみたすものとする．

(i)　Y は有限次元CW複体である．

(ii)　Y のホモトピー群は有限個を除いて0である．

このとき，次の定理が得られる．

定理3.8 (Sunday [25]). YがH空間ならば，$\mathcal{E}(Y)$は有限表示される。

また有限CW複体に対して，次の定理が得られている。

定理3.9 (Sullivan [24], Wilkerson [29]). Yを単連結な有限CW複体とするとき，$\mathcal{E}(Y)$は有限表示される。

なお単連結でないCW複体に対しては，次の定理が得られている。

定理3.10 (Frank-Kahn [5]). $Y = S^1 \vee S^2 \vee S^3$ (一般に $S^1 \vee S^p \vee S^{2p-1}$, $p > 1$) とするとき，$\mathcal{E}(Y)$は有限生成でない。

References

[1] M. Arkowitz and C. R. Curjel, The group of homotopy equivalences of a space, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 293-296.

[2] M. Arkowitz and C. R. Curjel, Groups of homotopy classes, Lecture Notes in Math. 4, Springer-Verlag, 1967.

[3] W. D. Barcus and M. G. Barratt, On the homotopy classification of the extensions of a fixed map, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 57-74.

[4] E. Dror and A. Zabrodsky, Unipotency and nilpotency in homotopy equivalences, Topology, 18 (1979), 187-197.

[5] D. Frank and D. W. Kahn, Finite complexes with infinitely-generated groups of self-equivalences, Topology, 16 (1977), 189-192.

[6] D. W. Kahn, The group of homotopy equivalences, Math. Z., 84 (1964), 1-8.

[7] D. W. Kahn, Realization problems for the group of homotopy classes of self-equivalences, Math. Ann., 220 (1976), 37-46.

[8] P. J. Kahn, Self-equivalences of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, Math. Ann., 180 (1969), 26-47.

[9] Y. Kudo and K. Tsuchida, On the generalized Barcus-Barratt sequence, Sci. Rep. Hirosaki Univ. 13 (1967), 1-9.

[10] M. Mimura and N. Sawashita, On the group of self-

homotopy equivalences of H-spaces of rank 2, preprint.

[11] Y. Nomura, Homotopy equivalences in a principal fibre space, Math. Z., 92(1966), 380-388.

[12] Y. Nomura, Self homotopy equivalences of complex Stiefel manifolds, preprint.

[13] S. Oka, Group of self-equivalences of certain complexes, Hiroshima Math. J., 2(1972), 285-298.

[14] S. Oka, N. Sawashita and M. Sugawara, On the group of self-equivalences of a mapping cone, Hiroshima Math. J., 4(1974), 9-28.

[15] S. Oka, Finite complexes whose self-homotopy equivalences form cyclic groups, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 34(1980), 171-181.

[16] S. Oka, On the group of self-homotopy equivalences of H-spaces of low rank, I, II, preprints.

[17] P. Olum, Self-equivalences of pseudo-projective planes, Topology, 4(1965), 109-127.

[18] J. W. Rutter, Groups of self homotopy equivalences of induced spaces, Comment. Math. Helv., 45(1970), 236-255.

[19] J. W. Rutter, The group of self-homotopy equivalences of principal three sphere bundles over the seven sphere, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 84 (1978), 303-311.

[20] S. Sasao, The stable group of homotopy equivalences of sphere bundles over spheres, preprint.

[21] N. Sawashita, On the group of self-equivalences of the product of spheres, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 69-86.

[22] A. J. Sieradski, Twisted self-homotopy equivalences, Pacific J. Math., 34 (1970), 789-802.

[23] A. J. Sieradski, Stabilization of self-equivalences of the pseudoprojective spaces, Michigan Math. J., 19 (1972), 109-119.

[24] D. Sullivan, Infinitesimal computations in Topology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 47 (1977), 269-331.

[25] D. M. Sunday, The self-equivalences of an H-space, Pacific J. Math., 49 (1973), 507-517.

[26] K. Tsukiyama, Note on self-maps inducing the identity automorphisms of homotopy groups, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 215-222.

[27] K. Tsukiyama, Note on self-homotopy-equivalences of the twisted principal fibrations, Mem. Fac. Educ., Shimane Univ. (Nat. Sci.), 11 (1977), 1-8.

[28] K. Tsukiyama, Self-homotopy-equivalences of a space with two nonvanishing homotopy groups, Proc. Amer. Math. Soc., 79 (1980), 134-138.

[29] C. W. Wilkerson, Applications of minimal simplicial groups, Topology, 15 (1976), 111-130.

安定性予想について

北大 理　三波 篤郎

力学系の構造安定性という概念は，Andronov－Pontrjagin [AP] (1937) に始まるらしい。この中で彼らは，2次元 disc 上の解析的ベクトル場に対して，"grossier (仏)" という性質を定義して，これを characterize している。その結果は，必然的とも言えるが，やはり見事なもので，大域的な，すなわち，2次元 manifold 上の smooth ベクトル場に対しても，成立するものである事が後にわかる。

<u>Theorem [AP]</u>　2次元 disc 上の，境界で transverse なベクトル場が grossier であるための必要十分条件は，次の (1)，(2) が成立する事である。

(1) singularities 及び周期軌道は hyperbolic.

(2) saddle connection がない。

この "grossier" というのが "構造安定" である。

dynamical system は，これを少しくらい動かしても，その構造が位相的に変らない時，構造安定という。

これを正確に定義しよう。

M を closed smooth manifold とする。$r \geq 1$ に対し，

$$\Gamma^r(M) = \{ C^r \text{ vector fields on } M \},$$

$$\mathrm{Diff}^r(M) = \{ C^r \text{ diffeomorphisms on } M \}$$

とし，ともに C^r topology が与えられているとする。

$X \in \Gamma^r(M)$ あるいは，$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が M 上に作る "軌道構造" が，我々の興味の対象である。

$X \in \Gamma^r(M)$ の $x \in M$ を通る軌道 $\mathrm{Orb}_X(x)$ とは，X の生成する 1-parameter 変換群を $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ とすると，

$$\mathrm{Orb}_X(x) = \{ \varphi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}$$

つまり，x を通る X の積分曲線である。　一般に，1-para. 変換群の事を，"flow" とも言う。

$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ の $x \in M$ を通る軌道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ とは，

$$\mathrm{Orb}_f(x) = \{ f^n(x) : n \in \mathbb{Z} \}.$$

<u>Definition 1</u>　$X, Y \in \Gamma^r(M)$ が topologically equivalent とは，ある homeo $h : M \longrightarrow M$ が存在して，h は X の各 orbit を Y の orbit にうつす。

<u>Definition 2</u>　$f, g \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が topologically

equivalent とは，ある homeo $h : M \longrightarrow M$ が存在して，
$gh = hf$．

つまり，topologically equivalent とは，軌道構造が位相的に同じという事である。　これを使うと，

<u>Definition 3</u>　$X \in \Gamma^r(M)$ が C^r－構造安定とは，X の $\Gamma^r(M)$ における，ある近傍 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $Y \in \mathcal{U}$ が X と topologically equivalent．

<u>Definition 4</u>　$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が C^r－構造安定とは，f の $\mathrm{Diff}^r(M)$ における，ある近傍 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $g \in \mathcal{U}$ が f と topologically equivalent．

以上が構造安定性の定義なのだが，それでは，このようなベクトル場，あるいは diffeomorphism はどのようなものなのだろうか？　つまり，具体的な軌道構造がよくわかるような必要十分条件を決定せよという，いわゆる，characterization の問題が生じてくる。　これが，ここでのテーマである。

§.1 Morse-Smale 力学系.

Peixoto は, 1961年, Andronov-Pontrjagin の結果が, 大域的な smooth ベクトル場に対しても成立する事を証明した。

<u>Theorem [P]</u> M^2 を closed 2-manifold とする. $X \in \Gamma^r(M)$ が 構造安定であるための必要十分条件は, 次の (1)〜(3) が成立する事である.

(1) singularities 及び 周期軌道は hyperbolic.

(2) saddle connection が無い.

(3) $\Omega(X)$ は それぞれ有限個の singularities と 周期軌道から成る.

$X \in \Gamma^r(M)$ に対する flow を $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ とする. $x \in M$ が X の non-wandering point であるとは, 任意の近傍 U と, $t_0 > 0$ に対して, ある $t > t_0$ があって, $\varphi_t(U) \cap U \neq \phi$.

$x \in M$ が $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ の non-wandering point であるとは, 任意の近傍 U に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ があって, $f^n(U) \cap U \neq \phi$.

X あるいは, f の non-wandering point 全体を, $\Omega(X)$, $\Omega(f)$ で表わし, non-wandering set という.

これは，closed invariant subset になる．

Theorem [AP] では (3) の条件がなかったが，disc の場合は，(1) が成立しているなら，自動的に (3) が満たされるのである．

$p \in M$ を $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ の hyperbolic な singularity 又は，周期軌道 γ 上の点とする．

$$W^s(p) = \{x \in M \mid d(\varphi_t(p), \varphi_t(x)) \to 0 \text{ as } t \to \infty\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M \mid d(\varphi_t(p), \varphi_t(x)) \to 0 \text{ as } t \to -\infty\}.$$

とし，それぞれ p の安定多様体，不安定多様体という．実際，これらは，1対1に immerse された euclidean space である．

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{p \in \gamma} W^s(p), \qquad W^u(\gamma) = \bigcup_{p \in \gamma} W^u(p).$$

とし，それぞれ γ の安定多様体，不安定多様体という．

$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ の hyperbolic な周期点に対しても，同様にきめる．

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ あるいは $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が構造安定ならば その singularity や周期点の安定多様体と不安定多様体は，交わるとすれば transversal でなければならない事がわかる。 特に，2-manifold 上のベクトル場の場合は，transversal でない intersection は saddle を結ぶ

軌道（saddle connection）しかない。

<u>Definition</u>　次の条件をみたす $X \in \Gamma^r(M)$ あるいは、$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ を Morse-Smale 力学系という。

(1) 不動点や周期軌道は全て hyperbolic.

(2) これらの安定多様体と不安定多様体は transversal に交わる。

(3) non-wandering set はそれぞれ有限個の不動点と周期軌道から成る。

この定義を使うと、前の Theorem [P] は、次のように表現できる。2-manifold 上のベクトル場について、

構造安定 $\Longleftrightarrow$ Morse-Smale.

なお、closed 1-manifold（i.e. S^1）上の diffeo. についても、同じ結果が成り立つ。

一般に、

<u>Theorem [1]</u>　Morse-Smale $\Rightarrow$ 構造安定.

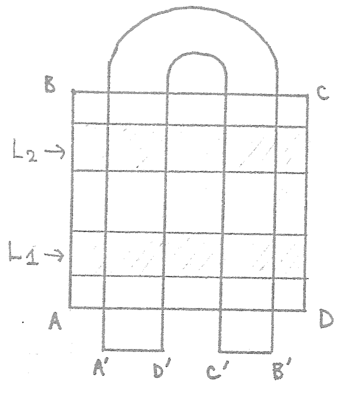
しかし、この逆は成立しない。S^1 上の diffeo. と、2-manifold 上のベクトル場は、きわめて特殊なケースであって、これ以上の次元では、複雑な non-wandering set を持ち、しかも構造安定になるような系が存在する。

§. 2. Axiom A.

最初に、そのような例を述べよう。

例. 1　Horse - Shoe [2].

Smale によって考えられた、horse - shoe diffeomorphism は、2次元以上の manifold において、local に構成でき、その non-wandering set は、Bernoulli system と topologically equivalent になるような invariant set を含む。さらに、manifold 全体に、うまく拡張する事により、構造安定になるようにできる。　最も簡単な例は、次のようなものである。　S を、平面上の正方形 ABCD とし、f は、S を、左図のように、$A'B'C'D'$ にうつすものとする。　$f^{-1}(S \cap f(S)) = L_1 \cup L_2$ となっている。



S における invariant set Λ は、interval における、ある cantor set を C とすると、$C \times C$ に同相になる。

例. 2　Hyperbolic toral automorphism.

$L_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると. L_0 は.

diffeomorphism　$L : T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \longrightarrow T^2$

を. 引きおこす。　周期点は, 全て hyperbolic であり.
しかも, T^2 で dense になる事がわかる。　従って.
$\Omega(L) = T^2$ である。　さらに. L は構造安定 となる。　これは Anosov diffeo の代表的な例である.

例. 3　geodesic flow.

V を closed 負曲率 Riemannian manifold とする.
T_1V を unit sphere bundle, $T_1V \ni v$ に対して定まる測地線に沿った $t \in \mathbb{R}$ までの平行移動を P_v^t とする。　T_1V 上の flow $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を.

$\varphi_t(v) = P_v^t(v)$ ときめる.

これは次の性質を持つ.

(i) 周期軌道の全体は, T_1V で dense.

(ii) $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で定まるベクトル場は. 構造安定.

Anosov は. この geodesic flow をもとに, より一般的な U-system を定義し, その構造安定性を証明している [A]。

これらの例，特に，Anosov の U-system をもとに，Smale は hyperbolic set を定義した．

<u>Definition</u>　$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$，$\Lambda \subset M$ を compact f-invariant subset とする．Λ が f の hyperbolic set であるとは，ある continuous splitting $TM|\Lambda = E^s \oplus E^u$ と，定数 $C > 0$，$0 < \lambda < 1$ が存在し，

$$\| Tf^n | E^s_p \| \leq C\lambda^n, \quad \| Tf^{-n} | E^u_p \| \leq C\lambda^n$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall p \in \Lambda .$$

<u>Definition</u>　$X \in \Gamma^r(M)$，対応する flow を $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，$\Lambda \subset M$ を compact φ_t-invariant subset とする．Λ が X の hyperbolic set であるとは，$X(p) \neq 0$ $\forall p \in \Lambda$ であり，ある continuous splitting $TM|\Lambda = E^0 \oplus E^s \oplus E^u$ と定数 $C>0$，$0<\lambda<1$ が存在し，

$$\| T\varphi_t | E^s_p \| \leq C\lambda^t, \quad \| T\varphi_{-t} | E^u_p \| \leq C\lambda^t$$

$$\forall t \geq 0, \quad \forall p \in \Lambda, \qquad E^0_p = \langle X(p) \rangle .$$

Smale は [3] において，次の Axiom A を定ぎしたが，これはその後，"微分可能力学系" の最も重要な，研究対象の1つになる。

Definition $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が Axiom A をみたすとは,

(a) $\Omega(f)$ は hyperbolic set

(b) $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$

Definition $X \in \Gamma^r(M)$ が Axiom A をみたすとは,

(a). $\Omega(X)$ は有限個の hyperbolic な singularities と, singularity をもたない, compact invariant set Ω_0 との disjoint union となり, Ω_0 は hyperbolic set.

(b) $\Omega_0 = \overline{\mathrm{Per}(X)}$

ここで, $\mathrm{Per}(f)$, $\mathrm{Per}(X)$ は, 周期点, 周期軌道の全体である。　次に, 安定多様体と不安定多様体の横断性を定義しよう。　Ω が hyperbolic set ならば, 前と同様に, 各点 $x \in \Omega$ に対して, $W^s(x)$, $W^u(x)$ を定ぎすると, これらは, 1対1に immerse された euclidean space になる。

Definition Axiom A をみたす $X \in \Gamma^r(M)$ 又は $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ に対して, その non-wandering set を Ω とする。　X あるいは, f が Strong transversality condition をみたすとは, $\forall x, y \in \Omega$ に対し, $W^s(x) \pitchfork W^u(y)$.

Smale は，構造安定性の characterization に関して，次の事を予想した．

<u>構造安定性予想 [1]</u>

構造安定 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ Axiom A and Strong transv. condition.

一般的には，いまだに未解決である．

もう一つの重要な安定性として，構造安定性よりも弱い，Ω－安定性がある．

<u>Definition</u>　$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が，C^r Ω－安定であるとは，$\mathrm{Diff}^r(M)$ における f のある近傍 $\mathcal{U}$ が存在し，任意の $g \in \mathcal{U}$ に対し，ある homeo $h : \Omega(f) \longrightarrow \Omega(g)$ があって，$gh = hf$ on $\Omega(f)$．

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ の場合も，類似的に定義する．

Ω－安定性は，non-wandering set 上の軌道構造のみに着目した時の安定性である。この characterization についても，次の Smale の予想がある．

<u>Ω－安定性予想 [5]</u>

Ω－安定 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ Axiom A and No cycle property.

No cycle property については，[5] 参照．

これらの安定性に対して．Axiom A 等の条件の十分性はすでに．証明されている。

<u>Theorem [6] [7] [8]</u>

Axiom A and Strong transv. condition ⇒ 構造安定．

<u>Theorem [5] [9]</u>

Axiom A and No cycle property ⇒ Ω－安定．

§.3. 逆問題

これらの逆については．3次元以上の diffeomorphism 及び，4次元以上の flow では，いまだに未解決である。

2－manifold 上の C^2 diffeo については，著者が．肯定的解答を得た。 すなわち．

<u>Theorem [10]</u>　2－manifold 上の C^2 diffeo について，

C^1 構造安定 ⇔ Axiom A and Strong transv. condition．

C^1 Ω－安定 ⇔ Axiom A and No cycle property．

これとは独立に，S. D. Liao は [11] において，2－manifold 上の C^1 diffeo と，3－manifold 上の C^1 ベクトル場で．isolated singularity を持つものに対して，

C^1 stability conjectures の肯定的解答を与えているが、その方法は、著者のものとは、かなり異っている。

一般的に、逆問題については、次のような事が、わかっている。

<u>Theorem [12]</u>　　構造安定であり、さらに、Axiom A をみたすなら、Strong transv. condition をみたす。

<u>Theorem [13]</u>　　Ω－安定であり、さらに Axiom A をみたすなら、No cycle property を持つ。

これらの事から、もし、"Ω－安定 ⇒ Axiom A" が成立するなら、stability conjectures はともに肯定的に解決される事になる。

C^1－Closing lemma [14] より、

"C^1 Ω－安定 ⇒ Axiom A (b)"

がわかる。　従って、C^1 stability の場合、"Ω－安定 ⇒ non-wandering set は hyperbolic set" を示せばよい事になる。

[10], [11] ではともに、Ω－安定性よりも、さらに弱い、

$$F(M) = \mathrm{int}_1 \{ f \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid f \text{ の periodic points は hyperbolic} \},$$

という class に対して，その non-wandering set の hyperbolicity を証明している。

なお，C^2-Closing Lemma が未解決であるため，$r \geq 2$ については，C^r 構造安定が Axiom A (b) を意味するかどうかは，わかっていない。とくに，

$$\text{“} \quad C^2 \text{ 構造安定} \underset{?}{\Longrightarrow} C^1 \text{ 構造安定} \quad \text{”}$$

という問題は，興味深い。

REFERENCES

[AP] Andronov – Pontrjagin, Systèmes grossier, Dokl. Akad. Nauk. 14 (1937), 247–251.

[P] M. Peixoto, Structural stability on Two-dimensional manifolds, Topology 1 (1962), 101–120

[A] D.V. Anosov, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, Proc. Steklov Inst. Math. 90 (1967).

[1] Palis – Smale, Structural stability theorems,

Proc. Symp. Pure Math 14. AMS (1970), 223-232.

[2]. S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic Points, Diff. and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1964.

[3]. ———, Differentiable dynamical systems, Bull. AMS. 73 (1967) 747-817.

[5], ———. The Ω- stability theorem. Proc. Sym. Pure Math. 14 AMS (1970), 289-297.

[6]. J. Robbin, A structural stability theorem. Ann. of Math. 94 (1971) 447-493.

[7]. C. Robinson, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, J. Diff. Eq. 22 (1976) 28-73.

[8] ———, Structural stability of C^1 flows. Warwick. Lec. Note. in Math 468. 262-277.

[9]. Pugh - Shub, The Ω-stability theorem for flows, Inv. Math. 11 (1971), 150-158.

[10]. A. Sannami, The stability theorem for discrete dynamical systems on 2-dimensional manifolds, preprint,

[11]. S. D. Liao, On the stability conjecture,

Chin. Ann. of Math. 1 (1) (1980) 9-29.

[12]. C. Robinson, C^r structural stability implies Kupka-Smale, Dynamical systems - Salvador. Academic press. 443-449.

[13]. J. Palis, A note on Ω-stability, Proc. Sym. Pure Math. 14 AMS (1970). 221-222.

[14]. Pugh - Robinson, The C^1 Closing lemma, Including Hamiltonians. preprint.

Generalized Reeb Stability
の反例について

千葉大教養　稲葉尚志

閉多様体上に葉層構造が与えられたとき、その中の或る葉が安定であるとは、近くの葉がみなその葉と同じ挙動をする事をいう。

葉が安定か否かを代数的量によって判定することは重要なことであろう。その為の候補として知られている唯一のものは、C. Ehresmann の導入したホロノミー群である。

1950年頃 G. Reeb はコンパクトな葉に対しては、ホロノミー群の消えることが、安定であるための必要十分条件であることを証明した。これが現在 Reeb Stability Theorem と呼ばれている古典的定理である。

葉がコンパクトでない時は状況は極めて微妙になる。(非真葉に対しては、未だはっきりした安定の定義ができていないので、以下話は真葉に限る。)余次元が2以上の葉層構造では、Reeb Stability Theorem

の一般化は到底無理であることがわかる。余次元が1のときは葉の基本群が有限生成なら成り立つだろうと予想された。即ち

『閉多様体上の余次元1葉層構造において、基本群が有限生成である真葉に対しては、そのホロノミー群の消えることが、安定であるための必要十分条件であろう』

これを Generalized Reeb Stability 予想（或いは略して GRS 予想）と呼ぶ。ここではこの予想に対して現在までに得られている結果を解説する。

§1. 定義

M を n 次元 C^∞ 閉多様体とし、$\mathcal{F}$ を M 上の余次元1, C^r $(0 \leqq r \leqq \infty)$ 葉層構造とする。対にして $(M, \mathcal{F})$ とかくこともある。以下全てこの状況で考える。

L を $\mathcal{F}$ の葉とする。L が真葉であるとは、L が M の相対位相に関して局所コンパクトである事である。従ってコンパクトな葉は常に真葉である。M の部分集合 S が飽和であるとは、S が $\mathcal{F}$ の葉の和集合である事である。$(M_1, \mathcal{F}_1)$, $(M_2, \mathcal{F}_2)$ に対し、

微分同相 $f: M_1 \longrightarrow M_2$ が 葉層構造を保つ とは f が $\mathcal{F}_1$ の葉を $\mathcal{F}_2$ の葉に写すことである。

定義　L を真葉とする。L が 安定 であるとは、L の飽和近傍 U と、$(U, \mathcal{F}|U)$ から積葉層 $(L \times (-1,1), \{L \times \{t\}\}_{-1<t<1})$ への葉層構造を保つ微分同相 f が存在して $f(L) = L \times \{0\}$ となっている時にいう。

今、各点で $\mathcal{F}$ に横断的な余次元 $n-1$ の葉層構造 $\mathcal{L}$ を固定する。($r \geqq 1$ のとき常微分方程式の解の存在と一意性により常に存在する。$r = 0$ のときは簡単のため、そのような $\mathcal{L}$ が存在する場合だけを考えることにする。) $x \in M$ に対し、L_x, T_x はそれぞれ x を通る $\mathcal{F}, \mathcal{L}$ の葉を表わす。

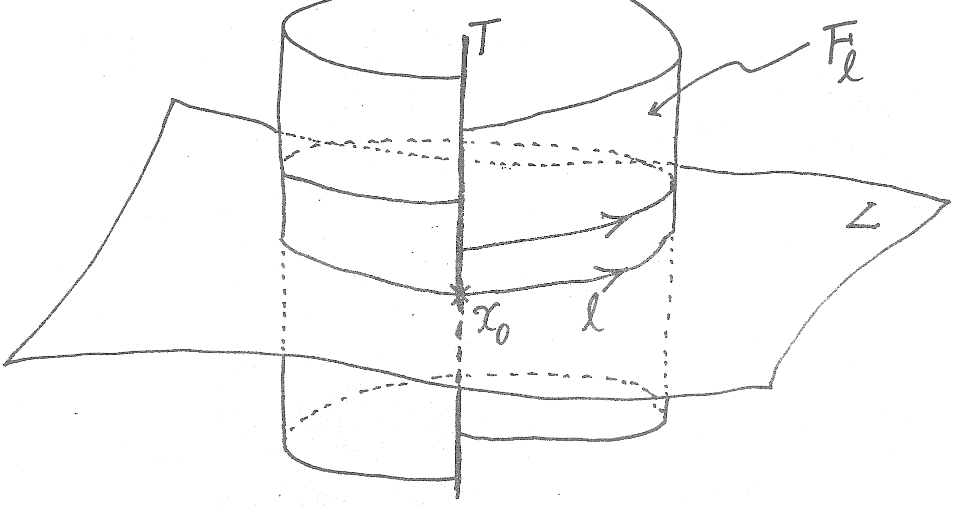
L を葉とする。x_0 を L の一点とする。x_0 を通る $\mathcal{L}$ の葉の小さな部分弧 T をとり固定する。今 L 上に道 $l: (I, \partial I) \longrightarrow (L, x_0)$ を考える。葉層構造の標準的議論により、l 上に次のような フェンス F_l を建てることができる。

$F_\ell : D^1 \times I \longrightarrow M$ 連続写像

i) $F_\ell(t,s) \in L_{F(t,0)} \cap T_{F(0,s)} \quad \forall t,s$

ii) $F_\ell|_{\{0\}\times I} = \ell$

iii) $F_\ell|_{D^1\times\{0\}}$ は Tへの埋め込み。



このとき $\gamma_{F_\ell} : F_\ell(D^1\times\{0\}) \longrightarrow F_\ell(D^1\times\{1\})$ を $\gamma_{F_\ell}(F_\ell(t,0)) = F_\ell(t,1)$ で定義すると、これはT上の、x_0のある近傍からx_0のある近傍への、x_0を固定するC^r微分同相になる。このγ_{F_ℓ}のx_0における芽を$\{\gamma_{F_\ell}\}$とかく。点x_0におけるLのホロノミー群とは、ℓがL上の道を全て動いたときの、芽$\{\gamma_{F_\ell}\}$たちのなす群のことである。これを$\mathcal{H}(L,x_0)$あるいは単に$\mathcal{H}(L)$

で表わす。

$$\Phi : \pi_1(L, x_0) \longrightarrow \mathcal{H}(L, x_0)$$
$$[\ell] \longmapsto \{\gamma_{F_\ell}\}$$

なる写像が well-defined な上への準同型となることがわかる。従って L の基本群が自明ならば、必然的に L のホロノミー群も自明である。

§2. 定理と予想

まず Reeb の定理を正確に記述すると次の様になる。[R] ([H] も参照せよ)。

Reeb Stability Theorem

L をコンパクトな葉とする。$\mathcal{H}(L)$ が自明であれば、L は安定である。

注1　この定理は任意の余次元の葉層構造で成り立つ。

我々の問題とする予想は次のように書かれる。

Generalized Reeb Stability Conjecture

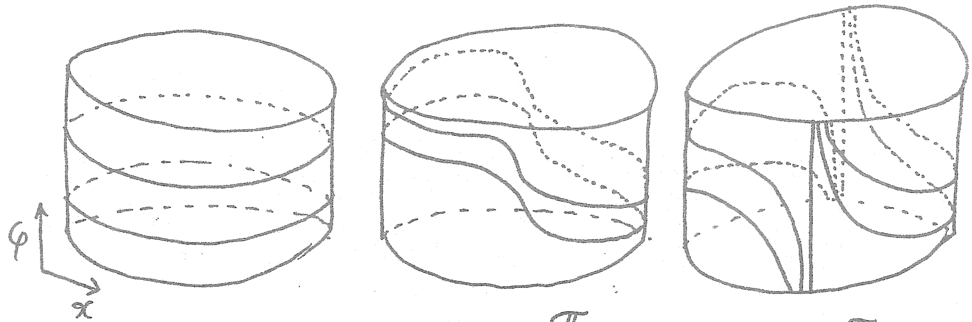
Lを真葉とし $\pi_1(L)$が有限生成であるとする。このとき$\mathcal{H}(L)$が自明であればLは安定である。

注2 余次元2以上で同様の予想が出来ないことは次の例を見れば納得されるであろう。(Reebの例 [R])

$$M = T^3 = \{(x, y, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$\mathcal{F}$ は $d\theta = 0$ かつ $((1-\sin\theta)^2+x^2)d\varphi + \sin\theta\, dx = 0$

で定義される余次元2の葉層構造



$\theta = 0$　　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$　　$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$のところに$\mathbb{R}$と同相な真葉Lがあるがこれは安定でない。(なぜならコンパクトな葉全体がM内で稠密だから) しかしもちろん $\pi_1(L)=1$ ゆえ $\mathcal{H}(L)=\{id\}$である。

<u>注3</u>　基本群が有限生成の条件をおとせないのは次の例があるからである。(今西の例 [Im])

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなす。$\mathrm{Diff}^\infty S^1$ を S^1 の C^∞ 微分同相全体のなす群とする。$f \in \mathrm{Diff}^\infty S^1$ を、$f(0)=0$ であり、$0<t<1$ では常に $f(t)<t$ をみたすように任意にとる。次に $0<a<1$ なる点 a を固定し、$g_i \in \mathrm{Diff}^\infty S^1$ $(i=0,1,2,\cdots)$ を

$$\begin{cases} \mathrm{I}) & \mathrm{supp}\, g_i \subset (f(a),\, a) \\ \mathrm{II}) & \inf \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{supp}\, g_i = f(a) \\ \mathrm{III}) & g \equiv \prod_{i=0}^{\infty} f^i \circ g_i \circ f^{-i} \in \mathrm{Diff}^\infty S^1 \end{cases}$$

をみたすようにとる。

Σ_2 を種数2の向き付け可能閉曲面とし、p を Σ_2 の点とする。$\pi_1(\Sigma_2, p) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid [\alpha,\beta][\gamma,\delta]=1 \rangle$ から $\mathrm{Diff}^\infty S^1$ への準同型 ρ を $\rho(\alpha)=f$, $\rho(\beta)=id$, $\rho(\gamma)=g$, $\rho(\delta)=id$ で定める。ρ から自然な方法([H]をみよ)により構成される $\Sigma_2 \times S^1$ 上の葉層構造を $\mathcal{F}$ とすると、$\mathcal{F}$ の葉 $L_{(p,a)}$ は条件II)により不安定であるにもかかわらず、条件I)により、ホロノミーを持たない。

GRS予想に対する解答の第1歩として、数年前に次を得た[In 1]。

<u>定理1</u>　Mが3次元ならGRS予想は正しい。

同じ頃 P. Dippolito がGRS予想を全ての次元で肯定的に解決した論文[D1]を発表したが、後に訂正がでて、実は次を示したに過ぎないことがわかった[D2]。

<u>定理2</u>　Lを真葉とし、以下の性質をみたすものとする:『Lの任意のコンパクト部分集合Kに対し、Kを含むようなコンパクト部分集合K'が存在して

$$\pi_0(\partial K') \longrightarrow \pi_0(L-K') \text{ は全単射, かつ}$$

各連結成分上で

$$\pi_1(\partial K') \longrightarrow \pi_1(L-K') \text{ は全射}$$

をみたす。』このとき$\mathcal{H}(L)$が自明ならLは安定である。

最近、次の否定的解答を得た。これが今回の話の主結果である[In 2]。

定理3　5次元で GRS 予想の C^0 反例が存在する。

§4 以下で、この反例の構成の方針を述べる。

§3 GRS予想の周辺と残された問題

最近 Cantwell-Conlon が、定理1を C^2 の時に拡張して次の結果を得ている [C-C 1]。

定理4　M は3次元とし、$\mathcal{F}$ は C^2 で、横断的に向き付け可能とする。L が、種数有限で、エンドが高々可算個であるような真葉とする。このとき $\mathcal{H}(L)$ が自明なら L は安定である。

又、$\mathcal{F}$ に成長度に関する条件を課して、次の結果を得ている [C-C 2]。

定理5　$\mathcal{F}$ は C^2 で横断的に向き付け可能とする。更に全ての葉は非指数型成長度をもつとする。この時

真葉 L が $H^1(L;\mathbb{R})=0$ をみたすならば、L は安定である。

注4　W. Thurston [Th 1] によれば、葉 L がコンパクトのときは、$\mathcal{F}$ は C^1 で、成長度の条件なしに、$H^1(L;\mathbb{R})=0$ なら L は安定である。（これには C^0 反例がある）

注5　G. Hector は 1976年のリオデジャネイロのシンポジウム（Springer Lecture Note 652）で次の問題を提起している。$\mathcal{F}$ が C^2 のとき、$H^1(L;\mathbb{R})=0$ なる真葉は安定か。

以下に GRS 予想に関して未解決の問題を挙げておく。

問1　GRS 予想は C^2 では成立するか？

問2　GRS 予想は 4 次元では成立するか？

定理3で構成する真葉 L は、$\pi_1(L)$ が 2元生成自由群になっている。そこで

問3　GRS予想は単連結な真葉について成立するか？

§4 実現問題

紙数の関係で、反例の構成の詳細にまで立ち入ることはできないが、その途中で使う定理で、それ自体でも興味あると思われるものをこの節で紹介する。

まず次の非常に素朴な問題を考える。

問題　多様体 L を与えたとき、それを葉として持つような閉多様体上の葉層構造 $(M, \mathcal{F})$ が存在するだろうか？

注6　先に L と M を与えて、$\mathcal{F}$ の存在を問うこともできる。又、L の quasi-isometry type [P-S] を指定して考えることもできる。

この問題は、最初 J. Sondow [So] によって考えられた。3次元の場合には、Cantwell-Conlon [C-C3]

により、かなりの結果が得られているが、高次元では今迄めぼしいものがなかった。

Lを開多様体とする。

$$E(L)=\left\{\{U_i\}_{i=1}^{\infty}\ \middle|\ \begin{array}{l} U_i \text{ は } L \text{ の連結開集合,} \\ \mathrm{Int}\,\overline{U_i}=U_i,\quad \overline{U_{i+1}}\subset U_i, \\ \overline{U_i}-U_i \text{ は } L \text{ のコンパクト余次} \\ \text{元1部分多様体,} \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i=\phi \end{array}\right\}$$

とおき、$E(L)$上の同値関係$\sim$を次のように定義する：$\{U_i\}\sim\{V_i\}$とは、任意のiに対しあるjが存在して$U_j\subset V_i$かつ$V_j\subset U_i$となる事。

$\mathcal{E}(L)=E(L)/\sim$をLの<u>エンド集合</u>といい、その各元をLの<u>エンド</u>という。

$L\cup\mathcal{E}(L)$には自然に位相が入り、その位相に関して、コンパクト，ハウスドルフ空間になることが知られている。又、$\mathcal{E}(L)$は、その全不連結、コンパクトな部分集合になる。

$\mathcal{E}^{(r)}(L)$を$\mathcal{E}(L)$のr回導集合とする。有限のrが存在して$\mathcal{E}^{(r)}(L)=\phi$となるとき$L$を<u>有限型</u>

という。

L のエンド e が周期的とは、ある連結開集合 U と、中への微分同相 $\varphi : U \longrightarrow U$ が存在して、$\{\varphi^{i-1}(U)\}_{i=1}^{\infty}$ が e の代表元となる事をいう。この時 U を e の周期近傍という。

定義　有限型であり、かつ全てのエンドが周期的であるような多様体を今仮りに FP多様体と呼ぶ。FP多様体 L から全ての周期近傍を取り去った残りを L の核という。

注　周期近傍のとり方に任意性があるので、核の微分同相型にも任意性がある。

一般に、境界つき多様体 N に対し、$\iota : \partial N \longrightarrow N$ を包含写像として、

$$K^1(N, \partial N ; \mathbb{R}) = \ker\left(\iota^* : H^1(N ; \mathbb{R}) \to H^1(\partial N ; \mathbb{R})\right)$$

とおく。

得られた実現定理は次のものである。

<u>定理6</u>　LをFP多様体とし、$K^1(N,\partial N;\mathbb{R})\neq 0$ であるような核Nをもつとする。このときLは実現可能である。(即ち、ある葉層構造の葉となる。)

<u>定理7</u>　LをFP多様体とする。Lの2個以上の連結和は実現可能である。

<u>証明の荒筋</u>　Lのエンド集合の構造をみつつ、西森[N](土屋[Ts]もみよ)の<u>階段</u>を有限個貼り合わせて、Lを真葉としてもつような角つき多様体上の葉層構造をつくる。これに、Thurstonの葉層構造の存在定理[Th2]のrelative versionを適用して、閉多様体上の葉層構造にまで拡張する。□

§5 反例の構成の概略

まず特殊なFP多様体Lを作り、これを不安定でかつホロノミーを持たない真葉として、閉じた多様体上の葉層構造の中に実現する。

しかる後、前節で得た実現定理を用いてこれを閉多様体の中に埋蔵させることにより、反例の構成が完了する。

詳細については [In 2] を参照されたい。

REFERENCES

[C-C1] J. Cantwell and L. Conlon, Reeb stability for noncompact leaves in foliated 3-manifolds, to appear in Proc. A. M. S.

[C-C2] ————, Poincaré-Bendixson theory for leaves of codimension one, to appear in Trans. A. M. S.

[C-C3] ————, Leaf prescriptions for closed 3-manifolds, Trans. A. M. S. 236 (1978), 239-261.

[D1] P. R. Dippolito, Codimension one foliations of closed manifolds, Ann. of Math. 107 (1978), 403-453.

[D2] ————, Corrections (to Ibid.), Ann. of Math. 110 (1979), 203.

[H] A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Pisa 16 (1964), 367-397.

[Im] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 607-634.

[In1] T. Inaba, On stability of proper leaves of codimension one foliations, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 771-778.

[In2] ————, Reeb stability for noncompact leaves, preprint.

[N] T. Nishimori, Ends of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math. J. 31 (1979), 1-22.

[P-S] A. Phillips and D. Sullivan, Geometry of leaves, Topology 20 (1981), 209-218.

[R] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actual. Sci. Ind. No. 1183, Hermann, Paris 1952.

[Se] A. Seito, Remarks on stability of nowhere dense leaves on their proper sides of codimension one foliations, preprint.

[So] J. Sondow, When is a manifold a leaf of some foliation?, Bull. A. M. S. 81 (1975), 622-624.

[Th1] W. P. Thurston, A generalization of the Reeb stability theorem, Topology 13 (1974), 347-352.

[Th2] ——————, Existence of codimension-one foliations, Ann. of Math. 104 (1976), 249-268.

[Ts] N. Tsuchiya, Leaves of finite depth, Japan. J. Math. 6 (1980), 343-364.

コンパクトリー群の作用とaspherical多様体への連続写像

新潟大理　服部剛

§0. 序

普遍被覆が可縮である閉多様体（多様体は以後位相多様体で連結とする）をasphericalと呼ぶ。これは数学のいろいろな分野に現われ興味ある問題を提供しているが、ここでは特にaspherical多様体のコンパクトリー群の作用について考える。これについてはConner-Raymondの研究が重要である。（[C-R]1,2,3）向きづけ可能な閉多様体 M に対し M からあるaspherical多様体 N への写像度1の連続写像が存在するとき、M をhyperasphericalと呼ぶ。解析的な方法によってSchoen-YauはConner-Raymondのaspherical多様体上のコンパクト連結リー群の作用についての結果をhyperasphericalな可微分多様体に拡張している（[S-Y]）。最近解析的な方法によらない一般化がなされた（[D-S], [W-W]）。以下hyperaspherical多様体上のコンパクトリー群の作

用についての結果を報告したい。以後作用は効果的，特に断らないときは連続な作用を意味する。

はじめに，これまでのいきさつを簡単に述べる。

aspherical 多様体上のコンパクトリー群の作用についての最初の結果は次のものであろう。

定理（Hurwitz, 1893）. 種数 g が 2 以上のコンパクトリーマン面の正則変換群の位数は有限で $84(g-1)$ を越えない。■

次にトーラスのコンパクト変換群について次の結果がある。

定理（[M-S], 1943）. トーラスに推移的に作用するコンパクト連結リー群はトーラスに限る。■

Conner-Montgomery は [C-M] において上の結果を一般の aspherical 多様体に拡張したがその結果の一部に誤りがあった（1956）. それが出発点となり Conner-Raymond の研究が始められた。コンパクトリー群の作用について主要な結果は次のものである。

定理（[C-R], 1969）. M を aspherical 多様体 G をコンパクト連結リー群で M に作用している。

このとき，

(1) G はトーラスで次元は $\pi_1(M)$ の中心の階数をこえない。

(2) 等方部分群 $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ はすべて有限群である。

(3) M のオイラー標数 $\chi(M)$ は 0 である。■

この定理の証明のもとになることは次の定理である。

定理（[C-R].）　aspherical 多様体 M にトーラス T が作用しているとき　$\omega^x_*: \pi_1(T, e) \to \pi_1(M, x)$ は単射である。ただし　$\omega^x(g) = gx$ とする。■

その後 Yau は次の定理を示した。

定理（[Y], 1977）　M を m 次元閉可微分多様体，$w_1, \cdots, w_m \in H^1(M : \mathbb{Q})$ （$\mathbb{Q}$ 有理数体）が存在して　$w_1 \cup \cdots \cup w_m \neq 0$ ならば，M に可微分的に作用するコンパクト連結リー群はトーラスに限る ■

注）連続作用について [B-S] において同様な結果が示されている。

Schoen-Yau は次の結果を示した。

定理（[S-Y], 1978）　M をコンパクト可微分多様体，N を非正断面曲率をもつコンパクトリーマン多様体

$f: M \to N$ は $f_*[M]=[N]$（$[M]$, $[N]$ は有理係数基本類）をみたす連続写像とする。このときコンパクト連結リー群 G が M に可微分的に作用すれば G はトーラスで，その次元は M の1次元ベッチ数をこえない。すべての等方部分群は有限である。■

上の定理において特に N が負の断面曲率をもつときは $\dim G = 0$ となる。これについては Gromov 不変量を用いる証明がある（[I-Y], [Ya]）。

[Y], [S-Y] の結果より hyperaspherical 多様体上のコンパクトリー群の作用について一般的な方法を求める試みは自然なものであろう。

§1. aspherical 多様体上のコンパクトリー群の作用

この節では §0 で述べた Conner-Raymond の定理の証明の概略を述べる。

X を弧状連結，局所弧状連結，半局所単連結な位相空間，G を弧状連結位相群で X に作用しているとする。写像 $w^x: (G,e) \to (X,x)$ を $w^x(g) = gx$ により定義する。次の補題がなりたつ。

補題1（[C-R]） w^x_* の像は $\pi_1(X,x)$ の中心

に含まれる ∎

補題2（[C-R]₁）　$\pi_1(X, x)$ の部分群 H が w_*^x の像を含めば，G の作用は H に対応する X の被覆空間に持ち上げられる ∎

次の定理は基本的である

定理1（[C-R]₁）　M を aspherical 多様体，T をトーラスで M に作用している．このとき任意の x について $w_*^x : \pi_1(T, e) \to \pi_1(M, x)$ は単射である．

略証：　$w_*^x(\gamma) = 1$ とすれば，準同型対応 $h : S^1 \to T$ で $h_*(\iota) = \gamma$（ι は $\pi_1(S^1, e)$ の生成元）とできるものが存在する．h により S^1 は M に作用する．この作用は補題2より普遍被覆 $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ に持ち上げられる．$\tilde{M} \simeq pt$ より $E = \tilde{M}^{S^1} \neq \phi$．故に $F = M^{S^1} \neq \phi$．S^1 の連結性より $\pi^{-1}(F) = E$．$\pi : E \to F$ に Cartan スペクトラル列を用いて $H^*(M ; Z) \cong H^*(F)$．これは S^1 が自明に作用することを意味．故に $\gamma = 1$ ∎

この定理より §0 にあげた Conner-Raymond の定理は次の様に示される．G の極大トーラスを T とすれば次ページの可換図式より i_* は単射．$\pi_1(G, e)$ はアーベル群であるから $H_1(T ; Q) \to H_1(G ; Q)$ も単射

$$\begin{tikzcd} \pi_1(G,e) \arrow[r, "w_*^x"] & \pi_1(M,x) \\ \pi_1(T,e) \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "w_*^x"'] & \end{tikzcd}$$

これより $G=T$ を導くことは容易である。

$\pi_1(M)$ が有限位数の元 $(\neq e)$ をもたないことから (2), (3) は容易に示される ■.

aspherical 多様体上の有限群の作用については次の Borel の定理が基本である。

定理 2 ([C-R]$_2$). M は aspherical, $\pi_1(M)$ の中心は自明, G は有限群で M に作用している. このとき $\psi: G \to Out(\pi_1(M))$ は単射である. ここで $Out(\pi_1(M)) = Aut(\pi_1(M))/Inn(\pi_1(M))$ で ψ は次のように定義される. x を M の基点, $g \in G$ に対して x, gx を結ぶ1つの道 $p^g(t)$ をとり $g_*: \pi_1(M,x) \cong \pi_1(M,gx) \cong \pi_1(M,x)$ を考えれば, これは内部自己同型を除いて一意にきまる. $\psi(g) = [g_*]$ ■

[C-R-W] において $\pi_1(M)$ の中心が自明, $Out(\pi_1(M))$ が単位元以外に有限位数の元をもたない M が構成されている.

§2. hyperaspherical 多様体上のコンパクトリー群の作用.

hyperaspherical 多様体の例

(1) aspherical 多様体

(2) N を aspherical, N_0 は任意とするとき $N \# N_0$

(3) $\pi_1(M) = m\mathbb{Z}$ となる m 次元可微分多様体

(4) $w_1, \cdots, w_m \in H^1(M; \mathbb{Z})$ が存在して $(w_1 \cup \cdots \cup w_m)[M] = 1$ となる m 次元多様体

Conner-Raymond の定理の一般化として次の定理が示される。

定理3 ([D-S], [W-W]). M を hyperaspherical, G をコンパクト連結リー群で M に作用しているとする。このとき,

(1) G はトーラスで次元は $\pi_1(M)$ の中心の階数をこえない。

(2) 等方部分群はすべて有限群である。

(3) M のオイラー標数 $\chi(M)$ は 0 である

この定理は次の定理より §1 と同様に導かれる。

定理4 ([D-S], [W-W]). (G, M) を定理3のように仮定する。このとき G はトーラスで $\omega_*^x : \pi_1(G, e) \to \pi_1(M, x)$ は単射である。

定理4を示すには次の補題が必要である

補題3 ([W-W]). X は閉多様体で, ある

$K(\pi,1)$ 空間 Y への連続写像 $f: X\to Y$ で, ある正整数 k に対して $f^*: H^k(Y;\mathbb{Q})\to H^k(X;\mathbb{Q})$ が 0 でないものをもつとする. このとき, コンパクト連結リー群 G が X に作用して, $(f\circ ev^x)_*:$ $\pi_1(G,e)\to\pi_1(Y,f(x))$ が 0 ならば, $\dim G$ は $\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1)$ 以下である.

証明. $f_*: \pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,f(x))$ は全射と仮定してもよい. そうでなければ $\mathrm{Im}\, f_*$ に対応する Y の被覆 Y' について f は $f': X\to Y'$ に持ち上げられて, $f'^*: H^k(Y';\mathbb{Q})\to H^k(X;\mathbb{Q})$ は 0 でない. Y' は $K(\pi',1)$ 空間である. $\tilde{Y}\xrightarrow{\pi} Y$ を普遍被覆, $\tilde{X}\xrightarrow{p} X$ を f による π の引きもどしとすれば, G の作用は $\tilde{X}$ に持ち上がる. 仮定より $p^{-1}(G(x))\cong G(x)\times\pi_1(Y)$. 故に $\tilde{X}/G\to X/G$ も被覆で $\tilde{X}\to\tilde{X}/G$ は $X\xrightarrow{q} X/G$ をカバーする被覆写像. これより $f\simeq\bar{f}\circ q$ となる $\bar{f}: X/G\to Y$ が存在する. 従って $\dim X/G\geq k$. G の主軌道の次元は $(m-k)$ 以下. 故に $\dim G\leqq\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1)$ ∎

定理4の証明: G が半単純ならば, $\pi_1(G)$ は有限群, aspherical 多様体の基本群は単位元以外に有限位数の元をもたないから 補題の条件が成立. これより前半が示される. G をトーラスとし, $\pi_1(G,e)\to\pi_1(M,x)$ が単射でないとすると $ev^x_*(\gamma)=1$ となる γ の代表元

$h: S^1 \to G$ で準同型となる様にとり S^1 作用を考えれば補題の条件がなりたつ. これより S^1 が自明的に作用する 故に矛盾 ■

位相多様体 M に作用し得るコンパクト連結リー群の次元の最大値を $S_t(M)$ とかき(連続的)対称度という. 可微分多様体と可微分作用に対して同様に(可微分的)対称度 $S_d(M)$ が定義される

次の定理が示される

定理5 ([D-S], [W-W]) (1) M_1, M_2 を aspherical とすれば $S_t(M_1 \# M_2) = 0$

(2) M_1 を m 次元 hyperaspherical 多様体, M_2 を m 次元多様体で $\mathbb{Z}$-ホモロジー球面でないとする. このとき $m \geq 3$ ならば $S_t(M_1 \# M_2) = 0$.

略証: (2)だけ考える. S^1 が $M_1 \# M_2$ に作用すると仮定する. $M_1 \# M_2$ は hyperaspherical, $\pi_1(M_2) \neq 1$ ならば $\pi_1(M_1 \# M_2)$ は自明な中心をもつ. $\pi_1(M_2) = 1$ のとき. $\mathrm{Im}\, ev_*^x$ に対応する $M_1 \# M_2$ の被覆 $\widetilde{M_1 \# M_2}$ を考えれば [C-R]$_4$ により $\widetilde{M_1 \# M_2} \simeq S^1 \times B$. [B]の議論により $\widetilde{M_1 \# M_2} = M_2 \# L$. $M_2 \not\simeq S^m$ より $S^1 \times B \simeq M_2 \# L$ とはならない ■

(2)に関連する結果として次が示されている

定理6 ([A-B]) $\Sigma^m \in \Theta_m$ が 0 でないとき

$Sd(T^m \# \Sigma^m)=0$ ∎

最後に hyperaspherical 多様体への有限群の作用に関し次の定理の略証を与える

<u>定理7 ([D-S])</u>. M を hyperaspherical 多様体, G を M に作用する有限群とすれば, $\pi_1(M)$ の中心が自明のとき $\psi : G \to Out(\pi_1(M))$ は単射である.

略証: ψ が単射でないとする. $G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p: 素数) としてもよい. 普遍被覆 $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ を考える. $M^G \neq \phi$ のときは, $\mathcal{L}(G,M)=\{h: \tilde{M}\to\tilde{M}$ 位相同型で $\pi h(x)=g\pi(x); g\in G\}$ とおくと $\tilde{M}/\mathcal{L}(G,M) \cong M/G$ となる. 仮定より $\pi_1(M/G)\cong \pi_1(M)/H$ (H は有限位数の元より生成されたもの) となる. $f: M\to N$ を写像度1の写像とすれば $\exists h: M/G\to N$, $f\simeq h\circ q$ ($q: M\to M/G$) 故に $q^*: H^m(M/G:\mathbb{Z})\to H^m(M:\mathbb{Z})$ は全射 ($m=\dim M$)

$M^G=\phi$ のときは $q: M\to M/G$ は位数 p の被覆. 仮定より $\pi_1(M/G)\cong\pi_1(M)\times G$. これより $\exists h: M/G\to N$, $f\simeq h\circ q$. 故に $q^*: H^m(M/G:\mathbb{Z})\to H^m(M:\mathbb{Z})$ が全射. いずれの場合も次の補題に矛盾.

<u>補題4 ([D-S])</u> $G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p: 素数) が向き付け可能な m 次元多様体 M に作用すれば $q^*: H^m(M/G:\mathbb{Z})\to H^m(M:\mathbb{Z})$ は全射ではない.

略証: $F=M^G$ とおくと $q_1: M-F\to M/G-F$ は有限被覆. G が向きを保存すれば $\dim F\le m-2$

$$\begin{tikzcd} H^m(M/G,F) \arrow[r, "j_0^*"'] \arrow[d, "q_0^*"'] & H^m(M/G) \arrow[d, "q^*"] \\ H^m(M,F) \arrow[r, "j^*"] & H^m(M) \end{tikzcd}$$

左図において j_0^*, j^* は同型写像. q_0^* は全射でないから q^* もそう.

G が向きを保存しなければ $p=2$, このとき $\dim F\le m-1$. $M-F$, $M/G-F$ の連結成分の個数は有限. 従って j_0^*, j^* は全射で $H^m(M/G,F)$ は $k^*: H^m(M/G, \overline{M/G-D})\to H^m(M/G,F)$ (D は $M/G-F$ の中の m 次元円板) の像で生成される. 従って $q^* j_0^* k^*$ がすべての k^* について 2 でわりきれる像をもつことが示されればよい. これは次の図式よりでる.

$$\begin{tikzcd} H^m(D,\partial D) \arrow[d, "q_3^*"] & H^m(M/G, \overline{M/G-D}) \arrow[l, "e^*"'] \arrow[r, "k^*"'] \arrow[d, "q_2^*"] & H^m(M/G,F) \arrow[d, "q_0^*"] \\ H^m(D_1\cup D_2, \partial) & H^m(M, M-D_1\cup D_2) \arrow[l, "e_0^*"] \arrow[r, "l^*"'] & H^m(M,F) \end{tikzcd}$$

ここで D_1, D_2 は $M-F$ における m 次元円板で q により D に移るものとする ■

§1 の最後に述べた aspherical 多様体 M と単連結 M_0 の連結和 $M\# M_0$ は定理7の条件をみたす.

§3. 関連する問題

n次元トーラス T^n の中への写像度1の連続写像をもつ閉かつ向きづけ可能な多様体 M を特に hypertoral と呼ぶ。この多様体に作用するコンパクト連結リー群はトーラスしかないが その作用は次の定理により自由である

定理（[S]） hypertoral 多様体 M に S^1 が作用すれば，M は $S^1\times(M/S^1)$ と同変位相同型である ■

この結果は可微分作用についても知られた（[A-B]）.

これと類似な結果として次の定理も示すことができる

定理（[W]）. M は $2n$ 次元単連結閉多様体で $S^2\times\cdots\times S^2$（$n$個）の中への写像度1の写像をもつものとする このとき M に作用し得る単純コンパクトリー群は $SO(3)$ 又は $SU(2)$ に限る ■

これより次の定理も示される

定理（[W]） M_0 を単連結 $2n$ 次元多様体で Z-ホモロジー球面でないとする．このとき $(S^2\times\cdots\times S^2)\# M_0$ は単純コンパクトリー群の作用をもたない ■

これまでの結果より連結和上のコンパクトリー群の作用を一般的に調べることは興味ある問題である．

さらに[H]で述べられている単連結多様体でどんな有限群の作用ももたない例を作ることは興味あることであるがまだ見つかっていない様である

文献

[B] Bloomberg, E. M., Manifolds with no periodic homeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 202 (1975) 67–78

[A-B] Assadi, A. and Burghelea, D., Examples of asymmetric manifolds, Math. Ann. 215 (1981) 423–430

[F-M] Freedman, M. and Meeks, W., Une obstruction elementaire á l'existence d'une action continue de groupe dans une varietes, C. R. Acad. Sci. Paris, 286 (1978) 191–198

[B-S] Burghelea, D. and Schultz, R., On the semi-simple degree of symmetry, Bull. Soc. Math. France 103 (1975) 431–440

[C-R]$_1$ Conner, P. and Raymond, F., Actions of compact Lie groups on aspherical manifolds, Topology of Manifolds (Proc. Univ. of Georgia Conf. 1969) 227–264

[C-R]$_2$ ——, Manifolds with few periodic homeomorphisms, Proc. Second Conf. on compact Transf. Gps (Univ. of Mass. Amherst 1971) LNM. vol 299, 1–75 Springer

[C-R]$_3$ ——, Injective actions of toral groups, Topology 10 (1971) 283–296

[C-R]$_4$ ——, Deforming homotopy equivalences to homeomorphism in aspherical manifolds, Bull. Amer. Math Soc. 83 (1977) 36–85

[C-R-W] —— and Weinberger, P., manifolds with no periodic homeomorphisms, Proc. Second Conf. on compact Transf. Gps. LNM. vol 299, 81–108.

[C-M] Conner, P. and Montgomery, D., Transformation groups on a $K(\pi,1)$ I, Michigan Math. J. 6 (1956) 405–412

[C] Conner, P., —— II, ibid 413–417

[D-S] Donnelly, H. and Schultz, R., Compact group actions and maps into aspherical manifolds, preprint

[F] Farrell, F., The obstruction to fibering a manifold over a circle, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971) 315–346

[H] 服部晶夫，コンパクト変換群に関するいくつかの話題，対称性を中心にして，28回トポロジーシンポジウム

講演集 126-154, 1980

[I-Y] Inoue, H. and Yano, K., The Gromov invariant of negatively curved manifolds.

[M-S] Montgomery, D. and Samelson, H., Groups transitive on the n-dim. torus, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1943) 455-456

[S] Schultz, R., Group actions on hypertoral manifolds I, Topology Symposium Siegen 1979, LNM. vol 788, 364-377

[S-Y] Schoen, R. and Yau, S. T., Compact group actions and the topology of manifolds with negative curvature, Topology 18 (1979) 361-380

[Y] Yau, S. T., Remarks on the group of isometries of a Riemannian manifold, Topology 16 (1977) 239-247

[Ya] Yano, K., Gromov invariant as an obstruction for S^1-actions

[W-W] Washiyama, R. and Watabe, T., On the degree of symmetry of a certain manifold

[W] Watabe, T., Semi-simple degree of symmetry and maps of degree one into a product of 2-spheres,

Knots, links and Low dimensional manifolds.

……Dehn's construction と link calculus の見地から……

津田塾大学　円山憲子

低次元多様体を構成するには、いくつかの方法がある。特に3次元球面 S^3 内の knots や links から、3.4次元の多様体を構成する手法が、Dehn's construction や handle attaching と呼ばれるものである。

本稿は、この見地から、knot(link) theory と低次元多様体論の相互関係の一端を紹介することを目的とする。

本稿を書くに当たり、特に Gordon [14], Mandelbaum [21], Suzuki et al [31] を参照した。

§1. 準備.

Smooth 又は PL category で考え, S^3 にはひとつ向きを決めておく。

(1.1) n 成分の link $L=\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset S^3$ に対し,

$$X(L)=S^3-\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}\, N(K_i),$$

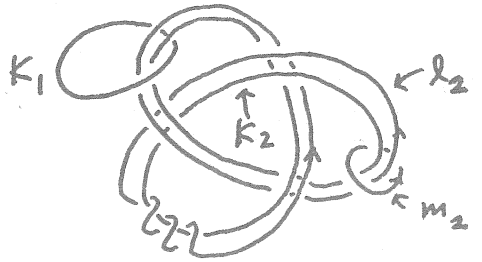
$N(K_i)\cong S^1\times D^2$, $\partial N(K_i)\cong S^1\times S^1$ $i=1,\cdots,n$,

を L の <u>exterior</u> と呼ぶ。

$$\partial X(L)=\bigsqcup_{i=1}^{n} \partial N(K_i).$$

L の各成分に勝手な向きを与えた時, 次のようにして定まる有向単純閉曲線 l_i, m_i を K_i の <u>longitude</u>, <u>meridian</u> と呼ぶ:

l_i は $S^3-\mathrm{int}\,N(K_i)$ で null homologous で $N(K_i)$ 内で K_i と homologous, m_i は $N(K_i)$ で null homotopic で $\partial N(K_i)$ 上で l_i との交叉数が $+1$ である。これらは isotopy に関し一意に定まる。 $\lambda_i=[l_i]$, $\mu_i=[m_i]\in H_1(\partial N(K_i))$ とおくことにする。



.

(1.2) Dehn's construction.

link $L=\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ に対し，n 個の $r_i = p_i/q_i$;
$r_i \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ $(\infty = \frac{\pm 1}{0})$，$p_i, q_i \in \mathbb{Z}$，$(p_i, q_i)=1$
が与えられた時，

$$M(L : r_1, \cdots, r_n) = X(L) \cup_{\cup f_i} \bigcup_{i=1}^{n} S^1 \times D^2,$$

ただし，$f_i : S^1 \times \partial D^2 \to \partial N(K_i) \subset \partial X(L)$ は torus の
同相写像で，$[f_i(\{*\} \times \partial D^2)] = p_i \mu_i + q_i \lambda_i \in$
$H_1(\partial N(K_i))$，$* \in S^1$，
と置いて得られるものを，<u>link L に沿って S^3 を
type $(r_1, \cdots, r_n)$ の Dehn surgery を施して
得られた閉有向3-次元多様体</u>という。

$M(L : r_1, \cdots, r_n)$ は L の向きによらず，L と
$(r_1, \cdots, r_n)$ のみによって一意に定まる（[25]）.
$\vec{r} = (r_1, \cdots, r_n)$ と表わすこともある。

この構成は1910年Dehn [7] によって与えられたもので，Dehn's construction と呼ばれている。

(1.3) 例.

(1) unknot (= trivial knot) を O で表わす。

$M(O : p/q) = L(p, q)$ (レンズ空間).

(2) どんな knot K に対しても，$M(K : \infty) \cong S^3$.

K にそった type ∞ の Dehn surgery を trivial surgery という。

(1.4) Framed links. ([F7], [28])

link $L = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ と n 個の整数の組 $(p_1, \cdots, p_n)$ のことを，<u>framed link</u> と呼ぶ。

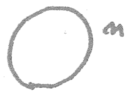
link L に沿った type $(p_1, \cdots, p_n)$ の Dehn surgery は次の意味で4次元の handle attaching に関連している： $S^3 = \partial B^4$ とみなす。 1.2 の同相写像 $f_i : S^1 \times \partial D^2 \to \partial N(K_i)$ は，$q_i = 1$ の時，同相写像 $F_i : S^1 \times D^2 \to N(K_i)$ に拡張する。 F_i を 2-handle $H_i^2 \cong D^2 \times D^2$ の

接着写像として，B^4 に n 個の 2-handles を接着して，
有向4次元多様体，

$$W_L^4 = B^4 \cup_{\cup F_i} \bigcup_{i=1}^{n} H_i^2$$

を作ることができる。この 2-handle attaching の
境界への影響は，S^3 を Dehn surgery することに
他ならないから，$\partial W_L = M(L : p_1, \cdots, p_n)$ である。
W_L を framed link L に沿って framings $(p_1, \cdots, p_n)$ を使って B^4 に 2-handles を接着して得られた4次元多様体と呼び，framed link に対しては L と W_L を同一視して考えることがある。

(1.5) 例

(1) L: 

に対し，$W_L = S^2 \tilde{\times} D^2 - B^4$.

$\partial W_L = L(n, 1)$，$S^2 \tilde{\times} D^2$ は Euler 数 n の S^2 上の D^2-bundle. 特に $n = \pm 1$ の時，
$W_L = \pm CP^2 - B^4$，$-CP^2$ は CP^2 の向きを逆にしたもの。

(2) L 

の時，$W_L = S^2 \times S^2 - B^4$.

$\partial W_L = S^3$.

§2. Framed links と低次元多様体.

(2.1) §1で定義したDehn構成でどれだけの閉有向3-次元多様体を作ることができるのだろうか？これについては，1960年始めに Wallace [33], Lickorish [18] によって次のことが示された。

<u>定理 2.1.</u> (Wallace-Lickorish)
任意の閉有向3-次元多様体 M^3 に対し，framed link $(L;\nu)$ が存在し，
$M \cong M(L;\nu)$.

Wallaceの証明は 3-次元有向同境群 $\Omega_3=0$ ([26]) と handle 体の手法を用いてなされ，4-次元的な観点の証明であった。Lickorishのそれは MがHeegaard分解を持つことと，閉曲面の向きを保つ同相写像がいつでもDehn twistの積で書けるということを使っているので，2-次元的見地の証明であった。またLickorishは [18] で $\Omega_3=0$ を示した。

(2.2) では，3-次元多様体の同相は，framed links の言葉でいえば，どのように言えるのか？

これに答えたのが Kirby([17]) である。

<u>定理 2.2.</u> (Kirby)

2つの framed links $(L_1; k_1)$, $(L_2; k_2)$ に対し

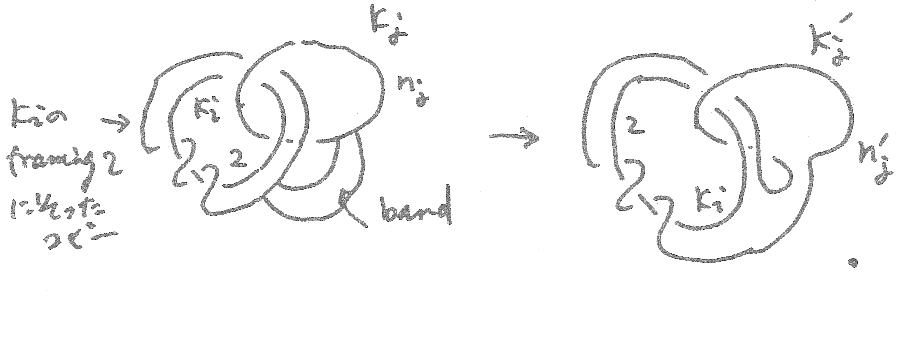
$M(L_1; k_1) \cong M(L_2; k_2)$

$\Longleftrightarrow$. L_2 は L_1 から次の2つの型の操作を有限回行って得られる。

O_1 : $L \rightleftarrows L \cup \bigcirc_{\pm 1}$ (L に S^3 内の S^2 で分離されるような (unknot, ±1) を加えたり、除いたりする)

O_2 : L の2つの成分 K_i, K_j に対し. K_i の framing にそったコピーを K_j に勝手な band で K_j に結んで, K_j' とする.

$L \to L' = (L - K_j) \cup K_j'$.



framed links に対して行なう O_1. O_2 による操作を

calculus と呼ぶ。 O_1, O_2 のことを多様体の言葉に直せば, O_1 は $\pm CP^2$ を W_L に connected sum することであり; $O_1 : W_L \rightleftarrows W_L \# \pm CP^2$, よって

$$M(L;\nu) = \partial W_L \cong \partial(W_L \# CP^2) \cong M(L \cup O ; \nu, \pm 1)$$

となり, 3次元多様体の方は変わらない。 O_2 は K_j の表わす 2-handle が K_i の表わす 2-handle の上をすべったことで, W_L の handle 体分解をとり直しただけである。従って $W_L \cong W_{L'}$, $M(L,\nu) \cong M(L',\nu')$ である。 これらのことから, calculus で framed links が変わる時には, framed links にそって Dehn surgery して得られる3次元多様体は変わらない.同相であることは明らかである。 しかし逆は, 4次元 Cerf 理論という深い結果を用いて示さねばならない。
(定理2.2に関連した重要な結果として [8] [28] を参照されたい。)

(2.3) Kirby [17] は, 歴史的に3次元多様体の研究は, 3次元多様体にうめ込まれた曲面からの情報を用いてなされて来たが, framed links の立場は, 3次元多様体をそれを境界にするような, framed links で

表わされる4次元多様体の情報をもとに研究しようとするものであると述べている。この意味で，3次元多様体の同境問題について，framed linksは有効に用いられたように思われる。

例えば，Milnorの定理[24]として知られる，

<u>定理2.3.</u>　すべての閉有向，almost framed 3次元多様体はcompact framed 4次元多様体の境界となる。

という定理は，Milnorによって Thom構成を含むホモトピー理論的な証明が付けられたが，定理にあらわれる4次元多様体のhandle体としての構造については，知られていなかった。この定理をKaplan[16]は，定理2.1にもとづいて，与えられた3次元多様体を境界にするようなW_L^4をあらわすframed link Lの，Mのalmost framingを拡張する障害を意味する成分をcalculusによってとり除いて，主張のframed 4次元多様体W_L^4を得ることができるというように，handle体分解に即した証明を与えた。

また，homology cobordantによる3次元多様体の分類問題，特にhomology 3球面のhomology

同境群 $\mathcal{H}^3$ で 0，すなわち S^3 と homology 同境である homology 3球面を発見することに対して framed links が用いられている。([2]，この問題に関して[23]が詳しい)。S^4 上の free exiotic involutions の発見([1],[8])や complex surfaces 以外の $b_2(M)=22$，$\sigma(M)=16$ を持つ単連結 spin 4次元多様体の例の提出([3])なども4次元多様体の問題に対する framed links の成果と思われる。

(2.4) 今まで登場した4次元多様体はすべて境界を持ったものであったが，framed links は閉4次元多様体についても，同相を反映するような calculus を持つ。閉有向4次元多様体 W^4 は，$W^4=H^0\cup\lambda H^1\cup\mu H^2\cup\gamma H^3\cup H^4$ なる handle 分解を持つことはよく知られたことである。Montesinos[25] は，このような W^4 は 2 handles まで，$H^0\cup\lambda H^1\cup\mu H^2$ で完全に決まる，i.e. $\partial(H^0\cup\lambda H^1\cup\mu H^2)=\#_{\gamma} S^1\times S^2$ と $\partial(H^0\cup\lambda H^1)=\#_{\lambda} S^1\times S^2$ の 2-handles からなる同境 C^4 で決まることを述べ，組 (W, C) を W の Heegaard 分解と呼んだ。この分解は少し広げた意味の framed links で表示できる。Kirby の O_1 は4次元多様体を変えてしまうから，その代わりに，O_1' : 1(2-3) handles の

相殺対の加減を意味する操作と先のO_2を用いれば、2つのframed linksが互いにうつれる時、またその時に限り対応する4次元多様体が同相となる[25]。
[25]と同様の考察が[6]にあり、向きづけ可能なものも扱っている。3次元の場合、ひとつHeegaard分解を与えると閉3次元多様体が決まるが、4次元の場合同じ名前で呼びつつも、ひとつのHeegaard図式が閉4次元多様体であるかどうか決定されていない。4次元多様体の難しさを反映したものであるが、この方面の研究が待たれている。

§3. knots と 3次元多様体.

この節では、Dehn's constructionを経由してのknotsと閉有向3次元多様体の対応について考える。特に、Thurston [32] 等により著しい3次元多様体論の発展により、knot theoryがどのような発展を促されるかということをGordon [15]を中心に紹介する。

(3.1) 問題と予想.

はじめに, knot K に沿って type $r=\frac{p}{q}$ の Dehn surgery を施して得られる3次元多様体 $M(K:r)$ について,
$H_1(M(K:r)) \cong \mathbb{Z}_{|p|}$ (cyclic) となることを注意しておく。

<u>問題1</u>. すべての閉有向3次元多様体 M^3, $H_1(M)$ は cyclic. に対して, ある knot とある $r=p/q \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ が存在して, $M \cong M(K:r)$ となるか?

<u>問題2</u>. $r=p/q$ を固定する。$M(K_1:r) \cong M(K_2:r)$ ならば, K_1 と K_2 は同じ knot か?

<u>予想P</u>. knot K に対して, $M(K:\frac{1}{q})$ $(q\neq 0)$ が単連結でない時, <u>K は性質 P を持つ</u>という. 性質 P を持たない knot としては, $K=O$ (trivial) のみが知られている.

<u>予想 P : すべての knot ($\neq O$) は性質 P を持つ.</u>

この予想は $K\neq O$, $q\neq 0$ の時, $M(K:\frac{1}{q})$ は決して homotopy 3球面にならないことを言っている。

問題1は§2の定理2.1と同様のことが成り立つか ということを意味している。問題2は, 異なる knot ではあるが, 同相な3次元多様体を与える例 ([10], [19], [57]) が知られているのではあるが, 決定的な解決は得られていない。

(3.2) ここでは 予想Pがある特殊なknotに関する予想Pに還元されるというGordonの結果[15]をみる。

nontrivial knot全体の集合を考え、次のようにして半順序を入れることができる[29]：knot Kのtubular近傍 $N(K) \cong S^1 \times D^2$ の内部にnontriviallyに入っているknotをJ(K)とする時、KをJ(K)のcompanion、J(K)をKの<u>satellite</u>と呼び、$K < J(K)$ と表わす。また、J(K)のKに対する<u>winding number $w_i(J(K);K)=w_i$</u>を、$\mathrm{Im}[H_1(J(K)) \to H_1(N(K)) \cong \mathbb{Z}] = w_i\mathbb{Z}$, $w_i \geq 0$ で定義する。

この半順序でminimalなknotを<u>simple knot</u>という。

Jをtrivial knot Oのtublar nbd $S^1 \times D^2$ の内部に入っているnontrivial (B^3で包まれない) knotとし、$f: S^1 \times D^2 \to N(K)$ で Oのlongitudeを Kのlongitudeに写す向きを保つ同相写像とすれば、Kのsatellite $J(K) = f(J)$ とも考えることができる。

性質Pについて、群論的処理(π_1の計算)により、次の結果が知られていた：

<u>定理3.1.</u> (Bing-Martin[4], Simon[30])

Jが性質Pを持てば、J(K)も性質Pを持つ。

また性質Pを持つ各例が徐々に報告されたが、（一覧表は[31]にある）統合的ではなかった。

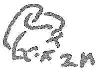
所が、non-trivial knot 全体の集合に入る半順序に則して、性質P予想をより簡単なものに置換できるのではないかと主張したのが、Litherlandである。

<u>定理3.2</u> (Litherland [20])

$K < J(K)$ で $J(K)$ の winding number が0でないとする。もし K が性質Pを持てば、$J(K)$ も持つ。

従って、K : simple knot，$K < J^{(1)}(K) < \cdots < J^{(n)}(K)$（$J^{(i)}(K)$ は $J^{(i-1)}(K)$ の satellite）の列が、すべて winding number が0でないようなものならば、性質Pは simple knot の場合に置換できることが言える。ここでどんな knot $K (\neq 0)$ に対しても $K_1 < K_2 < \cdots < K_n = K$ となるような maximal sequence があることを注意しておく（[29]）。

ここらで、simple knot とは一体どんな knot であるかについてのべる。Thurston（[29]）の uniformization 定理により、K : simple $\Leftrightarrow$ K は torus knot か又は hyperbolic knot（$S^3 - K$ が complete hyperbolic 構造

を持つ。例えば  2n交叉 などは hyperbolic knot である）が知られている。 simple knot K の exterior $X(K)$ ($\partial X(K) \cong S^1 \times S^1$) は、$X(K)$ の内部のどんな incompressible torus も $\partial X(K)$ に isotopic という性質を持っている。このような性質を atoroidal と呼ぶ。 逆に $X(K)$ が atoroidal ならば、K は simple knot であることが言える。

Gordon [15] は、与えられた knot の $X(K)$ 内部の互いに交わらず、互いに isotopic でなく、$\partial X(K)$ とも isotopic でない incompressible tori の集合 $\mathcal{T}$ を考えた。$|\mathcal{T}|$ を $\mathcal{T}$ の成分の個数とする。 K に対し、 $t(K) = \max\{|\mathcal{T}|\}$ は、Haken の有限性定理により([11]) well defined である。$|\mathcal{T}| = t(K)$ となるような最大の $\mathcal{T}$ を選べば、$X(K) - \mathrm{int}\, N(\mathcal{T})$ の各成分の内部には、incompressible torus は含まれないので、各成分は atoroidal なものとなる。これを $X(K)$ を atoroidal 分解するという。すると、

K : simple knot $\Leftrightarrow$ $X(K)$: atoroidal $\Leftrightarrow$ $t(K) = 0$;

$K \neq 0$, $K < J(K)$ $\Rightarrow$ $t(K) < t(J(K))$ が示せる。

$t(-)$ は non trivial knot 全体の集合に入った半順序を保つ量である。

以上の考察により次の結果を得る。

定理3.3 (Gordon)

性質P予想は hyperbolic knot の場合に還元される。

証明は，torus knot は property P を持つ([30])ことと，winding number $\neq 0$ の時は定理3.2より simple knot に還元できることに注意して，$t(K)$ に関する帰納法を用いる。knot K に対して，$t(K) > t(K')$ なる K' については OK とする。$K = J(K'')$ ならば $K'' < K$ だが，$K'' < K''' < K$ となるような K''' が存在しない場合を考えればよい。winding number $= 0$ の時，Gordon は ある J から決まる nontrivial knot $J_s(0)$ で，$t(J_s(0)) < t(K)$ を満たすものが存在し，$M(J_s(0):\frac{1}{q}) \cong M(K:\frac{1}{q})$ $(q \neq 0)$ ことを示して，$J_s(0)$ については単連結にならないことから帰納法を完了する。

かくして，Thurston 等の3次元多様体に関する結果により，性質P予想は統合されたように思われる。

(3.3). 最後に問題1について述べる。問題1に関しては，殆ど何も知られておらず，knot による Dehn's construction は link によるそれよりも

かなり難しいもののようである。

そこで $H_1(M)$：cyclicとなるような閉有向3次元多様体の例として，S^3内の2つのknots K_1, K_2 のexterior $X(K_1)$，$X(K_2)$を境界の向き逆転のhomeoで貼り合せて得られる3次元多様体，

$$M(K_1, K_2 : A) = X(K_1) \cup_h X(K_2),$$

$h : \partial X(K_1) \xrightarrow{\cong} \partial X(K_2)$ は 2×2 整行列 A，$\det A = -1$ に問題1を制限してみる（構成は[13]で与えられた）。

筆者は Brakes [5] のひとつの結果を含む次の結果を得た([22])： unknot J を nontrivially に $S^1 \times D^2$ 内に入れる。$f_s : S^1 \times D^2 \to S^1 \times D^2 = N(0)$ を longitude を longitude + s meridian に写すような同相写像とする。$K_1 = f_s(J)$，K_1 の winding 数は n とする。このような K_1 に対し，

<u>定理3.4</u> $A = \begin{pmatrix} -sn^2 & 1 \\ 1-ksn^2 & k \end{pmatrix}$，${}^\forall k \in \mathbb{Z}$ と すべての knot K_2 に対し，

$$M(K_1, K_2 : A) \cong M(K^*; kn^2 - \tfrac{1}{s}),$$

K^* は K_2 の satellite。

さらに J を含む solid torus のひとつの meridian を J' とする．

定理 3.4 の系として、

<u>系3.5.</u> $M(f_s(J) : sn^2 - \frac{1}{k}) \cong M(f_k(J') : kn^2 - \frac{1}{s})$

を得る。 また系として、

<u>系3.6.</u> 勝手な knot K と $^\forall k \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$M(K : k \pm \frac{1}{4}) \cong M(J(2k \pm 1, 2 : K) : 4k \pm 1),$$

ここに $J(2k \pm 1, 2 : K)$ は K の $(2k \pm 1, 2)$-cable knot である。

しかし対象を $M(K_1, K_2 : A)$ に限ってみても、依然決定的なことは言えていない。 そこで次の問題を提出して、この稿を終えることにする。

問題 1′ $M(K_1, K_2 : A) \cong M(K : r)$ となる場合を決定することができるだろうか？

REFERENCES

[1] Akubult, S. and Kirby, R., An exotic involution of S^4, Topology 18 (1979), 1-15.

[2] ________________________, Mazur manifolds, Michigan Math. J. 26 (1979), 259-284.

[3] ________________________, A simply connected 4-manifolds with $b_2 = 22$ and $\sigma = 16$, preprint.

[4] Bing, R.H. and Martin, J.M., Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971), 217-331.

[5] Brakes, W.R., Manifolds with multiple knot-surgery descriptions, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), 443-448.

[6] Cé sar de Sá, E., A link calculus for 4-manifolds, Lecture Notes in Math. 722, Springer-Verlag (1977), 16-36.

[7] Dehn, M., Über die Topologie des dredimensionalen Raumes, Math. Ann. 69 (1910), 137-168.

[8] Fenn, R. and Rouke, C., On Kirby's calculus of links, Topology 18 (1979), 1-5.

[9] Fintushel, R. and Stern, R.J., An exotic free involution on S^4, preprint.

[10] Gonzãlez-Acunã, F., Dehn's construction on knots, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 15 (1970), 58-79.

[11] Hempel, J., 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton University Press, Princeton (1976).

[12] Jaco, W.H. and Shalen, P.B., Seifert fibred spaces in 3-manifolds, Memoirs Amer. Math. Soc., 21 (1979), number 220.

[13] Gordon, C. McA., Knots, homology spheres, and contractible 4-manifolds, Topology 14 (1975), 151-172.

[14] Gordon, C. McA., Some aspects of classical knot theory, Lecture Notes in Math. 685, Springer-Verlag, 1977.

[15] ________________, Dehn Surgery and satellite knots, preprint.

[16] Kaplan, S.J., Constructing framed 4-manifolds with given almost framed boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., 254 (1979), 237-263.

[17] Kirby, R.C., A calculus for framed links in S^3, Inventiones Math. 45 (1978), 35-56.

[18] Lickorish, W.B.A., A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, Ann. of Math. 76 (1962), 531-538.

[19] ________________, Surgery on knots, Proc. Amer. Math. Soc. 60 (1976), 296-298.

[20] Litherland, R.A., Surgery on knots in solid tori, Proc. London Math. Soc. 39 (1979), 130-146.

[21] Mandelbaum, R., Four dimensional topology, Bull. (New series) Amer. Math. Soc. 2 (1980), 1-159.

[22] Maruyama, N., Knot surgery descriptions of some closed orientable 3-manifolds, preprint.

[23] Matsumoto, Y., On the bounding genus of homology 3-spheres, prepint.

[24] Milnor, J., Differentiable manifolds which are homotopy spheres, mimeographed notes, Princeton, 1959.

[25] Montesinos, J.M., Heegard diagrams for closed 4-manifolds, "Geometric Topology", Academic Press, (1979), 219-237.

[26] Rohlin, V.A., A 3-dimensional manifold is the boundary of a 4-dimensional one, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 84 (1952), 221-224.

[27] ________________, New examples of four-dimensional manifolds, Doklady 162 (1965), 660-663.

[28] Rolfsen, D., Knots and Links, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.

[29] Schubert, H., Knoten und Vollringe, Acta. Math. 90 (1953), 131-286.

[30] Simon, J., Some classes of knots with property P, Topology of manifolds, Markham Press, Chicago, 1970.

[31] Suzuki, S. et al, 3-次元多様体: Poincaré予想を中心として(報告), 数理科学講究録 346.

[32] Thurston, W., The geometry and topology of 3-manifolds, preprints, Princeton University.

[33] Wallece, A.H., Modifications and cobounding manifolds, Can. J. Math. 12 (1960), 503-528.

Finite Dimensional H-Spaces

J.R.Hubbuck

An H-space here means a finite dimensional H-space which is a triple (X,e,m) with X a connected space of the homotopy type of a finite CW-complex, $e \in X$ is a base point
$m : X \times X \to X$ is continuous
and for all $x \in X$, $m(e,x) = x = m(x,e)$.

The concept arose in generalizing a theorem of Hopf. "Let X be an H-space. Then $H^*(X,Q)$ is an exterior algebra on r odd dimensional generators. The number r is the rank of X. If m is homotopy associative, the generators can be chosen to be primitive."

Examples. (a) X a connected, compact Lie group.
(b) RP^7 and S^7, arising from the multiplication of Cayley numbers
(c) Vast numbers of examples discovered since 1968.

Much of the motivation for the study of H-spaces arises from the fact that some of their homotopy theory is similar to that of Lie groups.

Examples. (a) The kernel of the Hurewicz homomorphism $h:\pi_i(X) \to H_i(X,Z)$ is the torsion in $\pi_i(X)$, (Lin and ?).

(b) $\pi_2(X) = 0$ (Browder) and $\pi_3(X)$ is free abelian, (Zabrodsky, Hubbuck and Kane).

(c) If X is simply connected $H_*(\Omega X,Z)$ has no odd torsion, (Lin).

(d) If X is homotopy abelian ($mT \simeq T$ where $T:X\times X \to X\times X$ is $T(x,y) = (y,x)$), then $X \simeq S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$, (Hubbuck).

<u>The New examples.</u> These are usually introduced either by localization theory in homotopy (Sullivan and others) or the here equivalent theory of p-equivalent and p-universal spaces (Mimura, Toda and others). All I need is that for X an H-space and for each prime p, there exists a homotopy type X_p and a map $r_p:X \to X_p$ which localizes homotopy and homology groups, $\pi_i(X_p) = \pi_i(X)\otimes Z_{(p)}$, and $H_i(X_p,Z) = H_i(X,Z)\otimes Z_{(p)}$, where $Z_{(p)}$ is the ring of integers localized at the prime p. In general localization can be performed for nilpotent spaces (Hilton, Mislin and Roitberg.)

The genus of X ,$G(X) = \{Y: Y_p \simeq X_p\}$ for all primes p . Zabrodsky and others have shown that if X is an H-space or a loop space then so is each Y and $G(X)$ has the structure of an abelian group. If X is the simply connected Lie group $Sp(2)$,$G(Sp(2))$ contains just two distinct homotopy types $Sp(2)$ and E_5 .

E_5 was the first example by Hilton and Roitberg of a new H-space and as Hilton has pointed out, it has the following interesting properties:

(a) E_5 has the homotopy type of a smooth closed 10-dimensional manifold,

(b) E_5 ,as a loop space , has the homotopy type of a topological group.

But one cannot realize these structures on a space simultaneously for this would imply that E_5 had the homotopy type of a Lie group which is false.At present there appears to be no explanation as to why within the genus of (such) a Lie group the manifold and group structure can be brought together just once.Similar examples form an infinite subset of the new H-spaces.

Other interesting examples have been construct-ed using obstruction theory (Harper).

H-structures on a single space.

You have to be careful what you say because there are several slightly different definitions.

If (X,m) is an H-space, in general there are many k not homotopic to m such that (X,k) is an H-space. The H-structures on X are in one-to-one correspondence with the algebraic loop $[X \wedge X, X]$ (Copeland). If (X,m) is homotopy associative and one can give $H^*(X,Q)$ algebraically a Hopf algebra structure in which the generators cannot be chosen to be primitive, then the number of H-structures on X will be infinite (Arkowicz and Curjel). Explicit computations have been performed giving the precise number of multiplications for H-spaces of small rank. The first were done by James who showed that S^3 has 12 multiplications and exhibited them explicitly.

Another way of approaching this question is to say that two multiplications on X are equivalent if there is a homotopy equivalence $f: X \to X$ such that $fm \simeq k(f \times f)$ and now S^3

has 6 multiplications. The number will be infinite when it was infinite before and there are now only finitely many homotopy associative H-structures (Curjel). There exists spaces like S^7 with no homotopy associative H-structure.

When dealing with higher associativities, it is natural to require that they are preserved by the homotopy equivalence. An interesting result in this direction is that there are infinitely many loop structures on S^3 (Adams and Rector), that is, there are infinitely many spaces X_i with different homotopy types such that $\Omega X_i \simeq S^3$.

This is an area where little seems to be known except for H-spaces of very small rank. One of the earliest questions remains unresolved. If X is an H-space, does there exist a multiplication on X such that $H^*(X,Q)$ is primitively generated?

Mappings of H-spaces

Again there are several definitions. At its $f:(X,m) \longrightarrow (Y,k)$ is an H-map if $fm \simeq k(f \times f)$. The situation when X and Y are spheres was resolved some years ago, (Arkowicz, Curjel and others). For example $f:S^3 \longrightarrow S^3$ with the standard multiplication is an H-map if and only if it has degree N where $N(N-1) \equiv 0 \mod 24$. I believe that some work is being done in Japan in other small ranks, but it appears to be difficult to obtain a general picture of this area.

If one considers loop maps of finite loop spaces, a little more is known, at least on the homological level. If $f:G \to H$ is a loop map of compact connected Lie groups, then there exists a homomorphism of maximal tori, $g:T_G \longrightarrow T_H$ such that for all but a finite number of primes the following diagram is commutative:-

$$\begin{array}{ccc} H^*(BH,F_p) & \xrightarrow{Bf^*} & H^*(BG,F_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(BT_H,F_p) & \xrightarrow{Bg^*} & H^*(BT_G,F_p) \end{array},$$

and provided that one inverts a finite number of primes , there is a converse. This is the Adams-Mahmud theorem.

Certain corollaries of this theorem can be proved by other methods for general finite loop spaces. For example , if $f:X \longrightarrow Y$ is a loop map of finite loop spaces and $f_3: \pi_3(X) \longrightarrow \pi_3(Y)$ is zero with X and Y simply connected , then $Bf^*:H^*(BY,Q) \longrightarrow H^*(BX,Q)$ is zero.

The homology and cohomology of H-spaces.

Much interesting work has been done in this area in recent years , but I will have not time to say anything about it.

The spaces of finite H-spaces.

It is known (Curjel-Douglas , Hubbuck-Nunn) that there are only a finite number of possible homotopy types for the space of an H-space of given rank.

Despite the large number of new examples of H-spaces , two old conjectures or speculations remain unresolved.

Conjecture (a) If X is an H-space, then $H^*(X,Q) \cong H^*(Y,Q)$ with Y an example known prior to 1968. More briefly, $X_0 \simeq Y_0$ with Y classical.

A stronger form of this is

Speculation (b) If X is an H-space, then $X_2 \simeq Y_2$ with Y a classical H-space.

Little progress has been made on (b) in recent years. In particular, 2-torsion in the homology of X is not as well understood as torsion for odd primes. If X has no homology 2-torsion and $H^*(X,Q)$ is primitively generated, then there is a little evidence in support of (b). I was able to show some time ago that when X is simply connected, the rational generators occur in different dimensions and the highest rational generator does not occur in dimension 2^n-1, then (a) is true and the skeleton of X_2 agrees with those of $SU(n)_2$ or $Sp(n)_2$ through a certain dimensional range, excluding a few low rank cases involving S^7.

Significant progress has been made on (a) recently for finite loop spaces by Adams and Wilkerson. The initial idea was suggested by Ewing who had previously done much unpublished work on this case. It is proved that for all sufficiently large primes p,

$$H^*(BX,Z/pZ) \cong \{H^*(CP^\infty \times CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty ,Z/pZ)\}^G$$

as a module over the Steenrod algebra , where there are rank X copies of CP^∞ . The groups which occur are generalized reflection groups. These had been classified earlier by Clark and Ewing , extending results of Todd and Shepherd in the ungraded case. Putting together the information obtained from different primes,one comes tantalizingly close to establishing (a) for finite loops spaces , but it cannot be proved this way. No p-primary infomation about X is used for small primes.

写像空間について

筑波大・数　酒井克郎

（無限次元）多様体となる写像空間を見つけることは，大変興味深い問題である。ここでは，この問題について紹介する。空間はすべて可分距離付け可能な位相空間とし，写像空間はすべてcompact開位相を持つものとする。よってcompact空間上の写像空間はsup-metricにより距離付け可能である。

1. 無限次元多様体

Hilbert cube多様体とはHilbert cube $Q=[-1,1]^{\omega}$をmodelにした多様体，Hilbert多様体とはHilbert空間ℓ_2をmodelにした多様体で，それぞれ単にQ－多様体，ℓ_2－多様体という。また有限個以外の座標が0となる点全体からなるℓ_2の線型部分空間をℓ_2^fと表わし，これをmodelとする多様体をℓ_2^f－多様体という。これらの無限次元多様体については次の安定性定理が知られている。

安定性定理（Anderson-Schori [AS]）：MをQ, l_2または l_2^f をmodelとする多様体とする。このとき

$$M \times (\text{model空間}) \cong M。$$

この定理と次のEdwardsとToruńczykの結果より，これらの多様体は　ANR×(model空間)　として特徴付けられる。

ANR定理（R. Edwards [C_1]；Toruńczyk [T_1]）：
(局所compact ANR)×QはQ－多様体；
(完備ANR)×l_2はl_2－多様体，
(有限次元局所compactの可算和となるANR)×l_2^fはl_2^f－多様体。

またToruńczykによる次の特徴付けがある。

特徴付け定理（Toruńczyk [$T_{5,6}$]）：局所compact ANR，XがQ－多様体となるための必要十分条件は次の性質$(*)_Q$を満たすことである。

$(*)_Q$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f, g : I^n \to X$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists f', g' : I^n \to X$

$$\text{s.t. } d(f(x), f'(x)),\ d(g(x), g'(x)) < \varepsilon \quad (\forall x \in X)$$

$$f'(I^n) \cap g'(I^n) = \phi.$$

完備ANR，Xがl_2-多様体となるための必要十分条件は次の性質$(*)_{l_2}$を満たすことである。

$$(*)_{l_2} \quad \forall f : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n \longrightarrow X \quad \forall \varepsilon : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\exists f' : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n \longrightarrow X$$

$$\text{s.t. } d(f(x), f'(x)) < \varepsilon f(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$\{f'(I^n) \mid n \in \mathbb{N}\} : \text{discrete in } X.$$

無限次元多様体については次の単体分割定理と分類定理が知られている。

単体分割定理（West [W]；Chapman [C_1]）

l_2-多様体＝（局所有限次元単体的複体）× l_2

（l_2^f-多様体についても同様 [T_2]）

Q－多様体＝（局所有限単体的複体）× Q

分類定理（Henderson [He]；Chapman [C_1]）

l_2-多様体の間のhomotopy同値写像は同相写像にhomotopeである。（l_2^f-多様体についても同様）

局所compact多面体の間のproper写像 $f: X \to Y$ が ∞-simple homotopy同値写像となるための必要十分条件は $f \times id: X \times Q \to Y \times Q$ が同相写像にproper homotopeになることである。

2、写像空間

空間 X から空間 Y への連続写像全体のなす空間 $C(X,Y)$ について，次の結果が知られている。

定理 I.（Eells [E]；Geoghegan [G_1]；Toruńczyk [T_4]）
X をnon-trivial flowをもつcompact空間，Y を孤立点を持たない完備ANRとするとき，$C(X,Y)$ は l_2-多様体となる。

また，多面体 X から多面体 Y へのPL写像全体のなす空間 $PL(X,Y)$ についても同様の結果が知られている。

定理 II（Geoghegan [G_2]）: K を有限単体複体で $\dim|K| > 0$，L を局所有限単体的複体で $|L|$ は

孤立点を持たないものとするとき，$PL(|K|,|L|)$ は ℓ_2^f-多様体となる。

無限次元Topologyにおいて大きな問題の1つとして，"Homeomorphism Group Problem" がある。([AK]，[G_4])。Mをcompact n-多様体とし，M上の同相写像全体のなす空間をH(M)と表わす。

問題：H(M)は ℓ_2-多様体となるか？

Anderson [A] は $n=1$ のとき ℓ_2-多様体となることを示した。Geoghegan [G_1] によってH(M)が ℓ_2-factor を持つこと，すなわち $H(M)\times\ell_2\cong H(M)$ が示されている。H(M)は完備距離

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in M}d(f(x),g(x))+\sup_{x\in M}d(f^{-1}(x),g^{-1}(x))$$

を持つ。よってToruńczykのANR定理よりこの問題は次の問題に帰着される。

問題：H(M)はANRか？

これは$n=2$のときLuke-Marson[LM]によって解かれている．

定理 III (Anderson; Luke-Marson)：$n=1,2$について compact n-多様体M上の同相写像の空間H(M)はl_2-多様体である．

また，Mがcompact Q-多様体のとき，FerryとToruńczykによって独立に，H(M)がANRとなることが示された。

定理 IV (Ferry[F], Toruńczyk[T_3])：compact Q-多様体M上の同相写像の空間H(M)はl_2-多様体である．

"Homeomorphism Group Problem" はHaver[H_2]によってn-球B^nについてB^nの境界$\partial B^n = S^{n-1}$上で恒等写像となる同相写像全体のなす空間$H_\partial(B^n)$がARになることを示す問題に帰着されている。さらに$n \neq 4,5$のときは，$H_\partial(B^n)$の任意の開集合がCW-複体でhomotopy dominateされるか？という問題に帰着されることが知ら

れている。([G_4])。

一般に写像空間がANRになるかどうか調べるのは C(X, Y) を除き非常に難しい問題である。有限次元局所可縮空間はANRとなるが，無限次元では一般に成立しない。無限次元に対しても有効なANRの特徴付けが期待されている。Haver [H_1]は有限次元compact集合の可算和となる局所可縮空間がANRとなることを示した。Černavskiĭ [Č]，Edwards-Kirby [EK] によってcompact n-多様体M上の同相写像の空間H(M)が局所可縮になることが示されたことはよく知られているが，MがPL多様体のときPL同相写像全体のなすH(M)の部分空間PLH(M)に対しても同じ証明で局所可縮になることがわかる。Geoghegan [G_2]によりPLH(M)は有限次元compact集合の可算和となることが示されているので，PLH(M)はANRとなる。Keesling-Wilson [KW] はPLH(M)がℓ_2^f-factorを持つこと，すなわち $PLH(M)\times\ell_2^f\cong PLH(M)$ を示し，次の結果を得た。

<u>定理 V</u> (Geoghegan-Haver-Keesling-Wilson)：compact PL多様体M上のPL同相写像の空間PLH(M)

は ℓ_2^f-多様体である。

多様体以外にも1次元連続体Xでその上の同相写像の空間H(X)が ℓ_2-多様体となるものが2，3知られている。([K])。また埋蔵写像の空間E(X,Y)について次の結果がある。

定理 VI (Chapman [C_2])：Mを ℓ_2 またはQをmodelとする多様体とする。compact空間XからMの中への埋蔵写像の空間E(X,M)は ℓ_2-多様体となり $E(X,M)\cong C(X,M)$ である。

有限次元の場合には，Xがnon-trivial flowを持つとき ℓ_2-factorを持つことが知られている([G_1],[K])が，まだ解かれていない。この他にも，Keesling [K]とGeoghegan-Henderson [GH]により ℓ_2-factorを持つ写像空間が沢山存在することがわかっている。これらの写像空間はToruńczykのANR定理より完備なANRになれば ℓ_2-多様体となる。

ℓ_2-factorを持つかどうか知られていなかったが，

compact Q－多様体M上の retraction 全体のなす写像空間 R(M) がANRになることが，Chapman [C_3] によって示されたが，実は R(M) は Toruńczyk の l_2-多様体の特徴付けの条件 $(*)_{l_2}$ を満たすことが Sakai [S] によって示され l_2-多様体となることがわかった。

<u>定理 VII</u> (Chapman－Sakai)：compact Q－多様体M上の retraction の空間 R(M) は l_2-多様体である。

[S] において使った technique は H(M) をはじめ Q－多様体間のいろいろな写像空間が性質 $(*)_{l_2}$ を持つことを調べるのに使える。また compact 空間から l_2-多様体，Q－多様体への埋蔵写像の空間が性質 $(*)_{l_2}$ を持つことにも適用できる。[K], [GH] とあわせると l_2-多様体になりそうな写像空間はさらに増えるが，これらがANRになるかどうか調べるのは非常に難しい。

Q－多様体になる写像空間も Geghegan [G_3] によって与えられている。最近 Colvin によって新たなQ－多様体となる写像空間が見い出された。

参考文献

[A] R.D. Anderson : Spaces of homeomorphisms of finite graphs (unpublished)

[AK] R.D. Anderson & N. Kroonenberg : Open problems infinite-dimensional topology, in : P.C. Baayen (ed.) Topological Structures, Math. Centre Tracts 52 (Math. Centrum, Amsterdam, 1974) 141-175.

[AS] R.D. Anderson & R. Schori : Factors of infinite-dimensional manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967) 200-216.

[Č] A.V. Černavskiĭ : Local contractibility of the group of homeomorphisms of a manifold, Mat. Sbornik 79 (1969) 307-356 ; Math. USSR Sb. 8 (1969) 287-333.

[C_1] T.A. Chapman : Lectures on Hilbert Cube Manifolds, CBMS Regional Conf. Series in Math. 28, (Amer. Math. Soc., Providence, 1976).

[C_2] ———— : Canonical extensions of homeomorphisms, Gen. Top. & Appl. 2 (1972) 227-247.

[C_3] ———— : The space of retractions of a compact Hilbert cube manifold is an ANR, Topology Proc. 2 (1977) 409–430.

[E] J. Eells, Jr. : On the geometry of function spaces, in : Symp. Intern. de Topologia Algebraica (Universidad Nacional Autónoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958) 303–308.

[EK] R.D. Edwards & R.C. Kirby : Deformations of spaces of imbeddings, Ann. Math. 93 (1971) 63–88.

[F] S. Ferry : The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR, Ann. Math. 106 (1977) 101–119.

[G_1] R. Geoghegan : On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions, I, Topology 11 (1972) 159–177.

[G_2] ———— : On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions, II : The piecewise linear case, Proc. London Math. Soc. 27 (1973) 463–483.

[G_3] ———— : Hilbert cube manifolds of maps, Gen. Top. & Appl. 6 (1976) 27–35.

[G_4] ―――――― : Open problems in infinite-dimensional Topology, Topology Proc. 4 (1979) 287–338.

[GH] R. Geoghegan & D. W. Henderson : Stable function spaces, Amer. J. Math. 95 (1973) 461–470.

[H_1] W. E. Haver : Locally contractible space that are absolute neighborhood retracts, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 280–284.

[H_2] ―――――― : A near-selection theorem, Gen. Top. & Appl. 9 (1978) 117–124.

[He] D. W. Henderson : Corrections and extensions of two papers about infinite-dimensional manifolds, Gen. Top. & Appl. 1 (1971) 321–327.

[K] J. Keesling : Using flows to construct Hilbert space factors of function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 161 (1971) 1–24.

[KW] ―――――― & D. C. Wilson : The group of PL-homeomorphisms of a compact PL-manifold is an ℓ_2^f-manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974) 249–256.

[LM] R. Luke & W. K. Marson : The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972) 275-285.

[S] K. Sakai : The space of retractions of a compact Q-manifold is an l_2-manifold, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[T_1] H. Toruńczyk : Absolute retracts as factors of normed linear spaces, Fund. Math. 86 (1974) 53-67.

[T_2] ———— : On cartesian factors and the topological classification of linear metric spaces, Fund. Math. 88 (1975) 71-86.

[T_3] ———— : Homeomorphism groups of compact Hilbert cube manifolds are manifolds, Bull. Acad. Polon. Sci. 25 (1977) 401-408.

[T_4] ———— : Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds, Fund. Math. 101 (1978) 93-110.

[T_5] ———— : On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds, Fund. Math. 106 (1980) 31-40

[T_6] ——————: Characterizing Hilbert space topology, Fund. Math. 111 (1981) 247-262.

[W] J. E. West: Products of complexes and Fréchet spaces which are manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 166 (1972) 317-333.

One-sided Heegaard Splittings and Involutions of Lens Space

関西学院大学 理学部 浅野孝平

3－manifoldにembedされたsurfaceの性質について述べ，それらによって導びかれる3－manifoldに関する結果を解説する。

§1 準備

Mを3－manifold，FをMにproperにembedされたsurfaceとする。

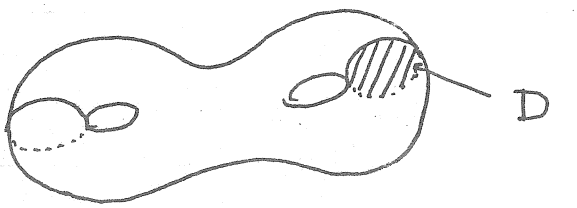
<u>Definition</u>　Fが次の条件のうち1方を満足するとき，<u>compressible</u>であるという。

(1)　Fは2－sphereとhomeomorphicで，Mの中の3－ballの境界である。

(2)　Mの中にdisk Dが存在して，$D \cap F = \partial D$かつ∂DはF上でcontractibleでない。

Fがcompressibleでないとき<u>incompressible</u>であるという。

例1

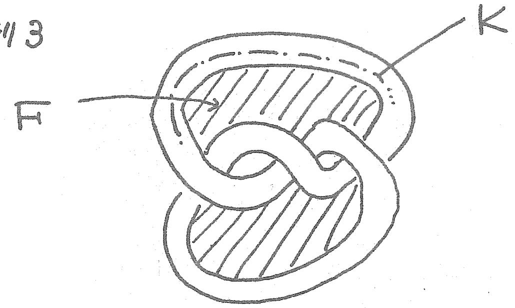


$F \subset S^3$

FはS^3の中で compressible.

例2　3次元 projective space の中の projective plane は incompressible である。

例3



$S^3 - \mathring{N}(K)$ の中で F は incompressible

<u>Definition</u>　F から M への inclusion map により induce された $\pi_1(F)$ から $\pi_1(M)$ への homomorphism が mono. であるとき、F は M の中で <u>injective</u> であるという。

[6], [12]において Dehn の Lemma が，[13]において Loop Theorem が証明されたが，Stallings によってこの2つの定理を結びつけた形の次の定理が証明された。

<u>Theorem 1.</u>　$F \subset \partial M$ とする。N を $\pi_1(F)$ の normal subgroup で $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) - N \neq \emptyset$ ならば，embedding $g: (D, \partial D) \to (M, F)$ で $[g|\partial D] \notin N$ となるものが存在する。ここで $[g|\partial D]$ は $g|\partial D$ の F 上での homotopy class である。

§2. <u>two-sided surface in M</u>

以下 M は orientable であると仮定する。Theorem 1 より，ただちに次の Theorem が導びかれる。

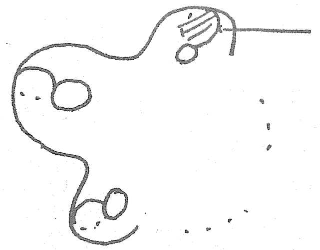
Theorem 2　F は two-sided で S^2 ではないとする。F が incompressible であるための必要十分条件は，F が injective であることである。

M の中の任意の 2-sphere が 3-ball の境界であるとき，M は <u>irreducible</u> であるという。

Fに対して，$F\times[0,1]$のembeddingがMの中に存在して，$F\times\{0\}=F$かつ$\partial(F\times[0,1])-F\times\{0\}\subset\partial M$であるとき，FはMのなかでboundary-parallelであるという。

Mが，incompressibleな，properにembedされたtwo-sided surfaceをふくむとき，Mはsufficiently largeであるという。

例1　solid torusはsufficiently largeである。



例2　F_gをorientable surfaceとすると$F_g\times S^1$はsufficiently largeである。$F_g\times\{*\}$はincompressibleである。但し$*\in S^1$。

例3　KをS^3の中のknotとすると$S^3-\mathring{N}(K)$はsufficiently　largeである。

例14　3次元projective space は sufficiently large でない。

<u>Definition</u> ([21]) M に対して pair の列

$$(M_1, F_1), \cdots, (M_n, F_n)$$

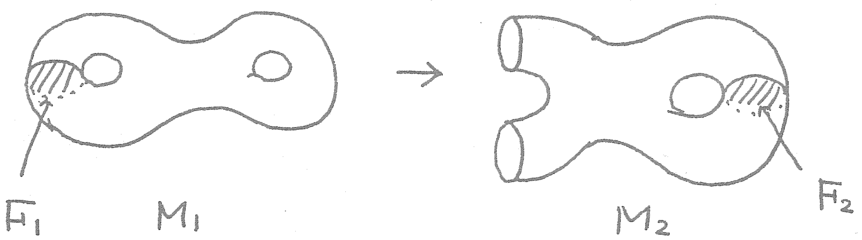
を M の <u>hierachy</u> という。ここで

(1) $M_1 = M$,　(2) F_i は M_i の中の proper な, two-sided incompressible surface である。

(3) $M_{i+1} = \overline{M_i - N(F_i)}$ である。

(4) $\overline{M_n - N(F_i)}$ の各 component は 3-ball である。

例.　$M = M_1$ (≈ solid torus of genus 2)



F. Waldhausen は W. Haken [4] の idea を使い次の定理を証明した。

Theorem 3 ([21]) Mが irreducible, sufficiently large であるならば, hierachyを持つ。

いいかえれば, irreducible, sufficiently large 3-manifoldを, 順次適当な incompressible surface で切りひらいていけば, 3-ball の disjoint union になるということである。Waldhausenはさらに, hierachy が存在することにより次の定理を証明した。

Theorem 4 ([21]) M, N が compact, orientable 3-manifoldで, irreducible かつ sufficiently large であるとする。

次の条件を満す proper map $f:(M, \partial M) \to (N, \partial N)$ が存在するとする。

(1) $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ は mono.

(2) ∂Mの各 component Bについて $(f|\partial B)_*: \pi_1(B) \to \pi_1(C)$ は mono. ここで Cは∂Nの component。

このとき, homotopy $f_t:(M, \partial M) \to (N, \partial N)$ で, $f_0 = f$ であり次の (i), (ii), (iii) のうちいずれか1つが成立する。

(i) $f_1: M \to N$ は covering map.

(ii) $M \approx F_1 \times I$ で $f_1(M) \subset \partial N$.

(iii) M は solid torus of genus 1 で $f_1: M \to N$ は branch line を circle とする branched cover である。

この定理より

<u>Corollary</u> M, N を closed な irreducible sufficiently large 3-manifold とする。 isomorphism $\varphi: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ が存在するならば, φ を induce する homeo. $f: M \to N$ が存在する。

§3 One-sided surface in 3-manifold

F. Waldhausen の sufficiently large 3-manifold に関する定理は, 3-manifold の研究にとって非常に有効であった。 しかし sufficiently large でない 3-manifold も 数多く存在し, 未解決の問題も多い。ここでは, 次の定理に動機づけられた, sufficiently large でない 3-manifold に関する問題へのアプローチを紹介する。

<u>Theorem 5</u> (J. Hempel [5]) M は closed な irreducible 3-manifold とする。もし $H_1(M; Z_2) \neq 0$ ならば M は incompressible な one-sided surface をふくむ。

さらに、M が sufficiently large でなければ、$M - \mathring{N}(F)$ は solid torus である。

これは Theorem の条件を満す 3-manifold を incompressible な surface (最初は one-sided な surface, 2回目以降は disk) にそって切りひらいていくと 3-ball になることを示しており、この種の 3-manifold を研究する上で有効であると考えられる。

<u>Definition</u> F を closed な one-sided surface in M とする。$M - \mathring{N}(F)$ が solid torus であるとき、pair (M, F) を M の <u>one-sided</u> <u>Heegaard</u> <u>splitting</u> という。

しかしながら、incompressible な one-sided surface

をふくむ 3-manifold に対して Theorem 4 と同じ型の定理は成立しない。例えば $L(14,3)$ と $L(14,5)$ は incompressible な one-sided surface をふくむ。しかし $L(14,3)$ と $L(14,5)$ は homotopy type は同じであるが homeo. ではない。ここで $L(p,q)$ は lens space of type (p,q) である。

注. $L(p,q)$ は次のように構成する。$V_1, V_2 \cong D^2 \times S^1$ V_i の meridian を m_i, longitude を l_i とする。ここで homeo. $f: \partial V_1 \to \partial V_2$ を $f(m_1) \sim p l_2 + q m_2$ であるとすると $V_1 \underset{f}{\cup} V_2 = L(p,q)$ である。

以下, one-sided Heegaard splitting を応用して得られた結果を述べる。

3.1. X を manifold, $H(X)$ を X の autohomeo. 全体のつくる群, $D(X)$ を X の identity に isotopic な homeo. 全体がつくる $H(X)$ の normal subgroup とする。このとき $\mathcal{H}(X) = H(X)/D(X)$ を X の <u>homeotopy group</u> という。

<u>Problem</u> (A. Hatcher [8])

$\mathcal{H}(L(p,q))$ を計算せよ。

この問題に対して

結果 1 (筆者[1], Rubinstein [17])

$$\mathcal{H}(L(4n, 2n\pm 1)) \cong \begin{cases} Z_2 & n=1 \\ Z_2+Z_2 & n\neq 1 \end{cases}$$

結果 2 (J. S. Birman and J. H. Rubinstein [3])

$$\mathcal{H}(L(8mn-2,\ 4mn-2m-1)) \cong \begin{cases} Z_2 \\ Z_2+Z_2 \\ Z_4 \end{cases}$$

注　non-orientable surface は projective plane のいくつかの connected sum であらわせるが、この個数をその surface の <u>genus</u> という。

$L(4n, 2n\pm1)$ は genus 2, $L(8mn-2, 4mn-2m-1)$ は genus 3 の one-sided Heegaard splitting を持つ。

3.2. $SO(n)$ を special orthogonal group とする。$SO(4)$ を R^4 の orthogonal transformation のつくる群，S^3 を R^4 の原点を中心とする3次元球面とすると，$SO(4)$ は S^3 に act する。H. Hopf, H. Seifert および W. Threlfall により S^3 に free に act する $SO(4)$ の subgroup は決定されている。[11]参照。

3-sphere の finite action に関する問題としては次のものがある。

<u>Conjecture</u>　S^3 の free な finite action は，$SO(4)$ の subgroup である。

いいかえれば，universal cover が 3-sphere である 3-manifold は orthogonal action の orbit space であるかという問題である。orthogonal action の orbit space は H. Seifert により分類されており（[11]参照），この conjecture が正しければ，homotopy sphere をのぞけば，有限群を基本群として持つ 3-manifold の分類は完成する。

この問題に対して G. Livesay [9], P. Rice [14], G. Ritter [15] による S^3 の Z_2, Z_4, Z_8 -actionの分類が知られている。また, one-sided Heegaard splittingの応用により,

結果3 (J. H. Rubinstein [17]) S^3の Z_8, Q_{2^k} $k \geq 3$ action は orthogonal action と equivalent である。

但し $Q_{8m} = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^{2m} \rangle$ である。

結果4 (J. H. Rubinstein [18]) S^3の $O(48)$, $Q(2^k \cdot 3^m)$ (但し $k \geq 3$, $m \geq 1$) action は S^3の orthogonal action の orbit space である。但し $O(48)$ は binary octahedral group, $Q(2^k \cdot 3^m) = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^{2^{k-2} \cdot 3^m} \rangle$ である。

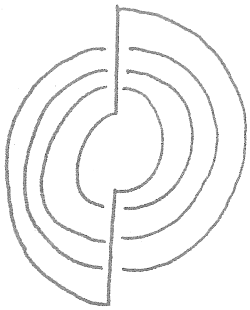
結果3, 4は genus 2の one-sided Heegaard splittingを持つ3-manifoldの Z_2 および Z_3-action を分類することによって得られた。genus 3の one-sided Heegaard splittingを持つ lens space に対しては次の結果がある。

結果5（筆者［2］） $L(8mn-2, 4mn-2m-1)$ の free Z_2-action による orbit space は S^3 の orthogonal action による orbit space と同相である。

注意　最近 R. Myers［10］により $L(p, q)$ の Z_2-action の分類がなされた。この内容は結果3および5より強い結果である。方法は［9］の拡張である。

3.3　over path が2本であるような projection を持つ link を 2-<u>bridged link</u> という。

例



2-bridged link type (5,1)

$M_2(K)$ を S^3 の link K を branch line とする, branched double covering とする。K を 2-bridged link とすると, $M_2(K)$ は $L(p, q)$ と homeo. であることが知られている。

Conjecture (J. S. Birman and J. Montesinos [8])
$M_2(K)$ が $L(p, q)$ と homeo. ならば K は 2-bridged link である。

この予想については P. K. Kim [7] より、$M_2(K)$ が $L(2,1)$ (すなわち 3-dim. projective space) であるとき K が  であることが知られている。

結果 6 (J. H. Rubinstein [19]) $M_2(K)$ が $L(4n, 2n\pm1)$ であるとき、K は 2-bridged link である。

最近 筆者は次の結果を得た。

結果 7 $M_2(K)$ が $L(8mn-2, 4mn-2m-1)$ であるとき、K は 2-bridged link である。

References

[1] K. Asano, "Homeomorphisms of prism manifolds," Yokohama Math. J. 26 (1978), 19-26.

[2] ——, "On one-sided Heegaard splittings and involutions on a class of lens spaces," Osaka J. Math. 17 (1980), 573-587.

[3]. J. S. Birman and J. H. Rubinstein, manuscript.

[4] W. Haken, "Theorie der Normal Flächen," Acta Math. 105 (1961), 245-375

[5]. J. Hempel, "One sided incompressible surface in 3-manifold," Lecture Note in Math. 438, Springer-Verlag (1974), 251-258.

[6] T. Homma, "Dehn's lemma for S^3," Yokohama Math. J. (1957), 223-244

[7] P. K. Kim, "PL involutions on lens spaces and other 3-manifolds," Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974) 467-473

[8] R. Kirby, "Problems in low dimensional manifold theory," Proc. Amer. Math. Soc. Summer Inst. in Topology (Stanford), 1974

[9] G. Livesay, "Fixed point free involutions on the 3-sphere," Ann. Math. 72 (1960) 603-611

[10] R. Myers, "Free involutions on lens spaces," Topology, 20 (1981), 313–318

[11] P. Orlik, Seifert Manifolds, Lecture Notes in Math. 291, Springer-Verlag, 1972

[12] C. D. Papakyriakopoulos, "Dehn's lemma and the asphericity of knots," Ann. of Math. 66 (1957), 1–26

[13] ——, "On solid tori," Proc. London Math. Soc. 7 (1957), 281–299

[14] P. Rice, "Free actions of Z_4 on S^3," Duke Math. J. 36 (1969), 749–751

[15] G. X. Ritter, "Free Z_8 actions on S^3," Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973), 195–212

[16] J. H. Rubinstein, "One-sided Heegaard splittings of 3-manifolds," Pacific J. Math. 76 (1979), 185–200

[17] ——, "On 3-manifolds that have finite fundamental group and contains Klein bottles," Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 129–137.

[18] ——, "Free actions of some finite groups on S^3," Math. Ann. 240 (1979), 165-175

[19] ——, Notices,

[20] J. Stallings, "On loop theorem," Ann. of Math. 72 (1960), 12-19.

[21] F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large," Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.

Transverse foliation の存在問題

東北大・理　西森敏之

1970年代に葉層構造の理論は飛躍的発展を遂げ多様な成果が得られた。代表的な例としては，

(I) 葉層構造の存在問題の解決（§2参照）

(II) エキゾティック特性類の理論の展開

がある。それらを背景として葉層構造の構造に関するより精密な問題が研究されている。思いつくままに例を挙げると，

(1) Invariant measure ; Plante [31].

(2) leaf の growth, level, depth : Cantwell-Conlon [3], 土屋, [45], [46], 西森 [21], [22].

(3) 多様体の leaf としての実現 : Phillips-Sullivan [32].

(4) $\mathcal{F}$-subgroups : 坪井ら [43].

(5) 葉の安定性 : Thurston [40], 稲葉 [10].

(6) $FDiff(M, \mathcal{F})$: 福井-宇敷 [6].

(7) 微分幾何的問題 : 押切 [30].

(8) 定性的性質とG.V.類との関係：Hermann [51]
森田・坪井[18]，水谷-坪井[16]，水谷-森田-坪井[19]，
西森[23]，土屋[47]，Cantwell-Conlon [4]
等がある。(以上，たまたま手もとにあった論文のみ引用しました。)

その他の傾向の1つとして，一般の位置にある葉層構造の族 $\mathcal{W}=(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_k)$ （すなわち，octahedral webs, multifoliations, transverse foliationsなど）の研究が1980年にいくつか現われた。この講演の目標は，それらの諸結果を，transverse foliationsに重点をおいてsurveyすることである。

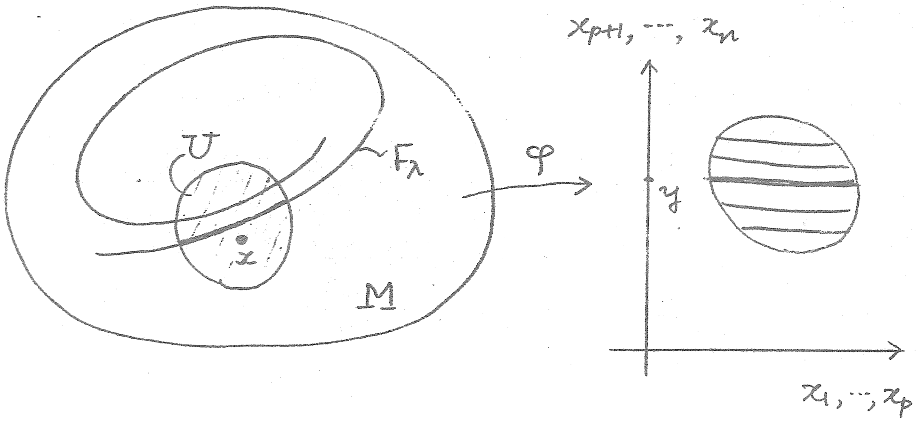
なおFoliationの入門書としては，Reeb [33]，Haefliger [7]，田村[52]がある。survey articleとしては1973年頃までのことが書いてあるLawson [12]がある。雑誌「数学」には葉層構造に関する論説として，田村-水谷[38]，森田-西川-佐藤ハ[17]，今西[9]がある。

§1 葉層構造の定義と例

M を n 次元 C^∞ 多様体とし，$n=p+q$ とする。$\mathcal{F}=\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の余次元 q の C^r 級葉層（あるいは葉層構造）であるとは，

(1) F_λ は M の p 次元連結部分多様体（必らずしも regular にはうめこまれていない）で，$M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$（disjoint union）であり，

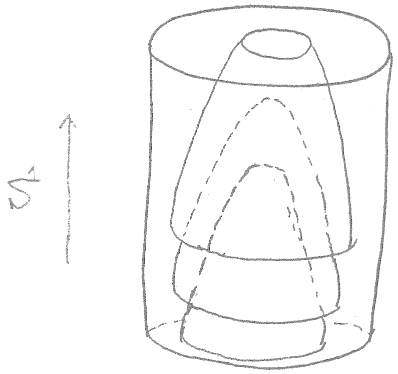
(2) M の各点 x において適当な C^r 級座標近傍 $(U,\varphi:U\to\mathbb{R}^n)$ をとると，$F_\lambda\cap U$ の連結成分は，ある $y\in\mathbb{R}^q$ に対して，$\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p\times\{y\})$ に一致することをいう。



各 F_λ のことを葉 (leaf) と呼ぶ。$\mathcal{F}$ には自然に接バンドル $T\mathcal{F}$，法バンドル $N\mathcal{F}$ が定義される。$N\mathcal{F}$ が向きづけ可能のとき，$\mathcal{F}$ は横断的に向きづけ可能という。

実多様体論におけるS^nや複素多様体論における$P^n(\mathbb{C})$に対応する典型的な葉層構造の例として，以下に構成するReeb葉層と呼ばれるS^3の葉層構造$\mathcal{F}_R$が挙げられる。

まずS^3を　$S^3 = S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$と分割しておいて，各$S^1 \times D^2$に下図のような葉層$\mathcal{F}_R$（Reeb成分と呼ばれる）を構成する。

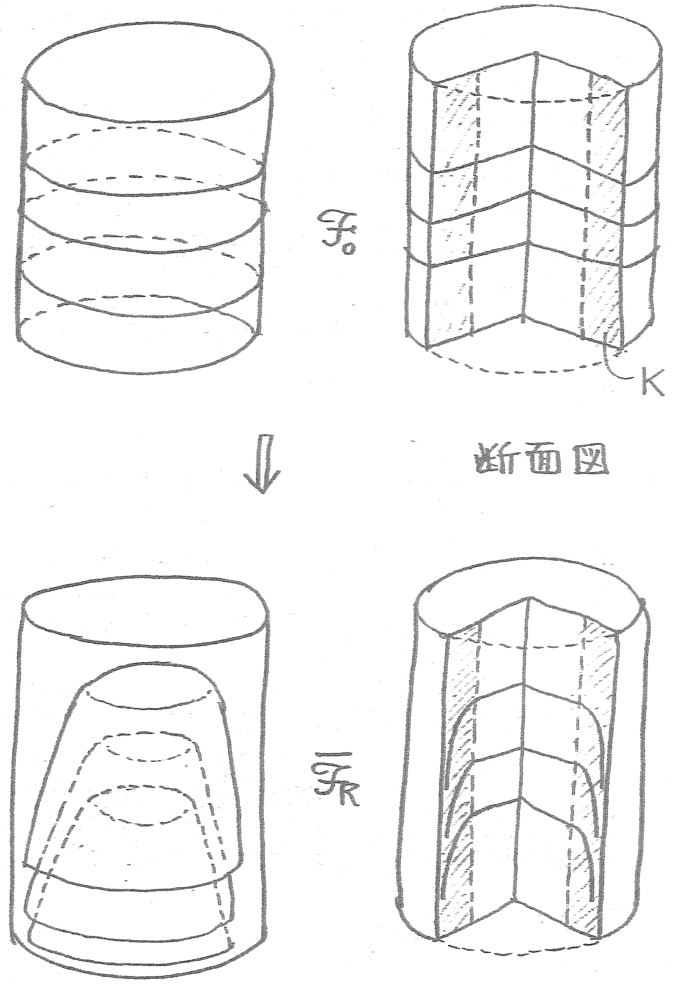


（上面と下面を同一視する。紙コップをたくさん重ねたものを曲げて両端をつないだようなもの。）

$\mathcal{F}_R$は，T^2と同相な1枚の葉$\partial(S^1 \times D^2)$と，$\mathbb{R}^2$と同相な無限枚の葉たちから成っている。Reeb葉層$\mathcal{F}_R$は2つのReeb成分の和として定義される。（なおReeb成分は$S^1 \times D^n$に対しても同様に定義できる。）

ところでReeb成分$\mathcal{F}_R$は次のようにしても構成できる。最初に$\mathcal{F}_0 = \{\{x\} \times D^2\}_{x \in S^1}$を考える。

次に $\partial(S^1\times D^2)$ のカラー K で図のように修正（*turbulize*）する。



この変形は *turbulization* と呼ばれる。

（位相同型で Reeb 成分にうつされる葉層はすべて Reeb成分と呼ぶことにする。）

§2. 葉層構造の存在問題に関する諸結果

葉層構造の族（$\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_k$）の話に入る前に単独の葉層構造の存在問題に関する歴史を単純化してふりかえってみる。

(1) 1952. Reeb [33] : S^3.

(2) 1965. Lickorish [14]：向きづけ可能な3次元多様体.

(3) 1969. Wood [48]：向きづけ可能でない3次元多様体.

(4) 1971. Lawson [11]: S^{2k+3} $(k=1,2,\cdots)$.

（$f(z)=z_1^2+\cdots+z_n^2$ に関する Milnor fibering $f/|f|$: $S^{2n-1}-f^{-1}(0) \longrightarrow S^1$ を使って証明した。）

(5) 1972. 田村 [37] : S^{2k+1}

（Milnor fibering の一般化として spinnable structure を導入して微分位相幾何のテクニックを full に使った。）

(6) 1976. Thurston [41]：オイラー数0の多様体.

（A'Campo [1], 福井 [5], 田村-水谷 [15], [38] は省略しました）

ここではとくに『M が余次元1の plane field をもてば，余次元1葉層構造をもつ』という点に注意しておいてほしい。

§3. 一般の位置にある葉層構造の族

n次元多様体Mの余次元1葉層構造の族$\mathcal{W}=(\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_k)$が<u>一般の位置にある</u>とは、各$x\in M$と各$(i_1,\cdots,i_p)$, $p\leq n$, に対して,

$$\dim T_x\mathcal{F}_{i_1}\cap\cdots\cap T_x\mathcal{F}_{i_p}=n-p$$

となることである。

(I) *Octahedral webs.*

$k=n+1$とする。各$x\in M$に対し座標近傍$(U,\varphi:U\to\mathbb{R}^n)$をうまくとると,

$$\mathcal{F}_i|U=\varphi^*\mathcal{G}_i^0,\quad i=1,\cdots,n+1,$$

ただし $\mathcal{G}_i^0=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i=c\}_{c\in\mathbb{R}}$　$i=1,\cdots,n.$

$\mathcal{G}_{n+1}^0=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1+\cdots+x_n=c\}_{c\in\mathbb{R}}$

となるとき, $\mathcal{W}$は<u>*octahedral web*</u>と呼ばれる。これに関しては, 西森[24],[25]に次の結果がある。

<u>定理3.1</u> (1980)　*Octahedral web*は, $(OW(n),\mathbb{R}^n)$-構造と同値である。ただし$r\in\mathbb{R}-\{0\}$, $a\in\mathbb{R}^n$に対し$f_{r,a}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$を$f_{r,a}(x)=rx+a$で定義して, $OW(n)=\{f_{r,a}\mid r\in\mathbb{R}-\{0\}, a\in\mathbb{R}^n\}$とおく。

($OW(n)$は相似変換の群の部分群である.)

定理 3.2 (1980*) 閉多様体 M が次のどれかを満たすと仮定する。

(1) $n=2$.

(2) $n=3$ で, $\pi_1(M)$ は non-exponential growth.

(3) 群の列 $G_1=\pi_1(M), G_2, \cdots, G_\nu$ が存在して

(i) $G_{i+1}=G_i/\mathrm{Cent}\, G_i$, $i=1,\cdots,\nu-1$.

(ii) G_ν が高々 n 個の元で生成されるか, または, $G_\nu/[G_\nu, G_\nu]$ が torsion.

このとき, M 上の octahedral web $\mathcal{W}=(\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_k)$ は分類できて,

(a) $M=T^n$ で, 各 $\mathcal{F}_i$ は without holonomy.

(b) $M=S^1\times S^{n-1}$ で, 各 $\mathcal{F}_i$ は Reeb 成分の和

のいずれかである。

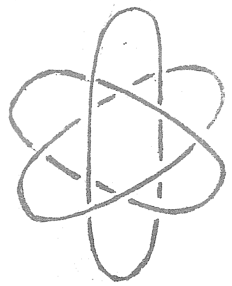
(II) Multifoliations.

$k=n$ のとき, $\mathcal{W}$ は multifoliation (または total foliation) と呼ばれる。開多様体に関する結果としては Liang [13] がある。どのような閉多様体に multifoliation が存在するかという問題に関しては, 次の一連の結果がある。

定理 3.3（Tischler[42], 1968）向きづけ可能な閉曲面上の向きづけ可能な S^1-バンドルは multifoliation をもつ。

定理 3.4（Silberstein[36], 1977）. M を安定平行可能な閉多様体とするとき，$M \times S^1$ は multifoliation をもつ。（証明のアイデア：M^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ に immerse して，その管状近傍 T に $\mathbb{R}^{n+1}$ の自然な multifoliation を入れる。∂T をうまく調節して貼りあわせる。）

定理 3.5（Hardorp[8], 1980）向きづけ可能な3次元閉多様体は multifoliation をもつ。（証明の概略：まず T^3 の自然な multifoliation を，自由に Dehn 手術ができるように修正する。次に $T^3 - L$ が Borromean link in S^3 の compliment に位相同型になるような link $L \subset T^3$ による Dehn 手術で Poincaré 球面 Σ^3 をつくる。Σ^3 の普遍被覆 S^3 上に得られた multifoliation は Dehn 手術がほぼ自由に行えるので任意の向きづけ可能な3次元閉多様体を得る。）



Borromean link

(III) $k = 2$ のとき，$\mathcal{W}$ は横断的葉層の対である。開多様体に対しては足立[2]がある。閉多様体について §4 以下で扱う。

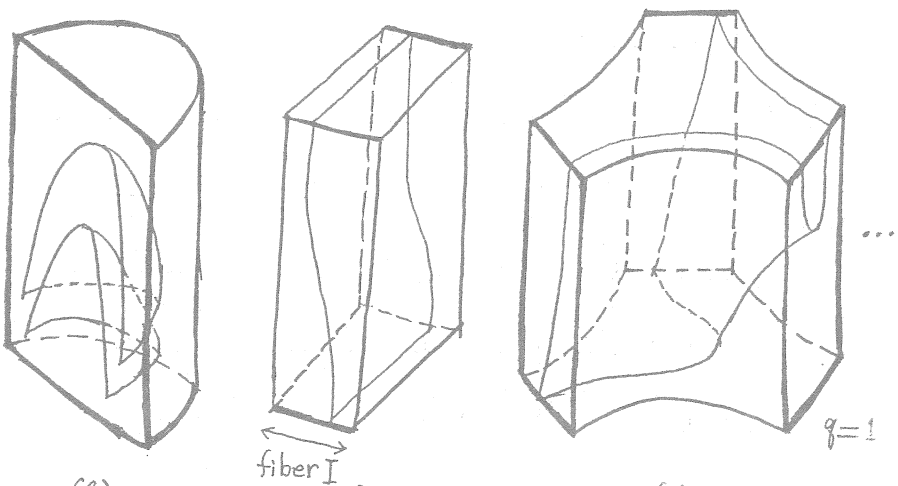
§4. 田村-佐藤[39] の結果

定理 4.1 (分割定理) Reeb成分 $(S^1\times D^2, \mathcal{F}_R)$ に横断的な葉層は次の3種類の葉層に有限分割できる。

(1) 半Reeb成分.

(2) $S^1\times I$ 上の葉層 I-バンドル.

(3) TS成分 (これは、型 $q\in\mathbb{N}$ のシリーズになっている.)



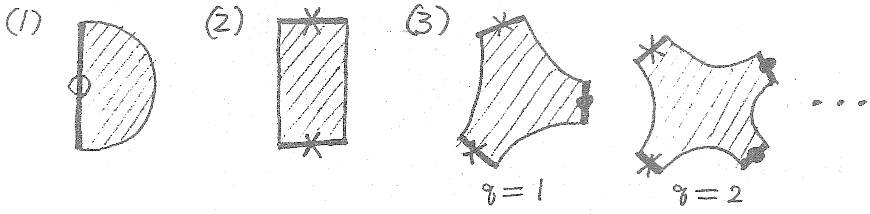
(1) (2) (3)

(図はすべて上面と下面を貼りあわせる.)

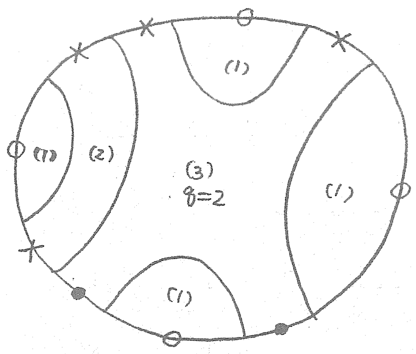
次に分類定理を[39]とは少し表現をかえて述べる.

<u>定義</u> D^2上の<u>TSピースP</u>とは、$2n$角形 $(n\geq 1)$ $|P|$ の disjoint な半数の辺にシンボル o, ●, x を付けた

もので, 次の3種類のいずれか。



<u>定義</u>. D^2上の<u>TS図形</u>とは, D^2のTSピースによる分割で, シンボルつきの辺は∂D^2に含まれ, シンボルなしの辺に対しては, その内部が$\mathrm{Int}\, D^2$に含まれるもの。



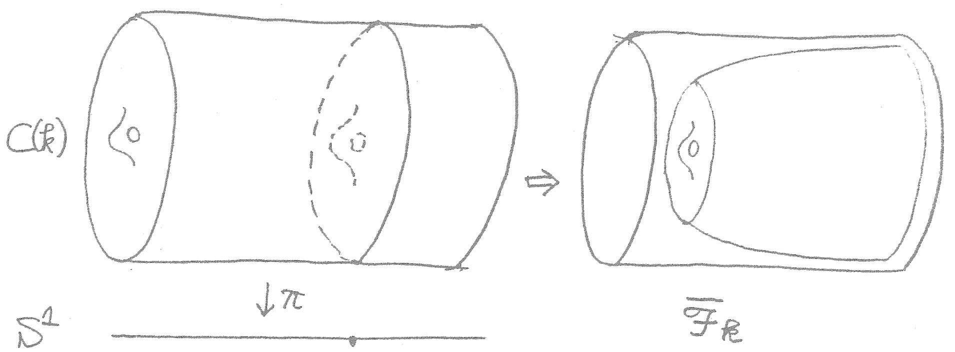
定理4.2(分類定理) Reeb成分$(S^1\times D^2, \mathcal{F}_R)$に横断的な葉層は, TS図形によって分類できる。さらにReeb葉層に対しても同様のことが成り立つ。

さらに田村-佐藤は, S^3の任意の余次元1葉層は横断的な2-plane fieldをもつことを示す一方で,

定理4.1とNovikovの定理『S^3の余次元1葉層はReeb成分を含む』を使って，次の定理を証明した。

<u>定理4.3</u>. *non-trivial fibered knot* $k \subset S^3$ から得られる $S^3 = k \times D^2 \cup C(k)$ 上の葉層 $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_R \cup \overline{\mathcal{F}}_k$ は，横断的に向きづけ可能な横断的葉層をもたない。（以下 〰 のことを <u>*solitary*</u> という）.

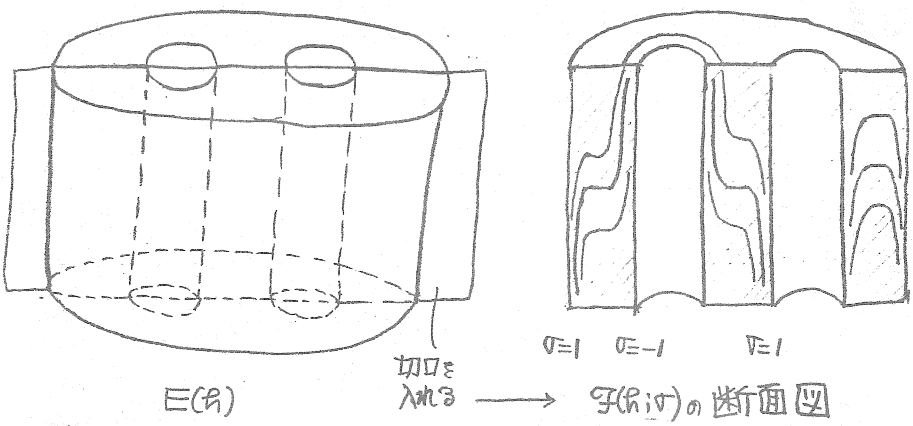
ただし $\overline{\mathcal{F}}_k$ は，バンドル $\pi: C(k) \to S^1$ の *fibers* から成る葉層 $\{\pi^{-1}(x)\}_{x \in S^1}$ を $\partial C(k)$ のカラーで *turbulize* して得た葉層のことである。



§2の最後に注意したことと定理4.3を比較すると，多様体Mに対する葉層の存在問題と，葉層多様体$(M, \mathcal{F})$に対する横断的葉層の存在問題との間にかなりのちがいがあることがわかる。Mに対する横断的葉層の対$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$の存在問題は前者に近いと予想される。

§5. 西森[26]の結果

まず田村-佐藤の結果を次のような葉層 $\mathcal{F}(h;\sigma)$ に拡張する。$\hat{E}(h) = S^2 - h\cdot \mathrm{Int}\, D^2$, $E(h) = S^1 \times \hat{E}(h)$ とおく。($S^1 \times D^2 = E(1)$ である) 連続写像 $\sigma : \partial E(h) \to \{1, -1\}$ をとり, $E(h)$ 上の葉層 $\{\{x\} \times \hat{E}(h)\}_{x \in S^1}$ を $\partial E(h)$ のカラーで σ に従って *turbulize* して $\mathcal{F}(h;\sigma)$ を得る。



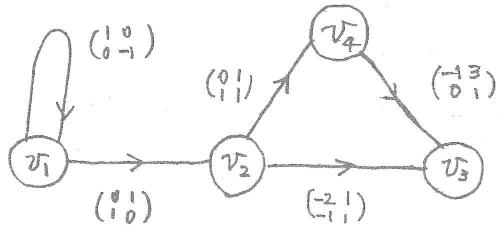
<u>定理 5.1.</u> (分割定理) $\mathcal{F}(h;\sigma)$ に横断的な葉層は, 9種類の葉層に有限分割できる。(9種類の内の3種類はもちろん定理 4.1 のものである。)

TS図形を一般化して $\hat{E}(h)$ 上に定義することにより定理 4.2 に対応して次の定理が得られる。

<u>定理 5.2.</u> (分類定理) $\mathcal{F}(h;\sigma)$ に横断的な葉層は TS図形を対応させることにより分類できる。

以上の拡張により次のような葉層多様体 $(M(\Gamma,\Phi),$ $\mathcal{F}(\Gamma,\Phi;\sigma))$ に対する横断的葉層の存在問題が扱えるようになった。

Γ は，連結・有限・有向グラフで，Φ は辺の集合 $S(\Gamma)$ から $\left\{\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \middle| \ kn-lm=-1,\ k,l,m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ への写像である。



各頂点 $v\in V(\Gamma)$ には，$E[v]=E(k(v))$ を対応させる（ただし $k(v)$ は v を端点にもつ辺の数）。各辺 $s\in S(\Gamma)$ with $\partial(s)=(v_1)-(v_2)$ には，$\partial E[v_1]$ の連結成分 $C[v_1](s)$ から $\partial E[v_2]$ の連結成分 $C[v_2](s)$ への微分同型 $\Phi[s]^*$ を，$\Phi(s)=\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ とおいて，

$$\Phi[s]^*([x],[y])=([kx+ly],[mx+ny])$$

$$C[v_i](s)\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

で定義する。$\{\Phi[s]^*\}_{s\in S(\Gamma)}$ で $\{E[v]\}_{v\in V(\Gamma)}$ の境界を貼りあわせて得られる閉多様体を $M(\Gamma,\Phi)$ とおく。連続写像 $\sigma:\bigcup_v \partial E[v]\to\{1,-1\}$ をとり，$\mathcal{F}(\Gamma,\Phi;k)=\bigcup_v \mathcal{F}(k(v);\sigma|\partial E[v])$ とおく。

さて $\mathcal{F}(\Phi,\Psi;\sigma)$ に対して横断的葉層が存在するかどうか判定する方法を考えよう。

第1番目の判定方法は，各 $v\in V(\Phi)$ に対し $\hat{E}[v]$ 上のTS図形 $\mathcal{T}(v)$ をうまく選んで，対応する横断的葉層の族 $\{\mathcal{G}(v)\}_{v\in V(\Phi)}$ が $\{\Psi[s]^*\}_{s\in S(\Phi)}$ によって整合的に貼りあわせられるようにできるかどうかを考えることである。明らかにこの方法は横断的葉層の存在に対する必要十分条件を与える。応用上は十分性を示すのに使われる。

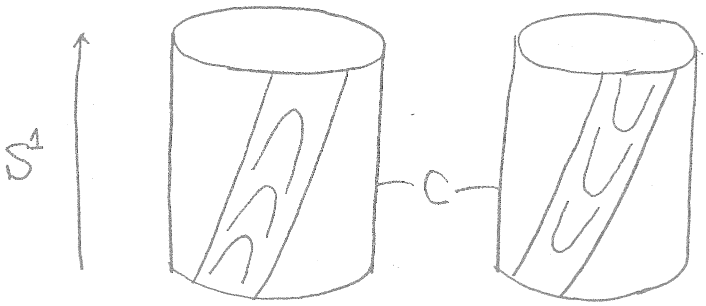
第2番目の方法として，まず $\bigcup_v \partial E[v]$ （各連結成分 C は $\mathcal{F}(\Phi,\Psi;\sigma)$ の葉で T^2 と同相）上に葉層 $\mathcal{G}_0$ を与えて，$\mathcal{G}_0$ が各 $E[v]$ の内部に横断的葉層として拡張できるかどうか考える。このままでは第1番目の方法より実行困難であるので，各 $\mathcal{G}_0|C$ に対して，整数の組 $(a(C), b(C); r(C))$ を次のように対応させる。

(1) $\mathcal{G}_0|C$ がコンパクトな葉をもたないときは，$(a(C), b(C); r(C)) = (\infty, \infty; 0)$ とおく。

(2) $\mathcal{G}_0|C$ がコンパクトな葉 L をもつときは，

$$[L] = a(C)\,[S^1\times\{*\}] + b(C)\,[\{*\}\times\hat{C}] \ \text{in}\ H_1(C;\mathbb{Z})$$

により $(a(C), b(C)) \in \{(a,b)\in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \mid (a,b)=1\}\cup\{(0,1)\}$ を定め，$r(C) = \#$(上向きのReeb成分)$-\#$(下向きのReeb成分) とおく。($a(C)=0$ のときは適当に修正する.)



上向き　　　下向き

このようにして定めた $\{(a(C), b(C); r(C))\}_C$ に関して，$\mathcal{G}_0$ が横断的葉層に拡張されるための必要条件を求めると，次の条件(A1)–(A5)を得る。

(A1) $h(v)=1$, $C\subset\partial E[v] \Longrightarrow a(C)=1,\ r(C)=2.$

(A2) $h(v)=2$, $\partial E[v] = C_1\cup C_2$ とする.

(i) $r(C_2) = -r(C_1)$.

(ii) $r(C_1)\neq 0,\ a(C_1)>0 \Rightarrow (a(C_2), b(C_2)) = (a(C_1), -b(C_1))$.

(iii) $r(C_1)\neq 0,\ a(C_1)=0 \Rightarrow a(C_2)=0,\ \sigma(C_2) = -\sigma(C_1)$.

(A3) $h(v)\geqq 3$, $C\subset\partial E[v]$ とする.

$r(C)\neq 0 \Rightarrow (a(C), b(C)) = (1,0)$

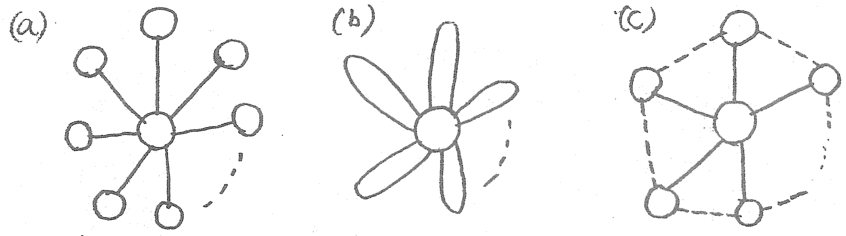
(A4) (TS公式) $\displaystyle\sum_{C\subset\partial E[v]} a(C)\,r(C) = 4-2h(v)$.

(A5) $\{\Phi[s]^*\}_s$ に対する compatibility condition.（省略）

(A1)–(A5) をみたす $\{a(C), b(C); r(C)\}_C$ を <u>算術的モデル</u> と呼び，その集合を am(Γ, Φ, σ) で表わす。このとき次の定理を得る。

<u>定理 5.3.</u> am$(\Gamma, \Phi, \sigma) = \phi$ ならば，$\mathcal{F}(\Gamma, \Phi; \sigma)$ は solitary.

下図のような (Γ, Φ) に対しては，定理 5.3 の逆がなりたつことが第1番目の判定方法で証明できる。



$\# S(\Gamma) \geqq 3$, $\quad \# S(\Gamma) \geqq 2 \quad \# S(\Gamma) \geqq 6$

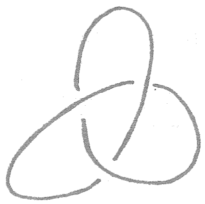
（ただし (c) においては，実線は longitude preserving で，破線は longitude twisting とする。
<u>Def.</u> s : longitude preserving $\Longleftrightarrow$ $\Phi(s) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
s : longitude twisting $\Longleftrightarrow$ otherwise）

とくに (a) において Φ として 1つの辺に $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，残りの辺に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を対応させる写像をとると，$M(\Gamma, \Phi) \cong S^3$ となるが，任意 σ に対し am$(\Gamma, \Phi; \sigma) = \phi$ となることがわかる。このとき定理 5.3 により，$\mathcal{F}(\Gamma, \Phi; \sigma)$ は solitary foliation である。

§6. 西森[27], 佐藤(篤)[34], 矢野[50] の結果

$k \subset S^3$ を non-trivial fibered knot とすると，定理4.3 により $\mathcal{F}_k = \overline{\mathcal{F}_k} \cup \overline{\mathcal{F}_k}$ は solitary であるが，$\overline{\mathcal{F}_k}$ がすでに solitary ではないかという問題が考えられる。これに関しては，次の結果が得られた。

(1) k が trefoil knot のとき，$\mathcal{F}_k$ は solitary (西森 1980*).

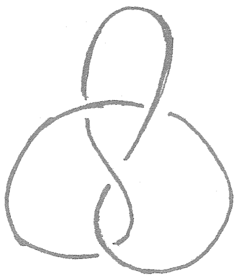


$$\begin{tikzcd} C(k) & T^2 - \mathring{D}^2 \arrow[l] \arrow[loop right, "\varphi"] \\ S^1 \arrow[from=1-1, to=2-1, phantom, "\downarrow"] \end{tikzcd} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(monodromy)

$\mathrm{Trace}\ \varphi_* = 1.$

(2) k が figure eight knot のとき，$\mathcal{F}_k$ は non-solitary.
(矢野[43] 1980*)



$$\begin{tikzcd} C(k) & T^2 - \mathring{D}^2 \arrow[l] \arrow[loop right, "\varphi"] \\ S^1 \arrow[from=1-1, to=2-1, phantom, "\downarrow"] \end{tikzcd} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Trace}\ \varphi_* = 3.$

これを一般化して次の定理が得られた。

<u>定理6.1</u> (西森[27] 1981*) S^1 上の $(T^2 - \mathring{D}^2)$ バンドル E の turbulized foliation を $\mathcal{F}_E$ とすると，

$\mathcal{F}_E$: non-solitary $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Trace}\ \varphi_* \geqq 2$

(ただし φ_* は E の monodromy)

(証明の概略：$\Leftarrow$) は構成を行なう（矢野[43]）.
$\Rightarrow$) $\mathcal{F}_E$ に対する横断的葉層 $\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}_E$ の non-compact leaf に制限したとき，$\mathcal{G}|F$ が

(i) non-proper leaf をもつ場合，

(ii) non-proper leaf をもたない場合

の二つに分けて証明する。(i) では回転数とホモトピーセカントの議論により $\mathrm{Trace}\ \varphi_* > 2$ または $\varphi = id$ を得る。(ii) では $\mathcal{G}$ に TS 図形を対応させることができることを示し，次に TS 図形を詳しく調べることにより，$\mathrm{Trace}\ \varphi_* = 2$ を得る。)

佐藤篤之は，定理 6.1 の証明の方法と Dehn 手術のテクニックを使って次の結果を得た。

<u>定理 6.2</u>（佐藤ァ[34] 1981*）すべての向きづけ可能な閉3次元多様体上に，横断的 2-plane field をもつが solitary な余次元 1 葉層が存在する。

最後に余次元 1 葉層の族ではない横断的葉層に関する結果として，次の定理を述べておく。

<u>定理 6.3</u>（矢野[50]）S^3の non-singular Morse Smale flow が C^2 級の横断的余次元 1 葉層をもてば，対応

するround handle decompositionのすべてのattaching circleは各境界上で零ホモトープでない。

<u>定理6.4</u>（同上）すべてのattaching circleが各境界上で零ホモトープでないようなS^3のround handle decompositionに対応するnon-singular Morse Smale flowにはC^1級の横断的余次元1葉層が存在する。

REFERENCES

[1] N. A'Campo, *Feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 5*, C. R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971), 603-604.

[2] 足立正久, 開多様体上の横断的葉層, 1981春 学会講演.

[3] Cantwell-Conlon, *Growth of leaves*, Comment. Math. Helv., 53 (1978), 93-111.

[4] Cantwell-Conlon, *The vanishing of GV for foliations almost without holonomy*, preprint.

[5] K. Fukui, *Codimension 1 foliations on simply connected 5-manifolds*, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 432-434.

[6] Fukui-Ushiki, *On the homotopy type of FDiff $(S^3, \mathcal{F}_R)$*, J. Math. Kyoto Univ., 15 (1975), 201-210.

[7] A. Haefliger, *Variétés feuilletées*, Ann. Scuola Norm. Pisa, 16 (1962), 367-397.

[8] D. Hardorp, *All compact orientable three dimensional manifolds admit total foliations*, Mem. AMS, 233, 1980.

[9] 今西英器, 余次元1葉層の Denjoy-Siegel 理論, 数学, 32 (1980), 119-132.

[10] T. Inaba, Reeb stability for non-compact leaves, preprint.

[11] H. Lawson, Codimension-one foliations of spheres, Ann. of Math., 94(1971), 494-503.

[12] H. Lawson, Foliations, Bull. Amer. Math. Soc., 80(1974), 369-418.

[13] C. C. Liang, Multifoliations on open manifolds, Math. Ann., 221 (1976), 143-146.

[14] W. Lickorish, A foliation for 3-manifolds, Ann. of Math., 82(1965), 414-420.

[15] Mizutani-Tamura, Foliations of even dimensional manifolds, Manifolds Tokyo 1973, 189-194.

[16] Mizutani-Tsuboi, Foliations without holonomy and foliated bundles, Sci. Reports of the Saitama Univ., 9(1979), 45-55.

[17] 森田-西川-佐藤ハ, Γ-葉層構造の特性類について, 数学, 31(1979), 110-125.

[18] Morita-Tsuboi, The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy, Topology, 19(1980), 43-99.

[19] Mizutani-Morita-Tsuboi, The Godbillon-Vey classes of codimension one foliations which are almost without

holonomy, to appear in Ann. of Math.

[20] Nishikawa - H. Sato, On characteristic classes of riemannian, conformal and projective foliations, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 223-241.

[21] T. Nishimori, Behaviour of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math. J., 29 (1977), 255-273.

[22] T. Nishimori, Ends of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 1-22.

[23] T. Nishimori, SRH-decompositions of codimension-one foliations and the Godbillon-Vey classes, Tôhoku Math. J., 32 (1980), 9-34.

[24] T. Nishimori, Octahedral webs on closed manifolds, Tôhoku Math. J., 32 (1980), 399-410.

[25] T. Nishimori, Some remarks on octahedral webs, to appear in Japan J. Math.

[26] T. Nishimori, Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds, preprint.

[27] T. Nishimori, Tranoverse foliations of punctured torus bundle over a circle, in preparation.

[28] G. Oshikiri, The surgery of codimension-one foli-

ations, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 63-70.
[29] G. Oshikiri, Foliated cobordisms of suspended foliations, Tôhoku Math. J., 32 (1980), 375-392.
[30] G. Oshikiri, A remark on minimal foliations, Tôhoku Math. J., 33 (1981), 133-137.
[31] J. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math., 102 (1975), 327-361.
[32] Phillips-Sullivan, Geometry of leaves, Topology, 20 (1981), 209-218.
[33] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualité Sci. Indust. 1183, Hermann, Paris 1952.
[34] 佐藤篤之, informal communication, 1981.
[35] P. Schweitzer, Some problems in foliation theory and related areas, Springer Lecture Note No. 652 (1978), 247.
[36] E. Silberstein, Multifoliations on $M^n \times S^1$ where M^n is a stably parallelizable manifold, Proc. London Math. Soc., 35 (1977), 463-482.
[37] I. Tamura, Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one, Comment. Math. Helv., 47 (1972), 73-79.

[38] 田村-水谷, 葉層構造の存在について, 数学, 25(1973), 134-147.
[39] Tamura-A. Sato, On transverse foliations, to appear in I.H.E.S.
[40] W. Thurston, A generalization of the Reeb stability theorem, Topology, 13(1974), 347-352.
[41] W. Thurston, Existence of codimension one foliations

[42] D. Tischler, Totally parallelizable 3-manifolds, Topological dynamics, Benjamin, Newyork, 1968, 471-492.
[43] T. Tsuboi, Foliations with trivial F-subgroups, Topology, 18(1979), 223-233.
[44] T. Tsuboi, On 2-cycles of BDiff(S^1) which are represented by foliated S^1-bundles over T^2, preprint.
[45] N. Tsuchiya, Growth and depth of leaves, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 26(1979), 473-500.
[46] N. Tsuchiya, Leaves of finite depth, Japan J. Math., 6(1980), 343-364.
[47] N. Tsuchiya, On the Nishimori decompositions of codimension-one foliations and the Godbillon-Vey classes, preprint.

[48] J. Wood, Foliations on 3-manifolds, Ann. of Math. 89 (1969), 336-358.

[49] 矢野公一, informal communication, 1980.

[50] 矢野公一, 3次元多様体上の non-singular Morse-Smale flow はいつ横断的葉層をもつか, 1981 春学会講演.

[51] M. Hermann, The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3, Geometry and Topology, Rio de Janeiro 1976, Lecture notes in Math. 597, Springer.

[52] 田村一郎, 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976.