才21回位相幾何学シンポジウム

講演予稿集

1971年7月20日—22日

於 北海道大学理学部

目　次

9. Brown-Peterson Spectrum and Stable Homotopy Group of Sphere　　森杉馨 (京大理)

10. On Realization of Kirby-Siebenmann's obstruction by 6-manifolds　　一樂重雄 (阪大理)

11. Exotic PL-homeomorphism とその応用　　福原真二 (東大理)

12. Immersions of Topological Manifolds　　倉田稚弘 (北大理)

13. Oriented Cobordism と Oriented Homotopy Type に関する Invariant について　　安藤良文 (北大理)

14. 線型空間の多項式写像とその応用　　山本登 (阪大教養)

15. Foliated Structure of Codimension One　　大和一夫 (名大理)

16. 多様体上の Vinograd の定理について　　池上宜弘 (名大教養)

Homotopy spheres上の $\mathbb{Z}_r$-actionについて

東大 大学院 松江広文

homotopy (n+2)-sphere Σ^{n+2} 上の smooth semi-free $\mathbb{Z}_r$-action (但し, $\mathbb{Z}_r$は order rの cyclic gp.) で fixed pt. set として homotopy n-sphere Σ^n を持つもので, Σ^n が Σ^{n+2} の中で knot しているものを construct する。Giffen [1], Su [3], 田村先生 [4] により, 既に上記の action は construct されているが, 彼らとは別の方法で construct する。

$a_i \geq 2$ を integer として, 複素 (n+2)-変数の polynomial を $f(z_1, \cdots, z_{n+2}) = (z_1)^{a_1} + \cdots + (z_{n+2})^{a_{n+2}}$ とし, $S^{2n+3} = \{(z_1, \cdots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_{n+2}\bar{z}_{n+2} = 1\}$ とした時 Brieskorn manifold $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$ を K^{2n+1} と書く。$\bar{f}(z_1, \cdots, z_{n+1}) \overset{def}{=} f(z_1, \cdots, z_{n+1}, 0)$, $K^{2n+1} \overset{def}{=} \bar{f}^{-1}(0) \cap S^{2n+1}$ とすると, $K^{2n-1} = K^{2n+1} \cap \{z_{n+2} = 0\}$ である。

$S^{2n+1} - K^{2n-1}$ から S^1 への smooth fibering ϕ に対し $S^1 \ni e^{i\theta}$ 上の fiber を F_θ とおく。$W^{2n} \overset{def}{=} K^{2n+1} \cap \{\mathrm{Im}\, z_{n+2} = 0, \mathrm{Re}\, z_{n+2} > 0\}$。主要な結果は次の通りである。

<Prop 1> $\boxed{W^{2n} \text{ と } F_\pi \ (= \phi^{-1}(-1)) \text{ は homeomorphic}}$

<prop 2>
$$\psi : K^{2n+1} - K^{2n-1} \longrightarrow S^1$$
$$(z_1, \cdots, z_{n+2}) \longmapsto \frac{z_{n+2}}{|z_{n+2}|}$$
なる map は smooth fibering.

$r \geqq 2$ を任意の integer, $p, q \geqq 3$ を odd integer で次の条件(*)を満たすものとする。

条件(*) 最大公約数 $(p,q) = (p,r) = (q,r) = 1$

$f(z) = z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^p + z_{n+1}^q + z_{n+2}^r$, $n \geqq 2$ とした時次の2つの Brieskorn manif. $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3} = \Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)}$, $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3} \cap \{z_{n+2} = 0\} = \Sigma^{2n-1}_{(p,q)}$ は homotopy sphere.
$\phi : S^{2n+1} - \Sigma^{2n-1}_{(p,q)} \longrightarrow S^1$ の fibre F_θ は, $(p-1)(q-1)$ コの S^n の bouquet の homotopy type を持つ。(Milnor[2])
ϕ の fibre と, fibring $\psi : \Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} - \Sigma^{2n-1}_{(p,q)} \longrightarrow S^1$ の fibre とが homeo であるから. $\pi_n(\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} - \Sigma^{2n-1}_{(p,q)}) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, ($(p-1)(q-1)$ コの直和). 故に $\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} \supset \Sigma^{2n-1}_{(p,q)}$ は knotted.

$\alpha : \Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} \circlearrowleft$ を $\alpha(z_1, \cdots, z_{n+1}, z_{n+2}) \overset{def}{=} (z_1, \cdots, z_{n+1}, \varepsilon z_{n+2})$ と定義する。但し, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{r}}$, α によって. $\Sigma^{2n-1}_{(p,q)}$ を fixed pt. set とする $\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)}$ 上の smooth semi free $\mathbb{Z}_r$-action が construct される。各 $r \geqq 2$ に対し, (条件(*)を満たし, $(p-1)(q-1)$ が異なるいろいろな odd integer $p, q \geqq 3$ を取ることにより、

〈定理1〉 knotted fixed pt. set Σ^{2n-1} をもつ、Σ^{2n+1} 上の smooth semi free Z_r-action で無限個異なる(topological にも)ものが存在する 但し、$n \geqq 3$, $r \geqq 2$。

$n \geqq 5$ とし、今作った Z_r-action と commute する $\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)}$ 上の $SO(2)$-action を考えることにより、次の定理も云える。

〈定理2〉 knotted fixed pt. set S^{2n-2} をもつ、S^{2n} 上の smooth semi-free Z_r-action が存在する。
但し、$n \geqq 5$, $r \geqq 2$

------ references ------

[1] Giffen, C.H.
Amer. J. of Math 88, pp. 187–198 (1966)

[2] Milnor, J. "Singularity pt. ~~之詳~~ of complex hypersurface"

[3] Su, J.C.
Proc. of the Conf. on Transf gr. pp. 193–204

[4] Tamura, I.
J. of the Fac. of Sci. univ. of Tokyo Sect. 1. Vol. 16, pp. 101–114 (1969–1970)

コクヨ 20×20

Stiefel manifold $V_{2n+1,2n-1}$ に推移的に作用するリー群

阿部孝順　渡部剛（新潟大理）

W.Y. Hsiang は [1] で位相同型な等質空間は微分同型かという問題を提出している。[2] によって Stiefel manifold $SO(n)/SO(k) = V_{n,n-k}$ に対してもし $\mathrm{rank}\, SO(n) < 2\, \mathrm{rank}\, SO(k)$ ならば $V_{n,n-k}$ と同じホモトピー型をもつ等質空間 X は $V_{n,n-k}$ と微分同型であることが示された。又等質空間 X に対して $\mathrm{rank}\, X = \sum \mathrm{rank}\, \pi_{2i-1}(X)$ とおくとき $\mathrm{rank}\, X \leqq 2$ のときも上の事実が成りたつことが示されている [3]。

われわれは Stiefel manifold $V_{2n+1,2n-1}$ に対してこの問題を考えてみた。このとき $V_{2n+1,2n-1}$ に既約的、推移的かつ効果的に作用する（作用は連続的でよい）コンパクト連結リー群は $SO(2n+1)$ だけであることが得られた。ここで作用が既約的であるとは正規真部分群で推移的に作用しているものが存在しないことである。

G をコンパクト連結リー群、H を G の閉部分群とし、G/H が $V_{2n+1,2n-1}$ と同じホモトピー型をもつとする。G に対してコンパクトな有限被覆群 $\tilde{G} = T^r \times G_1 \times \cdots \times G_s$（$T^r$ は r 次元トーラス、G_i は単連結、単純コンパクトリー群）が存在する。$\pi : \tilde{G} \to G$ を被覆写像とすれば $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$ に対して $\tilde{G}/\tilde{H} = G/H$ であり、$\tilde{G}$ の G/H への作用も既約的である。$\tilde{H}$ に対しても有限被覆群 $\hat{H}$ が存在して $\hat{H} = T^{r'} \times H_1 \times \cdots \times H_{s'}$ となる。作用の既約性より $r=0$ が示され、$V_{2n+1,2n-1}$ のホモトピー群より $r'=1$、$s = s'+1$ が示される。

補助定理　$\tilde{G} = G_0 \times G_1$,　$\hat{H} = H_0 \times G_1$ で　$G_1 \subset \hat{H} \to \tilde{H} \subset \tilde{G} \to G_1$ が局所同型ならば、G_0 は G/H に推移的に作用している。

$\varphi_{ij} : H_i \subset \hat{H} \to \tilde{H} \subset \tilde{G} \to G_j$,　$n(K) = \max_k \{ k$ は自然数で $\operatorname{rank} \pi_k(K) > 0 \}$ とおくと　φ_{ij} が non-trivial であるためには

$n(H_i) \leqq n(G_j)$ でなければならない。

補助定理を用いて　$n(H_i) = n(G_j)$ で φ_{ij} が non-trivial な H_i と G_j を求める。$n(H_i) < n(G_j)$ なる H_i, G_j に対しても φ_{ij} を考えて　$V_{2n+1,2n-1}$ のホモトピー群より推移的に作用する因子を求める。既約性を用いて 結局

$$\tilde{G} = SO(2n+1), \quad \hat{H} = T.$$

を得る。

$T \to SO(2n+1)$ なる表現が一意に決まらないことより G/H が $V_{2n+1,2n-1}$ と微分同相かどうかわからない。

[1]　W.Y. Hsiang ;　A survey on regularity theorems. Proceeding of the Conference on Transformation groups

[2]. W.Y. Hsiang - J. C. Su ;　On the classification of transitive, effective actions on Stiefel manifolds,　Trans. of A.M.S.

[3]. A.L. Oniščik ;　Transitive compact transformation groups. A.M.S. Transl. 55　Ser. 2

Representing handlebodies by plumbings and surgeries.

金沢大理，石本浩康

$(B_i, p_i, S^n_i, D^{m-n})$ $i=1,2$ をそれぞれ n 次元球面の上の D^{m-n}-バンドルとする。交差体（plumbing manifold の私的訳）は，従来，1点或は数点で交差させるが，次のハンドル体の話に関係して，S^n_i $i=1,2$ の中の S^{2n-m} 或は $S^p\times S^q$ $(p+q=2n-m)$ にそって交差させることができる。$(2n-m>0)$

今，$B_i = D^n_i\times D^{m-n}\cup D'^n_i\times D^{m-n}$，$S^n_i=D^n_i\cup D'^n_i$，$i=1,2$ とする。$\varphi_i: S^{2n-m}\times D^{m-n}\longrightarrow D^n_i\subset S^n_i$ $i=1,2$ をうめこみとし，$\bar\varphi_i: S^{2n-m}\times D^{m-n}\times D^{m-m}\longrightarrow D^n_i\times D^{m-n}\subset B_i$ を $\bar\varphi_i(u,x,y)=(\varphi_i(u,x),y)$ とする。このとき，B_1 と B_2 を関係 $\bar\varphi_1(u,x,y)=\bar\varphi_2(u,y,x)$ で貼り合せ，角を修正して得られる多様体を，$B_1 \underset{S^{2n-m}}{\vee} B_2$ と表わし，S^{2n-m} に沿っての交差体ということにする。

一般に，(B_i,p_i,S^n_i,D^{m-n}) $i=1,2,\cdots,r$ と，うめこみ $\varphi_{ij}: S^{2n-m}\times D^{m-n}\longrightarrow D^n_j$ $i\neq j$ $i,j=1,2,\cdots,r$ の作る行列 $\Phi=(\varphi_{ij})$ $(i\neq j)$ が与えられたとき，同様にて交差体 B_Φ を定義することができる。（Tori に関ても同様）

次に，$W=D^m\bigcup_{\{f_i\}}\left\{\bigcup_{i=1}^{r} D^n_i\times D^{m-n}_i\right\}$ をハンドル体とする。$2m\geq 3n+3$，$2n\geq m$ とする。link $f_1(S^{n-1}_1\times 0)\cup\cdots\cup f_r(S^{n-1}_r\times 0)\subset S^{m-1}$ の linking element $\in\pi_{2n-m}$ の作る行列を $\Lambda=(\lambda_{ij})$ とする。また，$S^n_i=D^n_i\cup D'^n_i$，

$D_i^n \subset D^m$, $D_i'^n = D_i^n \times 0 \subset D_i^n \times D_i^{m-n}$ とし，S_i^n のチューブ近傍を B_i とする。このとき，各 λ_{ij} が J-像に入っていれば，W の中に B_i $i=1,2,\cdots,r$ の交差体 B_Φ が Λ に対してうめこまれており，W は ∂B_Φ において何個かの $(2n-m+1)$ 次元球面と $\pi_1(\partial B_\Phi)$ を手術して得られる多様体 W'' に微分同相である。W のハンドルが2個ならば $\pi_1(\partial B_\Phi)=0$ である。

また，$m=2n$ の時は，W はいわゆる交差体と π_1 の手術で得られる．$m=2n-2$（又は $2n-6$）の時は，いくつかの $S^1 \times S^1$（又は $S^3 \times S^3$）に沿って B_i $i=1,2,\cdots,r$ を交差させた交差体 B_Ψ と，∂B_Ψ におけるいくつかの3次元（又は7次元）球面と $\pi_1(\partial B_\Psi)$ の手術によって得られる。

一般には，ホモトピー球面に沿っての交差を $(2n-m \neq 2, 6, 14)$ 考えることにより，同様な操作で W が得られる．

以上．

Knot cobordism と Codimension 2 の幾何学的問題

東大・理　松本幸夫

1. W^{m+2} を compact connected 1-conn. PL $m+2$-manifold で同時に m-Poincaré complex になっているものとする。$[X] \in H_m(W; Z)$ をその fundamental class, $[X]^* \in H^2(W, \partial W; Z)$ をその dual とする。その $j^*: H^2(W, \partial W; Z) \to H^2(W; Z)$ による image を 1-st chern class $c_1 \in H^2(W; Z)$ とよぼう。

$$\mathrm{cokernel}(c_1 : H_2(W) \to Z)$$

は cyclic group Z_q である。L^m を W^{m+2} の loc. flat closed m-submanifold で $[X]$ を represent するものとし，N をその regular neighbourhood, $E = \overline{W-N}$ とする。$\pi_i(E, \partial N) = 0$, $i \leqq k$ のとき L を exterior k-connected と言う。L が ext. 2-conn. なら $Z_q \cong \pi_1(E) \cong \pi_1(\partial N)$ である。

2. <u>問題</u> A). W^{m+2} を §1 で与えられたものとするとき，locally flat m-submanifold L^m で $inc: L^m \to W^{m+2}$ が homotopy equivalence になるものはあるか？

m = odd なら $m \geqq 5$ のとき O.K. である。[1]

m = even $= 2n \geqq 6$ の場合，$\pi_{n+1}(E, \partial N)$ に，あるやり方[3]で $\Lambda = Z[Z_q]$ 上の intersection form (λ, μ) が定まる。これは Wall の special Hermitian form に似ているが 例えば

$$\lambda(x, y) = (-1)^n \overline{\lambda(y, x)} \cdot t$$

というように Z_q のある generator t の分だけ"ねじれ"て

いる。(λ, μ) に cobordism relation を入れ Abel 群 $P_{2n}(Z_q)$ が定義される。問題 A) の obstruction は $P_{2n}(Z_q)$ に入る。$P_{2n}(Z)$ は knot cobordism group[2] に、また $P_{2n}(1)$ は Kervaire-Milnor の群に同型であり従がって両者はこの

$$P_m(*) : \{\text{Cyclic groups}\} \longrightarrow \{\text{Abel 群}\}$$

なる (covariant) functor によって同時に一般化される。

3. $\det \lambda$ は Alexander polynomial と同じ性質をもつ。とくに Z_q が Z のとき、Fox-Milnor-Kervaire の公式は次のように拡張される。

$$\det \lambda \equiv \{(1-t)^{\chi(W)} \tau(\partial W)\}^{(-1)^n} \bmod \theta(t)\theta(t^{-1}),$$

ここに $\chi(W)$ は W の Euler characteristic number, $\tau(\partial W)$ は ∂W の Reidemeister torsion である。

4. <u>問題</u> B). W^{m+2}, Y^{m+2} を closed $m+2$-manifold で M^m を Y の locally flat ext. 2-conn. submanifold とする。$f: W \to Y$ が homotopy equivalence のとき、f を M に沿って t-regular にし、$f^{-1}(M) \longrightarrow M$ が homotopy equivalence であるようにできるか？ただし $\pi_0(W) = \pi_1(W) = 0$.

この問題の obstruction も $P_m(Z_q)$ に入る。但し $Z_q \cong \pi_1(Y-M)$ である。$P_{odd}(Z_q) = 0$ である。

参考文献 [1] M. Kato-Y. Matsumoto "Simply connected surgery of submanifolds in codimension two. I" (to appear)
[2] J. Levine "Knot cobordism groups in codimension two".
[3] Y. Matsumoto "Surgery and singularities in codimension two". (注：[3] の中の条件 (H) は、実は、いらない。)

codimension 1 の homology class の実現について. 阪大理 中塚治徳.

以下, compact oriented p.l. or smooth category とする. manifold X^{n+1} に対して, $H_n(X^{n+1};\mathbb{Z})$ は codim 1 submanifolds の L-equivalence classes と 1:1 に対応する事はよく知られている。そこで実現する submanif. に制限を加えた。

<u>Theorem</u>

$n \geqq 2$, $0 \neq \theta \in H_n(X^{n+1};\mathbb{Z})$ に対し,

θ が connected submanif. で実現可能

$\Longleftrightarrow$ $\exists \alpha \in H_1(X;\mathbb{Z})$ s.t. $\alpha \cdot \theta = 1$.

ここに $\cdot$; $H_1(X;\mathbb{Z}) \otimes H_n(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は intersection pairing とする。

証明

($\Longrightarrow$) θ を実現する connected submanif. M^n をとる. X を M に沿って切りひらくと, boundary が M の 2-copies M_+, M_- なる connected manif. ができる. そこで M_+, M_- を curve で結んでやればよい.

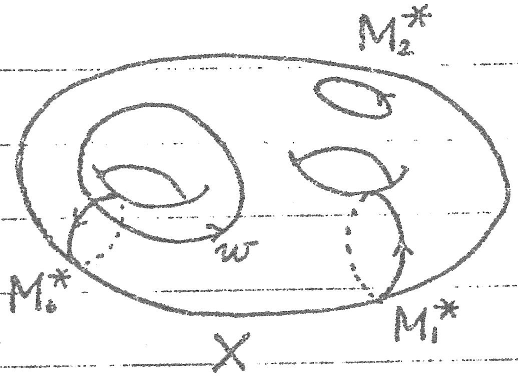
($\Longleftarrow$) α を simple loop $w \in \pi_1(X)$ でとっておく。

<u>lemma</u>

θ を実現する M^n に対し, w に沿ってうまく surgery することにより, 次のような M^* をとることができる.

(i) w は M^* の唯一つの component M_0^* と一回だけ交わる.

(ii) w が M のある component と disjoint ならば、
＊操作でその component はかわらない。



証明は、符号の反対であるwに沿った2点をwによって結んでゆくことによる。

このlemmaをつかって
M^* の M_0^* 以外の components を w をつかって
うまく M_0^* にむすんでゆく。

（終）

なお、$H_n(X^{n+1};\mathbb{Z}) = [X, S^1]$ だから、最近の fibering manifold over circle の technique によって、obstruction さえなければ、θ を smooth fibration over S^1 の fiber で実現できる事などもわかる。

大阪大学理学部数学教室

On the classification problem of

H-spaces of rank 2

M. Mimura, G. Nishida and H. Toda

Let X be a finite H-complex. As is well known, $H^*(X ; Q) \cong \Lambda(x_1, \cdots, x_\ell)$ with $\deg.x_i$ odd . Then ℓ is called the rank of X and $(\deg.x_1, \cdots, \deg.x_\ell)$ the type of X .

The purpose of this note is to classify the homotopy types of 1-connected finite H-complexes of rank 2 .

Let X be a 1-connected, finite H-complex of rank 2 .

Theorem A . If $H^*(X ; Z_2)$ has 2-torsion and is primitively generated, then $H^*(X ; Z_p) \cong H^*(G_2 ; Z_p)$ for any prime p . In particular $H^*(X ; Z_2) \cong H^*(G_2 ; Z_2)$ as an algebras over the Steenrod algebra $\mathcal{A}_2$, where G_2 is the compact exceptional Lie group of rank 2 .

Theorem B . If X is of type $(3, 11)$, X is p-equivalent to a total space of a principal S^3-bundle over S^{11} .

Theorem C . There exist exactly 8 homotopy types of a finite H-complex of type (3, 11) .

Corollary Every homotopy type of Theorem C is represented by a principal S^3-bundle over $V_{7,2}$.

Thus together with the results by Hilton-Roitberg, Stasheff and Zabrodsky we obtain

Theorem D . The homotopy type of a 1-connected, finite H-complex of rank 2 is one of the following :

$S^3 \times S^3$, $S^7 \times S^7$, $SU(3)$, E_k $(k=0,1,3,4,5)$ and 8 types of Theorem C .

レンズ空間 $L^n(p^2)$ の K_Λ-環の構造とその応用

河口 俊久 (広島大理)
小林 貞一 (広島大理)
菅原 正博 (広島大理)

k を任意に与えられた正整数とし，$L^n(k)$ を，$2n+1$ 次元 standard lens space とする。Λ を実数体 R 又は複素数体 C を表わすとする。$K_\Lambda(L^n(k))$ の構造は，$k=2$ の場合には Adams (Ann. of Math., 75 (1962)) により，$k=p$ (奇素数) の場合には上部 (J. Math. Soc. Japan, 18 (1966)) により決定された。一般の k の場合には，Mahammed (C. R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970)) により次の結果が得られている：η を canonical complex line bundle over $L^n(k)$ とするとき，

$$K_C(L^n(k)) = Z[\eta] / \langle (\eta-1)^{n+1},\ \eta^k - 1 \rangle ,$$

ここに $\langle (\eta-1)^{n+1},\ \eta^k-1 \rangle$ は，Z に係数をもつ多項式環における $(\eta-1)^{n+1}$ および η^k-1 によって生成されるイデアルを表わす。

われわれは，$k=p^2$ の場合に，$\tilde{K}_\Lambda(L^n(p^2))$ の環構造を決定する。たとえば，$p=2$ の場合，$\tilde{K}_C(L^n(4))$ の構造は次の通りである。η を canonical complex line bundle over $L^n(4)$ とし，$\sigma = \eta - 1$，$\sigma(1) = \eta^2 - 1$ とおく。このとき，次の結果が得られる：

定理「 $n=2m$ のとき,

$$\tilde{K}_C(L^n(4)) \cong Z_{2^{n+1}} \oplus Z_{2^m} \oplus Z_{2^{m-1}}$$

生成元はそれぞれ a, $a(1)$, $a(1)a-(-1)^m 2^{m+1} a$ である。

$n=2m+1$ のとき,

$$\tilde{K}_C(L^n(4)) \cong Z_{2^{n+1}} \oplus Z_{2^m} \oplus Z_{2^m}$$

生成元はそれぞれ a, $a(1)-(-1)^m 2^{m+1} a$, $a(1)a$ である。

積構造は $a^4=-4a^3-6a^2-4a$ で定められる。」

ρ を canonical line bundle over $L^n(4)$ とし, ra を a の real 化とする。$\tilde{K}_R(L^n_0(4))$ は, 環として $\rho-1$ と ra とにより生成される。ここに, $L^n_0(k)$ は, $L^n(k)$ の $2n$-skeleton を表わす。

p が奇素数の場合には, $\tilde{K}_C(L^n(p^2))$ の構造は, $p=2$ の場合と同様に求められる(実際はもう少し複雑になる)が, $\tilde{K}_R(L^n_0(p^2))$ は環として ra のみによって生成され, (real) line bundle が現れない点で $p=2$ の場合と異なる。

$\tilde{K}_R(L^n(p^2))$ における exterior power operation を計算し, $L^n(p^2)$ の Euclid 空間の中への immersion や embedding の問題に応用することは, Atiyah (Topology, 1 (1962)) や上部の場合と同様に行なわれる。

$B(Z_p\times Z_p)$のSteenrod表現について

越川浩明（北大理）

位相空間Xに対して$z\in H_n(X;Z)$がSteenrod表現可能とは
$\exists M^n$: closed oriented smooth n-manifold, $\exists f:M\to X$ continuous map
s.t. $f_*(\sigma_M)=z$ （σ_MはMの基本ホモロジー類） なるとき言う.
Thomが有限次元多面体に対して$n\leqq 6$なら常に表現可能, $n\geqq 7$に対しては必らずしもそうでないことを示し,その例として$L^7(3)\times L^7(3)$のある7次元ホモロジー類をあげている([T])。その後Burdickが$B(Z_3\times Z_3)$の表現可能な元をbordismのspectral列を計算することによって全部数えあげた([B])。ここでは$p=2$とBurdickの手法により奇素数pに対して$B(Z_p\times Z_p)$の表現可能な元について述べる。

§1. $p=2$の場合

$B(Z_2\times Z_2)=RP^\infty\times RP^\infty$ （RP^∞は無限次元実射影空間）

$RP^\infty=e_0\cup e_1\cup e_2\cup\cdots$ とcell分割され $\partial e_{2n}=2e_{2n-1}$, $\partial e_{2n+1}=0$ （ただし$e_{-1}=0$とする）となることから$H_*(B(Z_2\times Z_2);Z)$は$e_0\otimes e_0$, $e_{2i-1}\otimes e_0$, $e_0\otimes e_{2j-1}$, $e_{2i-1}\otimes e_{2j-1}$, $e_{2i-1}\otimes e_{2j}+e_{2i}\otimes e_{2j-1}$なるcycleで表わせる元で生成され, 各元はorder 2である。Conner-Floyd 定理によりCW対(X,A)に対して$H_n(X,A)$が有限生成かつodd torsionをもたなければ$\mu:\Omega_n(X,A)\to H_n(X,A)$がepimorphismであることが分かっているから 従って

(1.1) $H_*(B(Z_2\times Z_2);Z)$の元は全てrepresentableである。

具体的には$e_0\otimes e_0$, $e_{2i-1}\otimes e_0$, $e_0\otimes e_{2j-1}$, $e_{2i-1}\otimes e_{2j-1}$は各々$RP^0\times RP^0$, $RP^{2i-1}\times RP^0$, $RP^0\times RP^{2j-1}$, $RP^{2i-1}\times RP^{2j-1}$の基本類で表現可能となること明らか。$e_{2i-1}\otimes e_{2j}+e_{2i}\otimes e_{2j-1}$は$H_{2i,2j}$で表現可能。ここに$H_{2i,2j}$は$RP^{2i}\times RP^{2j}$の中で次のような式で定義されるhypersurfaceである。

$$x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_m y_m = 0 \qquad , m = \min(2i, 2j)$$

ここに $(x_0, \cdots, x_{2i})$, $(y_0, \cdots, y_{2j})$ は各々 RP^{2i}, RP^{2j} の斉次座標である。

$H_{2i,2j}$ は $RP^{2i} \times RP^{2j}$ の codimension 1 の submanifold でかつ $w_1 = 0$ となることから orientable である。

§2. p が odd prime の場合

$B(Z_p \times Z_p) = L^\infty(p) \times L^\infty(p)$ （$L^\infty(p)$ は 無限次元レンズ空間）

$L^\infty(p) = e_0 \cup e_1 \cup e_2 \cup \cdots$ と standard な cell 分割され

$\partial e_{2n} = p e_{2n-1}$, $\partial e_{2n-1} = 0$ より $H_{2n}(B(Z_p \times Z_p); Z) = \{ e_{2i-1} \otimes e_{2n-2i+1}$ $i = 1, \cdots, n \}$, $H_{2n-1}(B(Z_p \times Z_p); Z) = \{ e_{2i-1} \otimes e_{2n-2i} + e_{2i} \otimes e_{2n-2i-1}$ $i = 0, 1, \cdots, n \}$

各元は order p である。（$e_{-1} = 0$ とする）。 $\alpha_{2k-1} = [T, S^{2k-1}]$

$T : S^{2k-1} \to S^{2k-1}$ を $T(z_1, \cdots, z_k) = (\lambda z_1, \cdots, \lambda z_k)$, $\lambda = \exp \frac{2\pi i}{p}$

とするとき、$\Omega_*(Z_p)$ において $p\alpha_{2k-1} + [M^4]\alpha_{2k-5} + [M^8]\alpha_{2k-9} + \cdots = 0$ となるような closed oriented manifolds M^{4k} $(k = 1, 2, \cdots)$ が存在することが [C-F] により知られている。このことから $\exists V^{2k}$: compact oriented $2k$-manifold

$\exists F : V^{2k}$ 上の Z_p action s.t. $\partial V^{2k} = pS^{2k-1} \cup M^4 \times S^{2k-5} \cup M^8 \times S^{2k-9} \cdots$

$F|\partial V^{2k}$ は S^{2k-1} 上では T, $M^{4n} \times S^{2k-4n-1}$ 上では $id \times T$.

以下 V^{2n} をこのようなものとし、$G = Z_p \times Z_p$, $X = B(Z_p \times Z_p)$ とおき

次のような分類写像を選ぶ。

$g_j : S^{2j-1} \times S^{2n-2j+1} / G \longrightarrow X^{2n}$ （X^{2n} は X の $2n$-skelton. 以下同様）

$g_{j*}(S^{2j-1} \times S^{2n-2j+1} / G$ の基本類$) = e_{2j-1} \otimes e_{2n-2j+1}$

$h_j : V^{2j} \times S^{2n-2j-1} / G \longrightarrow X^{2n-1}$

$h_{j*}(V^{2j} \times S^{2n-2j-1} / G$ の基本類$) = e_{2j} \otimes e_{2n-2j-1}$

$k_j : S^{2j-1} \times V^{2n-2j} / G \longrightarrow X^{2n-1}$

$k_{j*}(S^{2j-1} \times V^{2n-2j} / G$ の基本類$) = e_{2j-1} \otimes e_{2n-2j}$

$l_j : V^{2j}\times V^{2n-2j}/G \longrightarrow X^{2n}$

$l_{j*}(V^{2j}\times V^{2n-2j}/G$ の基本類$) = e_{2j}\otimes e_{2n-2j}$

ここに $h_j(M^{4k}\times S^{2j-4k-1}\times S^{2n-2j-1}/G) \subseteq X^{2n-4k-2}$

$k_j(M^{4k}\times S^{2j-1}\times S^{2n-2j-4k-1}/G) \subseteq X^{2n-4k-2}$

$l_j((M^{4k}\times V^{2j}\times S^{2n-2j-4k-1}/G)\cup(M^{4k}\times S^{2j-4k-1}\times V^{2n-2j}/G))$

$\subseteq X^{2n-4k-1}$

$\alpha_j^{2n} = [g_j, S^{2j-1}\times S^{2n-2j+1}/G]$, $j=1,\cdots,n$

$\delta_j^{2n} = [l_j, V^{2j}\times V^{2n-2j}/G]$, $j=0,\cdots,n$

$\beta_j^{2n-1} = [h_j, V^{2j}\times S^{2n-2j-1}/G]$, $j=0,\cdots,n-1$

$\gamma_j^{2n-1} = [k_j, S^{2j-1}\times V^{2n-2j}/G]$, $j=1,\cdots,n$

とおくと $\alpha_j^{2n}, \delta_j^{2n}$ 達は $\Omega_*(X^{2n},X^{2n-1})$ の Ω_* 上 free generator となり $\beta_j^{2n-1}, \gamma_j^{2n-1}$ 達は $\Omega_*(X^{2n-1},X^{2n-2})$ の Ω_* 上の free generator となる。以上の記号のもとで次が成り立つ。

(2.1) $X=B(Z_p\times Z_p)$ の bordism spectral 列は次のようになる。

$E^2\cong\cdots\cong E^5$, $E^6\cong\cdots\cong E^\infty$, E^∞ は $\delta_0^0, \alpha_j^{2n}, \beta_0^{2n-1}, \gamma_n^{2n-1}$ $(n=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots,n)$ と $\{(\beta_1^{2n-1}+\gamma_1^{2n-1})+(\beta_3^{2n-1}+\gamma_3^{2n-1})+\cdots\}$ と $\{(\beta_2^{2n-1}+\gamma_2^{2n-2})+(\beta_4^{2n-1}+\gamma_4^{2n-1})+\cdots\}$ で生成される。ただし $[M^4](\alpha_j^{2n}-\alpha_{j-2}^{2n})=0$、各元の order は p。

(2.2) $H_*(B(Z_p\times Z_p);Z)$ の元のうち Steenrod 表現可能なものは

$e_0\otimes e_0$, $e_{2j-1}\otimes e_{2j-1}$, $e_0\otimes e_{2j-1}$, $e_{2j-1}\otimes e_0$ と

$\{(e_2\otimes e_{2j-1}+e_1\otimes e_{2j})+(e_6\otimes e_{2j-5}+e_5\otimes e_{2j-4})+\cdots\}$ と

$\{(e_4\otimes e_{2j-3}+e_3\otimes e_{2j-2})+(e_8\otimes e_{2j-7}+e_7\otimes e_{2j-6})+\cdots\}$

で生成されるものに限る。

これらの元が表現可能となることは(2.1)より分かる。これで全てであることは、Thomにより X を non orientable manifold とするとき $x \in H_i(X;Z)$ が Steenrod 表現可能ならば $\forall$ odd prime p と $k = 1, 2, \cdots$ に対して $\beta_p \Theta_p^{2k(p-1)} \gamma_p(x) = 0$ が示されている([T])。ここに $\Theta_p^{2k(p-1)}$ は k-th reduced power $\mathcal{P}^k : H^i(X;Z_p) \to H^{i+2k(p-1)}(X;Z_p)$ の dual $\Theta_p^{2k(p-1)} : H_i(X;Z_p) \to H_{i-2k(p-1)}(X;Z_p)$, $\gamma_p : H_i(X,Z) \to H_i(X;Z_p)$ 係数制限準同型, $\beta_p : H_i(X;Z_p) \to H_{i-1}(X;Z)$ Bockstein 準同型。

これを用いて、(2.2)の生成元が $\mathrm{Ker}\, \beta_p \Theta_p^{2(p-1)} \gamma_p$ と一致することが分かるから表現可能なものはこれでつくされる。

参考文献

[B] R.O. Burdick: Manifolds fibred over the circle ……, Michigan microfilm (1966)

[C-F] P.E. Conner - E.E. Floyd: Differentiable periodic maps. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete Vol. 33 Springer Berlin (1964)

[T] R. Thom: Quelques propriétés globales des Variétés Différentiables. Comm. Math. Helv. 28 (1954) pp. 17-86

"Brown-Peterson spectrum & Stable homotopy group of sphere"

森杉 馨(京大理)

Quillenは[2]においてBrown-Peterson spectrum BPのSteenrod ringの構造を決定した。Zahler[5]はその結果を更に一歩進めて、BP-cohomology theoryのAdams spectral sequenceの計算をやってみせた。この方法はclassical A.S.S. and Novikov S.S.に較べてある優位性をもつが、classicalの場合と同じ困難性は依然としてつきまとう。我々は、BPのsteenrod ring A^{BP}をG.W. Whitehead流のSpectral seq.にoperateさせる事により、それから直接、球面のstable homotopy groupを(p-component)求めることを試みた。

☆記号の説明

p: odd prime, $q=2(p-1)$, Q_pはZをpでlocalizeしたring。$H_*(\ )$はZ-coefficient

☆Brown-Peterson spectrumについて

今から先、Brown-Peterson spectrum BPはpでlocalizeしたものを表わす。この時、次の定理が成り立つ。

定理 <Quillen, Zahler> ([5])

$H_*(BP)=Q_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$ $\pi_*(BP)=Q_p[m_1, m_2, \dots]$

$\dim \xi_i = \dim m_i = 2(p^i-1)$ Hurewicz homo. hは mono. $h(m_n)=p(\xi_n + \text{decomp.})$

$A^{BP}=[BP, BP]$とするとき、

$A^{BP}=\pi_*(BP)\hat{\otimes} R$. ここで$R$は$\{r_E\}$で生成される$Q_p$ free module. ($E=(e_1, e_2, \dots)$ almost zero な integer

の seq.) $\dim \gamma_E = \sum 2e_i(p^i-1)$. γ_E を Homology に operate させたとき、次の性質をもつ。

① $\gamma_E(\xi_n) = \begin{cases} \xi_{n-i} & \text{if} \quad E=(0,0,\cdots,0,\overset{i}{p^{n-i}},0,\cdots) \\ 0 & \text{if} \quad E\neq(0,0,\cdots,0,\overset{i}{p^{n-i}},0\cdots) \end{cases}$

② Cartan formula

$$\gamma_E(x\cdot y) = \sum_{F+G=E} \gamma_F(x)\gamma_G(y)$$

☆ Spectral Sequence

B_p に skeleton filtration を入れることにより、次の性質を有する S.S. $\{E^r, d^r\}$ ができる。

① $E^2_{*,*} \simeq H_*(B_p)\otimes_p \pi^S_* \Longrightarrow \pi_*(B_p)$

② $\pi_*(B_p) \longrightarrow E^\infty_{*,0} \longrightarrow E^2_{*,0} \simeq H_*(B_p)$ は hurewicz homo

③ E_r に積が入り d_r は derivation

④ A^{B_p} は Spec. Seq の naturality より $\{E^r, d^r\}$ に自然に operate する。

☆ 計算

以上の準備の下に、計算を実行する。この時、次の事がわかる。

Prop. 1 <α-series>

$p^{n-1}\xi_1^n$ は transgressive で $d_{nq}(p^{n-1}\xi_1^n) = \alpha_n \neq 0$

$\{\alpha_{n-1}, p, \alpha_1\} \ni \alpha_n$, α_n は order p の ${}_p\pi^S_{nq-1}$ の element

Prop 1′ <$\alpha^{(k)}$-series>

$d_{ap^kq}(p^{ap^k-k-1}\xi_1^{ap^k})$ が define され nonzero. それを $\alpha^{(k)}_{ap^k}$ とおくと $p^k\alpha^{(k)}_{ap^k} = \alpha_{ap^k}$ をみたす order p^{k+1} の element

prop 1 - prop 1′ は、良く知られた Toda, Adams の結果の別証である。

<u>Prop. 2</u> 〈β-series for $p>3$〉

$d_{(pr-1)q}(\xi_1^{pr-1} d_r)$ が define される。それらは Toda, Smith の β_r に一致する。ie $\beta_r \in \{\beta_{r-1}, p, \alpha_1, p, \beta_1\}$

β_r は order p の ${}_p\pi^S_{(pr+r-1)q-2}$ の element.

〈その他〉……この方法で $p=3$ の時 68 次元に new element (non-zero) θ が存在することがわかる。θ の性質は今のところわからない。$p \geq 5$ の時は $(p^2+3p+1)q-5$ dim より小さいものについては、ほぼ完全にわかる。$(p^2+3p+1)q-5$ dim では $\alpha_1\beta_1\beta_{p+1}$ が zero or not がわからない。

prop. の証明は spectral sequence の def にもどって考える。

参考文献

[1] E.H.Brown – F.P. Peterson "A spectrum whose Z_p-cohomology ....." Topology 5 (1966)

[2] D. Quillen "On the formal group laws of ...." Bull. Amer. Math Soc. 75 (1969)

[3] L. Smith "Lectures on the complex bordism ...." Mimeograph Notes of Virginia

[4] H. Toda "Extended p-th Power of ...." Proc. Japan Acad. 44 (1968)

[5] R. Zahler "The Adams-Novikov spectral sequence. Theses. Chicago Uni.

On Realization of Kirby – Siebenmann's obstructions by 6 – manifolds

阪大・理　一楽重雄

表題のことについて、次のような結果を得た。

Theorem 1. M_0^6 : closed PL 6-manifold

$H^3(M_0^6 : \mathbb{Z}_2) = 0$, $0 \neq \eta \in H^4(M_0^6 : \mathbb{Z}_2)$

η の Poincaré dual は sphrical。

$\Longrightarrow$

$^\exists M^6$: non-triangulable manifold

$^\exists f : M_0^6 \to M^6$ homotopy equivalence

s.t. $f^* k(M) = \eta$ 　ここで、$k(M)$ は M の K-S obstruction.

Corollary 1 上で、$H_2(\pi_1(M_0^6) : \mathbb{Z}_2) = 0$ なら、η は任意でよい。

高次元では、ほんの少しの結果しか得られず、5次元では、この方法では全然だめである。　以上

Exotic PL homeomorphism とその応用

東大 福原真二

(H_1) = "$S^2\times T^2$ の self PL s-cobordism は product."

(H_2) = "$S^1\times S^3$ と同じ homotopy type をもつ closed PL manifold は $S^1\times S^3$ と PL homeomorphic."

とするとき、(H_1), (H_2) のうち少くとも一方は誤りであることが知られている。一方、"modulo $S^2\times S^2$" で、5-dimensional s-cobordism theorem が成立することが知られている。以上のことから、次の予想が生れる。

Conjecture

適当な k をとると、$S^1\times S^3 \# k(S^2\times S^2)$ と同じ homotopy type をもつが、PL homeomorphic でないものが存在する。

この予想に関連して、次のことを考える。

Theorem 1

適当な k をとると、$S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2)$ の PL homeomorphism で、topological pseudo-isotopic to id であるが、PL pseudo-isotopic to id でないものが存在する。（このよう

なPL homeomorphism を"exotic"であるという)

$\boxed{\text{Theorem 2}}$

適当なkにおいて、$hT(S^2\times S^1\times I \# k(S^2\times S^2), \partial)$、$hT(S^1\times S^3 \# k(S^2\times S^2))$ は non-trivial element をもつ。(ここに、hT は homotopy triangulation)

Theorem 1 の証明は、exotic な $S^3\times T^2$ である $(S^3\times T^2)_\beta$ が $D^3\times T^2 \# k(D^3\times S^2) \underset{f}{\cup} D^3\times T^2 \# k(D^3\times S^2)$ (ここに、f は $S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2)$ の PL homeomorphism) とかけることから、f が exotic な性質をもつことを示す。Theorem 2 の証明は、この f を使って、$hT(S^2\times S^1\times I \# k(S^2\times S^2), \partial)$ の non-trivial element を作り、さらに、boundary に、$S^1\times D^3$ を張りつけて、$hT(S^1\times S^3 \# k(S^2\times S^2))$ の non-trivial element を構成することによる。以上

Immersions of topological manifolds

北大・理　倉田雅弘

M^m, Q^q を位相多様体とする。(ただし $m \leq q$) M' ($\dim M' = q$) が存在して $\mathrm{int}\, M' \supset M$ となっているとき、M から Q への M'-immersion の分類定理は Gauld (Mersions of topological manifolds, trans. of A.M.S., 149 1970) によって得られた。しかしこの結果は本質的には同じ次元の多様体の間の immersion の分類定理を与えたと言える。ここでは $m < q$ のときの M から Q への immersion の分類定理を求める。

$\mathcal{I}(M, Q)$ を M から Q への immersion の Kan complex, $\mathcal{R}(M, Q)$ を TM から TQ への representative germ よりなる Kan complex とする。representative germ とは大ざっぱに言えば、TM から TQ への locally flat な bundle map germ のことである。

定理　$\dim M < \dim Q$ のとき、

$$d : \mathcal{I}(M, Q) \longrightarrow \mathcal{R}(M, Q)$$

はホモトピー同値である。

証明の概略。始めに M が handle body decomposition をもつときに証明する。

$M = M_0 \cup$ (k-handle) とする。

Lemma 1　$i^*: \mathcal{I}(M, Q) \longrightarrow \mathcal{I}(M_0, Q)$

$i^*: \mathcal{R}(M, Q) \longrightarrow \mathcal{R}(M_0, Q)$

は Kan fibration である。ただし i^* は制限写像。

Lemma 2.　$d: \mathcal{I}_\theta(B^k \times B^{m-k}, Q) \to \mathcal{R}_\theta(B^k \times B^{m-k}, Q)$

は ホモトピー同値である。ここで θ は $\partial B^k \times B^{m-k}$ から Q への immersion, $\mathcal{I}_\theta(B^k \times B^{m-k}, Q)$ は $\mathcal{I}(B^k \times B^{m-k}, Q)$ の sub-complex で、$\partial B^k \times B^{m-k}$ に制限すると θ と一致するものよりなる complex とする。$\mathcal{R}_\theta(B^k \times B^{m-k}, Q)$ も同様に定義する。

Lemma 3.　$d: \mathcal{I}(B^m, Q) \longrightarrow \mathcal{R}(B^m, Q)$

は ホモトピー同値 である。

lemma 1 の fibration の fibre が 各々 $\mathcal{I}_\theta(B^k \times B^{m-k}, Q)$, $\mathcal{R}_\theta(B^k \times B^{m-k}, Q)$ と同型であることから $d: \mathcal{I}(M_0, Q) \to \mathcal{R}(M_0, Q)$ が ホモトピー同値ならば $d: \mathcal{I}(M, Q) \longrightarrow \mathcal{R}(M, Q)$ が ホモトピー同値 がでてくる。従って lemma 3 と induction によって M が handle body decomposition をもつとき、定理は証明される。一般の場合には M を handle body decomposition をもつ patch で覆って、patch の数に関して inductive に ホモトピー同値を証明する。

Oriented cobordism と oriented homotopy type に関する invariant について.

安藤良文（北大理）

n-dim oriented cobordism group Ω_n^{SO} から $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_p$) への homomorphism f が次の性質を持つとする。$[M]$, $[N] \in \Omega_n^{SO}$ に対して、M と N が同じ oriented homotopy type を持つならば、$f([M]) = f([N])$。この性質を持つ f がどれほどあるかを問題とする。

そこで I_n を $\{[M]-[N] \mid [M], [N] \in \Omega_n^{SO}$, M と N は同じ oriented homotopy type を持つ$\}$ で生成される Ω_n^{SO} の submodule として定義すれば、上の問題は Ω_n^{SO}/I_n の module structure を決定することに帰着する。$I_* = \sum_n I_n$ は Ω_*^{SO} の ideal となるから Ω_*^{SO}/I_* は ring である。Ω_*^{SO}/I_* の ring structure を考えて次の結果を得た。

Th 1

$n \equiv 0\ (4)$ の時 rank $\Omega_n^{SO}/I_n = 1$.

Th 1 は P. J. Kahn [3] によって証明されたもので上の性質を持つ $f: \Omega_n^{SO} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は Index の整数倍に限ることを言っている。すなわち、$\mathrm{Ker}\, I / I_n \cong \mathrm{Tor}(\Omega_n^{SO}/I_n)$

I は index を表わす。

Th 2

$$\mathrm{Tor}(\Omega_*^{SO}/I_*)\otimes \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p[\beta_{p-1}, \beta_{\frac{3}{2}(p-1)}, \cdots \beta_{a(\frac{p-1}{2})}, \cdots]$$

ここで p は odd prime, a は正の整数, $a(\frac{p-1}{2})$ は $\frac{p^k-1}{2}$ の形ではない。$\beta_{a(\frac{p-1}{2})}$ の degree は $2a(p-1)$。

次に Th 1, Th 2 の証明の概略を示す。両方は同時に証明される。

F/O は fibering $BSO \to BSF$ の fiber とする。γ_R を BSO_R の上の universal bdle, $\bar{\gamma}_R$ を F/O 上の induced bdle $i^*\gamma_R$, ここで i は inclusion: $F/O \to BSO_R$, $c: F/O \times BSO \to BSO$ を $\bar{\gamma}\times\gamma$ の classifying map とする。$\lambda_1: \Omega_*^{SO}(F/O) \to \Omega_*^{SO}$ を forgetful homomorphism, $\lambda_2: \Omega_*^{SO}(F/O) \to \Omega_*^{SO}$ を次のように定義する。$\Omega_n^{SO}(F/O) \ni [(M, f)]$ とする。$f: M \to F/O$ に対応する F/O-bdle を $\left\{\begin{matrix} E \xrightarrow{t} D \\ \downarrow \\ M \end{matrix}\right\}$ で表わす [4]。t を $0 \in D$ 上に t-regular にすると $t^{-1}(0) = M'$ は manifold となり Ω_n^{SO} の元を1つ決める。$\lambda_2([M, f]) = [M']$ として定義すると well defined である。さらに λ_1, λ_2 は共に Ω_*^{SO}-homomorphism であることが判る。

Lemma 1

$n \geqq 6$, 次の commutative diagram を得る。

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{k,l} \pi_{n+k+l}(T(\bar{\gamma}_k \times \gamma_l)) \arrow[rr, "h_n"] & & H_n(F/O \times BSO) \arrow[d, "(p_{2*} - c_*)"] \\
\Omega_n^{SO}(F/O) \arrow[u, "\lambda"', "\cong"] \arrow[r, "\lambda_1 - \lambda_2"] \arrow[urr, phantom, "(\pm 1)"] & \Omega_n^{SO}(F/O) \arrow[r, "\bar{h}_n"] & H_n(BSO)
\end{tikzcd}
$$

, ここで h_n, $\bar{h}_n$ は Thom homomorphism, p_2 は 2番目の factorへの projection.

次の Lemma の証明には Sullivan [4 , Th 3] を使う.

Lemma 2 $\quad n \equiv 0\,(4)$, $n \geqq 6$

$$\operatorname{Ker} I / I_n \cong \operatorname{Cok}(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (\text{mod 2-torsion})$$

Lemma 1, 2 及び $\operatorname{Ker} \bar{h}_n$ が 2-torsion であることから 次の Th を得る。

Th $\quad n \equiv 0\,(4)$

$$\operatorname{Ker} I / I_n \cong \operatorname{Image}(\bar{h}_n) / \operatorname{Image}((p_{2*} - c_*) \circ h_n)$$
$$(\text{mod 2-torsion})$$

そこで右辺の module が torsion group であることを調べて、上のThのCorollaryとしてTh 1を引き出す。

Th 2の証明には右辺を計算するのであるが、そのために

(P. May) p: odd prime $g_s = \phi^{-1}\beta^s\phi(1)$ として

$$Im(H_*(F/O;Z_p) \to H_*(BO;Z_p)) = [H^*(BO;Z_p)//P\{g_s\}]^*$$

及び Adamsの CP^n に対しては Adams Conj. が成立すること等の結果を使った。

References

[1] J.F. Adams ; J(X)-II Topology 3 (1965), 137-171

[2] Y. Ando ; On the structure of the oriented cobordism ring modulo an equivalence

[3] P.J. Kahn ; Characteristic numbers and homotopy type, Michigan. Math. J 12 (1965), 49-60

[4] D. Sullivan ; Smoothing Homotopy Equivalences Geometric Topology Seminar Notes

線型空間の多項式写像とその応用

阪大教養　山本　登

1. (簡単のため) E を実または複素の Banach 空間とする. E の tensor 積 $E\otimes\cdots\otimes E$ を射影位相で完備化したものを $E^{\hat\otimes n}$ とかく. $E^{\hat\otimes n}$ の直和 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\hat\otimes n}$ に ℓ^p-norm $(1\le p<\infty)$ を次の様に入れる: $x=\sum x_n$, $x_n\in E^{\hat\otimes n}$ に対して $\|x\|_{\ell^p}^p=\sum\|x_n\|^p$. そうすると普通の ℓ^p-norm と同様に $\bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\hat\otimes n}$ の norm になる. この norm で $\bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\hat\otimes n}$ を完備化したものを ℓ^pE とかく. ℓ^pE は明らかに Banach 空間である. $p\ge q\ge 1$ のとき $\ell^pE\supset\ell^qE$ が成り立つ. もし E が Hilbert 空間ならば ℓ^2E に内積を入れて Hilbert 空間にすることができる. (E が一般に局所凸線型位相空間 (l.c. 空間) のときも norm の代りに semi-norm をとることによつて上と同様の操作で l.c. 空間 ℓ^pE を定義することができる. 従つて以下の議論も l.c. 空間についても平行に行うことができる). $E^{\hat\otimes n}$ の対称部分 $E_s^{\hat\otimes n}$ から上と同様にして ℓ_s^pE を作ることができる. もちろん ℓ_s^pE は ℓ^pE の Banach 部分空間である.
写像 $e: E\to\ell_s^pE$ を $e(x)=\sum\frac{1}{n!}x^{\otimes n}$ と定義するとこれは C^ω 写像になる.
E, F を 2つの Banach 空間とするとき $f: E\to F$ が多項式写像であるとは線型写像 $\varphi:\ell_s^pE\to F$ があつて $f=\varphi\circ e$ と分解できることであると定義する. $P(E,F)$ を E から F への多項式写像の全体とし, $e^*: L(\ell_s^pE,F)\to P(E,F)$ を $e^*(\varphi)=\varphi\circ e$ と定義する. また $\overline{V(e(E))}$ を E の写像 e による像が ℓ_s^pE で張るベクトル空間の (ℓ_s^pE での) closure とする.

定理1. $\overline{V(e(E))}=\ell_s^pE$.

系. $e^*: L(\ell_s^pE,F)\to P(E,F)$ は isomorphism である

2. M を有限次元 compact 閉 C^∞ 多様体とし, ξ を M の上の (有限次元) hermitian vector bundle とする.

そのとき(無限次元) Hilbert vector bundle $L^2_s\xi$ を次の様に定義する: $L^2_s\xi = \bigcup_{x\in M} L^2_s\xi_x$, かつ ξ の unitary 変換から induce される $L^2_s\xi$ の変換の全体の群を $\mathfrak{G}$ とする.

各 $x \in M$ について $e_x: \xi_x \to L^2_s\xi_x$ が定義されるから, C^∞ bundle 写像 $e: \xi \to L^2_s\xi$ が induce される. 従って多項式 bundle 写像 $f: \xi \to \eta$ が上と同様に $f = \varphi\circ e$, $\varphi: L^2_s\xi \to \eta$ は線型写像, と表わされるものとして定義される.

同様に, $\bar{e}: C^\infty(\xi) \to C^\infty(L^2_s\xi)$ を $e: \xi \to L^2_s\xi$ から induce される写像とするとき $f: C^\infty(\xi) \to C^\infty(\eta)$ が(狭義の)多項式作用素であるとは, $f = \varphi\circ\bar{e}$, $\varphi: C^\infty(L^2_s\xi) \to C^\infty(\eta)$ は線型作用素, と分解されることであると定義できる.

以上の準備の下で Palais の "Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem" の第11章(の一部)をそのまま多項式写像の場合に直すことができる.

結果だけのべると

定理2. hermitian vector bundle ξ, η について symbol sequence

$$0 \to POP_{k-1}(\xi,\eta) \to PInt_k(\xi,\eta) \xrightarrow{\tilde{\sigma}_k} PSmbl_k(\xi,\eta) \to 0$$

は exact.

$Smbl_k(\xi,\eta) \subset PSmbl_k(\xi,\eta)$ が言えるから, $T \in PInt_k(\xi,\eta)$ が $\tilde{\sigma}_k(T) \in Smbl_k(\xi,\eta)$ のとき T は semi-linear であるということにすると, そのような T については ellipticity が線型写像の場合と同じに $\tilde{\sigma}_k(T)_x: \xi_x \cong \eta_x$, $\forall x \in M$, と定義できる.

定理3. semi-linear elliptic 多項式作用素は左 parametrix をもつ.

このことから次の形の regularity theorem が証明できる.

定理4. $T \in PInt_k(\xi,\eta)$ が semi-linear elliptic のとき, $f \in \mathcal{D}'(\xi)$ が $Tf \in C^\infty(\eta)$ をみたせば $f \in C^\infty(\xi)$ である.

なお, $C^\infty(\xi)$ は l.c. 空間と考えられるから, C^∞ 写像 $\hat{e}: C^\infty(\xi) \to \Pi^2_s C^\infty(\xi)$ が定義できる. 広義の多項式作用素 $f: C^\infty(\xi) \to C^\infty(\eta)$ を $f = \varphi\circ\hat{e}$, $\varphi: \Pi^2_s C^\infty(\xi) \to C^\infty(\eta)$ は線型写像, と表わされるものと定義すると, evaluation 写像 $ev: \Pi^2_s C^\infty(\xi) \to C^\infty(L^2_s\xi)$ が定義できるので, 上で定義した狭義の多項式作用素は下の意味でも多項式作用素になっている. 広義の多項式作用素についても上の様な regularity theorem が成立つかどうかは分っていない.

Foliated structures of codimension one

大和一夫

§0. 完全積分可能な1次微分形式の積分多様体の大域的なふるまいを知るひとつの方法を与えたい。それによって§1で fibre bundle に同型な foliation，§2で Reeb foliation すなわち有限個の compact leaf とそれらを極限集合としてもつ noncompact leaf からなる foliation，§3で Anosov foliation というべきもの，ほとんどすべての leaf が locally everywhere dense であるような foliation を考える。さて

V^{n+1} : $n+1$ 次元 compact C^∞ manifold，$\partial V = \phi$，

ω : V 上の nonsingular C^∞ one form，$\omega \wedge d\omega = 0$，

$\tilde{\omega} = L_X \omega$: ω の X に関する Lie 微分，但し V 上の vector field X で $\omega(X) = 1$ なるものをひとつ fix しておく。

$C = \{ x \in V \mid \tilde{\omega}_x(v) = 0 \text{ for } \forall v \in \omega_x^{-1}(0) \}$

とする。

C の点 p が transversal とは $L(p)$ 上の one form $\tilde{\omega}|_{L(p)}$ が p を nondegenerate な singular point としてもつときとする。($L(p)$ は p をとうる leaf.) transversal な p に対して その index を $\tilde{\omega}|_{L(p)}$ の p での Jacobian matrix の負の固有値の個数と定義する。そして

仮定: $C^- = \{ p \in C \mid p : \text{transversal でない} \}$ は有限集合とする。

$C^{(i)} = \{ p \in C \mid p \notin C^-,\ p \text{ の index は } i \}$

とおくと C は disjoint union

$$C = C^- \cup C^{(0)} \cup C^{(1)} \cdots\cdots \cup C^{(n-1)} \cup C^{(n)}$$

とかける。

§1. $C^{(n)} \neq \phi$, $C^{(n-1)} = \phi$ の場合. leaf L に対して L, $\tilde{\omega}|L$ に Morse理論を適用できるときがある. すると L の位相的性質がわかり V のそれもわかる. たとえば

定理1. $C^{(n)} \neq \phi$, $C^{(n-1)} = \phi$ のとき, V^{n+1} は S^1 上の compact fibre M^n の bundle に同型である. そして, $\pi_1(M) = 0$ で M^n の Euler 標数 $\chi(M)$ は $\{C\} \in H_1(V;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ に等しい.

解析的にいいかえると

系1.1. $C^{(n)} \neq \phi$, $C^{(n-1)} = \phi$ のとき nonzero C^∞ function $f: V \to \mathbb{R}$ と V 上の nonsingular one form ω_0, $d\omega_0 = 0$ が存在して $\omega = g\omega_0$.

系1.2. $C^{(n)} \neq \phi$, $C^{(n-1)} = \phi$, $\{C\} \neq 0$ ならば, Y を V 上の nonsingular vector field で $\omega(V)$ は nonzero なるものとすれば Y はつねに periodic solution をもつ.

さらに見方をかえると

系1.3. W^{n+1} : Riemann manifold, α : W上の nonsingular closed one form が与えられたとき $V = W$, $\omega = \alpha/\|\alpha\|^2$, $X = \alpha$ の dual vector field とおいて $C = C^- \cup C^{(0)} \cup \cdots \cup C^{(n)}$ を考える. そこでもし C^- が finite, $C^{(n)} \neq \phi$, $C^{(n-1)} = \phi$ ならば $H_1(V;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ が結論できる.

定理の証明には次のLemmaを用いる. 但し, これは簡単のため M^n を compact としている.

Lemma 1. M^n を compact n-manifold, $\tilde{\omega}$ を M^n 上の closed one form で singular point はすべて nondegenerate, しかも index $n-1$ の singular point はないが index n のは少くともひとつあるとする. このとき $\pi_1(M^n) = 0$.

§2. $C^{(n)}=\phi$, $C^{(1)}=\phi$, $C^{(0)}\neq\phi$ の場合. $\tilde{\omega}$ を $-\tilde{\omega}$ におきかえて Lemma 1 を用いると

定理2. $C^{(n)}=\phi$, $C^{(1)}=\phi$, $C^{(0)}\neq\phi$ ならば V は S^1 上の noncompact fibre M^n の bundle P^{n+1} に同型な leaf の family を含む. そして $\pi_1(M^n)=0$. もし P^{n+1} の limit set $\bar{P}-P$ が noncompact leaf を含まなくて, $C^{(n-1)}=\phi$ ならば

$$V=P_1\cup K\cup P_2,$$

ここで K は compact leaf で, $\pi_1(K)=\mathbb{Z}$ if $n\geqq 3$. そして $\lim P_i=K$, $i=1,2$.

Remark. 後半の $\bar{P}-P$ が noncompact leaf を含まないという仮定は必要なのかどうかわからない.

§3. $C=\phi$ の場合. codimension 1 の Anosov flow に associate した foliation は $C=\phi$ の例である.

定理3. $C=\phi$ なら ほとんどすべての leaf L に対して, L を含む open set O_L が存在して L は O_L で dense.

証明には次の Lemma が基本的である. これは $\tilde{\omega}$ からきまる, leaf に接する vector field Y の integral curve は どんなに長くても いつも一定の近くの leaf に lift できることを主張する. 正確にいうと, $\{\varphi_t\}$ を one para. tr. gr., $\dot{\varphi}_t=X$, Y を V 上の vector field で $\omega(Y)=0$, $\tilde{\omega}(v)=\langle Y, v\rangle$ $\forall v$: tangent vector, $\omega(v)=0$. 但し $\langle\ ,\ \rangle$ は V の Riemann metric. そして $\{\psi_t\}$ を one para. tr. gr. で $\dot{\psi}_t=Y$ とする.

Lemma 3. 定数 $\eta > 0$ が存在して次の条件をみたす.

$0 \leqq {}^\forall h \leqq \eta$, ${}^\forall p \in V$, ${}^\forall T \geqq 0$ に対して curve $c : [0, T] \to V$ が存在して

a). $c([0,T]) \subset L(c(0))$ $(= c(0)$ をとおる leaf$)$,

b). $\varphi_{\sigma(t)}(\gamma_t(p)) = c(t)$ とかける.

但し $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(0) = h$, $\sigma(0) \geqq \sigma(t)$, ${}^\forall t$.

$C \neq \phi$ のときもほとんど同じことが成立する. 実は定理1, 2の証明にはそれを必要とする. 正確には

Lemma 3'. 定数 $b > 0$, 定数 $\eta > 0$ が存在して次の条件をみたす.

$0 \leqq {}^\forall h \leqq \eta$, ${}^\forall T \geqq 0$ 及び piecewise differentiable curve $d : [0, T] \longrightarrow V$ で $d([0,T]) \subset L(d(0))$, $Y(d(t))$ は $\dot{d}(t)$ の nonnegative 倍, さらに $\mathrm{diam}(d([0,T])) > b$ なるものに対して curve $c : [0, T] \longrightarrow V$ が存在して

a). $c([0,T]) \subset L(c(0))$,

b). $\varphi_{\sigma(t)}(d(t)) = c(t)$ とかける.

但し $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(0) = h$, $\sigma(0) \geqq \sigma(T)$.

多様体上のVinogradの定理について.

池上宜弘 (名大教養)

Mを境界を持たないC^∞-多様体. R, R^nを各々1次元, n次元のユークリッド空間とする.

[定義] M上の <u>global (dynamical) system of C^r</u> とは, C^r-map $\varphi: M\times R \longrightarrow M$ で 1パラメーターグループとなるもの。

[定義] M上の <u>local (dynamical) system of C^r</u>.

$\mathcal{D}$を$M\times R$の部分集合でφを写像$\mathcal{D}\longrightarrow M$とする. φが次の条件をみたすとき これを local dynamical system of C^r $(0\leqq r\leqq\infty)$という.

0) $\mathcal{D}$は次の形の$M\times R$の開集合.

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x\in M}\{x\}\times(a_x, b_x),$$

$(a_x ; b_x)$は0を含む開区間.

i) $\forall x\in M.\quad \varphi(x,0)=x$

ii) $(x,t)\in\mathcal{D}, (x, t+s)\in\mathcal{D}, (\varphi(x,t), s)\in\mathcal{D}$
$\Rightarrow \varphi(\varphi(x,t), s) = \varphi(x, t+s)$.

iii) φはC^r-map.

iv) Mの任意のcompact set Kに対して, 次の様な$\varepsilon>0$が存在する. 即ち $\forall t > b_x-\varepsilon$ ($\forall t < a_x+\varepsilon$)に対して. $\varphi(x,t)\notin K$.

φを local system of C^{r+1}とする $(0\leqq r\leqq\infty)$. φはC^r級の接ベクトル場をきめる. 逆にM上にC^r級の接ベクトル場が与え

られたとする(但し $r=0$ のとき locally Lipschizian とする)
このベクトル場に対して一意的に local system が与えられる(M が compact の時は global system を与える)ことが知られている.
又、この local system は最初の接ベクトル場をきめる.

[定義] φ, ψ を各々 M, N 上の local systems とする. diffeomorphism $h: M \to N$ が存在して φ の orbit を ψ の orbit の上に方向を保存してうつすとき φ は ψ に equivalent であるといい, h を equivalence という.

[定理] φ を C^{r+1} 級の (non-compact) 多様体 M 上の local system で次の条件をみたすものとする.
 i) $1 \leqq r \leqq \infty$ 又は
 ii) $r=0$ の時は local Lipschitz condition を満たす接ベクトル場によって φ は与えられている.
 この時, M 上に global system ψ が存在して M 上の identity map が φ と ψ の間の equivalence となる.

M が R^n の開集合で $r=0$ の時に, この定理は R. E. Vinograd によって証明されている. [2].
S. Smale は [1] の中でこの定理が証明できる事を予想していた.

上の定理の証明は基本的に次の補題を使ってなされる.
[補題] M を m-manifold とし, n を十分大きな正整数とする. この時次の様な C^∞ 級写像 $h: M \to R^n$ が存在する
 i) h は regular embedding (即ち into isomorphism).

ii) h は proper map（即ち compact set の原像は compact）.

[注意] 上の補題に於て、実は $n = 2m+1$ で十分である。

補題の証明は H. Whitney の embedding による近似定理 [ ] を使ってなされる。

一般に non-compact manifold M の上でも

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y) \qquad i = 1, \ldots, m$$

の形の微分方程式がある時、これが力学系を与えなくても微分方程式の定性的な性質を調べるためには、同値な力学系について調べればよい事が、上の定理によって保証されるわけである。

References

[1] S. Smale, Differentiable dynamical system, Bull. of Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747–817.

[2] R.E. Vinograd, On the limiting behavior of an unbounded integral curves. (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 66 (1949), 5–8.

[3] H. Whitney, Differentiable manifolds. Ann. of Math. 37 (1936), 645–680.