序　　　　言

昭和三十五年九月十三日、十四日、十五日の三日間、神戸大学理学部数学教室の方々の御世話で第１０回位相幾何学Symposiumが開かれた。会場は六甲山上新三菱重工及び丸紅飯田の二つの寮を使うことができた。折り悪しく連日風と霧とに悩まされて神戸市の美しい夜景を見ることはできなかった。然しシンポジウムは午前も午後もギッシリつまったプログラムに従って熱心に進められた。集まった人々は東北大学から九州大学まで全国の各大学から約六十名、誠に盛会であった。

議題は第一部３－多様体、第二部Cohomology Operationであった。このシンポジウムの主旨はup to dateの研究よりも、専門でない人々にも分かる、やさしい話を主にすることであった。数学が分化発達して来た今日、相互に他部門の空気を知ることは意味のあることであるに違いない。

この本はそのときの講演の大要を、各講演者に執筆して貰ったものである。シンポジウムに参会しなかった方々に対しても、このような平易な叙述の記録は興味を以て読んで頂けると思い敢えて公刊した次第である。

１９６１年３月

位相幾何学分科会

小　松　醇　郎

目　　次

才 一 部　3-Manifold

才 二 部　Cohomology Operation

才 一 部

三 次 元 多 様 体

1.　３０年代の３－manifold

京大　　小　松　醇　郎

３－manifold の研究は最近続々と著しい結果が得られてきたが[1]、その多くは、３０年代に研究され問題とされていたものである。当時はdifferential Structure を問題とせず、ホモトピー群も基本群以外は使わず、Morse Theory も使わず、方法は多分に直観的であった。従って、やさしい（答な）のである。

当時の優れた研究者はH.Kneser,H.Seifert, K.Reidemeister などである。ここでは、３－manifold をどういう方法で研究し、どういう結果を得ていたかの大体を御話しする。

(1) manifold の定義

多様体の定義も当然色々のものがあり、３－manifold と限定しても、fundamental Conjecture[2] が予想であったし、統一されてはいない。これについてはH.Kneser（1926）の論文がより所であった。

イ）位相多様体．　Connected separable metric space で各点の近傍にE^n（ユークリッド空間）と同相なるものがとれる。

ロ）多様体　　Connected Complexで、各Vertex の近傍にE^nと同相なものがとれる。

ハ）ホモロジー多様体　　Connected Complexで、各Vertex の近傍複体（star）の境界のホモロジー群が球面S^{n-1}のホモロジー群と同型のもの。

などの定義が使われた。ロ）ならばイ）であるが、イ）はロ）であるかどうか分らない。イ）はロ）であるかどうかというのがTriangulations problem[3] であって、三次元以下の場合はイ）はロ）になる。またlocal ホモロジーの定理で、ロ）ならばハ）であるが、ハ）はロ）とは限らない。三次元以下のときだけハ）はロ）である。

純粋にCombinatorial な定義は、fundamental conjectureが肯定されるならば、次のようにできる。

ニ）Combinatorial 多様体　　Connected Complexで、各Vertex の star の境界がS^{n-1} 複体と equivalent であるもの。

1）田尾・斎藤・野口紹介文参照
2）これを最初に述べたのは Steinitz（1908）である。
3）田尾：紹介文参照

$n \geqq 4$では一般に fundamental Conjectureは成立しないらしい[3] から、同相でもCombinatorial manifold になったり、ならない分割になったりすることが起こる。$n=3$ではロ）とニ）とは同一の条件になる。

以下多様体はロ）の定義に従うことにする。

(2) ３－Manifold の Polyeder による表現

多様体で最も大切な性質は、御承知のように、双対分割（cell分割）がとれることであって、これからポアンカレーの双対定理が導かれる。

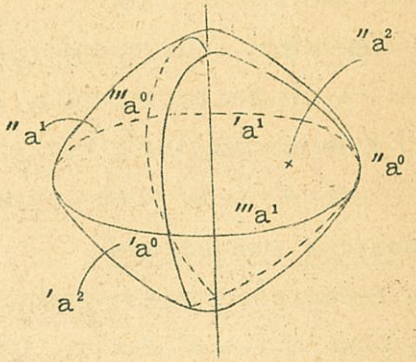
Connected３－多様体M^3(closed）で双対分割をとりD^3 としておく。D^3 の一次元複体D^1 の中にmaximal なtree B^1 をとる。D^1 で、B^1 に含まれない一次元 cellをb_1，……，b_r とすれば、b_i に対応する二次元単体（M^3 の）t_i^2 についてM^3 を切り開く。できる複体は、S^2 複体を表面にするCombinatorial ３－cellである。

逆にVollpolyeder の表面S^2 で、topological involutiveな Simplicial map φをとり、対応するSimplex を equivalentということにする。分割をすれば、一次元・二次元 Simplex は自分自身に equivalent とはならない。$'a_i^0$，$''a_i^0$，……が equivalent な Vertex とすると、これらを identify して一つの Vertex a_i^0 となる。equivalent を identifyしてできる複体をK^3とし、K^3 が manifold であるか否かを調べるには、Vertex a_i^0の近傍にE^3 がとれるか否かを調べればよい。

Th　上のK^3 がManifold であるための必十条件は、そのオイレル指標$\chi=0$ なることである。

ex. lens space.

赤道をP等分し、$'a^2$ を $\frac{2\pi q}{p}$（(p，q)＝1，$0 \leqq q \leqq p$）だけ回転する。そして上の$''a^2$ と identify する。生ずる多様体を（p，q）と表わす。



p＝2のときは射影空間、p＝1のとき三次元球面S^3 が生ずる。

lens space を最初に扱ったのはH.Tietze（1908）であり、それが同相であるため

の十分条件を出したのはW.Threllfall u. H.Seifert (1930, 1932), Goeritz (1933) である。またそれがCombinatorial invariant であることを示したのは、K.Reidemeister (1935), W.Franz (1935) である。三次元の基本予想がなりたつので、その条件はTopological invairant となる。即ち

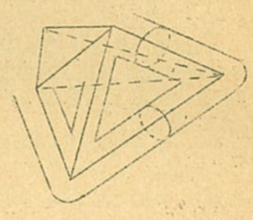
Th lens space (p, q), (p′, q′) が同相である為の必十条件は、p = p′, $qq'^{\pm 1} \equiv \pm 1 \pmod p$。

(q < 0 の場合は、逆の回転の向きと考える。q'^{-1} は $q'q'^{-1} \equiv 1 \bmod p$ なる整数とする)

(3) Heegaard Diagram

三次元多様体を分類するための手段として、Dehn-Heegaard による方法がある。

Th 任意のOrientable の 3-manifold M^3 は、二つの等しいgenus h の Vollbrezel をとり、その表面のtopological map φ で対応する点をidentify することによってできる。



M^3 の一次元Skeleton M^1 の近傍を Smoothに脹らませたもの$\overline{U(M^1)}$ は Vollbrezel である。$M^3 - U(M^1)$ はまた双対分割の D^3 中でD^1 の近傍$U(D^1)$ である。

M^3 のHeegaard Diagram の作り方は unique でないが、いろいろに作ったときgenus h の最小数h。をM^3 のgenusという。genus 1 の多様体をTorusmanifold という。lens space は torus manifold である。

M^3 の分類の問題は、equivalent な Heegaard Diagram を調べる問題になった。これについてH.Seifert (1931), L.Goeritz (1931)(1933), J.Singer (1933) K.Reidemeister (1934) などの多くの研究があるが、Genus h の曲面の map φ の分類であって、M^3 の分類にまでは達しない。

(4) Kneser's Conjecture

近来の3-manifold の注目すべき結果の多くは、問題の源はこのKneser の論文 (1929) である。Dehn の lemma[4]について、Dehn の証明の欠陥を最初に見付けたのはKneser であって、1928年9月18日、Hamburg で第90回の独逸科学者の会合での講演でそれを示した。Kneser (1929) の論文はDehn の lemma を仮定しその上で重要な概念、定理、Conjecture などを述べている。

4) 斎藤

定義 M_1^3 がM^3 のreductionであるとは、M^3 の中にSmoothにはいっているS^2でM^3 を切る。その二つのS^2 に、closed 3-cellを二つidentify してできるmanifold M_1^3 のことである。このM_1^3 がhomotopy sphere $\widetilde{S}^3$ と $\widetilde{M}^3$(M^3 と同じhomotopy type をもつ) とになるときM^3 のreduction trivialという。M^3 のreduction 常にtrivial のときM^3 はirreducible という。

Th 任意のclosed 3-manifold M^3にinteger $k \geqq 0$ が次のように対応する。M^3 にreduction k+1 回すると、少くとも一回はtrivial になる。k回のnon trivial reductionによってM^3 はirreducible manifold になる。

ex irreducible M^3 の例

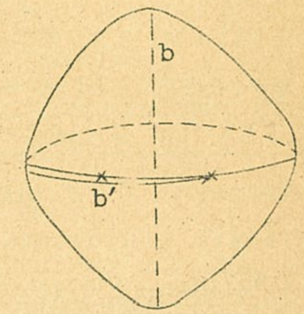
$S^1 \times S^1 \times S^1$; 基本群が有限群でCovering space が $\widetilde{S}^3$ となるM^3。

Milnor の分解定理[5] と少し異るのは、indecomposable と定義が少し違うためである。

定義 Symmetric な M^3[6] M^3 のOrientation をかえるような、自分自身の上へのtopological map ができるmanifold をいう。

ex asymmetric M^3 の例

lens space (3, 1) は asymmetric である。(3, 1) のOrientationをかえたlens spaceは (3, −1) である。(3, 1) と (3, −1) とは同相にならないことをいえばよい。



lens space (p, q) で、$H_1(M, Z) \ni b$ (base) の固有纏絡数Vを求める。赤道の$\frac{q}{p}$ 倍のcycle をb′ とすれば

$$b \simeq b' \simeq qa \quad (a = \text{赤道の}\frac{1}{p}\text{倍})$$

$$V(b, b') = \frac{1}{p} V(b, pqa)$$

$$= \frac{1}{p} \text{Schnitt}(h, qk^2) = \pm \frac{q}{p}$$

ここにk^2 は赤道で囲まれる二次元Chain である。±はOrientation によるので、一つにfix すれば

5) 斎藤文参照

6) asymmetric なM^3 を初めて見出したのもこの Kneser の paper (1929) である。

$$V(b, b') = \frac{q}{p} \pmod 1$$

$H_1(M, Z)$ の cycle よりできる纒絡数は

$$V(vb, vb') = v^2 \frac{q}{p} \pmod 1$$

に限る。このことは、符号を保ってhomotopy type等しいための必十条件である。

(3, 1) では纒絡数は $0, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \equiv \frac{1}{3}$ (1),

(3, −1) では $0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (1)

で異なる。

Kneser's Conjecture　Connected な M^3 の基本群が群 A, B の自由積であるための必十条件は、M^3 は S^2 によって二つの部分に分たれ、各部分の基本群は A, B であるようにできる。

(5) 最近の研究

最近の著しい結果としては、昨年のWallace の定理を述べねばならない。そのために modification を定義する。

定義　M^3 の中の Semi linear の一次元 closed curve C' をとり、その近傍複体 $\overline{U^3}(C')$ をとり出す。$\overline{U^3}(C')$ の境界は Torus である。残りと U^3 と、二つの Torus で、meridian と latitude circle とを完全に入れかえて identify する。生ずる manifold M_1^3 を modification of M^3 という。

Th　境界となる三次元 closed manifold (例えば closed orientable manifold) は S^3 から有限回の modification によって生ずる。

次に Symposium のとき、山菅弘氏によって紹介された Smale の論文, Generalized Poincaré conjecture の結果を述べる。

Th　M^nを closed differentiable C^∞ manifold とする。$n \neq 3, 4$ でM^n が homotopy sphere ならば、M^n は S^n と同相である。

$n = 3$ の場合、即ち有名な Poincaré Conjecture は矢張り未解決である。

2. 三次元多様体の組合せ的構造と微分可能構造

阪大　　田　尾　鶉　三

序.　ここでの話しの前半は

定理：　三次元多様体は三角形分割が出来、その仕方は本質的に一通りである。

を中心に semi-linear topology に関する戦後の発展の一面を紹介することが目的である。後半の目的は

定理：　三次元多様体には微分可能構造を入れることが出来、その入れ方は本質的に一通りである。

を一般多様体の微分可能構造に関する研究の一例として紹介することである。

高次元複体では三角形分割の一意性 (Hauptvermutung)が成立せず、又微分可能構造の存在性、一意性が共に成り立たないので上の結果は低次元特有の現象である。

なお後半の微分可能構造に関する事柄は、三次元の場合に関しては一般の多様体の場合に於ける特別な一例として発展したものであり、3−manifold の differentiable topology の展開は今後の問題であるため、些か三次元をこえてより一般的に話を進める。

I　組合せ的構造について

Topology を Combinatorial な方法で進めるときに、(この方面が Euclid space の affine structure と elementary geometric な image を基本的に使用するため近年 E.E.Moise はこの方面を Euclidean topology という。) 先ず出会う問題は、与えられた空間に対して Combinatorial な方法をつかい得るか否かということ、即ち triangulation problem である。

よりくわしくのべれば、或る space X が triangulable であるとは、或る locally finite simplicial complex K から X上への homeomorphism f が存在することを意味し、X上に更に他の triangulation (K_1, f_1) が与えられたときに、(K, f) の或る細分と (K_1, f_1) の或る細分が同型なるときに (K, f) と (K_1, f_1) は Combinatorial に equivalent であるという。なお triangulation (K', f') が triangulation (K, f) の細分であるとは、写像 $f^{-1} \circ f' : K' \to K$ が K' の各単体を K の或る単体の中へ linear にうつすことである。

かかるとき triangulation problem とは、或るspace X に対しtriangulation が存在するか。更にXの二つのtriangulation は Combinatorial に equivalent であるか。

ということである。後者は通常"Hauptvermutung"といわれている。

空間が三角形分割された後、その空間の中で Combinatoial な幾何を更に進めるために問題となることは、triangulated space (X；K，f) の如何なるsubset S (⊂X)がそのtriangulation に関して subpolyhedron と見做せるか、ということであろう。即ち如何なるときにXからXへの或る homeomorphism g が存在して $f^{-1}\circ g(S)$ がKの或る細分K′ のsubcomplex になるかということである。かゝるときにSはXに (K，f) に関して"tame に入っている"(tamely imbedded)といい、しからざるとき"wild に入っている"(wildly imbedded)という。こゝで注意すべきことは、tame, wild なる概念は"imbedding"の様子を表わす言葉であり、S自身は球面の如き簡単な図形であってもwildly imbedding のこともある。この問題をtaming problem とよぶ。

さて上記の二つの問題に対し3-manifold に対しては次の結論に達している。

定理： 任意の3次元多様体は三角形分割が可能であり、又二つの三角形分割は Combinatorially equivalent である。更に与えられたtriangulationによりCombinatorial manifoldになる。

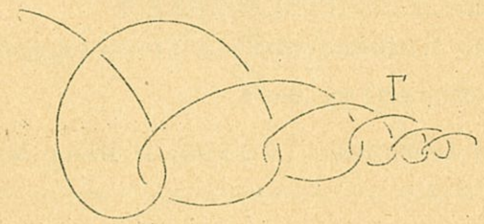
こゝに3-manifold とは separable metric space で各点でclosed 3-cellに同相な閉近傍が存在するものを意味し、或るComplex が Combinatorial n-manifold とは各vertex の star neighbourhood が n-simplex と Combinatorially equivalent なことをいう。

この定理は最初E.E.Moise〔7-V〕が1952年 boundary のない場合を証明した。更に1954年R.H.Bing〔2〕, E.E.Moise〔7-Ⅶ〕はboundaryのある場合に、boundary の triangulation が内部に拡張出来るという形で示した。更に1957年 J.R.Munkres〔8〕はManifold より一般なlocally polyhedral space X, 即ちseparable metric space で且どんな点x∈Xに対してもxの閉近傍$\overline{U(x)}$で3次元のpolyhedron に同相なものが存在する空間に対し定理の結論を導いている。標語的にいえば"locally triangulable ならば triangulable"ということで、これはS.S.Cairns が general triangulation problem と呼ぶものであり、

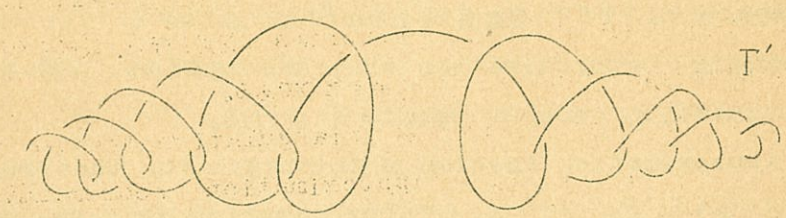
三次元空間に関するtriangulation problemの最終的答である。

次にtaming problem であるが、tamely imbedding という概念は案外掴みにくいものであることを1948年にE.Artin-R.H.Fox〔1〕は tame, wild という言葉をはじめて持出すと共に色々な例で示した。それが戦後のtaming theorems のはじまりでもある。しかしwild な現象は古く1920年代のはじめ、すでにAntoine , Alexander により見出されていた。以来色々のtaming theorems が考えられて、当時Complementary space の local な又global な homotopical properties が tame なる現象を characterize するのではないかと希望されるようになっていた。

Artin-Fox の例はその希望を全く無くするものであった。その一例は下図の如き三次元 Euclid space R^3 中のwildly imbedding な arc Γ である。



こゝでは$R^3-\Gamma$ がopen 3-cell に同相である。なおΓを対称的に結び付けた下図においては$R^3-\Gamma'$はSimply connected な open 3-manifold であるが3-cell に同相でない一例を与える。



Artin-Fox 以後急に多くのtaming theorems が America の Set-theoretic topologists により示されてきたが、その中心は1954年R.H.Bing〔2〕により、同時に又E.E.Moise〔7-Ⅶ〕により証明された次の定理である。

定理： 3-manifold Mの中のlocally tamely imbedded な閉集合Cは

tamely imbedded である。

こゝで locally tame とは、Cの任意の点xに対しMの閉近傍$\overline{U(x)}$ と $\overline{U(x)}$ のMの中への homeomorphism f_x が存在し、f_x ($\overline{U_x} \cap C$) がMの subpolyhedron になることである。

この定理以後 taming problem は locally tame な条件を見出すことが目的となっている。

さて上記の二つの問題の内容に立入ると、その本質は topological homeomorph と semi-linear homeomorph との相違を求めることに帰着する。それは次の近似の問題として捉えられる。

Approximation problem: Polyhedron P から polyhedron Q への homeomorphic mapping f が与えられたとき これを近似するPからQへの semi-linear homeomorph な mapping が存在するか。

こゝに Semi-linear homeomorphism とはPの或る細分からQの或る細分への simplicial homeomorphism をいう。

この Problem に対する最終的結果は１９５９年R.H.Bing [3]により得られた次の近似定理である。

定理: Mを triangulated 3-manifold, $\phi(x)$ をM上の positive continuous function とする。任意の polyhedron P からMへの任意の homeomorphism f に対し、PからMへの Semi-linear homeomorphism g が存在し dist $(f(x), g(x)) < \phi(f(x))$。

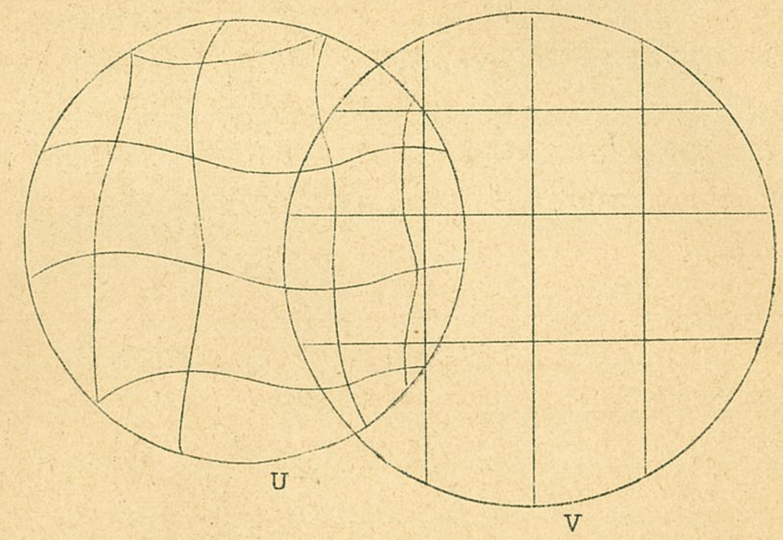
この定理の特殊の場合は１９５０年以来種々与えられていた。Moise も 1951 年にはじまる一連の仕事[6]で種々の approximation theorems の証明を行い、最後にそれらを使って triangulation problem の解決に至ったのである。

さてこゝで approximation theorem が triangulation theorem に対し基本的であることを今少しくわしくのべる。先ず approximation theorem においてPをMの他の triangulation, f を identity mapping と考えれば、それは Hauptvermutung をより強い形でのべていることになる。次に Hauptvermutung → Triangulation の過程は、local に出来る triangulation を Hauptvermutung を使って縫い合わせてゆくのである。

そこで“3-manifold 上の二つの open sets U, V と各々の triangulation

T_1 , T_2 があるときに U∪V も亦 triangulable である”ことを示せばよい。

Uの triangulation T_1 はVの triangulation T_2 からみれば polyhedral でなく curvilinear にみえる。下図を見よ。



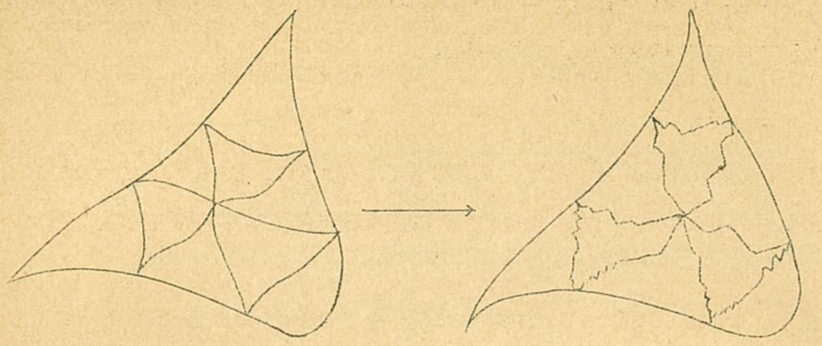
そこでU∩Vに対し approximation theorem (強い意味の Hauptvermutung) を使ってT_1をT_2から見ても semi-linear な如くに、且U∩Vの boundary では T_1 , T_2 と一致する如くT_1のU∩V内の部分を近似することにより上記の問題を解決する。

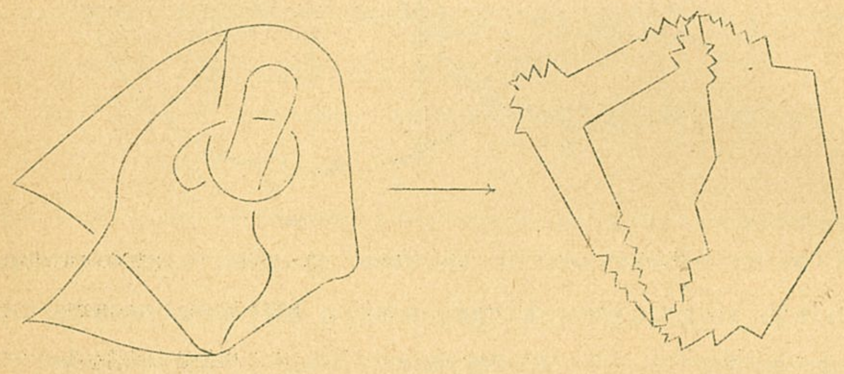
さて approximation theorem であるが、Pの2-skeleton に対する近似が出来たとすれば、Pの3-simplex σに対しては次の如く考えればよい。$f(\sigma)$はMのある Coordinate neighbourhood U_σ (R^3 に同相) に入っていると考えるならば $g(\partial\sigma)$ はすでに polyhedral であるから、Alexander の定理により $g(\partial\sigma)$ の内部は combinatorial open 3-cell になる。従ってPの2-skeleton に対する近似gは自然にσへ拡張される。

2-complex C に対する approximation theorem は次の如く進められる。Cを充分細かく単体分割しておくとCの simplex はfによってMの或る Coordinate neighbourhood に入るものと考えてよく、従って Euclid space への写像を近似するとしてよい。最初Cの open 2-simplex 上で semi-linear に直し 1-skeleton ではfと一致させることが出来る。

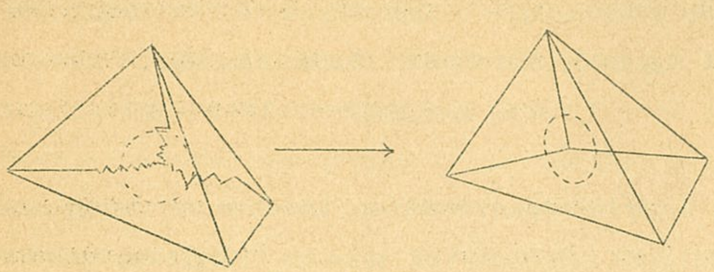
次いでCの各 open 1-simplex のごく近くで変形を行い各 open 1-simplex 上

でsemi-linear に直し、各Vertex ではfと一致さすことが出来る。





かくてfは各頂点を除いてsemi-linear map に変形されるが、最後にCの各頂点でsemi-linear になる様に各頂点の近傍で上記のmapping の変形を行うわけである。



以上の各段階で本質的に使うのはAlexander の定理とJordan-Shoenflies の定理である。

さてAlexanderの定理であるが、それはEuclid 空間中の球面の位置に関する定理であ

り、一般にはSchoenflies' Problem と呼ばれているものの三次元の場合である。この問題は上に見られる一例によってもわかる如く、simplex の変形を取扱うsemi-linear topology においては、いつも基本的役割を演じている。又最近この問題に対して著しい進歩が見られたのでこれを解説する。

Schoenflies' problem は、そういう名で呼ばれるように、Schoenflies により今世紀の始め平面上のJordan curve の場合に種々研究されて当時次の結果に達していた。

“S^2 の中のS^1 のtopological imageはS^2 を二つのopen 2-cell に同相な領域e_1, e_2 に分け$\bar{e}_1 \cup \bar{e}_2 = S_2$, $\bar{e}_1 \cap \bar{e}_2 = S^1$。”

その後この定理の“Jordan の定理”(平面上のJordan curve は平面を二つの領域に分ける。)に相当する部分はBrouwer, Alexander によりAlexander's duality theorem とよばれるものまでに一般化されたがSchoenflies の定理に関してはしばらく何の結果もない。1921年になってAntoine はR^3 中のtopological 2-sphere で二つのcell に分けない例を作った。次いで1924年Alexander が今日Alexander's horned sphere とよばれるwildly imbedded な2-sphere をR^3 中に作ったが、同時にAlexanderはS^3 中のpolyhedral 2-sphere はS^3 を二つのtopological 3-cell に分けることも示した。以来Schoenflies problem は次の如くのべられている。

Schoenflies problem: n次元Euclid 空間中にCombinatorial(n−1)-sphere が入っている場合、そのbounded Component は topological n-cell か。更に強くCombinatorial n-cell か。

戦後この問題は前にのべた如くArtin-Fox のwild examples に始まる。1950年W. Graeub [5] は強い意味のSchoenflies problem を$n=3$ の場合に証明し、次いで1952年Moise [6-II] が同じ結果を示してTriangulation problem の足固めとした。1959年に至りB. Mazur [6] が次のことを示した。

fはS^{n-1} のR^n へのhomeomorphismで次の条件を充す。

(i) F: $S^{n-1}\times[0,1]\to R^n$ なるhomeomorphism が存在し

$F(x\times\frac{1}{2}) = f(x)$

(ii) Fは$S^{n-1}\times[0,1]$ の少くも一点の近傍でsemi-linear である。

このときf (S^{n-1}) によって分けられるR^n のbounded Component の closure は topological n-cellである。

更に1960年になりM.Brown (4) は条件(ii)を落すことに成功した。証明はいずれも極めて初等的で簡単なものである。

Schoenflies problem はなお条件(i)とfがsemi-linear imbeddingであることが同値か、更にbounded Component が Combinatorial n-cellになるか、という問題をのこしている。これに関しNewman (9)はfがsemi-linear の場合にB.Mazur と同じ結論を導いている。

以上Triangulation problemで本質的部分はΔ^m (m-simplex)→imbedding →R^n(n次元 Euclid 空間) に対するsemi-linear approximationの問題であり、その一部はSchoenflies problemによっていたのであるがSchoenflies problem が可成り肯定的に解かれてきたにもかゝおらず、最近Mazur-Milnor は高次元Complex では Hauptvermutungが成立たないことを示している。

II 微分可能構造について

Differentiable manifold の概念は周知とする。differeutiable manifold M^n の triangulation (K, f) がC^∞-triangulation であるとは、Kの各n-simplex σ上にfを制限したとき $f|\sigma$が微分可能写像で且Jacobian の rank がσの各点でnなることをいう。又かゝるときMのdifferentiable structure は (K, f)にCompatible であるという。こゝで問題にすべきことは位相多様体に対する微分可能構造の存在性とその分類、更にCombinatorial manifold に対する Compatible differentiable structure の存在性とその分類である。

最初のこ問題を一般的に考えたのはS.S.Cairns (1) である。彼はdifferentiable manifold に対する triangulation problemが完了した1940年頃topological manifoldのtriangulation problem はそれにdifferentiable structureを入れさえすればよいことをのべ、この問題をregularity problem とよんだ。またregularity problem は triangulation problem よりむしろ深い問題でありCombinatorial manifold に differentiable structure を入れることの重要性をのべた後、自らそれを遂行し、n≦4の場合にこの問題を肯定

的に解決した((1)(2))。その基礎は次の定理である。

定理: Euclid 空間R^m 中にnormal position にあるtopological manifold M^n はR^m 中のM^nと同相なanalytic manifold で近似することが出来る。

こゝに"normal position にある"ということは、Mの各点xに対し、その点を通る(m-n)-plane $\pi(x)$ が存在し、

(1) $\pi(x)$はxの (Mにおける) 近傍の相異なる二点を通る各直線と或る正の角より大きな角をなし

(2) $\pi(x)$はxと共に連続に変化する。

ことを意味する。簡単にいえばnormal plane に相当するものが存在することである。

この定理は1936年 H.Whitney (14) が differentiable manifold に analytic structureを入れる際に用いたものであり、唯 H.Whitneyにあっては"topological"が"differentiable"であり"normal position"が"differentiable imbedded"とするだけである。

さてCombinatorial manifold を Euclid space へ normal position にはめ込む問題であるが、容易にわかる如く、semi-linear にはめ込むだけでは一般に normal position にはない。又かゝる imbedding が可能な場合には、各頂点の star は同次元のEuclid 空間の中へ simplicial に実現されねばならない。この条件を充す Combinatoial manifold を S.S.Cairns は Brouwer manifold と名付けた。所で逆にBrouwer manifold の各頂点のstar は或るEuclid space の general position におくならば容易に其の頂点では求める"normal plane" が存在することがわかる。そこでBrouwer manifold を Euclid space 中のかゝる位置におくとき各頂点に立てられた normal plane をつぎ合せて全体に extend 出来るであろうとS.S.Cairns は考えた。事実n≦4の場合このことに成功し、又当時J.H.C. Whitehead (12)がCombinatorial manifoldは Brouwer 分割可能なることを示したことと共にしてn≦4の場合Combinatorial manifold に Compatible differentiable structureを入れ得ることになった。

其の後しばらくこの問題はあまり取り上げられなかったが、戦後Characteristic class の位相不変性等の問題と結びついて再び意識されるようになり、1956年J.Milnor がS^7 に相異なる differentiable structure が多く存在すること((4),(5))、更

にこのdifferentiable structure の differentiable triangulation は通常のS^7 に Combinatorial equivalent であることを示して以来、急に発展しはじめた。即ち同じ頃、R.Thom [9] は Combinatorial manifold に Pontrjagin class を定義してPontrjagin class の位相不変性の問題を取りあつかっていたが、彼は MilnorのS^{7}より作られる或る8次元 Combinatorial manifoldに対しこのPontrjagin class を計算してみると、それは決してCompatible differentiable structure からは出てこないものであることを発見した。即ちCompatible differentiable structure を有しない combinatorial manifold を見付け、このmanifold に differentiable structure が入ればHauptvermutung がこの manifold で成立しないことを示した。

更にR.Thom([10], [11])は Combinatorial structure に Compatible な differentiable structure の存在と分類の問題を組織的に考え obstruction theory と結びつけることにより Contractible combinatorial manifold には Compatible differentiable structure が唯一に存在することを示している。

一方J.R.Munkres は 1955 年のThèseで 2-manifold の differentiable structure の一意性を証明していたが、この考えを発展させR.Thom と本質的に同一の理論を作り、且それに基いて3-manifold の differentiable structure の一意性を示した。[7]

なお Thom-Munkres の理論は先にのべたCairns の考え方を、よりintrinsic にのべているとも考えられ、事実 J.H.C. Whitehead [13] は Cairns の考え方に忠実に従って同じく3-manifold への differentiable structure の uniqueness を示している。

以下 J.R.Munkres の考え方に従い上記のことをよりくわしく説明する。

M, Nをn次元 differentiable manifolds, その differentiable triangulations は Combinatorially equivalent であるとする。MからNへのSimplicial homeomorphism をfとすればfはMの各 open n-simplex 上では differentiable である。次にfを各 open (n−1)-simplex の近傍で変形して各open (n−1)-simplex 上で differentiable になおす。このように次第に次元を下げてfをM→Nのdifferentiable homeomorphism に変える方針で

あるが、問題となるのはその際のobstruction である。なおfは一度変えられると最早 simplicial map でなくなるために induction の仮定に於てfに対する条件をより一般的にしておく必要がある。その概念は" diffeomorphism mod L" ということである。こゝにLはMのm-skeletonを示す。

homeomorphism f: M→Nが diffeomorphism mod L であるとは次の条件を充すことである。

(1) fはLの各closed simplex の上でC^2-diffeomorphism

(2) f^* はLのtangent vector を1対1に写す。

(3) Lのsimplex をσとするとき、$\bar{\sigma}$、$f(\bar{\sigma})$がそれぞれ座標近傍に入る程Mの分割は細かい。

(4) fはM−L上でdifferentiable であり|Df|は bounded. こゝに Df はfのJacobian matrix。

(5) Lのsimplex をσとしσの近傍Uのlocal coordinates をzとするとき

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}(p)-\frac{\partial f}{\partial z}(g)\right]/\|p-q\|,\quad [f(p)-f(q)-Df(p)\cdot(p-q)]/\|p-q\|^2$$

はbounded である。こゝに$q\in\sigma$, $p\in U-L$。

f: M→Nをdiffeomorphism mod L^m としたときに、g: M→N, diffeomorphism mod L^{m-1},を見出すためのobstruction は次の如きものである。

S^{n-1}の自分自身へのorientation preserving diffeomorphism の全体をDif S^{n-1}とすれば、DifS^{n-1}のelement で closed unit ball の diffeomorphism まで extend 出来るものはDifS^{n-1}の normal subgroup をなすがそのfactor group をΓ^nと記す。Γ^nはabel群である。

さて$\sigma\in L$ と f(σ)は各々local coordinate system に入っているものとし、P をp∈σに於てσに orthogonal な (n−m)-plane とする。fをPに restrict し、更にf(P)をf(σ)にorthogonal な plane Q に projectionすればp∈σの近傍に於てこのmap g は diffeomorphism mod p である。

S_p をpを中心とするP中の半径が充分小さい(n−m−1)-sphere とし、$S_{g(p)}$をg(p)を中心とするQ上の unit (n−m−1)-sphereとする。g(S_p)をg(p)より中心射影することにより $S_p-S_{g(p)}$ なる diffeomorphism が得られる。これはΓ^{n-m} の元と見做せる。かくてfとm-simplex σに対しΓ^{n-m}のelement が対応するがこれはMのΓ^{n-m}-係

数のcycle λf になる。そのhomology class をfのobstruction classと呼ぶ。このとき

定理： $f: M \to L$ をdiffeomorphism mod L^m とする。$\lambda f = 0$ であればfはdiffeomorphism mod L^{m-1} $g: M \to L$ で近似することが出来る。又 $\lambda_{m-1} g$ が C_{m-1} にhomolog であればgはdiffeomorphism mod L^{m-1} $h: M \to N$ で $\lambda h = C_{m-1}$ なるhで近似出来る。

Munkres はこゝで $\Gamma^n = 0$, $n \leqq 3$ なることを示すことにより3-manifold のdifferentiable structure の一意性を証明したのである。

Γ^n については更に最近Milnor [6] による著しい結果もあるが、高次元の事に属するのでこの辺で話しを終りたい。なお最近になって微分可能構造を持たない高次元多様体がS. Smale [8] M.Kervaire [3] により見出されている。

References

I 組合せ的構造に関するもの。

1. E.Artin-R.H.Fox, Some wild cells and spheres in three dimensional space. Ann.Math.49 (1948) .
2. R.H.Bing, Locally tame sets are tame. Ann.Math.59 (1954) .
3. ________ , An alternate proof that 3-manifolds can be triangulated. Ann.Math. 69 (1959) .
4. M.Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem. Bull.Amer. Math.Soc. 66 (1960).
5. W.Graeub, Die Semilinearen Abbildungen. Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. (1950) .
6. B.Mazur, On imbedding of spheres. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1959) .
7. E.E.Moise, Affine structures in 3-manifolds, Ann. Math., I, 54 (1951) , II, III, IV, 55 (1952) , V, 56 (1952) , VI, VII, 58 (1953) , VIII, 59 (1954) .
8. J.R.Munkres, The triangulation of locally triangulable spaces. Acta Math. 97 (1957) .

9. M.H.A.Newman: On the polyhedral Schoenflies theorem. (to appear in Proc. Roy. Soc.)

II 微分可能構造に関するもの。

1. S.S.Cairns, Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds. Ann. Math.41 (1940) .
2. ________ , Introduction of a Riemannian geometry on a triangulable 4-manifold. Ann.Math. 45 (1944) .
3. M.Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comm. Math. Helv. 34 (1960) .
4. J.Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann.Math. 64 (1956) .
5. ________ , On the relationship between differentiable manifolds and Combinatorial manifolds. Princeton Univ. (mimeographed note 1956) .
6. ________ , Differentiable manifolds which are homotopy spheres. Princeton Univ. (mimeographed note 1959)
7. J.R.Munkres, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms. Ann.Math.72 (1960) .
8. S.Smale, The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions. Bull.Amer.Math. Soc. 66 (1960) .
9. R.Thom, Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Topologia Algebraica (Proc. of symposuim), Mexico 1959.
10. ________ , Les structures differentiable des bouls et des spheres. Colloque de Géométrie différentiable globale. (C.B . R.M.) 1958.
11. R.Thom, Des variétés triangulées aux variétés différentiables. Proceeding of International Congress of Math. (Edinburgh 1958)

12. J.H.C.Whitehead, Note on manifolds. Quart. J.Math. (Oxford) 12 (1941).

13. ____________, Manifolds with transverse fields in Euclidean space. Ann.Math. 73 (1961).

14. H.Whitney, Differentiable manifolds. Ann. Math. 37 (1936).

3. 3次元多様体研究の基本的定理とその応用

阪市大　　斎　藤　喜　宥

こゝで述べるのは、3次元多様体の位相的研究についての基本的方法並びにその分類について得られている最近の結果についてである。そこで3次元多様体を考える前に2次元多様体について考えてみると、この位相的分類はすでに以前から知られている様に、2次元の円板の周を適当に同一視する事によって得られ、逆に2次元多様体をこの様な円板に切開くには、その多様体の1次元のホモロジーの元を与える円等で切開いてゆけばよい。そこで3次元多様体においてもこれに似た方法をとる事が考えられる。3次元多様体の中で或る種の性質をもつ様なregular な部分多様体をとる事ができるという、共通の形をもった次の三つの定理が重要になる。

1) Sphere theorem (Dehn, 1910): Mを3次元多様体で$\pi_2(M) \neq 0$ とするならば、Mの中に2次元球面と同相なSがsemi-linearlyに存在し、$S \neq 0$ ($\neq 0$ はホモトピー零でない)

2) Dehn's lemma: Mを3次元多様体とし、この中に存在するCが閉じた単純なpolygonal curveで、ある円板と同相なDの境界になっている。たゞしDには特異点があってもよいが、その特異点はCの近傍にはないとする。この様なCに対しては適当な円板D′が存在し、D′は境界は同じCであるが、D′には特異点がない。

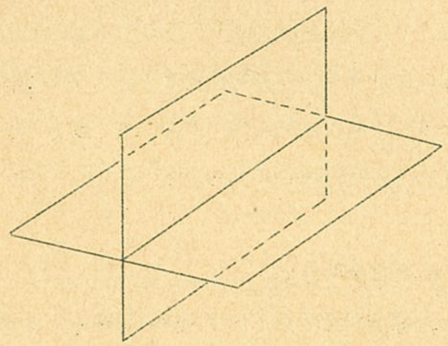
3) Loop theorem. Mを3次元多様体でMの境界を$\partial M = N$とし、N′をその連結部分とし、その部分開集合Uの中にいくつかの閉曲線（交点があってもよい）、よりなるLoop Lがある。今$L \simeq 0$ in Mで$L \not\simeq 0$ in Nとすると、同じUの中に（交点のない）単純なLoop

L_0で$L_0 \simeq 0$ in M, $L_0 \not\simeq 0$ in NなるL_0が存在する。

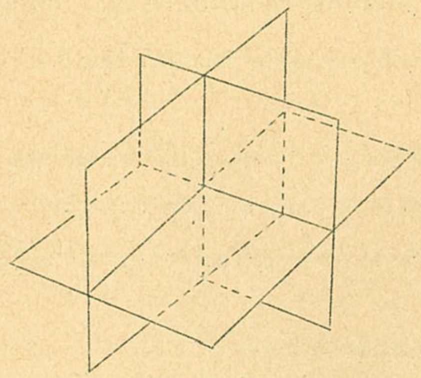
以上の三つの定理は夫々最近にPapakyriakopoulos (1957−58) によって証明されたが、その証明は さらにJ.H.C.Whitehead (1958) らにより更に簡単にされた。こゝではWhitehead の証明により Dehn's lemma を証明し、更に3次元多様体について、それ等の定理の応用についてのべてみる。

今与えられた単純閉曲線Cが一般に特異点をもつ円板Dの境界になっているが、その特異点はCの近傍には現われない。そこで今Dの特異点について考えてみると、

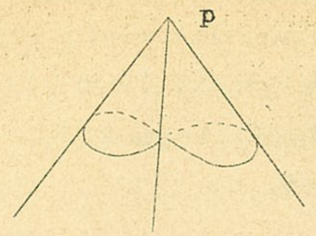
i) Double line. Dの自己交点よりなる曲線



ii) Triple point. double line の交点



iii) Branch point. double line の折返し点



今Dの特異点として上の三種しか現われない時Dをnormal disc と呼ぶ。すべてのDehn disc としては与えられた円板を少し変形してやればnormal disc をとる事ができる。もしnormal disc が branch point をもたない時それをcanonical disc と呼ぶ。

今Dに対して、$D\subset V\subset M$ なる境界をもった3次元多様体Vを次の様に定義する。Mを十分細分し、D，Cはその部分複体になっているとし、Dの単体を面にもつMの3次元単体の集りをVとする。$\partial V\supset\partial D=C$，でDはVのdeformation retract となる。

そこで場合を二つに分ける。

1）Vには double covering が存在しない。

この時Vはorientableになる。何故ならVがnon–orientable とすると、$\pi_1(V)\neq 0$で $\alpha\in\pi_1(V)$で αに沿ってorientation が逆になるαが存在するが、αのorder は偶数又は∞になり、しかも$\pi_1(V)$の commutator には含まれないので、$\pi_1(V)\xrightarrow{\nu}H_1(V)\xrightarrow{p}Z_2$ で $p\circ\nu(\alpha)\neq 0$ なるpが存在する$p\circ\nu$のKernel で V の universal covering を identify して得られるVのcovering は double covering になる。

次に∂Vは2次元の閉多様体で orientable になるが、これが2次元の球面の集りである。何故なら此の様なVを二つとりこれをその境界ではり合せると、閉じた3次元のorientable な多様体V_2ができる。このEuler charactor $\chi(V_2)=0$。一方 $\chi(V_2)=2\chi(V)-\chi(\partial V)=0$ $\therefore\chi(\partial V)=2\chi(V)$.

今$\partial V=\bigcup_{i=1}^{r}W_i^2$ としh$_i$ をW_i^2 のgenus とすると

$$\chi(\partial V)=\Sigma(2h_i-2)=2\Sigma h_i-2r.$$

$$\therefore\chi(V)=\Sigma h_i-r=p_1(V)-p_2(V)-1.$$

所でW_i^2 ($i=1,\cdots r-1$)は$H_2(V,Z)$ で一次独立であるから、$p_2(V)\geqq r-1$，故に$p_1(V)\geqq\Sigma h_i$.

もし$p_1(V)\neq 0$ なら、前と同様にVにはdouble covering を作る事ができるから、

$p_1(V)=0$ で $\Sigma hi=0$， 故にすべてのW_i^2は2次元球面である。

所がCは∂Vの上にあるのだから明かにCを境界にもつ特異点のない円板D_0が存在する。

2）Vがdouble covering をもつ場合。

この場合は次の様な段階に分けて証明する。

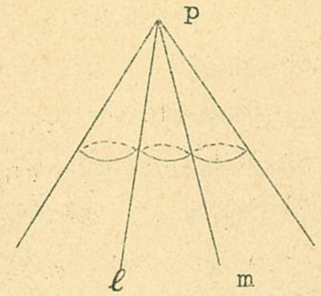
i）MのDehn curve C に対するDehn disc として Canonical なものを取る事ができる。

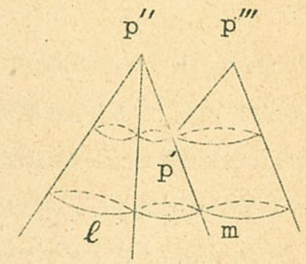
ii）canonical disc では double line はいくつかの円の集りになっている。その数をd(D)とする。今Vのdouble covering をV_1 とし、C_1，D_1 を夫々C，Dを cover するものとすると $d(D_1)<d(D)$ となる。

iii）今上のC_1 がもし特異点のない円板の境界になっていればCもそうなる。

以上の三つが示されると、与えられた、M，C，D，VからVのdouble covering を何回かとって行くと、もう double covering がとれないか又は$d(D_n)=0$となる。いずれの場合でもそれはV_n でDehn′s lemmaがとけた事になり、iii)から最初のCで問題がとけた事になる。

i）を示すため、今branch point p に multiplicity m(p) を定義する。今pの近傍Uをとり、$\partial U\cap D$を考えるとこれは自己交点をもつ曲線になるが、その数をm(p)とする。そこでm(p)>1なる点の近傍でDを変形してm(p′)=1なる点ばかりにしてしまう。m(p)=2の時ならDを次の様に切開けばよい。



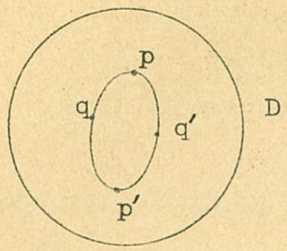


$m(p')=m(p'')=1$

この時左ではpの近傍は円板からの像であるが、右図でもやはり円板からの像である事がわかる。

そこですべてのbranch point p が m(p)= 1 になったとし、今一つの点から切開きを行なうと最後に又branch point p′につき当る。そこでこれを元のdisc で考えてみ

ると元の disc の中に circle があってその円の二点を除くと下図の様に q, q' がMの中で同一の点に写されている。



こゝで $\widetilde{pqp'}$ と $\widetilde{pq'p'}$ がMの一つの double line を形成している。今 $pqp'q'p$ でかこまれた領域を除き q と q' を同一視してできる円板 D' を考え、そのMの中の像を同じ D' とすると $\partial D' = C$ である。これを繰返すとDのすべての branch point はなくなる。

ii) 今 Dehn disc Dは2次元円板 $\triangle^2$ の f − image とし V_1 をVの doudle covering, D_1 をDを cover するものとする。

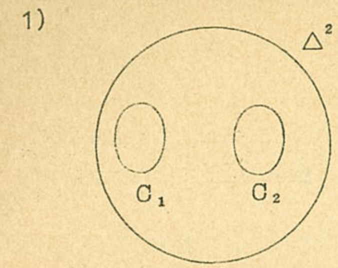
$$\begin{tikzcd} & D_1 \subset V_1 \arrow[d, "p"] \\ \triangle^2 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"'] & D \subset V \end{tikzcd}$$

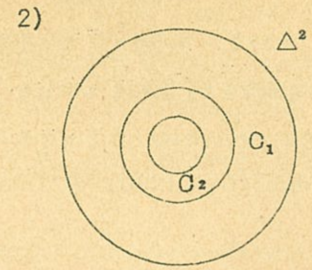
$\partial D_1 = C_1$ とする。C_1 は単純閉曲線で、D_1 は Dehn disc。

今Dが canonical とするとpは局所同相だから、D_1 も canonical. そこで V_1 に $p \circ \tau(x) = p(x)$ なる様な non-trivial な変換 τ が存在するが、$p^{-1}(D) = D_1 \cup \tau D_1$。所がDはVの deformation retract だから、$p^{-1}(D)$ は V_1 の deformation retract で V_1 が連結な事より $p^{-1}(D)$ も連結になる。それ故 $D_1 \cap \tau(D_1) \neq \phi$。今 D_1 と τD_1 は一般の位置にある様にできるから $D_1 \cap \tau D_1$ は有限個の閉曲線になる。これをpでDに射影してみると、Dの double line のはずだから $d(D_1) < d(D)$。

iii) 記号は ii) と同じとし、もし D_1 が特異点をもたないならpは局所同相で二重被覆だからDには branch point も triple point もない。すると $(\triangle^2\ f)$ で $\triangle^2$ には有限個の円の pair が存在し、それ等は互いに交わらず、その pair はfによりMの同じ円に写る。

今一つの pair を C_1, C_2 とすると、その互いの位置は二つの場合がある。





1) の時は $\triangle^2$ を C_1, C_2 で切開き C_1 の点 p_1 に対応する二点を夫々 p_1', p_1'' とし、同様に C_2 の点 p_2 に対応する点を p_2', p_2'' とし、$f(p_1) = f(p_2)$ なる時に p_1' と p_2'', p_1'' と p_2' とを同一視する。

2) の時は C_1, C_2 でかこまれた領域を $\triangle^2$ より取さり p_2' と p_1'' を同一視する。

以上の様に Dehns lemma の証明ができるが、Sphere theorem の場合にはCを一点と思えばよいがこの時は作り変えた2− sphere が常に $\neq 0$ なる条件を満たしていなければならないので、証明はその点に注意して行なわれなければならない。

次に Sphere theorem の応用として Milnor の分解定理についてのべる。

今 M_1, M_2 を orientable なn次元多様体とし、M_1, M_2 の中に夫々 n − cell U_1, U_2 をとり、$M_i - U_i$ をこの境界ではり合せる事によって一つの新しい orientable なn次元多様体ができこれを $M_1 \# M_2$ で表わす。

次に二つの多様体M, Nが Congruent $M \sim N$ というのは夫々 homotopy sphere M', N' が存在して $M \# M'$ と $N \# N'$ が同相になる事とする。

一つの多様体Mが decomposable とは M_1, M_2 なる homotopy sphere でない多様体が存在し $M \sim M_1 \# M_2$ なる事とする。

Milnor の分解定理

すべての orientable なる3次元の閉多様体は順序と Congruent を除けば一意的に indecomposable な多様体に分解できる。

次に orientable なる3次元の閉多様体が indecomposable ならばそれは次の様な多様体と congruent になる。

1) Homotopy sphere

2) $S^1\times S^2$ (S^i は i 次元球面)

3) Aspherical: $\pi_2(M)=0$ なる多様体

4) 空でない有限群を $\pi_1(M)$ にもつ多様体

証明は Sphere theorem によって得られる $\pi_2(M)\ni\alpha\neq 0$ を表現する2次元球面で切開く事によって得られるが、田尾氏が阪市大の位相数学講究録に書かれるのでそれを参照されたい。

4. 3次元多様体の2，3の話題

早大 野口 宏

第Ⅰ部で最近の著しい理論発展の手掛りとなったExmples を第Ⅱ部で S^n in S^m の imbeddings の研究の現状をのべる。

Ⅰ. Examples

1.1. J.H.C.Whitehead の例

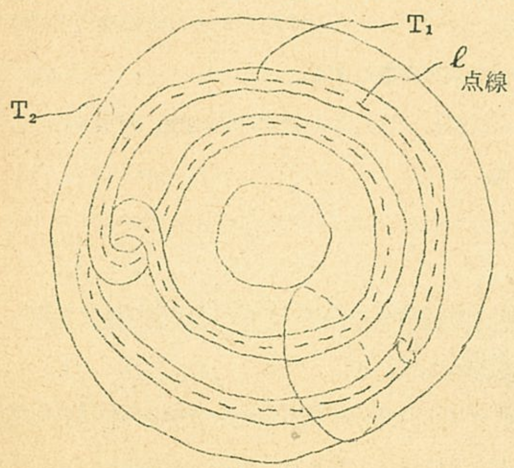
彼は[1]で次の如くして3-space E^3 の Connected open subset Uを定義した。T_1, T_2 が1図のsolid tori in E^3, $h: E^3\leftrightarrow E^3$, onto homeomorphism で $h(T_1)=T_2$. このとき

$U=T_1\cup h(T_1)\cup h^2(T_1)\cup\cdots\cdots$

を定める。

$U_n=T_1\cup h(T_1)\cup\cdots\cup h^n(T_1)$

とおくと $U_n=h^n(T_1)$ はsolid torusで $H_2(U_n)=0$ 又 $\pi_2(U_n)=0$ 従って



1 図

$H_2(U)=0$, $\pi_2(U)=0$.

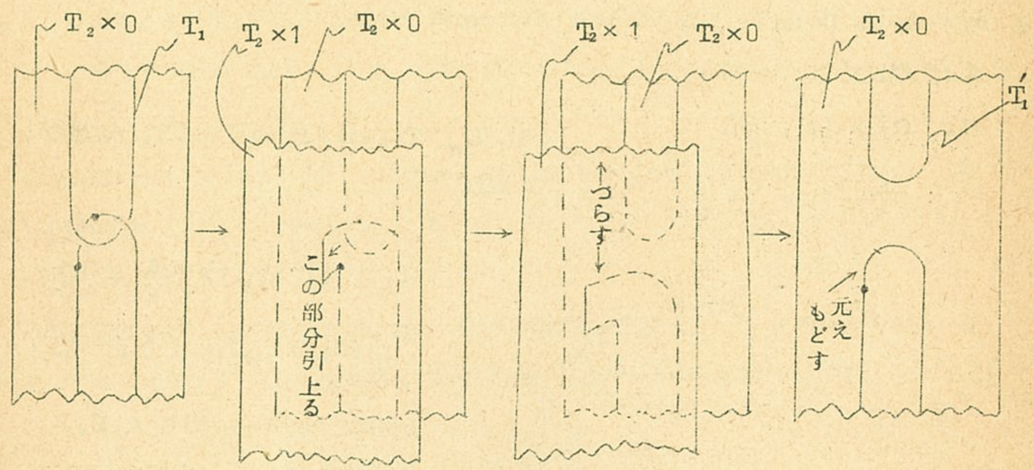
T_1 のclosed curves は longitude ℓ 及びこれに homotop なものを除いて T_1 で zero に homotop である。ℓ は $T_2=h(T_1)$ で zero に homotop である。従って U_n のclosed curves は U_{n+1} ですべてzero に homotop である。これらのことから $\pi_1(U)=0$, 即ちUは 3-manifold で open 3-cell と同じ homotopy groups をもつ。

更に[2]でUの任意の finite polyhedron はUでContractible なことが分っている。

longitude ℓ は $T_2(=U_1)$ 中の3-cell で囲むことが出来ない。即ち ℓ はU中の3-cellで囲めないのでUは open 3-cell でない。この例は open-3-manifold で Poincaré Conjecture が不成立を示すものである。

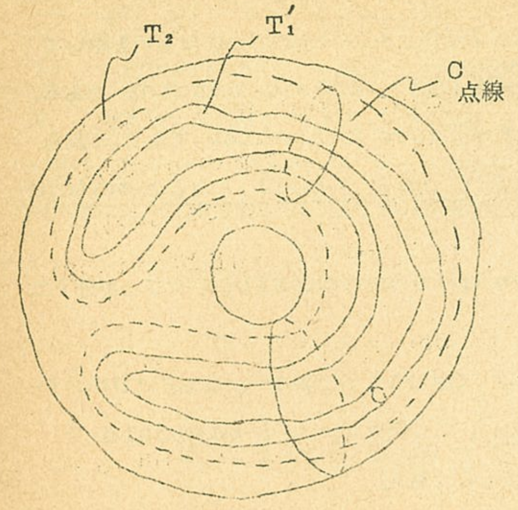
1.2. A.Shapiro の Remark

Arnold Shapiro は $U\times E^1=E^4$ であることを示した[3]。この大略は次の如くと思われる。T_1 は2図の如くして $T_2\times E^1$ 中で T_1' に isotopに移る。



2 図

この isotopy は各の $T_1\times x$, $\forall x\in E^1$, で同時に $T_2\times E^1$ 中で行える。即ち $U\times E^1=U'\times E^1$ である。こゝで $U'=T_1'\cup h'(T_1')\cup\cdots$, $h': E^3\leftrightarrow E^3$ はonto homeomorphism で $h'(T_1')=T_2$, である、3図。



3 図

T_1' は T_2 中で図の如き 3-cell C で囲まれる。従って

$$U' = C \cup h'(C) \cup h^2(C) \cup \cdots$$

である。故に $U' = E^3$ であるから

$$\underline{U \times E^1} = U' \times E^1 = \underline{E^4}\,.$$

である。

1.3. Bing の Remark

Bing は [3] で Shaplro の Remark を検当し T_1 が $U \times E^1$ 詳しくは $T_2 \times [\varepsilon, -\varepsilon]$ の中で 4-cell D で囲まれることが事の本質であることを知った。

T_2 を4図の如く二つの 3-cells C_L，C_M に分け、C_L 中に二つの 3-cells C_L^+，C_L^- を取る。

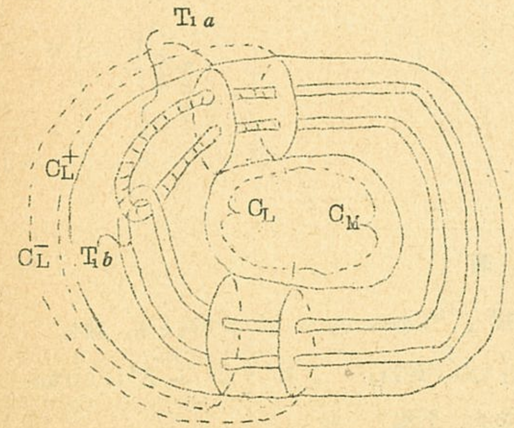
この時 4-cell D は以下の5個の 4-cells の sum である。

A； $C_M \times [\varepsilon, -\varepsilon]$

B； $C_L^+ \times [\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}]$

$C_L^- \times [-\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2}]$

但し T_{1a} (T_{1b}) は4図の▨印の T_1 の部分である。



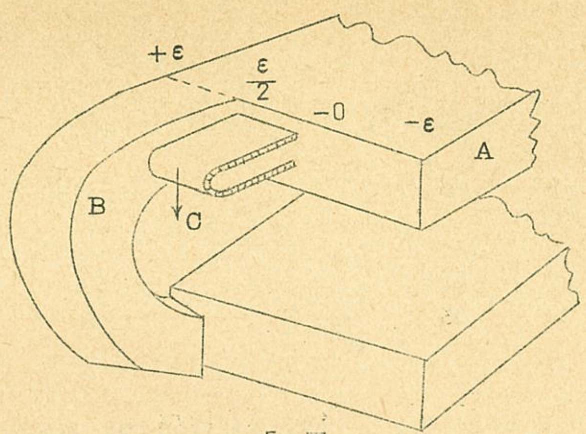
4 図

C； $(C_L \cap T_{1a}) \times [\frac{\varepsilon}{2}, 0]$

$(C_L \cap T_{1b}) \times [0, -\frac{\varepsilon}{2}]$

5図は三つの 4-cells A, B, C がいかに交っているかを象徴的に示したものである。

これと同様に残りの二つの 4-cells も A と交り全体として 4-cell D を作る。



5 図

1.4. Upper semicontinuous decomposition

次の例の前に R.L.Moore 学派による upper semicontinuou decomposition につき注を記す。E^2, E^3 の upper semicontinuous decomposition G とはそれらの closed, bounded な point sets g の collection で U が g を含む open set であると V なる open set が存在して V と交る G の element g は U に含まれる。G の g を点と考え、そこでの set W が open とは W に属す G の elements の sum が E^2，E^3 で open set のときと定めて space B を作りこれを G の decomposition space とよぶ。

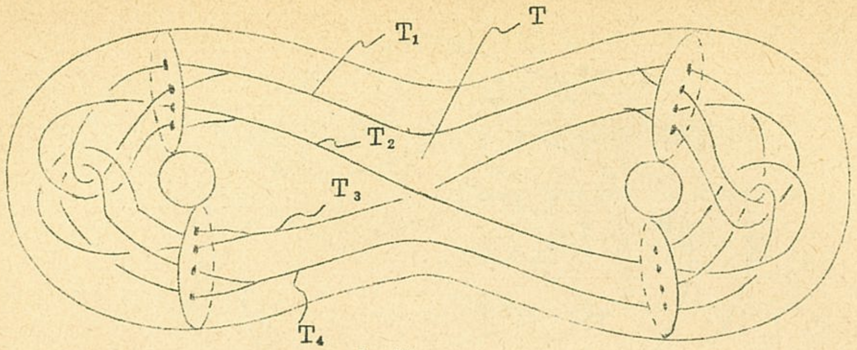
R.L.Moore [4] は G が E^2 の uppersemicontinous decomposition で G の element g が Continuum で E^2 を separate しなければ decomposition space B は E^2 であるを示した。

同類の定理を E^3 で作る努力が Moore の門下生によって続けられた、[5]参照。Bing [3] は Moore の定理は E^3 で不成立を示したが、これは前述の 1.3 の考察がその基礎をなしている。

1.5. Bing の E^3 の decomposition space B

Bing [6] の E^3 の decomposition G の elements g は E^3 の点と tame arcs からなっている。tame arce は次のようにして作る。

E^3 に6図の如く double solid torus T をとり、T の中に互いに図の如く link している4個の double solid tori T_1，T_2，T_3，T_4 をとる。次に各 T_i を前の T と考



6 図

えて4個のdouble solid tori T_{i1} ,…, T_{i4} を同じくlink させる。次にT_{ij}を前のTと同じく考えて…… etc.

第n stage で4^n個のdouble solid tori が出来るが、それらのpoint set としての sum をX_n で示すとき

$$X_\infty = T\cap X_1\cap\cdots\cdots\cap X_n\cap\cdots\cdots$$

を考えるとX_∞の各 Components は次の Fort の Remark からも容易に分る如く tame arcs (E^3 で、polygonal arc と同性質をもつ) である。

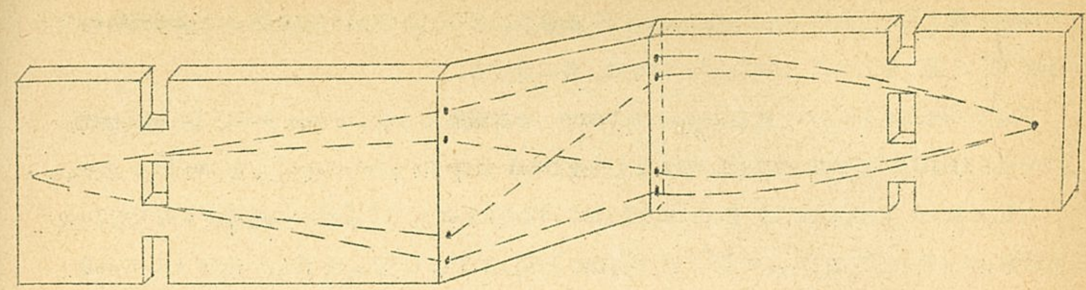
GはかくてX_∞のComponents の各とE^3-X_∞ の点とからなる。Tの中で$T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4$ を含む3−cell は存在しないことからtame arc 一つを囲む2−sphere がE^3 に存在しないことが分る。従って tame are に対応する space B の点でBはlocally euclideanでないのでBは3−manifold ではない。所が1.3(Bing の Remark)で示した方法をこの場合に用いると$T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4$ は $T\times[\varepsilon, -\varepsilon]$中で4−cell に囲まれることが分る。そして$B^1\times E^1=E^4$ が示される。又Bのone-point Compactification を$\bar{B}$とすると、

$$S^3 \not\approx \bar{B} \text{ で } \bar{B}\times E^1 = S^3\times E^1 \text{ 又 } \bar{B}\times S^1 = S^3\times S^1$$

が得られている、[3]。

1.6. Fort の Remark

double solid torus Tを7図の如くとり、 これと同型の小型の4個のdouble solid torusを夫々点線で示した如くに更に6図の如くlink するように取る。以下同様。するとX_∞の Components の各は高々二つの点で折れる8図の如き折線であることが分る[7]。



7 図

8 図

1.7. Horned spheres

J.W.Alexander [8] が所謂horned sphere を作ったが、それはまずright circular cylinder C そのbase D_1 , D_2 。D_i で二つのdisks D'_{i1} , D'_{i2} を9図の如くCから除き、代りにtubes T_{i1} ,T_{i2} を取り付ける。T_{ij}のD'_{ij} でない boundary は 2−cell D_{ij} で閉じる。

C_i は図の如きD_{i1} ,D_{i2}をbase にもつ right circular cylinder.

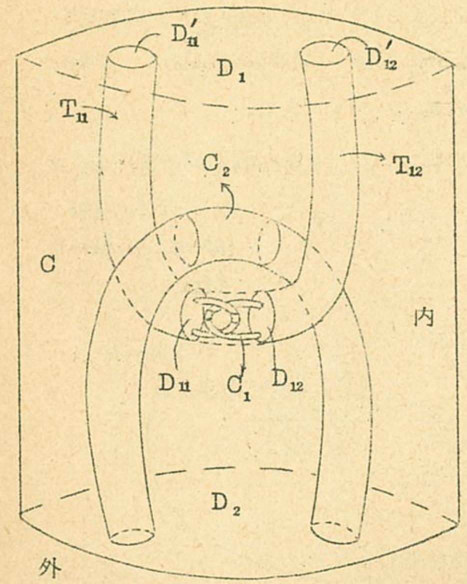
但し

$T_{11}\cup C_1\cup T_{12}$ と

$T_{21}\cup C_2\cup T_{22}$

は図の如くhooked している。

cylinder C_i を前のCと考えて上



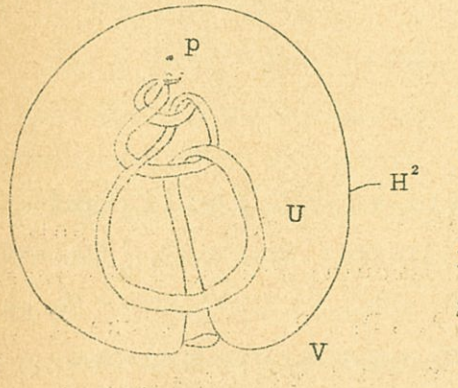
9 図

の操作を繰り返してhorned sphere H を得る。Hは (topological) 2-sphere in E^3で E^3 を二つの components内、外に分ける。

9図での内はπ_1(内) が∞ 個のgenerators を本質的にもつことが分っている。例えば[9]。従ってsimply Connected ではなく内をbad Complementary domainとよぶ。このhorned sphere は Schönflies theorem (2.1参照) に関聯する例であるが、更に$H_1 = (C-(C'_{11} \cup D'_{12} \cup D'_{21} \cup D'_{22})) \cup (T_{11} \cup T_{12} \cup T_{21} \cup T_{22})$ 等々として一般にH_n を定めると $\mathfrak{C} = H - H_1 \cup H_2 \cup \cdots\cdots \cup \cdots\cdots$ は Cantor setであり$\mathfrak{C}$と交わるHの任意のarc はE^3 でwild である。[10] ?

1.8. Fox, Artin の Remark

Fox, Artin [11]は wild な 1-cell in E^3を群論的に研究した結果既知の Examples を simple なものに整理した。以下で関聯するもの二、三を見る。

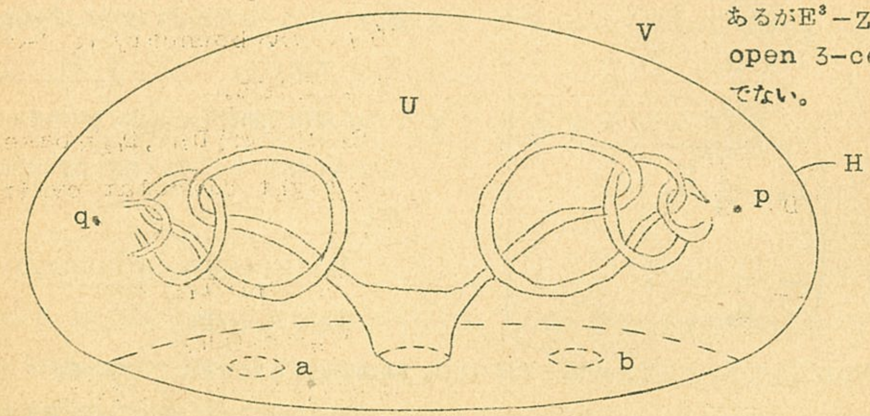


10 図

10図はU , V 両 Components とも open 3-cell で $\bar{V}$ は closed 3-cell である。H^2 は singular point 1点pのみをもつ2-sphere である, see [12]。

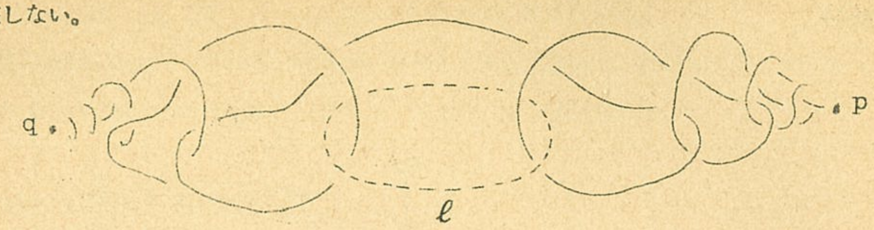
11図は$\pi_1(\bar{U}) \neq 0$, Vは closed 3-cell。horned shere を simplyにしたものである。a , bに10図の如きsingular pts を加えると$\pi_1(\bar{V}) \neq 0$になる。

12 図のarc Zとすると$\pi_1(E^3-Z) = 0$であるがE^3-Zは open 3-cell でない。



11 図

これは 1.1の例をsimply にしたものと考えられる。点線のcurve ℓ を囲む3-cellが存在しない。



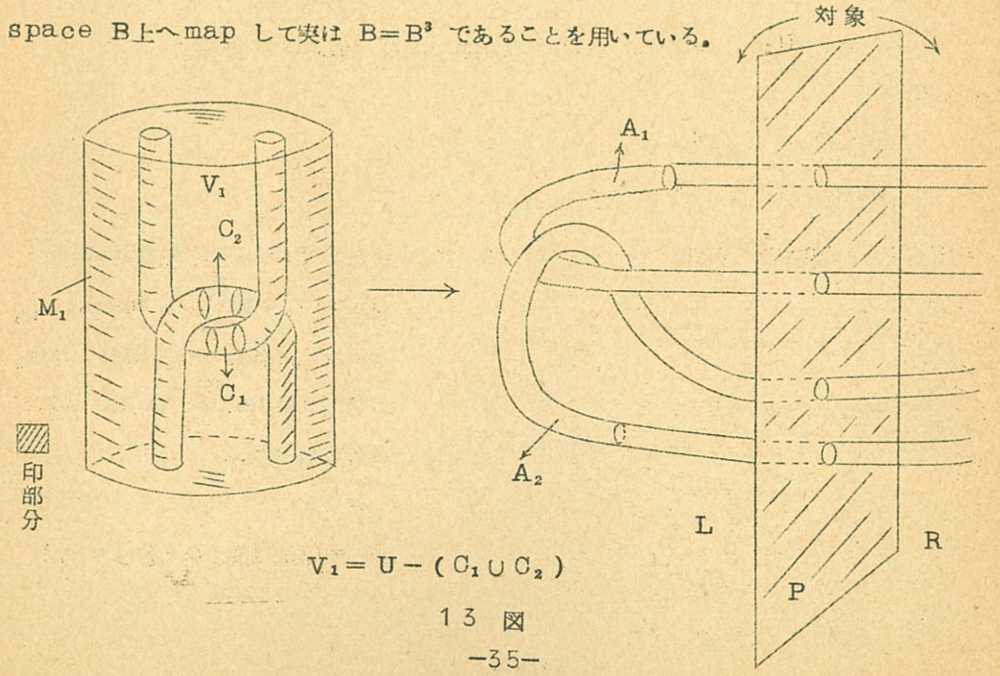
12 図

1.9. Bingによるsolid horned spheres の sum

bad complementary domain U と horned sphere H の sum を solid horned sphere という。[13]でBing は次を示している。

三つのdisjoint sets H, U_1 , U_2 が (a) $U_i \cup H$ ($i = 1.2$) がsolid horned sphere と homeomorphic で(H は horned sphere の image) (b) $H \cup U_1$ から$H \cup U_2$ へのHを fixed する homeomorphism があるとき $H \cup U_1 \cup U_2$ はS^3 である。

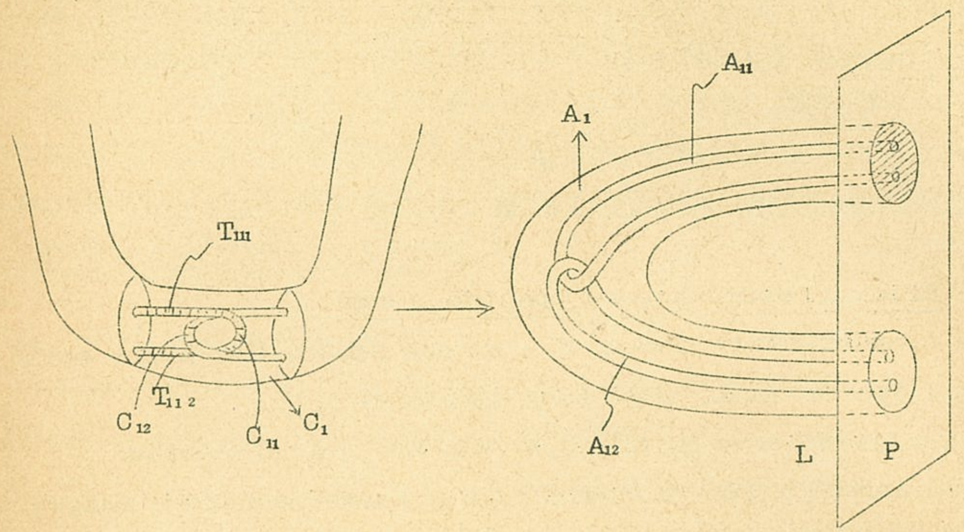
Bing はまず $H \cup U_1 \cup U_2 \to S^3$ へのmap を作るが、この場合 1.7 のCantor set $\mathfrak{C}$上で map が素直に作れないので $H \cup U_1 \cup H_2$ を一応S^3 のdecomposition space B上へmap して実は $B = B^3$ であることを用いている。



$V_1 = U - (C_1 \cup C_2)$

13 図

まず $\overline{V}_1 \to \overline{L}-(A_1 \cup A_2)$ なる homeomorphism をM_1 がPに含まれる如くに作る。
(図で斜線部分)



14 図

次に前のmap を $C_1 - C_{11} \cup C_{12}$ は $\overline{A}_1 - (A_{11} \cup A_{12})$ へ移る如くに拡大する。以下同様。
かくて

$F: H \cup U_1 - \mathbb{C} \to \overline{L}$ into homeomorphism が出来る。

同様にして

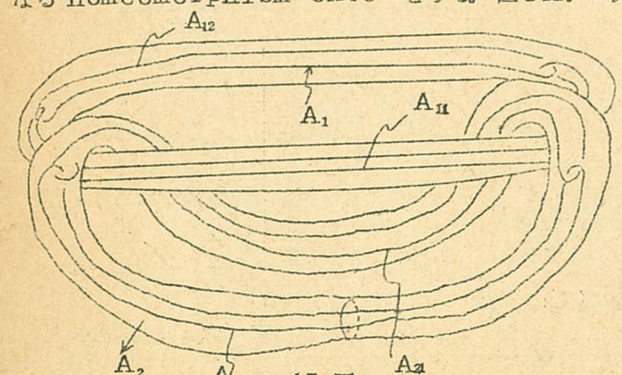
$G: H \cup U_2 - \mathbb{C} \to \overline{R}$ を作り両者を合せて

$H \cup U_1 \cup U_2 - \mathbb{C} \to (S^3 - A_0)$

なる homeomorphism onto をうる。但しA_0は次の如くして作られる。まず2つの link する solid tori A_1, A_2 をとり各A_i 中で同様にlink する二つのsolid tori A_{ij} を作る etc.,

かくて

$A_0 = (A_1 \cup A_2) \cap (\sum_{ij} A_{ij}) \cap$ ———



15 図

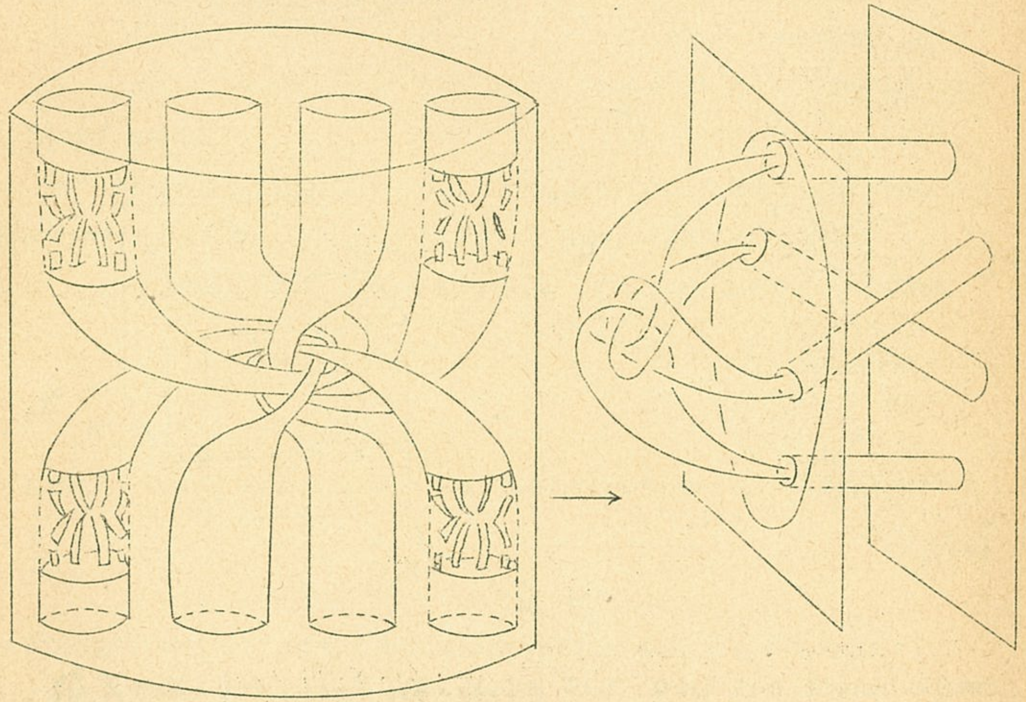
である。A_0 のcomponents は tame arcs であり、これらと$S^3 - A_0$ の点とを elements としてS^3 の decomposition Gが出来る。

Gの decomposition space をBとすると上記から $H \cup U_1 \cup U_2$ からBへのonto homeomorphism が作れる。$B = S^3$ であることが確められる。

1.10 Ball の Remark

〔14〕でBall は Bing の1.9の結果の条件(b)が除かれない反例を order 4 の horned sphere (下図左) を用いて示した。

Detail は1.9と同じである。16図がそのoutline を示している。



16 図

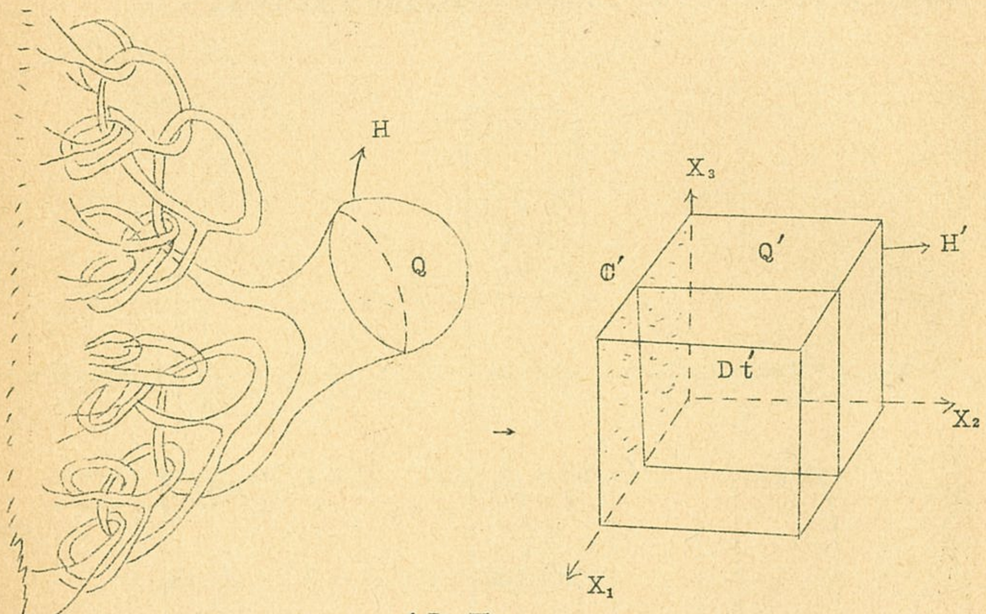
この場合 decompositionは1.5のBing の E^3 のそれである。16図右で $\overline{R}$, $\overline{L}$ に相当（15図の）する部分をねじってあり、従って条件(b)は成立していない。左図点線部分が右図実線に写る。

1.11. Bing のwild なclosed surfaces の E^3 へのimbedding と

Stallings の Remark.

Bing は〔10〕で disjoint な、wild, closed surfaces in E^3 は高々 countable を示した。これに関聯した Stallings〔15〕の結果をこゝに述る。それは Bing の結果は closed が本質であることを示すもので Continuumの濃度をもつ disjoint wild 2-cells in E^3 を次の如くして作った。

Fox, Artin の方法で17図左の如き horned sphere H を作るとこれで囲まれる Qは3-cell で右図Q′へ写る。

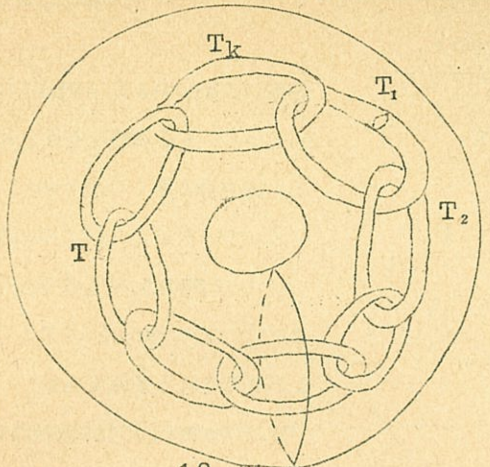


17 図

この時HのCantor set $\mathbb{C}$ は Q′ では $\mathbb{C}'=\{(X_1, X_2, X_3)\mid X_2=0, X_1=\sum\frac{a_n}{2^n}, X_3=\sum\frac{2a_n}{3^n}; a_n=1 \text{ or } 0\}$ へ写る。Q′ で $D'_t=\{X_1=t\}$ をとると $t\in[0,1]$ で少くも1つの $\mathbb{C}'$ の点を含む。D'_t の inverse image D_t は $\mathbb{C}$ を通るHのarc を含む disk であるから $\mathbb{C}'$ の property から（1.7.参照）D_t は E^3 で wild で即ち Continuum の濃度をもつ wild な disk が E^3 に存在する。

1.12. Antoine の necklace

終りに直接関係はないが、余りにも有名な例を一つ加えて敬意を表しておく。



18 図

Solid torus T の中に18図の如く link している k個の solid Tori T_i を作る。各 T_i を前のTと考えて同様に link している k個の solid tori T_{ij} をとる., etc.

$$P=T\cap(\bigcup_i T_i)\cap(\bigcup_{ij} T_{ij})\cap\cdots\cdots$$

を定めると 0-dimensimal compact set P所謂Antoine necklace を得る。

$\pi_1(E^3-P)$ は本質的に∞個のGenerators をもつ〔9〕又こうしたConstruction が一般のn次元でも行えることが分っている〔17〕。0-dimensional compact set in E^3 については本間氏の研究〔18〕があるがDehn の Lemma を用いている点興味深い。

1.13. Markov の 4-manifold

或る意味で4-manifolds の分類は不可能であることを示す注目されるべき例である〔19〕。

II. S^n in S^m

以下では piecewise linear homeomorphisms に関した結果のみを述べて diffeomorphisms 等に関聯した結果は割愛する。

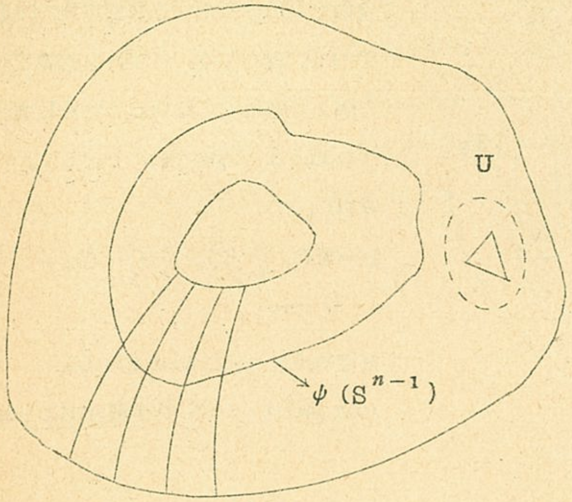
2.1. S^n in S^{n+1}

B. Mazur〔6〕が次を示した。$\psi: S^{n-1}\to S^n$ が任意のhomeomorphism で

(i) $\phi: S^{n-1}\times[-1, 1]\to S^n$ なる homeomorphism が
$\phi(S^{n-1}\times 0)=\psi(S^{n-1})$ なる如く存在し、更に

(ii) ϕ は $S^{n-1}\times[-1, 1]$ の少くも1点の近傍Uで Semilinear である。

然らば$S^n - \psi(S^{n-1})$の二つのComponents の各のclosure は topological n-cell である (Shönflies theorem).



19 図

条件(i)はhorned sphereの存在などから必然的な条件と思える。条件(ii)は多くの場合Mazurも言っている如くextremly unpleasant なものである。ψがdiffenentialである時などは充される条件である。

M.Brown [20]が条件(ii)は除けることをMazurと本質的に異った方法で証明している。

条件(i)について特にS^{n-1}, ψを夫々combinatorial, piecewise linear と限定して著者は次を示した [21]。

n次元以下でCombinatorial version of Schönflies theoremが成立すれば、条件(1)は充される。

著者の方法で上記の仮定は本質的に使われているがE.C.Zeeman は上記の仮定は不必要であることを指摘している。

2.2. S^n in S^{n+2}

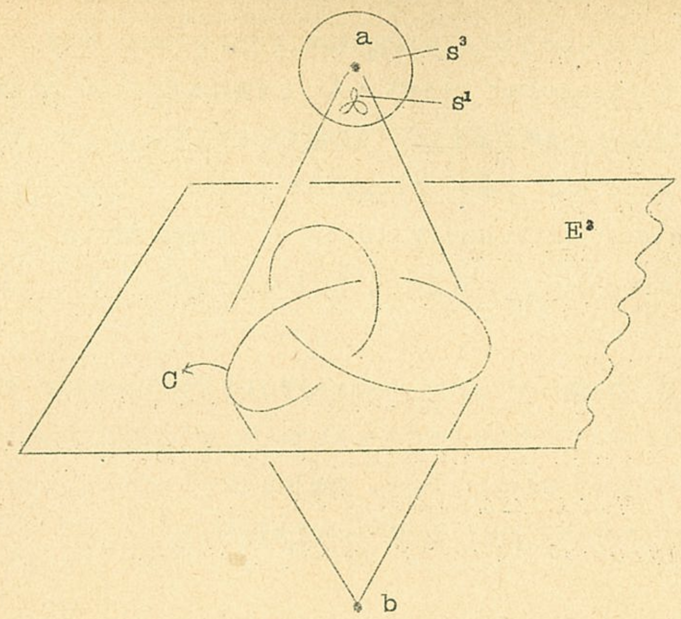
n=1即ちS^1 in S^3については寺阪先生 [22] の記事を参照されたい。

n=2 古くArtin [23], Van Kampen [24] によりS^1 in S^3 をS^2 in S^4 へ移す二つの方法が知られている。これらの詳細と結果はAndrews & Curtis [25] によって述べられている。

E^4 で$x_4=0$ のhyperplane をE^3 で示しE^3 中にknot Cをとり点a=(0,0,0,1)とb=(0,0,0,-1)とのjoin を作ると S^2 in S^4 (E^4) が出来る。

$$\pi_1(S^4-S^2)=\pi_1(E^3-C)$$
$$\pi_2(S^4-S^2)=0$$

が知れている [25]。



20 図

次にE^3_+ で$x_4=0$, $x_3\geqq 0$ なる half-space を示し、これを

$$\bar{x}_1=x_1,\quad \bar{x}_2=x_2$$
$$\bar{x}_3=x_3\cos t-x_4\sin t,\quad \bar{x}_4=x_3\sin t+x_4\cos t$$

でPなるplane $x_4=x_3=0$ のまわりに360° 回転させる。

βがその端点のみがPにあるE_3^+のarc とすると上の回転でβはS^4 のS^2 を画く。

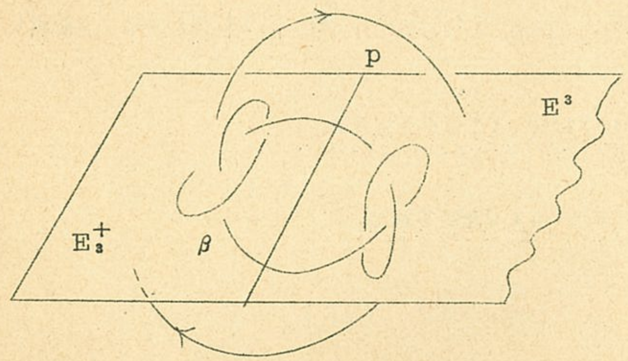
φでβの両端点をPで結んだsimple closed curve とすると

$$\pi_1(S^4-S^2)=\pi_1(E^3-\varphi)$$

又一般に

$$\pi_2(S^4-S^2)\neq 0$$

が知られている [25]。



21 図

20 図で示したSuspension による構成で、aを中心とする3次元球面S^3 を作りS^2 を切るとcircle S^1 を得る。S^1 in S^3 は図から分

る如く、Knot Cと同じである。従ってCがE^3でknottedであるとS^1もS^3でknottedでこうした点a，bをS^2のsingular pointとよぶ。Fox & Milnor〔26〕はS^2が単一個のsingular pointをもつとき表れるknotのAlexander polynomialは$\Delta(x)=\pm x^m f(x) f(x^{-1})$の型であることを示した。かくて例えばclover leaf knotはS^2の唯一のsingular pointのtypeとはならない。彼等はこれからknotsのnull-equivalenceという概念を導入した〔27〕参照。21図の如きS^2はsimgular ptを有せず、こうした2-sphere S^2 in S^4をlocally flatとよぶ。

樹下氏〔28〕はS^4の任意のS^2（or 2-manifold）がlocally flatなS^2（or 2-manifold）で近似出来ることを示している。この結果は、null-equivalenceの性質をとらえたものである。又樹下氏〔29〕によってknotのAlexanler polynomialがS^2 in S^4へ拡大されている。

<u>n=3</u>　S^3 in S^5については、殆んど結果がないが〔26〕の§4のDisccusion (2)が重要なようである。

2.3. S^n in S^m

$m \geqq 2n+2$の時S^nはflatである（即(n+1)-simplexのboundaryとCongruentである）ことは例えばGugenheimの論文〔30〕にある。又任意のn，mでimbeddingsのCongruence classesはsemi-group（additive）を作っていることも〔30〕で示されている。

Milnorは$m \geqq 2n+1$，$(n>1)$でS^n in S^mがflatなことを述べていた〔未刊〕が最近E.C.Zeeman〔31〕が更に$m > \frac{3(n+1)}{2}$の時flatであることを証明している。

「一般にS^nはS^{n+2}でunknottedなことが予想される。」

（註：この予想は最近E.C.Zeemanにより証明された。）

(1) J. H. C. Whitehead "A certain open manifold whose group is unity" Quart. J. Math. 6 (1935) 268-279.

(2) M. H. A. Newman & J. H. C. Whitehead "On the group of a certain linkage" Quart. J. Math. 8 (1937) 14-21.

(3) R. H. Bing "The cartesian product of a certain non manifold and a line is E^4" Ann. of Math. 70 (1959) 399-412.

(4) R. L. Moore "Concerning upper semicontinuous collections of continua" Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925) 416-428.

(5) R. H. Bing "Upper semicontinuous decompositions of E^3" Ann. of Math. 65 (1957) 363-374.

(6) R. H. Bing "A decomposition of E^3 into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from E^3" Ann. of Math. 65 (1957) 484-500.

(7) M. K. Fort, Jr "A note concerning a decomposition space defined by Bing" Ann. of Math. 65 (1957) 501-504.

(8) J. W. Alexander "An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected" Proc. Nat. Acad. U. S. A. 10 (1924) 8-10.

(9) W. A. Blankinship & R. H. Fox "Remarks on certain pathological open subsets of 3-space and their fundamental groups" Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950) 618-624.

(10) R. H. Bing "Conditions under which a surface in E^3 is tame" Fund. Math. 47 (1959) 105-139.

(11) R. H. Fox & E. Artin "Some wild cells and spheres in three dimensional space" Ann. of Math. 49 (1948) 979-990.

(12) O. G. Harrold & E. E. Moise "Almost locally polyhedral spheres" Ann. of Math. 57 (1953).

(13) R. H. Bing "A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres" Ann. of Math. 56 (1952) 354-362.

(14) B. J. Ball "The sum of two solid horned spheres" Ann. of Math. 69 (1959) 253-257.

(15) J. R. Stallings "Uncountable many wild disks" Ann. of Math. (1960) 185-186.

(16) B. Mazur "On embedding of spheres" Bulletin Amer. Math. Soc., 64 (1959) 59-65.

(17) W. A. Blankinship "Generalization of a construction of Antoine" Ann. of Math. 53 (1951) 276-297.

(18) T. Homma "On tame imbedding of 0-dimensional compact sets in E^3" Yokohama Math. J. 7 (1959) 191-195.

(19) Markov, A. A. "Insolubility of the problem of homeomorphy" Proceedings International congress of Math. 1958, 300-306.

(20) M. Brown "A proof of the generalized Schoenflies theorem" Bulletin Amer. Math. Soc., 66 (1960) 74-

(21) H. Noguchi "The thickening of combinatorial n-manifolds in (n+1)-space" Osaka Math. J. 12 (1960) 97-112.

(22) 寺坂英孝，"結び目の理論" 数学 1 2 (1960) 1－20.

(23) E. Artin "Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in R_4" Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6 (1925) 174-177.

(24) E. R. Van Kampen "Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in R_4" Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 10 (1929) 216

(25) J. J. Andrews & M. L. Curtis "Knotted 2-spheres in the 4-space" Ann. of Math. 70 (1959) 565-571.

(26) R. H. Fox & J. Milnor "Singularities of 2-spheres in 4-spheres and equivalence of knots" Ct. Bulletin Amer. Math. Soc. 63 (1957) 406.

(27) H. Terasaka "On null-equivalent knots" Osaka M. J. 11 (1959) 95-113.

(28) S. Kinoshita "On deffeomorphic approximation of polyhedral surfaces in 4-space" Osaka Math. J. 12 (1960).

(29) S. Kinoshita "Alexander polynomials as isotopy invariants" II. Osaka Math. J. 11 (1959) 91-94.

(30) V. K. A. M. Gugenheim "Piecewise linea isotopy and embeddings of elements and spheres I. Proc. London Math. Soc. 3 (1953) 29-53; II. ibid 129-152.

(31) E. C. Zeeman "Unknotting spheres" Ann. of Math. 72 (1960) 350-361.

5. 3-Manifold 文献

阪大　田　尾　鶉　三

1895 H. Poincaré, Analysis Situs, Journ. de l'Ecole Poly. 1-121.

1898 P. Heegaard, Forstudier til en topologisk teori för de algebraiske Sammenkäng, Copenhague. Dessertation. (Sur l'analysis situs, Bull. Soc. Math. France, 44, 161-243).

1904 H. Poincaré, Cinguiéme complément a l'analysis situs. Rendiconti del Circolo. 18, 45-110.

1907 M. Dehn-P. Heegaard, Analysis Situs, Enz. Math. Wiss. III AB3.

Steinitz, Beiträge zur Analysis Situs, Sitzungsbericht Berlin. Math. Ges. v.7.

1908 H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Monatsh. f. Math. Phys. 19, 1-118.

1910 M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann. 69, 137-168.

1912 M. Dehn, Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen, Math. Ann. 71, 413-421.

M. Dehn, Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann. 71, 116-144.

1919 J. W. Alexander, Note on two three dimensional manifolds with the same group, Trans. Amer. Math. Soc. 20, 339-342.

J. W. Alexander, Note on Riemann spaces, Amer. Math. Soc. 26, 370-372.

L. Antoine, Sur les ensembles parfaits partout discontinus, C. R. 173, 284-285.

L. Antoine, Sur l'homéomorphie de deux figures et de leur voisinages, J. Math. Pures Appl. (8) 4, 221-325.

H. Kneser, Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen, Jber. D. M. V. 30, 83-85.

1922 M. Dehn, Über Kurvensysteme auf zweiseitigen Flächen mit Anwendung auf das Abbildungsproblem, Autogr, Vortag mit Math. Koll. Breslau.

1924 J. W. Alexander, An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 10, 8-10.

J. W. Alexander, New topological invariants expressible as tensors, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 10, 10-12.

J. W. Alexander, On certain new topological invariants of a manifold, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 10, 101-103.

J. W. Alexander, On the subdivision of three space by a polyhedron, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 10, 6-8.

J. W. Alexander, Remarks on a pointset constructed by Antoine, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 10, 10-12.

J. W. Alexander, Topological invariants of a manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 10, 493-494.

R. Furch, Zur kombinatorishen Topologie des dreidimensionalen Raumes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3, 237-245.

1924 H. Kneser, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, Math. Ann. 91, 135-154.

J. Nielsen, Über Topologische Abbildungen geschlossener Flächen, Abh. Math. Sem. Univ.

Hamburg 3, 246-260.

1925 J. W. Alexander, Note on a theorem of H. Kneser, 250-251. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 11.

J. W. Alexander, On the intersection invariants of a manifold, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 11, 143-146.

H. Hotteling, Three dimensional manifolds of states of motions, Trans. Amer. Math. Soc. 27, 329-344.

H. Kneser, Die Topologie der Mannigfaltigkeiten, Jhber. D. M. V. 34, 1-14.

H. Kneser, Eine Bemerkung über drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 128-130.

J. Nielsen, Zur Topologie der geschlossenen Flächen, Kopenhagen.

1926 H. Hotteling, Multiple sheeted spaces and manifolds of states of motions, Trans. Amer. Math. 28, 479-490.

1927 R. Baer, Kurventypen auf Flächen, J. Reine Angew. Math. 156, 231-246.

J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlosenen zweisettigen-Flächen I, Acta Math. 50, 189-358.

1928 R. Baer, Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, J. Reine Angew. Math. 159, 101-106.

H. Tietze, Zur Topologie berandeter Mannifgaltigkeiten, Monatsch. f. Math. Phys. 35, 25-44.

1929 R. Baer, Zur Einführung des Schaarbegriffs,

J. Reine Angew. Math. 160, 199-207.

R. Baer, Zur Topologie der Gruppen, J. Reine Angew. Math. 160, 208-226.

H. Kneser, Geschlossene Flächen im dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Jhber. D. M. V. 36, 248-260.

J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweisertigen-Flächen II, Acta Math. 53, 1-76.

1930 H. Seifert-W. Threlfall, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen dreidimensionalen sphärischen Raumes I, Math. Ann. 104, 1-70.

1931 de Rham, Sur l'analysis situs des variétés à n-dimensions, J. Reine Angew. Math. IX s 10, 115-120.

F. Frankl, Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes, Monatsh. f. Math. Phys. 38, 357-364.

H. Seifert, Homologiegruppen berandeter dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Z. 35, 26-66.

H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Acad. Wiss. 83, 26-66.

1932 L. Goeritz, Die Heegaard-Diagramme des Torus, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 187-188.

M. Kreins, Zur Konstruktion der Poincaré-Räume, Rend. Circ. mat. Palermo 56, 277-280.

H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. 60, 147-238.

H. Seifert-W. Threlfall, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgsruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes II, Math.

Ann. 107, 543-586.

W. Threlfall, Räume aus Linieelementen, Jhber. D. M. V. 42, 88-110.

1933 L. Goeritz, Die Abbildungen der Brezelfläche und Vollbrezel von Geschlecht 2, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 244-259.

L. Goeritz, Normalformen der Systeme einfacher Kurven auf orientierbaren Flächen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 223-243.

J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen-Flächen III, Acta Math. 58, 87-167.

K. Reidemeister, Zur drei-dimensionalen Topologie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 189-194.

H. Seifert, Verschlingungsinvarianten, S. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 16, 811-828.

J. Singer, Three-dimensional manifolds and their Heegaard Diagrams, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 88-101.

C. Weber-H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume, Math. Zeit. 37, 237.

1934 L. Goeritz, Die Bettischen Zahlen der zyklischen Uberlagerungsräume der Knotenaussenräume, Amer. J. Math. 56, 194-198.

W. Hantzsche-H. Wendt, Dreidimensionale euklidische Raumformen, Math. Ann. 110, 593-611.

J. Johansson, Über singuläre Elementarflächen und das Dehnschen Lemma, Math. Ann. 110, 312-320.

W. Nowacki, Die euklidischen dreidimensionalen geschlossenen und offenen Raumformen, Comment.

Math. Helv. 7, 81-93.

K. Reidemeister, Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten, Abh. Math. Seon. Univ. Hamburg 10, 109-118.

K. Reidemeister, Homotopiegruppen von Komplexen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 10, 298-304.

F. Rothberger, Eine Homëomorphiebedingung für orientierbare Mannigfaltigkeiten von drei-dimensionen, Monatsh. f. Math. Phys. 41, 353-357.

H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leibzig-Berlin.

J. H. C. Whitehead, Certain theorems about three dimensional manifolds I, Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 308-320.

1935 W. Franz, Über Torsion einer Überdeckung, J. Reine Angew. Math. 73, 245-254.

K. Reidemeister, Homotopiering und Linsenräume, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, 102-109.

H. Seifert, Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, 84-101.

J. H. C. Whitehead, A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. Oxford Ser. 6, 261-279.

J. H. C. Whitehead, A certain region in Euclidean 3-space Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 364-366.

J. H. C. Whitehead, Three-dimensional manifold, Quart. J. Math. Oxford Ser. 6, 80.

1936 W. Franz, Torsionideale, Torsionsklassen und Torsion, J. Reine Angew. Math. 176, 242-355.

W. Hantsch-H. Wend, Drei-dimensionale wirbelgefaserter Räume, Math. Z. 40, 727-755.

W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformation IV, Proc. Amst. 39, 215-224.

A. Komatsu, Über die dreidimensionalen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten, Proc. Phys-Math. Soc. Japan III s 18, 135-141.

J. Nielsen, Topologie des Transformations des Surfaces, Einsignement Math. 35, 269-387.

K. Reidemeister, Automorphismes von Homotopiekettenringen, Math. Ann. 112, 586-593.

K. Reidemeister, Das Dualitätstheorem für Homotopieringe, Math. Ann. 112, 586-593.

1936 K. Reidemeister, Das Dualitätstheorem für Homotopieringe, Math. Z. 41, 176-183.

K. Reidemeister, Kommutative Fundamentalgruppen, Monatsh. f. Math. Phys. 43, 20-28.

W. Threlfall, Quelques résultats récents de la topologie des variétés, Einsingnement Math. 35, 242-355.

1937 de Rham, Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister, Rec. Math. s. 1., 737-742.

M. H. A. Newman & J. H. C. Whitehead, On the group of a certain linkage, Quart. J. Math. 8, 14-21.

1938 J. Johansson, Über singuläre Elementarflächen und das Dehnschen Lemma, II Math. Ann. 115, 658-669.

M. Rueff, Beiträge zur Untessuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Composito Math. 6, 161-202.

1939 H. Friedgé, Verallgemeinerung der Dodekaederräume, Math. Z. 46, 27-44 (1940).

K. Reidemeister, Durchschnitt und Schnitt von Homotopieketten, Monatsch. f. Math. Phys. 48, 226-239.

J. H. C. Whitehead, On certain invariants introduced by Reidemeister, Quart. J. Math. 10, 81-83.

J. H. C. Whitehead, On the asphericity of regions in a 3-space, Fund. Math. 32, 149-166.

P. A. Smith, Transformations of finite period, II, Ann. of Math., 40, 690-711.

1940 D. B. Summer, Orientable manifolds constructed from a solid cube, Trans. Roy. Soc. S. Africa 28, 183-197.

J. H. C. Whitehead, On the homotopy types of manifolds, Ann. of Math. 41, 825-832.

1941 J. H. C. Whitehead, Incidence matrices and homotopy types, Ann. of Math. 42, 1197-1239.

1943 W. Franz, Abbildungsklassen und Fix-punktklassen dreidimenoisnaler Linsenräume, J. Reine Angew. Math. 185, 65-77.

1944 H. Hopf, Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche gruppen, Comment. Math. Helv. 16, 81-100.

1946 F. Frankl, To the topology of three-dimensional space, Rec. Math. N. S. 18, 299-304.

1948 R. H. Fox, On the imbedding of polyhedra in 3-space, Ann. of Math. 49, 462-470.

R. H. Fox-E. Artin, Some wild cells and spheres in three-demensional space, Ann. of Math. 49, 979-990.

M. M. Postnikov, The structure of the ring of intersections of three dimensional manifolds, Doklady Acad., 795-797.

1949 E. Burger, Über Schnittzahlen von Homotopie ketten. Math. Zeit. 52. 217-255.

S. Eilenberg, On the problems of topology, Ann. of Math. 1949.

R. H. Fox, A remarkable simple closed curve, Ann. of Math. 50, 264-265.

O. G. Harrold, Euclidean domains with uniformly abelian local fundamental groups, Trans. Amer. Math. Soc. 67, 120-129.

E. Specker, Die erste Cohomologie gruppe von Überlagerungen und Homotopieeigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv. 23, 303-332.

1950 E. Burger, Über Gruppen mit Verschlingungen. J. Reine Angew. Math. 188, 193-200.

E. Burger, Zur Theorie der Überlagerungsabbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 122, 144-151.

E. Burger, Über Schnittzahlen in Komplexen mit Automorphismen. Math. Ann. 112, 131-143.

R. H. Fox - W. A. Blankinship, Remarks on certain pathological open subsets of 3-space and their fundamental groups. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 618-624.

W. Graub, Die semilinearen Abbildungen. S. -B. Heidelberger Akad. Wiss. Math. 205-272.

O. G. Harrold, Euclidean domains with uniformly Abelian local fundamental groups II. Duke Math. 17, 269-272.

1951 R. C. Blanchfield - R. H. Fox, Invariants of selflinking. Ann. of Math. 53, 556-564.

W. A. Blankinship, Generalization of a construction of Antoine. Ann. of Math. 53, 276-297.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds I. Polyhedral approximations of solids. Ann. of Math. 54, 506-533.

R. H. Bing, A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two horned spheres. Ann. of Math. 56, 354-362.

R. H. Fox, Recent developments of knot theory at Princeton. Proc. Intl. Congress of Math. Combridge, Mass. 1950. 453-457.

1952 E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. II. Positional properties of 2-spheres. Ann. of Math. 55, 172-176.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. III. Tubular neighborhoods of linear graphs. Ann. of Math. 55, 203-214.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. IV. Piecewise linear approximations of homeomorphisms. Ann. of Math. 55, 215-222.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. Ann. of Math. 56. 96-114.

1953 R. H. Bing, Examples and counter examples. Pi Mu Epsilon J. 1. 311-317.

R. H. Fox, Free differential calculus I. Derivation in the free group ring. Ann. of Math. 57, 547-560.

V. K. A. M. Gugenheim, Piecewise linear isotopy and embedding of elements and spheres. I. II. Proc. Lond. Math. Soc. 3, 29-53, 129-152.

O. G. Harrold - E. E. Moise, Almost locally polyhedral spheres. Ann. of Math. 57, 575-578.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. VI. Compact spaces covered by two Euclidean neighborhoods. Ann. of Math. 58, 107.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. VII. Disks which are pierced by intervals. Ann. of Math. 58, 403-408.

P. Olum, Mappings of manifolds and the notion of degree. Ann. of Math. 58. 458-480.

G. Torres, On the Alexander polynomial. Ann. of Math. 57, 57-89.

1954 R. H. Bing, Locally tame sets are tame. Ann. of Math. 59, 145-158.

R. H. Fox, Free differential calculus II. The isomorphism problem. Ann. of Math. 59, 196-210.

O. G. Harrold, The enclosing of simple arcs and curves by polyhedra. Duke Math. J. 21, 615-621.

O. G. Harrold - H. C. Griffith - E. E. Posey, A characterization of tame curves in three space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 40, 235-227.

T. Homma, On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in E^3. Osaka Math. J. 6, 129-134.

E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. VIII. Invariance of the knot types; local tame imbedding, Ann. of Math. 59, 159-170.

1955 O. G. Harrold - H. C. Griffith - E. E. Posey, A characterization of tame curves in three space. Trans. Amer. Math. Soc. 79, 12-24.

D. Montgomery - H. Samelson, A theorem on fixed points of involution in S^3. Canad. J. Math. 7, 208-220.

R. H. Kyle, Embeddings of Möbius bands in 3-dimensional space, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 57, 131-136.

J. P. Mayberry, Abelian branched coverings of knots, princeton, Ph. D. Thesis.

1956 R. J. Auman, Asphericity of alternating knots. Ann. Math. 64, 374-392.

R. H. Bing, A simple closed curve that pierces no disk. J. Math. Pures Appl. (9) 35, 337-343.

R. H. Fox, Free differential calculus III, Subgroups. Ann. of Math. 64, 407-419.

O. G. Harrold, A theorem on disks. Proc. Amer. Math. Soc. 7, 153-154.

H. Schubert, Knoten mit zwei Brücken. Math. Z. 65, 133-170.

H. Noguchi, On regular neighborhoods of 2-manifolds in 4-Euclidean space. I, Osaka Math. J. 8, 225-242.

1957 R. H. Bing, Approximating surfaces with polyhedral ones. Ann. of Math. 65, 456-483.

R. H. Blanchfield, Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory. Ann. of Math. 65, 340-356.

R. H. Fox - J. W. Milnor, Singularities of 2-spheres in 4-space and equivalent of knots. Bull. Amer. Math. Soc. 63, 406.

R. H. Fox, Covering spaces with singularities. Lefschetz symposium. Princeton Math. Ser. 12, 243-256.

O. G. Harrold, Locally tame curves and surfaces in three dimensional manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 63, 293-305.

T. Homma, On Dehns lemma for S^3. Yokohama

Math. J. 5, 223-244.

1957 J. Milnor, Groups which act on S^n without fixed points. Amer. J. Math. 79, 623-630.

C. D. Papakyriakopoulos, On Dehns lemma and the asphericity of knots. Ann. of Math. 66, 1-26.

C. D. Papakyriakopoulos, On the end of the fundamental groups of 3-manifolds. Comment. Math. Helv. 32, 85-92.

D. E. Sanderson, Isotopy in 3-manifolds. I. Isotopic deformations of 2-cells and 3-cells. Proc. Amer. Math. Soc. 8, 912-922.

R. H. Bing, Upper semicontinuous decompositions of E^3, Ann. of Math. 65, 363-304.

R. H. Bing, A decomposition of E^3 into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from E^3, Ann. of Math., 65, 484-500.

M. K. Fort, A note concerning a decomposition space defined by Bing, Ann. of Math., 65, 501-504.

C. D. Papakyriakopoulos, On solid tori, Proc. London Math. Soc. (3) 7, 281-299.

M. Vaccaro, Gruppi fundamentali commutative di varietá tridimensionali non orientabili, Rend. Math. e. Appl. 16, 447-453.

1958 R. H. Bing, Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3. Ann. of Math. 68, 17-37.

R. H. Bing, The Cartesian product of a certain non manifold and a line is E^4. Bull. Amer.

Math. Soc. 64, 82-84.

R. H. Fox - K. T. Chen - R. C. Lyndon, Free differential calculus, IV. The quotient groups of the lower central series. Ann. of Math. 68, 81-95.

S. Kinoshita, On knots and periodic transformations. Osaka Math. J. 10, 43-52.

C. D. Papakyriakopoulos, Some problems on 3-dimensional manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 64, 317-335.

C. D. Papakyriakopoulos, The theory of three-dimensional manifolds since 1950. Proc. International Math. Congress Edinbargh. 433-440.

V. Poénaru, Sur les variétés simplement connexes, Compactes à trois dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris. 247, 624-626.

V. Poénaru, Sur les variétés simplement connexes, compactes à trois dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris. 247, 1818-1820.

V. Poénaru, Considérations sur les variétés simplement connexes à trois dimensions. Rev. Rath. Pures. Appl. 3, 139-156.

A. Shapiro - J. H. C. Whitehead, A proof and extension of Dehns lemma. Bull. Amer. Math. Soc. 64, 174-178.

A. Tominaga, A condition under which simple closed curves bound discs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. 22. 205-214.

J. H. C. Whitehead, On spheres in 3-mainfolds. Bull. Ancer. Math. Soc. 64, 161-166.

J. H. C. Whitehead., On finite cocycles and the sphere theorem. Colloq. Math. 6, 271-281.

1959 B. J. Ball, The sum of two solid horned spheres. Ann. of Math. 69, 253-257.

R. H. Bing, An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. Ann. of Math. 69, 37-65.

H. C. Griffith, A characterization of tame surfaces in three space. Ann. of Math. 69, 291-308.

R. H. Bing, Conditions under which a surface in E^3 is tame. Fund. Math. 47, 105-139.

T. Homma, On tame imbedding of 0-dimensional compact sets in E^3, Yokohama Math. J. 7, 191-195.

O. G. Harrold, Locally peripherally unknotted surfaces in E^3.

B. Mazur, On embedding of spheres. Bull. Amer. Math. Soc. 65, 59-65.

V. Poénaru, Sur les variétés simplement connexes à trois dimonsion. Rendiconti di Mat. 18, 25-94.

D. E. Sanderson, Isotopy in 3-manifolds II, Fitting homeomorphisms by isotopy. Duke Math. J. 26, 387-396.

I. Tamura, A diffeomrorphy invariant of quotient manifolds. J. of Math. Soc. of Japan. 11, 343-353.

R. L. Wilder - M. L. Curtis, The existence of certain types of manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 91, 152-160.

1960 E. J. Brody, The topological classification of the lens spaces. Ann. of Math. 71, 163-184.

M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 66, 74-76.

R. H. Fox, Free differential calculus V. The Alexander matrices re-examined. Ann. of Math. 71, 408-422.

M. W. Hirsch-S. Smale, On involution of the 3-sphere Ann. of Math. 71, 893-900.

D. E. Sanderson, Isotopy in 3-manifolds III. Connectivity of spaces of homeomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 171-176.

J. R. Stallings, Uncountable many wild disks. Ann. of Math. 71, 185-186.

J. R. Stallings, On the looping theorem. Ann. of Math. 72, 12-19.

J. Tao, A Note on the Milnor's Invariant λ' for a Homotopy 3-sphere. Proc. Japan Acad. 36, 310-312.

A. H. Wallace, Modifications and bounding manifolds. Canad. J. of Math. 12, 503-528.

H. Yamasuge - Y. Saito, On orientable manifolds of dimension three. Proc. Japan Acad. 36, 99-101.

R. H. Fox, The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one, Ann. of Math., 71, 187-196.

F. Hosokawa - S. Kinoshita, On the homology group of branched covering spaces of links, Osaka Math. J. 12, 331-355.

S. Smale, The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions. Bull. Amer. Math. Soc. 66, 373-375.

G. R. Liversay, Fixed point free involutions on the 3-sphere, Ann. of Math., 72, 603-611.

V. Poénaru, Les decompositions de l'hypercube en produit topologique, Bull. Soc. Math. de France, 88, 113-129.

寺坂英孝， 結び目の理論，数学 12， 1-20.

J. R. Stallings, Polyhedral homotopy-spheres, Bull. Amer. Math. Soc., 66.

才 二 部

コ ホ モ ロ ジ ー 作 用 素

1. 才一次コホモロジー作用素 (I)

名大　　白岩謙一

1947年N.E.Steenrod が (n+1) 次元複体からn次元球面への連続写像のホモトピー類を代数的に分類する問題を扱かった際、初めてsquaring 作用素 $Sq^i: H^n(X;Z_2) \to H^{n+1}(X;Z_2)$ を定義して上の問題を解決した。これが本質的な意味での第一次コホモロジー作用素の理論の発展の第一歩であった。その後主としてSteenrod 自身及び S.Eilenberg, H.Cartan, J.P.Serre, R.Thom, E.Thomas 等の努力で第一次コホモロジー作用素の理論はほゞ完成され、更に次の段階である一般のコホモロジー作用素の理論へと進歩しつつある。

このコホモロジー作用素の理論は広く代数的位相幾何学の全領域にわたって応用されているが、特にホモトピー論に於いては写像の拡張問題、ホモトピー群の計算等に於いて最も強力な武器であり、その他多様体の特性類，Thomのコボルデイズム群等にも用いられて、現代の代数的位相幾何学の常識となって来た。本稿ではこの理論の基本的部分の概観を $H^*(\pi, n)$ との対応の部分まで述べる。この詳細は参考文献を参照されたい。

§1 第一次コホモロジー作用素の定義

n, qを正整数、π, Gをアーベル群とするとき、Tが $(n, q; \pi, G)$ に関する第一次コホモロジー作用素 (以下単に作用素と呼ぶ事にする。) であるとは

a) 各位相空間の対 (X, Y) (但し$X \supset Y$) に対して、Tは写像$T(X, Y): H^n(X, Y; \pi) \to H^q(X, Y; G)$ であり、

b) 各連続写像 $f: (Z, W) \to (X, Y)$ に対して

(naturality)
$$\begin{array}{ccc} H^n(X, Y; \pi) & \xrightarrow[T(X,Y)]{} & H^q(X, Y; G) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^n(Z, W; \pi) & \xrightarrow[T(Z,W)]{} & H^q(Z, W; G) \end{array}$$

は可換である。即ち $f^* \circ T(X, Y) = T(Z, W) \circ f^*$。

注意 1) $T(X, Y)$ は準同型である必要はなく、一般に単なる写像である。以後混同のおそれがない限り$T(X, Y)$ を単にTで表わす。

2) 各 (X, Y) に対して$T(X, Y)$ が準同型のとき、Tを加法的作用素と云う。

例 1 $\mu: \pi \to G$を任意の準同型とするとき、π係数の Cochain にμをほどこして自然にG

係数のCochain が得られる。この対応で

$$\mu_*: H^n(X, Y; \pi) \to H^n(X, Y; G)$$

なる準同型が定義され、これが上の条件b) を満たす事は容易に確かめられる。即ちμ_*は加法的作用素である。

例 2 $0 \to G' \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\nu} G'' \to 0$ をアーベル群の exact な列とする。この時Cochain 群の間の次の様な図が出来て

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C^q(X, Y; G') & \xrightarrow{\mu_\#} & C^q(X, Y; G) & \xrightarrow{\nu_\#} & C^q(X, Y; G'') & \to 0 \\ & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & \\ 0 \to & C^{q+1}(X, Y; G') & \xrightarrow{\mu_\#} & C^{q+1}(X, Y; G) & \xrightarrow{\nu_\#} & C^{q+1}(X, Y; G'') & \to 0 \end{array}$$

横の各列は exact になり、上の図は可換 (但しδは coboundary 作用素)。

今$C^q(X, Y; G'') \ni z$を cocycle とするとき、$\nu_\#(y) = z$となる$y \in C^q(X, Y; G)$をとり、$\delta y \in C^{q+1}(X, Y; G)$ を考えると $\nu_\#(\delta y) = \delta(\nu_\# y) = \delta z = 0$ から、$\mu_\#(x) = \delta y$となる$x \in C^{q+1}(X, Y; G')$ が存在する。これがcocycle である事がすぐわかり、zのコホモロジー類に対してxのコホモロジー類を対応させる事に依り

$$\delta^*: H^q(X, Y; G'') \to H^{q+1}(X, Y; G')$$

が定義され、これが加法的作用素である事が容易に確かめられる。これを$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$に対応する Bockstein 作用素と云う。

例 3 今 $\mu: G \otimes G \to G'$ が与えられたとき、これから$H^*(X, Y; G) \otimes H^*(X, Y; G) \to H^*(X, Y; G')$ なる cup-product が定義出来る事はよく知られている。このcup-product を用いて$x \in H^q(X, Y; G)$ に対して$x^2 = x \cup x \in H^{2q}(X, Y; G')$を対応させると、

$$H^q(X, Y; G) \to H^{2q}(X, Y; G')$$

なる対応が出来る。(これは一般に加法的ではない。) これがnaturality を満たす事は cup-product の性質からわかる。

今 $(n, q; \pi, G)$ に関する作用素全体を$\theta(n, q; \pi, G)$ で表わすと、これに次の加法を導入する事に依ってアーベル群にする事が出来る。即ち

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

但し　$T_1, T_2 \in \theta(n, q; \pi, G)$。

次に作用素の結合に依って

$$\theta(n, q; \pi, G) \otimes \theta(q, r; G, H) \to \theta(n, r; \pi, H)$$

を次の式で定義出来る。

$$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$$

但し $T_1 \in \theta(n, q; \pi, G)$, $T_2 \in \theta(q, r; G, H)$ 。

参考文献　H.Cartan: Seminaire 11,'58/'59

Serre〔29〕 Eilenberg-MacLane〔15〕

§2 Steenrod の作用素

Steenrod は次の様な加法的作用素を各素数pに関して定義した。(定義証明等は省略する。)

a) $Sq^i: H^q(X, Y; Z_2) \to H^{q+i}(X, Y; Z_2)$　$i \geq 0$, qは任意

b) $\mathcal{P}_p^i: H^q(X, Y; Z_p) \to H^{q+2i(p-1)}(X, Y; Z_p)$　$i \geq 0$, qは任意

これ等の作用素の性質についてSteenrod, Adem, Cartan, Thom 等により次のものが基本的である事がわかっている。

0) $\mathcal{P}_p^i$, Sq^iは加法的作用素である。

1) $\mathcal{P}_p^0 = \mathrm{identity}$,　$Sq^0 = \mathrm{identity}$

2) $\mathcal{P}_p^i(x) = x^p$　但し $i = \frac{1}{2}\dim x$

$Sq^i(x) = x^2$　但し $i = \dim x$

(こゝでx^p , x^2 は cup-product の意味)

3) $\mathcal{P}_p^i(x) = 0$　但し $i > \frac{1}{2}\dim x$

$Sq^i(x) = 0$　但し $i > \dim x$

4) $\mathcal{P}_p^i(x \cup y) = \Sigma \mathcal{P}_p^j(x) \cup \mathcal{P}_p^{i-j}(y)$

$Sq^i(x \cup y) = \Sigma Sq^j(x) \cup Sq^{i-j}(y)$

5) $\delta: H^q(Y) \to H^{q+1}(X, Y)$をcoboundary 準同型とすると

$\delta \circ \mathcal{P}_p^i = \mathcal{P}_p^i \circ \delta$

$\delta \circ Sq^i = Sq^i \circ \delta$

例1　今 dim x = 2とすると

$$\mathcal{P}_p^i(x^k) = \binom{k}{i} x^{k+i(p-1)}$$

又 dim x = 1とすると

$$Sq^i(x^k) = \binom{k}{i} x^{k+i}$$

但し $\binom{k}{i}$ は二項係数mod p 及びmod 2 であり、$k < i$のとき $\binom{k}{i} = 0$と約束する。

この証明は 0)—4) を用いてkに関する帰納法で容易に証明される。

例2　Xをn次元複素射影空間とすると$H^*(X; Z_p)$ は2次元の生成元xを持つ多項式環P[x]をx^nで生成されるイデアルで割った環と同型となる。従って$H^*(X; Z_p)$ に於ける$\mathcal{P}_p^i$の作用は例1の式で完全に決定される。

同様にp=2の場合は実数上のn次元射影空間P^n を考えると

$$H^*(P^n; Z_2) \cong P[y]/(y^{n+1}) \quad \text{但し} \dim y = 1$$

となる事が知られている。従って例1の式からSq^iの$H^*(P^n; Z_2)$ への作用は完全に決定される。

例3　今Sq^iを生成元とし、結合を積として自由な結合律を満たすZ_2上のalgebra $\mathfrak{A}$ を考える。今この中で各$H^*(K, L; Z_2)$ の上で0—写像を引き起こす$\mathfrak{A}$の元全体から成るイデアルを$\mathfrak{I}$とする。この時$A = \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$を<u>mod 2 Steenrod algebra</u>と呼ぶ。この時$\mathfrak{I}$はAdem の関係と呼ばれる元 $Sq^a \circ Sq^b - \sum_{i=0}^{[\frac{a}{2}]} \binom{b-i-1}{a-2i} Sq^{a+b-i} \circ Sq^i$ $(a < 2b)$で生成される事がわかっている。

p>2の時は$\mathcal{P}_p^i$とδ^* ($0 \to Z_p \to Z_{p^2} \to Z_p \to 0$ に対応するBockstein 作用素)に依って生成される自由な結合律を満たすZ_p上 のalgebraを元として上と同様な方法でmod p の Steenrod algebra A が定義される。

この時$H^*(K, L; Z_p)$ はA—加群と考える事が出来る。($p \geq 2$)

参考文献　Adem〔2〕,〔3〕,〔4〕　Araki〔6〕

Cartan〔10〕,〔11〕, Séminaire 11, 58/59,

Nakamura〔22〕 Serre〔29〕 Steenrod〔33〕,〔35〕,〔36〕,

〔37〕,〔38〕　Thom〔46〕 Wu〔51〕, Nakaoka〔24〕

§3 応用例1 (mod p. Hopf 不変量)

a) p＝2の場合　　$H_i : \pi_{n+i-1}(S^n) \to Z_2$

$\pi_{n+i-1}(S^n) \ni \alpha$ の代表元 $f : S^{n+i-1} \to S^n$ を用いて、n次元球面 S^n に（n＋i）次元cell　e^{n+i} の境界 $\partial e^{n+i} \approx S^{n+i-1}$ をfによってidentify　して得られるCW－複体を $Yf = S^n \underset{f}{\cup} e^{n+i}$　で表わすと、Yf のホモトピー型はαの代表元 f のとり方に無関係であり、

$$H^i(Yf ; Z_2) = \begin{cases} Z_2 & i = 0, n, n+i \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる。今 $H^n(Yf, Z_2)$，$H^{n+i}(Yf, Z_2)$ の生成元としてそれぞれ $\{s^n\}$，$\{e^{n+i}\}$ をとると

$$Sq^i\{s^n\} = \lambda\{e^{n+i}\}, \quad \lambda \in Z_2$$

と表わせる。今 $H_i(\alpha) = \lambda$　とおいて

$$H_i : \pi_{n+i-1}(S^n) \to Z_2$$

を得る。これをHopf　の準同型と云う。これに関して $i = 1, 2, 4, 8$ の時 H_i はonto の準同型で他の i については0写像と云う事がわかっている。又 $i = 2$ の時は $H_2 : \pi_{n+1}(S^n) \to Z_2$ は $n \geqq 3$ で同型写像である。

b)　p＞2の時　　$H_i : \pi_{n+2i(p-1)-1}(S^n) \to Z_p$

を前と同様に Sq^i の代りに $\mathcal{P}^i_p$ を用いて定義する事が出来る。これについては $i = 1$ の時だけonto　写像で他の場合は0－写像である事がわかっている。

参考文献　Adams〔1〕，Adem〔2〕　Shimada〔31〕

Yamanoshita〔54〕　Steenrod〔34〕

§4　応用例2（写像の拡張）

KをCW－複体Lをその部分複体とするとき、$f : L \to Y$ をK全体に拡張する問題を考える。即ち

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, dashed, "f'"] & \\ L \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

i はLをKに入れる写像

に於いて $f' \circ i = f$　となる様な $f' ; K \to Y$　が存在するかどうかと云う問題である。ホモトピ

一論の多くの問題はこの様な問題か又はそのdual　の問題になおせる事がわかっている。

a）P^5 を実数上の5次元射影空間として、$P^5 \supset P^4 \supset P^3 \supset P^2$ とそれぞれの次元の射影空間を部分空間として含んで居るとする。今この中の P^2 を一点にちぢめた空間をXとしAを P^4 の像とするとA⊂Xとなる。今

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ A \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "i"'] & & A \end{tikzcd}$$

i はAの恒等写像及び i' は　A⊂Xの inclusion

上の図を可換にするfが存在するかどうかを考える。（即ちAはXのretract かどうか。）

今X及びAの Z_2 係数cohomology を図示すると

次元	0	1	2	3	4	5
A	Z_2	0	0	Z_2	Z_2	0
X	Z_2	0	0	Z_2	Z_2	Z_2

となり　$i'^* : H^*(X) \to H^*(A)$ は5次元を除いて同型写像となる。今上のfが存在すると仮定すれば $u \in H^3(A)$　を生成元とするとき

$$f^* Sq^2 u = Sq^2 f^* u$$

ところが $Sq^2 u \in H^5(A) = 0$ から左辺は0となる。しかるに右辺に於いて $i'^* \circ f^* = $ identity　と i'^* が3次元で同型となる事から f^* も同型となり f^*u は $H^3(X)$ の生成元となる。又§2の例2から前と同様な考察に依り $Sq^2 f^* u = \binom{3}{2}\cdot$（5次元の生成元）$\neq 0$　がわかり、矛盾が生ずる。即ちfは存在しない事がわかる。即ちAはXのretract　ではない。

b）K⊃LをCW－複体の対としYを簡単のために単連結とする。今 $f : L \to Y$ が $\bar{K}^n = K^n \cup L$（但し K^n はKのn次元以下のcellから成る部分複体）まで拡張出来たとして $f_n : \bar{K}^n \to Y$ と表わす。

今Kの（n＋1）次元の各cell　σ^{n+1} に対して $\partial\sigma^{n+1} \approx S^n$　は $\bar{K}^n$ に属するから $f | \partial\sigma^{n+1}$ を考える事が出来る。このホモトピー類は $\pi_n(Y)$ の元となるが、これを $c^{n+1}(f_n)(\sigma^{n+1})$ で表わすと、（n＋1)－cochain $c^{n+1}(f_n) \in C^{n+1}(K, L ; \pi_n(Y))$ が定義された。するとこれはcocycle　である事がわかり、且つ

1）$f_n : \bar{K}^n \to Y$ が $\bar{K}^{n+1}$ まで拡張出来る必要十分条件は $c^{n+1}(f_n) = 0$ である事がわかる。従って $c^{n+1}(f_n)$ を f_n のobstruction　cocycle　と云う。

今こゝで $f_n ; \bar{K}^n \to Y$ が $\bar{K}^{n+1}$ まで拡張出来るものとして、その二つの拡張を f_{n+1}，

$f'_{n+1} : \overline{K}^{n+1} \to Y$とする。この二つは$\overline{K}^n$上で一致するから各 (n+1) cell τ^{n+1}に対してf_{n+1}, f'_{n+1} は$\partial\tau^{n+1}$で同じ写像を表わす。従ってこのf_{n+1}, f'_{n+1}に依って$S^{n+1} \to Y$なる写像が自然に定義される。これの表わす$\pi_{n+1}(Y)$の元を$d^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1})(\tau^{n+1})$で表わすと、(n+1)-cochain $d^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1}) \in C^{n+1}(K, L; \pi_{n+1}(Y))$が定義される。又前と同様に$f_{n+1}$, f'_{n+1}の obstruction cocyclc を$c^{n+2}(f_{n+1})$, $c^{n+2}(f'_{n+1}) \in Z^{n+2}(K, L; \pi_{n+1}(Y))$とすると、

2) $\delta d^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1}) = c^{n+2}(f_{n+1}) - c^{n+2}(f_{n+1})$

となる。従って以上をまとめると $f_n : \overline{K}^n \to Y$ に対して、これが$\overline{K}^{n+1}$まで拡張出来るなら、その拡張$f_{n+1} : \overline{K}^{n+1} \to Y$ に依って定義される$c^{n+2}(f_n)$のコホモロジー類はf_{n+1}のとり方に無関係である事がわかる。これを$\overline{c}^{n+2}(f_n) \in H^{n+2}(K, L; \pi_{n+1}(Y))$で表わす事にする。すると

3) $f_n : \overline{K}^n \to Y$が$\overline{K}^{n+2}$に拡張出来るための必要十分条件は $\overline{c}^{n+2}(f_n) = 0$,

がわかる。

次に$f_n : \overline{K}^n \to Y$が$\overline{K}^{n+2}$まで拡張出来るものと仮定する。$f_n$の$\overline{K}^{n+1}$上への2つの拡張を f_{n+1}, $f'_{n+1} : \overline{K}^{n+1} \to Y$ とし、これ等が$\overline{K}^{n+2}$まで拡張出来るものとすれば、前と同様に$d^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1})$, $\overline{c}^{n+3}(f_{n+1})$ $\overline{c}^{n+3}(f'_{n+1})$が定義出来る。ここで$f_{n+1}$, f'_{n+1}が$\overline{K}^{n+2}$まで拡張出来る事から 1) に依って$c^{n+2}(f_{n+1}) = c^{n+2}(f'_{n+1}) = 0$, 従って 2) から$d^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1})$はcocycle となる。今このコホモロジー類を$\overline{d}^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1}) \in H^{n+1}(K, L; \pi_{n+1}(Y))$とすると

4) $Sq^2 \overline{d}^{n+1}(f_{n+1}, f'_{n+1}) = \overline{c}^{n+3}(f_{n+1}) - \overline{c}^{n+3}(f'_{n+1})$

が成り立つ。

参考文献 Eilenberg : Cohomology and continuous mappings Ann. of Math. 41 (1940).
Hu: Homotopy Theory, Steenrod, The topology of fibre bundles, 〔33〕,〔37〕

§5 $H^*(\pi, n)$との対応

Xを (π, n) 型の空間 (即ち$\pi_i(X) = 0$, $i \neq n$; $\pi_n(X) = \pi$) とするとこの弱ホモトピー型は (π, n) のみに関係して定まる。従って$H^*(X; G)$ は(π, n) のみに関係して定まるから、これを$H^*(\pi, n; G)$ で表わす。

今$H_n(\pi, n; Z)$ は Hurewicz の定理からπに同型となる事がわかるから$H^n(\pi, n; \pi) \approx \mathrm{Hom}(H_n(\pi, n; Z), \pi) \approx \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$となる。今$i : \pi \to \pi$を identity 写像とし、これに対応する$H^n(\pi, n; \pi)$の元$b^n$を fundamental class と呼ぶ。すると

補題 Kを CW－複体, Lをその部分複体とすると$H^n(K, L; \pi)$の元xに対して写像$f : (K, L) \to (X, *)$が存在して$f^*(b^n) = x$となる。この様なfのホモトピー類はxだけで定まり、xに対してfのホモトピー類を対応させる事に依って次の同型を得る。

$$\alpha : H^n(K, L; \pi) \approx \Pi((K, L), (X, *)).$$

但し $\Pi((K, L), (X, *))$は $(K, L) \to (X, *)$ のホモトピー類のなす群。

上の補題を用いて$\theta(n, q; \pi, G)$ と$H^q(\pi, n; G)$ の間の対応を次の様に定義する。

各$T \in \theta(n, q; \pi, G)$ に対して$T(b^n) \in H^q(\pi, n; G)$を対応させる。これを$\lambda : \theta(n, q; \pi, G) \to H^q(\pi, n; G)$ で表わす。次に$t \in H^q(\pi, n; G)$ に対して$\lambda'(t) \in \theta(n, q; \pi, G)$を次の式で定義する。

$$\lambda'(t)(x) = \alpha(x)^*(b^n) \qquad \text{但し } x \in H^n(K, L; \pi)$$

これで$\lambda' : H^q(\pi, n; G) \to \theta(n, q; \pi, G)$が定義されたが、$\lambda \circ \lambda' = \lambda' \circ \lambda =$ identity は定義と補題から容易にわかる。従って

〔定理〕 上の対応で

$$\theta(n, q; \pi, G) \approx H^q(\pi, n; G).$$

この定理から$\theta(n, q; \pi, G)$ の代数的構造は、$H^*(\pi, n; G)$ の構造の問題になったわけである。これについては(II)で述べられる予定である。

参考文献 Cartan〔9〕, Séminaire 11, 58/59
Eilenberg-MacLane〔15〕,〔16〕

2. 才一次コホモロジー作用素 (II)

東大　　中 村 得 之

§1　以下$H_*(X)$, $H^*(X)$は$H_*(X;Z_p)$ $H^*(X;Z_p)$のこととする。

$\pi_i(X)=0$ $(i\neq n)$, $\pi_n(X)\cong\pi$ となる空間のホモロジー群は一意的に定まるから、このような空間をEilenberg-Mac Lane の空間とよびK (π, n) とかいた。Serre [28] によればK $(\pi, n-1)$ をファイバー空間，K (π, n) を底空間とする非輪状なファイバー空間Eが存在する。

一般にFをファイバー，Bを底とするファイバー空間Eに対し、ホモロジー群のスペクトル系列といわれる加群の系列$\{E^r_q\}$が存在し次の条件を満足する。

i)　$E^r=\sum_q E^r_q$

ii)　微分作用素 $d^r: E^r\to E^r$ が存在し、条件 $d^r d^r=0$, $d^r E^r_q\subset E^r_{q-1}$ を満足する。

iii)　d^r によるホモロジー群 $\mathrm{Ker}\, d^r\cap E^r_q/\mathrm{Im}\, d^r\cap E^r_q$ を$H_q(E^r)$ とかくことにすれば $E^{r+1}_q=H_q(E^r)$

iv)　$d^r|E^r_q=0$ $(r>q)$。したがって $E^r_q\cong E^{r+1}_q$ $(r>q+1)$。そこで$E^r_q\cong E^\infty_q$ とかくことにする。

次の性質は基本的である。

i)　$E^2\cong H_*(F)\otimes H_*(B)$

ii)　$E^{r+1}=H_*(E^r)$

iii)　$E^\infty\cong H_*(E)$

特にはじめにのべたファイバー空間に対しては

i)　$E^2\cong H_*(\pi, n-1)\otimes H_*(\pi, n)$

ii)　$E^{r+1}=H_*(E^r)$

iii)　$E^\infty=0$

§2　H.Cartan はこれと同値な Cartan 構成とよばれる代数的方法を用いて$H_*(\pi, n)$ を計算することに成功した。

すなわち $A=H_*(\pi, n-1)$ とNのテンソル積 $C=A\otimes N$に $d(a\otimes n)=a\cdot d$

$(1\otimes n)$ — こゝで右辺は $d(1\otimes n)=\sum a_i\otimes n_i$ としたとき $d(a\otimes n)=\sum a\cdot a_i\otimes n_i$ となることを示す — を満足する微分作用素を導入したとき、dによるホモロジー群 $H_*(C)$ が0になったとする。このとき$N=C/A^+C$ $(A^+=\sum_{q>0}A^q)$と考えたとき $H_*(N)\cong H_*(\pi, n)$ となる。

次に以下必要な定義を二、三与えておく。

$E(x)$: x ($\dim x\equiv 1 \mod 2$)を生成元とする外積代数

$P_*(y)$: $\gamma_i(y)$ $(0\leq i$, $\dim\gamma_i(y)=i\cdot\dim y\equiv 0 \mod 2)$ を生成元とするZ_p上のベクトル空間で$\gamma_i(y)\gamma_j(y)=\binom{i+j}{i}\gamma_{i+j}(y)$ を満足する代数

$Q(y)$: $\gamma_i(y)$ $(0\leq i<p$, $\dim\gamma_i(y)=i\cdot\dim y\equiv 0 \mod 2)$ を生成元とする$P_*(y)$ の部分代数

$\gamma_i(y)^p=0$となることに注意すれば $P_*(y)=\bigotimes_i Q(\gamma_{p^i}(y))$となる。

さて、テンソル積 $C=E(x)\otimes P_*(\sigma x)$ に微分作用素dを $d(a\otimes n)=a\cdot d(1\otimes n)$, $d(1\otimes\gamma_i(\sigma x))=x\otimes\gamma_{i-1}(\sigma x)$ によって定義すればCは非輪状となる。

同様にして，$C=Q(y)\otimes E(\sigma y)\otimes P_*(\varphi y)$ に微分作用素を $d(1\otimes\sigma y)=y\otimes 1$, $d(1\otimes\varphi y)=\gamma_{p-1}(y)\otimes\sigma y$ で定義すれば、Cは非輪状となる。

$H_*(\pi, n)$ は$E(x_\lambda)$ と$P_*(y_\mu)$ のテンソル積であらわされる。帰納法によってこれを証明しよう。

$n=0$の場合は自明である。

$n>0$としよう。$A=H_*(\pi, n-1)$ が

$$A\cong(\bigotimes_\lambda E(x_\lambda))\otimes(\bigotimes_\mu P_*(y_\mu))=(\bigotimes_\lambda E(x_\lambda))\otimes(\bigotimes_{\mu,i}Q(\gamma_{p^i}(y_\mu))$$

とかきあらわされたとしよう。このとき

$$N=(\bigotimes_\lambda P_*(\sigma x_\lambda))\otimes(\bigotimes_{\mu,i}(E(\sigma\gamma_{p^i}(y))\otimes P_*(\varphi\gamma_{p^i}(y))))$$

例　$\pi=Z$

$n=1$　$H_*(Z, 1)\cong E(\sigma)$　　$(H_*(Z, 1)\cong H_*(S^1))$

$n=2$　$H_*(Z, 2)\cong P_*(\sigma^2)$

$n=3$　$H_*(Z, 3)\cong\bigotimes_i(E(\sigma\gamma_{p^i}\sigma^2)\otimes P_*(\varphi\gamma_{p^i}\sigma^2))$

<u>定理</u>　$H_*(Z, n) \cong (\bigotimes_I E(a^I)) \otimes (\bigotimes_J P_*(a^J))$

こゝで系列

$$I = \{\lambda_0, \varepsilon_1, \lambda_1, \cdots\cdots, \varepsilon_l, \lambda_l\}$$

に関する語を

$$a^I = \sigma^{\lambda_0}(\sigma\beta)^{\varepsilon_1} \gamma_p \sigma^{2\lambda_1} \cdots\cdots (\sigma\beta)^{\varepsilon_l} \gamma_p \sigma^{2\lambda_l}$$

(たゞし　$\sigma\beta\gamma_p = \varphi_p$ とする)

$$\deg(a^I) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{l} 2(\varepsilon_i + \lambda_i)\, p^i$$

$$h(a^I) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i + 2\lambda_i$$

で定義するとき、上の a^I は $h(a^I) = n$, $\deg(a^I) \equiv 1 \mod 2$ となる語全体、a^J は $h(a^J) = n$, $\deg(a^J) \equiv 0 \mod 2$ となる語全体の上を動くもととする。

<u>§3</u>　コホモロジー群の場合には、τ, $\mathcal{P}$, β の性質を用いれば σ, γ_p, β の代りに τ, $\mathcal{P}$, β を代入すればよいことがわかる。これはファイバー空間のコホモロジースペクトル系列を用いて直接に計算することもできる(Serre〔29〕)。

例　$H_*(Z, n) \cong (\bigotimes_I E(\mathcal{P}^I u^n)) \otimes (\bigotimes_J P(\mathcal{P}^J u^n))$

($P(y)$ は y を生成元とする多項式環)

こゝで系列Iに関し、$\mathcal{P}^I$ を

$$\mathcal{P}^I u^n = \tau^{\lambda_0}(\tau\beta)^{\varepsilon_1} \mathcal{P}^{r_1} \tau^{2\lambda_1} \cdots\cdots (\tau\beta)^{\varepsilon_l} \mathcal{P}^{r_l} \tau^{2\lambda_l}.1$$

$$= \beta^{\varepsilon_1} \mathcal{P}^{r_1} \cdots\cdots \beta^{\varepsilon_l} \mathcal{P}^{r_l} u^n$$

$$\left(r_i = 2(p-1) \sum_{j=i}^{l} \lambda_j p^{j-i} \right)$$

$$\deg \mathcal{P}^I + n \equiv \deg a^I$$

で定義するとき、$\mathcal{P}^I$ は $\deg \mathcal{P}^I + n \equiv 1 \mod 2$ となる語全体、$\mathcal{P}^J$ は $\deg \mathcal{P}^J + n \equiv 0 \mod 2$ となる語全体の上を動くものとする。

特に $I = \{\lambda_0, 2\lambda_1\}$ としたとき、$\mathcal{P}^I = \mathcal{P}^{\lambda_1}$ となることに注意しよう。

$p = 2$ の場合には $\mathcal{P}^r = Sq^{2r}$, $\beta = Sq^1$ とかきかえればよい。

§4　$\theta(n, q; \pi, G)$ に属する、第1次コホモロジー作用素の全体はEilenberg-

MacLane のコホモロジー群 $H^q(\pi, n; G)$ の元と1:1に対応する。そこで $H_*(\pi, n; G)$ に関する前の§でえられた結果を用いて第1種コホモロジー作用素の関係式を求めよう。ここでは第1種全部をとりあげることはやめ、四種の作用素　i) 加法　ii) cup 積　iii) Bockstein作用素 β　iv) 約積 $\mathcal{P}$ の間の関係式について丈考えることにする。

初等作用素 i)〜iii) 相互の間および、これを左から結合する場合の関係式は既知とする。

したがって残された問題は、$\mathcal{P}^r$　$\theta(n, q; Z, Z_p) \subset \theta(n, q+2(p-1)r; Z, Z_p)$ すなわち $\mathcal{P}^r H^q(Z, n; Z_p) \subset H^{q+2(p-1)r}(Z, n; Z_p)$ を上に示した表示でどのような形にあらわされるかをしらべればよい。

そこで問題となるのは $\mathcal{P}^r(u+v)$, $\mathcal{P}^r(u \cup v)$ および $\mathcal{P}^r \mathcal{P}^s$ に対し、上の目的にかなう公式を求めることである。これらに対する解答を与えるものとして次の関係式が存在する。

i)　$\mathcal{P}^r(u+v) = \mathcal{P}^r u + \mathcal{P}^r v$

ii)　(Cartan-Steenrod) $\mathcal{P}^r(u \cup v) = \sum_{r'+r''=r} \mathcal{P}^{r'} u \cup \mathcal{P}^{r''} u$

iii)　(Adem)

$$\mathcal{P}^r \mathcal{P}^s = \sum_{i=0}^{[r/p]} (-1)^{r+i} \binom{(s-i)(p-1)-1}{r-ip} \mathcal{P}^{r+s-i} \mathcal{P}^i$$

$$\mathcal{P}^r \beta \mathcal{P}^s = \sum_{i=0}^{[r/p]} (-1)^{r+i} \binom{(s-i)(p-1)}{r-ip} \beta \mathcal{P}^{r+s-i} \mathcal{P}^i$$

$$+ \sum_{i=0}^{[(r-1)/p]} (-1)^{r+i+1} \binom{(s-i)(p-1)-1}{r-ip-1} \mathcal{P}^{r+s-i} \beta \mathcal{P}^i$$

i), ii) の証明は $\mathcal{P}$ の基本的な性質であるが、こゝで証明することは省略する。以下iii) の証明のあらすじを示そう。

$K(Z, 2)$ (複素射影空間) のN箇の直積 $X = \prod_N K(Z, 2)$ を考えよう。

いま $y \in H^2(Z, 2; Z_p)$ をその基本類とする。

系列Iに関し、多項式 $D_N^I \in \bigotimes_N H^*(Z, 2; Z_p)$ を $y_N = \overbrace{y \otimes \cdots\cdots \otimes y}^{N} \in \bigotimes_N H^*(Z, 2; Z_p)$ のN箇の因子の中、すべての i $(1 \leq i \leq l)$ に対し λ_i 箇の y を y^{p^i} でおきかえてえられるあらゆる単項式の和とする。

いま

$$\mathcal{P}^r y^{p^i} = \begin{cases} y^{p^{i+1}} & r = p^i \\ 0 & r \neq p^i \end{cases}$$

となることに注意すれば、容易に次の等式が成立つことがわかる。

$$\mathcal{P}^r y_N = D^I$$

こゝで$I=(\lambda_0, \lambda_1)$, $\mathcal{P}^I=\mathcal{P}^r$ すなわち $\lambda_1=r$ とする。これから

$$\mathcal{P}^r \mathcal{P}^s y_N = \Sigma D^I$$

こゝで $I=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, Σは $\lambda_2 \leqq [r/p]$, $(p-1)\lambda_1+(p^2-1)\lambda_2=r+s$ なるI全体にわたるものとする。このとき

$$\Sigma c_i^{r,s} \mathcal{P}^{r+s-i} \mathcal{P}^i = \Sigma D^I$$

となることが容易に示される。$c_i^{r,s}=\binom{(s-i)(p-1)-1}{r-ip}$ となることは帰納法によって証明される。

§5 例1 $H^*(Z_2, 2) \cong P(u)$ における$\mathcal{P}^i$を計算しよう。$\mathcal{P}=\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ とおけば Cartan-Steenrod の公式は $\mathcal{P}(u \cup v)=\mathcal{P}u \cup \mathcal{P}v$ $(u, v \in H^*(x))$ とかきあらわされることに注意しておく。さて $u \in H^2(Z_2, 2)$ を $K(Z_2, 2)$ の基本類とすれば

$$\mathcal{P}^i u = \begin{cases} u^p & i=\frac{1}{2}\dim u=1 \\ 0 & i>1 \end{cases}$$

となることから

$$\mathcal{P}u = u + u^p$$

こゝでuの指数は cup 積に関するp乗とする。したがって $\mathcal{P}$が cup 積に関し乗法的であることから、一般に

$$\mathcal{P}(u^i) = (\mathcal{P}u)^i = (u+u^p)^i = \Sigma \binom{i}{j} u^{j+p(i-j)} = \Sigma \binom{i}{j} u^{i+(p-1)(i-j)}$$

$$= \Sigma \binom{i}{r} u^{i+(p-1)r}$$

一方

$$(u^i) = \Sigma \mathcal{P}^r(u^i)$$

となることに注意すれば

$$\mathcal{P}^r u^i = \binom{i}{r} u^{i+(p-1)r}$$

例2 $H^*(U(n)) \cong E(z_1, \cdots\cdots, z_n)$ $(z_i \in H^{2i-1}(U(n))$ を生成元とする外積代数) における$\mathcal{P}^i$を計算しよう。$U(n)$の分類空間を$B_{U(n)}$ とすれば

$$B_{U(n)} = \lim_{N\to\infty} U(N+n)/U(N)\times U(n) = \lim_{N\to\infty} G(N+n, n)$$

したがって

$$H^*(B_{U(n)}) \cong P(y_1, \cdots\cdots, y_n)$$

こゝでTを$U(n)$の極大円環群とすれば

$$B_T = \underbrace{P^\infty(C) \times \cdots\cdots \times P^\infty(C)}_{n}$$

すなわち

$$H^*(B_T) \cong P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

$i: T \to U(n)$ を埋蔵写像とすれば $i^*: H^*(U(n)) \to H^*(T)$ に対し、

$$i^* y_i = \sigma_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

σ_i は i次基本対称式とする。したがって $\mathcal{P}^r(y_i)$ を計算するには $\mathcal{P}^r(\sigma_i(x_1, \cdots, x_n))$ を計算すればよい。これは例1と Cartan-Steenrod の公式を用いて計算できる。すなわち

$$\mathcal{P}^r(\sigma_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)) = \mathcal{P}^r(\Sigma x_1 \cdots\cdots x_i) = \Sigma x_1^p \cdots\cdots x_r^p x_{r+1} \cdots\cdots x_i$$

こゝで $\Sigma x_1^p \cdots\cdots x_r^p x_{r+1} \cdots\cdots x_i$ は $\sigma_1, \cdots\cdots, \sigma_{i+(p-1)r}$ の多項式としてあらわされるからこれを $B(\sigma_1, \cdots\cdots, \sigma_j)$ $j=i+(p-1)r$ であらわそう。結局

$$i^* \mathcal{P}^r(y_i) = \mathcal{P}^r(i^* y_i) = \mathcal{P}^r(\sigma_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)) = B(\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$$

$$= B(i^* y_1, \cdots\cdots, i^* y_j) = i^* B(y_1, \cdots\cdots, y_j)$$

i^* は単射だから

$$\mathcal{P}^r(y_i) = B(y_1, \cdots\cdots, y_j)$$

がえられる。

(E, p, B) をBを底空間，Fをファイバーとするファイバー空間とする。
$i: F \to E$を埋蔵、$p: E \to B$を射影とするとき、$\delta^*: H^*(F) \to H^*(E, F)$, $p^*: H^*(B, b) \to H^*(E, F)$ に対し、$\delta^{*-1} p^* H^*(B, b)$ $(\subset H^*(F))$ の元を転入可能な類とよび、$\delta^{*-1} p^*$ を転入といいτとかく。$U(n)$の分類空間$B_{U(n)}$上の普遍ファイバー空間 $(E_{U(n)}, p, B_{U(n)})$ を考えるとき、$H^*(U(n))$の生成元 $z_1, \cdots\cdots, z_n$はすべて、このファイバー空間に関し、転入可能な元であり、しかも$H^*(E_{U(n)})=0$ から、δ^* は次元正の部分では常に単射となる。
τは $\mathcal{P}$ と可換だから $\tau\mathcal{P}^r(Z_i) \equiv B(y_1, \cdots\cdots, y_n)$ $(\bmod\ p^{*-1}(0))$ 。そこで $B(y_1, \cdots\cdots, y_n)$にあらわれる$y_j$ に関する1次の項を$\Sigma \lambda_j y_j$ とすれば i^*は単射だか

ら $\wp^r z_i = \sum \lambda_j z_j$ となる。

一般のLie 群の場合は対称式の代りにWeyl 群によって不変なものをとればよい。

例3 $S^{2n}(n \geqq 3)$ は概複素構造をもたない。$p: T \to S^{2n}$ をS^{2n} 上の接標構空間とする。S^{2n} に概複素構造が入ることはTの構造群 SO (2n) を$U(n)$ に制限できることと同じである。すなわちTは$U(n)$の普遍ファイバー空間 $E_{U(n)} \to B_{U(n)}$ から連続写像 $f: S^{2n} \to B_{U(n)}$ によってひきおこされた逆像と考えられる。$n \geqq 4$とすれば $p < n$ となるある奇素数に対して y_nは$y_i (i < n)$ のcup 積と $\wp$ によって生成される多項式$F(y_1, \cdots\cdots, y_{n-1})$ としてあらわされることが、例2を用いて証明される。したがって

$$c_n = f^* y_n = f^* F(y_1, \cdots\cdots, y_{n-1}) = F(f^* y_1, \cdots\cdots, f^* y_{n-1})$$
$$= F(c_1, \cdots\cdots, c_{n-1})$$

こゝで $c_i \in H^{2i}(S^{2n}) = 0$ $(0 < i < n)$ であることに注意すれば$c_n = 0$。一方 $c_n = \chi(S^{2n}) u = 2u$ ($u \in H^{2n}(S^{2n})$は基本類) となることから $c_n \neq 0$ 、これは矛盾である。S^2 , S^6 には概複素構造が存在し、S^4 上にはないことがしられている。

例4 $f: S^{m+n} \to S^n$に対し、E^{2n} の境界S^{2n-1}をfによってS^nと同一視してえられる空間 $E^{2n} \cup_f S^n$ をXとかくことにしよう。$u \in H^n(X)$ を基本類とするとき$Sq^n u \neq 0$ならば$\pi_{2n-1}(S^n)$ の元{ f }は Hopf 不変量1をもつという。$\pi_{2n-1}(S^n)$ が Hopf 不変量1の元をもつのは$n = 1, 2, 4, 8$の場合に限ることが証明されている。こゝではAdem の関係式 iii) を用いて$n \neq 2^m$ となる場合以外には$\pi_{2n-1}(S^n)$ は Hopf 不変量1の元をもたないことを示そう。

$p = 2$としたとき、第一種コホモロジー作用素 Sq^r 全体のつくる代数をSteenrod 代数とよびA_2 とかく。A_2 の中 Sq^{2^i} $(i \leqq m)$ によって生成される部分代数を $S(m)$ とかくことにしよう。このとき Adem の関係式は次の形に書き直される (Wall 〔49〕)。

i) $A_2 = S(\infty)$

ii) $Sq^{2^i} + Sq^{2^j} + Sq^{2^j} Sq^{2^j} \in S(i-1)$ $(0 \leqq j \leqq i-2)$

iii) $Sq^{2^i} Sq^{2^i} + Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^i} Sq^{2^{i-1}} + Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^i} \in S(i-1)$

すなわち任意の Sq^rは $r = 2^i$ となるものの和と積でかきあらわされる。$H^i(X) = 0$ $(i \neq 0, n, 2n)$ であるからn$\neq 2^m$ の場合は常に$Sq^n u = 0$

3. 高次コホモロジー作用素 (I)

九大　　工 藤 達 二

§1 準備 A , B , … , T , S , … , X , Y , … などは base point (それぞれa_0 , b_0 , …) をもった位相空間 , $f: A \to B$, $g: S \to A$, $h: A \to T$などは連続写像でbase point を base point に移すものとする。

$\pi(A, B) = A_\#(B) = B^\#(A)$は$f: A \to B$なる写像のhomotopy class [f] の全体とする。$f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$のcomposition $h \circ g \circ f: A \to D$ を$h \circ g \circ f = h_* g f^*$とかく。

$\theta: T_1 \to T_2$ は$\theta_*: T_1^\#(A) \to T_2^\#(A)$ なるmap を induce し $h: A \to B$は$h^*: T_i^\#(B) \to T_i^\#(A)$ $(i = 1.2)$ なるmap を induce し $(\theta_*[f]) h^* = \theta_*([f] h^*)$ となる。

(1.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "fh^*"] \arrow[d, "\theta_* fh^*"'] & T_1 \arrow[dl, "\theta"] \\ T_2 & B \arrow[l, "\theta_* f"'] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_1^\#(B) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\theta_*"] & T_1^\#(A) \arrow[d, "\theta_*"] \\ T_2^\#(B) \arrow[r, "h^*"] & T_2^\#(A) \end{tikzcd}$$

Iは区間<0 , 1>, B^Iはmapping Space (compact open topology をそなえたもの) , EBはpath space ($\alpha(0) = b_0$ なる$\alpha \in B^I$全体) , ΩBはloop space ($\alpha(0) = \alpha(1) = b_0$ なる$\alpha \in B^I$ の全体) , $f: B \to X$に対してE_f は$B \times EX$の部分集合 $\{(b, \alpha) | f(b) = \alpha(1)\}$ のこと、$\rho_f: E_f \to B$を$\rho_f(b, \alpha) = b$で定義すれば$\rho_f^{-1}(b_0) = \{(b_0, \alpha) | \alpha \in \Omega X\} \approx \Omega X$ で $l_f: \Omega X \to E_f$を $l_f(\alpha) = (b_0, \alpha)$ で定義する。ΣXは$X \times I$ の部分 $X \times (0) \cup X \times (1) \cup x_0 \times I$ を一点に identify して得られる。ΣXの点は (x, t) $(x \in X, 0 \leqq t \leqq 1)$ で表わす。次の等式は基本的である。

基本等式 (1.2)　　$\pi(A, \Omega B) = \pi(\Sigma A, B)$

〔証明〕 $f: A \to \Omega B$に対して $f(a)(t) = g(a, t)$ は $f(a)(0) = f(a)(1) = f(a_0)(t) = b_0$ だから gは map $\Sigma A \to B$ と見られ逆も明らか。

S^n (n次元球面) は$S^n = \Sigma S^{n-1}$ と考えられるから , $\pi(S^n, X) = \pi(S^{n-1}, \Omega X)$ となり一般に $\pi(A, \Omega B)$ には群の構造を入れることができるから $\pi(S^n, X)$ はhomotopy 群と呼ばれ$\pi_n(X)$で表わされる。Eilenberg-MacLane space $K(\pi, n)$

(ここに $\bigcirc \xleftarrow{\xi} \bigcirc \xleftarrow{\eta} \bigcirc$ がexact とは $\mathrm{Ker}\ \xi_* = \mathrm{Im}\ \eta_*$ のこと) から得られる$\Phi'' = \theta''_* \circ (\rho\rho')_*^{-1}$ は$D_\Phi(X) = \mathrm{Im}(\rho\rho')_* = \mathrm{Ker}\ \Phi'$ $(\Phi' = \theta'_* \circ \rho_*^{-1})$, $\Phi''[h] \in S''^{\#}(X) / \theta''_*(\mathrm{Ker}(\rho\rho')_*)$, $\theta''_*(\mathrm{Ker}(\rho\rho')_*) = \theta''_* \mathrm{Im}\ l''_0 = \mathrm{Im}(\theta'' l''_0)_* = \mathrm{Im}\ \Phi'_0$ $(\Phi'_0 = (\theta'' l''_0)_* \circ \rho_{0*}^{-1})$ と一般2次cohomology operation Φ', Φ'_0 で定義域および値域を表わせるから一般3次cohomology operation と呼ぶことができる。一般n次cohomology operation はこれから容易に類推される。(3.3),(3.5) などがどのような手続で得られるかを次§以下で述べる。

$M \xleftarrow{\xi} N \xleftarrow{\eta} L$ がexactのとき $[f] \in N^{\#}(X)$ が$[f] = \eta_*[g]$ $([g] \in L^{\#}(X))$ の形にかけるため必要且つ充分な条件は $\xi_*[f] = 0$ (0はconstant map $X \to m_0 \in M$のclass) であるから$\xi_*[f]$を$[f]$が $[f] = \eta_*[g]$ の形にかけるためのobstruction と呼ぶ。(3.5) において$\theta_*[f]$は$[f] = \rho_*[f']$ の形にかけるためのobstructionであり、そのobstruction が0のとき$[f] = \rho_*[f']$ とかけるが $[f']$ が更に $[f'] = \rho'_*[f'']$ の形にかけるためのobstruction が $\theta'_*[f']$ で $[f] \to \theta'_*[f']$ なる対応が一般2次cohomology 作用素 $\Phi' = \theta'_* \circ \rho_*^{-1}$ である。

次に$\Phi'[f] = 0$ とは $\theta'_*[f'] = (\theta' \circ l')_*[\exists g]$ の形のことで $\theta'_*([f'] - l'_*[g]) = 0$, $[f'] - l'_*[g] = \rho'_*[\exists f'']$, $\rho_*\rho'_*[f''] = \rho_*[f'] - \rho_* l'_*[g] = \rho_*[f'] = [f]$, $\theta''_*[f'']$ は $[f''] = \rho''_*[\exists f''']$ の形にかけるためのobstruction $[f] \mapsto \theta''_*[f'']$ なる対応が$\Phi'' = \theta''_*(\rho\rho')^{-1}$ である (ここに$T''' \xrightarrow{\rho''} T'' \xrightarrow{\theta''} S''$ はexact とする)。

<u>§4. Hurewicz bundle</u> $\varpi: E \to B$は$e \in E$と$\omega(0) = \varpi(e)$なるB上のpath ω の組に対して$\alpha(0) = e$, $\varpi\alpha = \omega$ なるE上のpath α を対応させる写像$\lambda: \Omega \to E^I$ $(\Omega = \{(e, \omega) \mid \omega(0) = \varpi(e)\} \subset (E \times B^I))$ が存在するときHurewicz bundle と呼ばれる。λはlift と呼ばれる。$\varpi g = f$なる$g: X \to E$, $f: X \to B$とfのhomotopy f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して$g_t(x)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を$\lambda(g(x), \omega(x))(t)$ (ここに$\omega(x)$は$f_t(x)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の表わすBのpath) のこととすれば$\varpi g_t = f_t$なるgのhomotopy $g_t: X \to E$である。すなわちϖは任意の空間Xに関するcovering homotopy Propertyを許す。逆に任意の空間Xに関するcovering homotopy propertyをもつ$E \xrightarrow{\varpi} B$はXとしてΩをえらぶことにより容易にHurewicz bundle であることがわかる。induced bundleの定義は通常の場合と同じで$B' \xrightarrow{f} B$ に対して$B' \times E \supset E' = f^{-}E = \{(x, e) \mid f(x) = \varpi(e)\} \xrightarrow{\varpi'} B'$, $\varpi'(x, e) = x$ と定義される。$EX \ni \alpha \xrightarrow{\pi} \alpha(1) \in X$はHurewicz bundleの典型的な例であり $B \xrightarrow{f} X$ によるそのinduced bundle が§1で与えた$E_f \xrightarrow{\rho_f} B$である。

$l_f: \Omega X \to E_f$は本質的にはfibre $\rho_f^{-1}(b_0) \approx \Omega X$のinclusion であり

(4.1) $\Omega X \xrightarrow{l_f} E_f \xrightarrow{\rho_f} B \xrightarrow{f} X$

は exact である。一般に$A \xrightarrow{g} B$から$\Omega A \xrightarrow{\Omega g} \Omega B$ なるmap が induce されるがこれを (4.1) に適用して

(4.2) $\cdots \to \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega l_f} \Omega E_f \xrightarrow{\Omega\rho_f} \Omega B \xrightarrow{\Omega f} \Omega X \xrightarrow{l_f} E_f \xrightarrow{\rho_f} B \xrightarrow{f} X$

を得るがこれも exact である。この辺の事情についてはNomura [3] に平易で興味のある展開が見られるが、Hurewicz bundle の定義から上のexactnessは容易に導かれる。

また任意のHurewicz bundle $E \xrightarrow{\varpi} B$ から出発して

(4.3) $\cdots \to \Omega E \xrightarrow{\Omega\varpi} \Omega(B) \xrightarrow{k} F \xrightarrow{l} E \xrightarrow{\varpi} B$

なるexact sequence を得るが、これに $\pi(S^0,\quad)$ をかぶせて

(4.4) $\cdots \to \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \cdots$

なるexact sequence を得る。Hurewicz bundle $EB \xrightarrow{\pi} B$ に (4.4) を適用し、EBがContractible なことを利用すれば$\pi_{n+1}(B) \approx \pi_n(F) = \pi_n(\Omega B)$ を得る。従って$B = K(\pi, n)$ なら$\Omega B = K(\pi, n-1)$ である。BがCW-complex と同homotopy type のときΩBもそうであることはMilnor [4] が証明した。

$S, S', S'', \cdots\cdots$が$K(\pi', n'), K(\pi'', n''), K(\pi''', n'''), \cdots\cdots$で $T = K(\pi, n)$ のとき $\theta: T \to S$から ((4.2) を適用)

(4.5) $\cdots \to \Omega T \xrightarrow{\Omega\theta} \Omega S \xrightarrow{l_\theta} E_\theta \xrightarrow{\rho_\theta} T \xrightarrow{\theta} S$

$T' = E_\theta$とおき $\theta': T' \to S'$ から

(4.5)′ $\cdots \to \Omega T' \xrightarrow{\Omega\theta'} \Omega S' \xrightarrow{l_{\theta'}} E_{\theta'} \xrightarrow{\rho_{\theta'}} T' \xrightarrow{\theta'} S'$

$T'' = E_{\theta'}$ とおき $\theta'': T'' \to S''$から

(4.5)″ $\cdots \to \Omega T'' \xrightarrow{\Omega\theta''} \Omega S'' \xrightarrow{l_{\theta''}} E_{\theta''} \xrightarrow{\rho_{\theta''}} T''' \xrightarrow{\theta''} S''$

を得る。これらを組合せて (3.5) の型のdiagram を得るが$[\theta] \in H^{n'}(\pi, n; \pi')$, $[\theta'] \in H^{n''}(T', \pi'')$, $[\theta''] \in H^{n'''}(T'', \pi''')$, …… から本質的に一意にdiagram がき

まることに注意する。(3.5) の中のU', U'', …… は $\Omega S=K(\pi', n'-1)$, $\Omega S'=K(\pi'', n''-1)$, …… であるが U''_0 は $\rho\rho' : T''\to T$ なるHurewicz bundle の fibre である。これは $\rho' : T''\to T'$ をT' の部分U' の上に制限したものと考えられ $\rho_0 : U''_0 \to U'$ なるHurewicz bundle を定め fibre はやはり U'' である。

§5 例 $T=K(\pi, n_1)\times\cdots\times K(\pi, n_j)$ とすれば $[f]\in T^{\#}(X)$ は $H^{n_j}(X, \pi)\ni x_j$ なる組を与えることと同じになる。何となれば $b_j : T\to K(\pi, n_j)$ を第j成分への射影とすれば $f: X\to T$ を与えることと $(b_1\circ f, \cdots, b_j\circ f)$ なる組を与えることと同じで、$[b_j\circ f]\in H^{n_j}(X, \pi)$ だからである。$S=K(\pi', m_1)\times\cdots\times K(\pi', m_k)$ とすれば θ を与えることは組 $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$, $\theta_k : T\to K(\pi', m_k)$ を与えることと同じである。各 θ_k は $T^{\#}(X)\xrightarrow{\theta_{k*}}H^{m_k}(X, \pi')$ なる cohomology operation : $\{x_j\}\in T^{\#}(X)$ $\theta_{k*}\{x_j\}\in H^{m_k}(X, \pi')$ を定めるから、θ を与えることは多変数の cohomology operation θ_{k*} の組を与えることと同値である。ここでも $s_k : S\to K(\pi', m_k)$ は射影とし $\theta_k=s_k\circ\theta$ とした。$T'=E_\theta$, $\rho=\rho_\theta$, $\Omega S=K(\pi', m_1-1)\times\cdots\times K(\pi', m_k-1)$ である。$T'=E_\theta$ は次のような性質をもつ。$e_j=[b_j]\rho^*$ とおけば $x_j\in H^{n_j}(X, \pi)$ なる x_j の組で $\theta_*\{x_j\}=0$ なるものに対して $g: X\to E_\theta$ があって $e_j g^*=x_j$ となり、逆に $\forall g: X\to E_\theta$ に対して $x_j=e_j g^*$ の組は $\theta_*\{x_j\}=0$ をみたす。このことは $\{x_j\}$ を $[f]\in T^{\#}(X)$ と identify ($b_{j*}[f]=x_j$) し、$\bigcirc\xrightarrow{\rho}\bigcirc\xrightarrow{\theta}\bigcirc$ が exact なることに注意すれば $[f]=\rho[g]$ は $x_j=b_{j*}[f]=b_{j*}\rho_*[g]=[b_j\circ\rho\circ g]=[b_j]\rho^* g^*=e_j g^*$ と同値なることからわかる。

$\tilde{\alpha}_k : K(\pi', m_k)\to K(\pi'', \mu)$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, K)$ が定める cohomology operation は

$$(5.1)\quad \sum_k \tilde{\alpha}_{k*}\circ\theta_{k*}=0$$

をみたすものとする。(5.1) は $h: S=K(\pi', m_1)\times\cdots\cdots\times K(\pi', m_K)\to K(\pi'', \mu)$ を $h=\square(\tilde{\alpha}_1\circ s_1)\square\cdots\cdots\square(\tilde{\alpha}_K\circ s_K)$ ($\square$ は $K(\pi'', \mu)=\Omega K(\pi'', \mu+1)$ における積演算) で定義するとき $h\circ\theta : T\to K(\pi'', \mu)$ が homotopic 0 なることと同値である。このとき $\theta' : T'\to S'=\Omega K(\pi'', \mu)=K(\pi'', \mu-1)$ を適当にえらんで $\theta'\circ\iota' : \Omega S\to\Omega K(\pi'', \mu)$ が $h: S\to K(\pi'', \mu)$ から導かれる $\Omega h : \Omega S\to\Omega K(\pi'', \mu)$ に homotopic になるようにできる。結局 (5.1) なる primary operation の間の relation から $\Phi'=\theta'_*\circ\rho_*^{-1}$ なる secondary operation が定義できて $D_\Phi(X)=$

$\mathrm{Im}\rho_*=\mathrm{Ker}\,\theta_*=\bigcap_k \mathrm{Ker}\,\theta_{k*}$, Φ の不定性は (group case !) $\mathrm{Im}(\theta'\circ\iota')_*=\mathrm{Im}(\Omega h)_*=\sum_k \mathrm{Im}\,a_{k*}$ (ここに $a_k=\Omega\tilde{\alpha}_k : K(\pi', m_k-1)\to K(\pi'', \mu-1)$) で代表される。

§6. 文献 $\pi(A, B)$ 形式で cohomology 群, homotopy 群, cohomotopy 群, homology 群などを統一的に論じようとしたのは Eckmann-Hilton [5] である。$H^n(X, \pi)=\pi(X, K(\pi, n))$ においてK (π, n) をCW-complex と同homotopy 型と仮定しなくても Adams [2] にあるような逃げ道はあるが、Milnor [4] がせっかくCW-complex と同 homotopy 型の空間の Category が loop space をとるという演算で閉じていることを証明してくれてあるのだからそれを利用した。

極く初心者にでもわかるように配慮したがこの流儀は Peterson [6] 流といえる。最後の§は Adams 流とのつなぎに当るもので、それと島田、山ノ下両氏によるfunctional operation や secondary operation の話へのつなぎにもなる。任意の空間のPostnikov 分解と高次cohomology operation の間の関係については水野氏の講演におまかせした。

[1] J.P.Serre : Cohomologie mod 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math.Helv.31 (1957)

[2] J.F.Adams : On the non existence of elements of Hopf invariant one: Annals of Math. vol 72, No.1 (1960)

[3] Y.Nomura : On mapping sequences ; Nagoya Math.J.Vol.17 (1960)

[4] J.Milnor, On spaces having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. Math. Soc., 90 (1959) .

[5] B.Eckmann and P.J.Hilton : Groupes d'homotopie et dualité, C.R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), 外4篇 ibd.

[6] F.P.Peterson : Functional cohomology operations, Trans Amer. Math. Soc. vol.86, No.1 (1957) .

[7] F.P.Peterson and N.Stein : Secondary cohomology operations : two formulas, Amer. Journ.of Math., vol. LXXXI, No.2 (1959) .

[8] N.Shimada, On stable functional cohomology operations,

Proc. of Japan Acad., vol.36, No.4 (1960).

[9] T. Yamanoshita, On the mod p Hopf invariant, Proc. of Japan Acad., vol.36, No.3 (1960).

4. 高次コホモロジー作用素 (II)

阪市大　水野克彦

工藤先生の話のつづきということになっているが、ここでのべる内容は次のようなものである。先づ、空間としては、base point をもった単一連結な位相空間で、ある CW-complex と同 homotopy 型のものだけをさすことにする。§1では普通にいうところの Postnikov Construction を少し詳しく構成して、以下の便宜をはかる。§2では、§1にのべた構造を基として、それから誘導される高次作用素の定義を中心としてのべる。§3では低次のコホモロジー作用素間のある関係から高次のコホモロジー作用素が構成されることを、Postnikov 構成によって表現することを目的とした。尚、内容に関する詳しい展開、定理の証明は割愛したが、阪市大紀要に近く印刷されるので、それを参照していただきたい。

§1. Postnikov Construction

$Y=Y_1^m$ を $\pi_i(Y)=0 \quad i \neq n_1, n_2, \cdots\cdots, n_m \ (1<n_1<n_2<\cdots<n_m)$ なる空間とし、$\pi_{n_j}(Y)$ を $\pi_j \ (1 \leq j \leq m)$ で示すことにする。

$Y_1^{m-1} \supset Y_1^m$ を $\pi_i(Y_1^{m-1})=\pi_i(Y_1^m) \ \ i<n_m, \ \pi_i(Y_1^{m-1})=0 \ \ i \geq n_m$ なる空間とし、Y_1^{m-1} の中の path で、始点が Y_1^m, 終点は Y_1^{m-1} の中にあるものを $\Omega(Y_1^{m-1}; Y_1^m, Y_1^{m-1})$ とする。始点への射影 $\pi_0 : \Omega(Y_1^{m-1}; Y_1^m, Y_1^{m-1}) \to Y_1^m$ が homotopy 同値であることは容易に知られる。また、終点への射影 $\pi_1 : \Omega(Y_1^{m-1}; Y_1^m, Y_1^{m-1}) \to Y_1^{m-1}$ は $K(\pi_m, n_m)$ 空間 $\Omega(Y_1^{m-1}; Y_1^m, *)$ を fiber とする fiber map なることから、

$$K(\pi_m, n_m) \xrightarrow{i} Y_1^m \xrightarrow{p} Y_1^{m-1}$$

なる fibering を誘導する。こゝに i, p はそれぞれ inclusion-, projection map である。以下同様にして

$$K(\pi_r, n_r) \xrightarrow{i} Y_1^r \xrightarrow{p} Y_1^{r-1} \qquad (m \geq r > 1)$$

を得る。

以上の操作の各段階において

$$H^{n_r}(Y_1^{r-1}) \xrightarrow{p^*} H^{n_r}(Y_1^r) \xrightarrow{i^*} H^{n_r}(K(\pi_r, n_r))$$
$$\xrightarrow{\tau} H^{n_r+1}(Y_1^{r-1}) \xrightarrow{p^*} H^{n_r+1}(Y_1^r) \cdots\to$$

が exact となり、π_r 係数で考えると、$b_r \in H^{n_r}(\pi_r, n_r; \pi_r)$ の transgression image $\tau(b_r) \in H^{n_r+1}(Y_1^r; \pi_r)$ として、cohomology class θ_1^r がきまる。そこで、Postnikov 流に Y_1^r を $\mathcal{P}(Y_1^{r-1}, \theta_1^r)$ と書くことにすれば

$Y_1^1 = K(\pi_1, n_1)$ 故

$$Y_1^r = \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y_1^{r-2}, \theta_1^{r-1}), \theta_1^r) = \cdots$$
$$= \mathcal{P}(K(\pi_1, n_1), \theta_1^2, \cdots\cdots, \theta_1^r)$$

と表わすことができる。こゝに等号は homotopy 同値を意味するもので、斯かる構成が良く知られた postnikov Construction である。

こゝで、composition map

$$p_{r-1}^k : Y_1^k \to Y_1^{k-1} \to \cdots\cdots \to Y_1^{r-1}$$

はまた fiber map で、その fiber を Y_r^k とするとき

$$Y_r^k = \mathcal{P}(K(\pi_r, n_r), \theta_r^{r+1}, \theta_r^{r+2}, \cdots\cdots, \theta_r^k)$$

と表わされ、inclusion map : $Y_r^k \to Y_1^k$ を i_r で示すと、$\theta_r^j = i_r^* \theta_1^j \ (r<j \leq k)$ である。

更に一般に、任意の組 (r, s, k) $(1 \leq r < s < k \leq m)$ について、$Y_r^k \to Y_r^s$ は、Y_{s+1}^k を fiber とする fiber map になっている。

結局、空間 Y に対して、次表に示されるような構成が対応する。

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & \\
K(\pi_3, n_3) = Y_3^3 \arrow[r] & Y_2^3 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1^3 \arrow[r, "\theta_1^4"] \arrow[d] & K(\pi_4, n_4+1) \\
 & K(\pi_2, n_2) = Y_2^2 \arrow[r] & Y_1^2 \arrow[r, "\theta_1^2"] \arrow[d] & K(\pi_3, n_3+1) \\
 & & K(\pi_1, n_1) = Y_1^1 \arrow[r, "\theta_1^2"] & K(\pi_2, n_2+1)
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

この構成を爾後広い意味で Postnikov Construction と呼ぶことにしよう。

§2 高次コホモロジー作用素の定義

最初にものべたように、こゝで云うところの高次作用素は、あるPostnikov Construction に附随したものを指している，尚、爾後の議論を簡単にする為ー stable な作用素に限定するためー $(n_m - n_1)$ が n_1 に対し、適当に小さいものという仮定を設ける。斯かる仮定の下には、すべての $\theta^j_r (1 \leqq r < j \leqq m)$ が stable であり、θ^j_r を $\dot{\theta}^j_r$ の suspension 像とするとき、Y^k_r は $P(K(\pi_r, n_r+1), \dot{\theta}^{r+1}_r, \cdots\cdots, \dot{\theta}^k_r)$ の上の loop space と考えることが出来る，その意味で $P(K(\pi_r, n_r+1), \dot{\theta}^{r+1}_r, \cdots\cdots, \dot{\theta}^k_r)$ を $\Omega^{-1}(Y^k_r)$ と書くことにしよう。

定理 (2.1) $Y^k_{s+1} \xrightarrow{i} Y^k_r \xrightarrow{p} Y^s_r \xrightarrow{\alpha} \Omega^{-1}(Y^k_{s+1}) \xrightarrow{\Omega^{-1}i} \Omega^{-1}(Y^k_r) \xrightarrow{\Omega^{-1}p}$

は exact である。こゝに $\alpha = \alpha(r, s, k)$ の homotopy class は fiber space $(Y^k_r, Y^s_r, Y^k_{s+1})$ に対して一意的にきまる。但し $(1 \leqq r \leqq s < k \leqq m)$

定理 (2.2) 次の図式は commutative である。

$$\begin{tikzcd}
Y^k_r \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & Y^s_r \arrow[rr, "\alpha(r, s, k)"] \arrow[rrd, "\alpha(r, s, k-1)"'] & & \Omega^{-1}(Y^k_{s+1}) \arrow[d, "\Omega^{-1}(p)"] \\
Y^{k-1}_r \arrow[ru] & & & \Omega^{-1}(Y^{k-1}_{s+1})
\end{tikzcd}$$

但し $(1 \leqq r \leqq s < k-1 < m)$

証明は長くなるので省略するが、この二つの定理が以下の展開の基である。

1) Primary operation

図式 (1.1) の部分構成

$$\begin{array}{ccc}
K(\pi_2, n_2) = Y^2_2 \xrightarrow{i} Y^2_1 & & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad p\downarrow & & \\
& K(\pi_1, n_1) = Y^1_1 \xrightarrow{\theta^2_1} K(\pi_2, n_2+1) = \Omega^{-1} Y^2_2 &
\end{array}$$

に於て、$\theta^2_1 = \alpha(1, 1, 2)$ であり、$\pi(X, Y^1_1) \approx H^{n_1}(X; \pi_1)$ の元 $[f]$ は $\theta^2_{1*}[f] = 0$ なるとき、その時に限って $\pi(X; Y^2_1)$ の元 $[g]$ により $p_*[g]$ と表わされる。この意味で $\theta^2_{1*}[f]$ を f の第一障害と呼ぶことにしよう。

2) higher operation

第一障害を求める作用素 θ^2_{1*} がprimary operation であることは良く知られた事

柄であるが、第二，第三，…… の障害はどの様にして惹起されるか、また、それはどのような作用素を誘導するか、この観点から高次作用素を調べて行こう。

図式 (1.1) の部分構成から誘導される図式

$$\begin{tikzcd}
K(\pi_3, n_3) = Y^3_3 \arrow[r, dash, "i_3"] & Y^3_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, "p_3"] & Y^3_1 \arrow[d] & & \\
& Y^2_2 \arrow[r] & Y^2_1 \arrow[r, "\theta^3_1"] \arrow[d] & \Omega^{-1} Y^3_3 \arrow[r, "\Omega^{-1} i_3"] & \Omega^{-1} Y^3_2 \arrow[d, "\Omega^{-1} p_3"] \\
& & Y^1_1 \arrow[rr, "\theta^2_1"'] \arrow[rru, "\alpha"] & & \Omega^{-1} Y^2_2
\end{tikzcd}$$

に於て、$\alpha = \alpha(1, 1, 3)$ とすると、定理 (2.2) により、この図式は commutative である。

$\pi(X, Y^1_1) \approx H^{n_1}(X; \pi_1)$ の元 $[f]$ が $\theta^2_{1*}[f] = 0$ なる条件を満すとき、$\pi(X; Y^3_1)$ の元 $[h]$ によって更に $p^3_{1*}[h] = [f]$ と表わされるのは、$\alpha_*[f] = 0$ なるとき、その時に限る。その意味で

(2.3) $\alpha(1, 1, 3)_*[f]$ が第二障害である。

しかし、$(\Omega^{-1} p_3)_*(\alpha_*[f]) = \theta^2_{1*}[f] = 0$ なる故

$$Y^2_2 \xrightarrow{\theta^3_2} \Omega^{-1} Y^3_3 \xrightarrow{\Omega^{-1} i_3} \Omega^{-1} Y^3_2 \xrightarrow{\Omega^{-1} p_3} \Omega^{-1} Y^2_2$$

の exact 性から、$\alpha_*[f]$ の代りに、

$$\pi(X, \Omega^{-1} Y^3_3) / \theta^3_{2*} \pi(X, Y^2_2)$$

の coset を一意的に対応せしめることができる。この対応

(2.4) $\Phi^3_1 : H^{n_1}(X : \pi_1) \cap \mathrm{Ker}\, \theta^2_{1*} \to H^{n_3+1}(X : \pi_3) / \theta^3_{2*} H^{n_2}(X : \pi_2)$

が secondary operation に外ならない。尚、こゝに coset の代表元の選び方としては、1) で得た $[g]$ をもとにして $\theta^3_{1*}[g]$ をとってもよいことを附記しておく。即ち、

(2.5) 次の三条件は同値である。

① $\alpha(1, 1, 3)_* [f] = 0$

② $\Phi^3_1 [f] = 0$

③ $\theta^3_{1*}[g] \in \theta^3_{2*} H^{n_2}(X; \pi_2)$ たゞし $p_*[g] = [f]$.

一般に (帰納的に) $\pi(X, Y^1_1) \approx H^{n_1}(X; \pi_1)$ の元 $[f]$ が $\theta_{1*}[f] = 0$, $\Phi^3_1 [f] = 0$, …, $\Phi^{j-1}_1 [f] = 0$ を満すとき、図式 (1.1) の部分構成から図式

$$\begin{tikzcd}
K(\pi_j, n_j)=Y_j^j \arrow[r, "i_j"] & Y_2^j \arrow[r] \arrow[d, "p_j"'] & Y_1^j \arrow[d] & & \\
& Y_2^{j-1} \arrow[r] & Y_1^{j-1} \arrow[r, "\theta_1^j"] \arrow[d] & \Omega^{-1}Y_j^j \arrow[r, "\Omega^{-1}i_j"] & \Omega^{-1}Y_2^j \arrow[d, "\Omega^{-1}p_j"] \\
& & Y_1^1 \arrow[rr, "\alpha'"] \arrow[urr, "\beta"] & & \Omega^{-1}Y_2^{j-1}
\end{tikzcd}$$

が誘導される。こゝに$\alpha'=\alpha(1, 1, j-1)$は帰納的に（(2.3) 参照）第 (j−2) 障害を導くものであり、$\beta=\alpha(1, 1, j)$ は定理 (2.1) によって fiber space (Y_1^j, Y_1^1, Y_2^j) に対応する map で、定理 (2.2) により、上の図式は Commutative である。

Secondary operation の場合と同様に、

(2.6)　$\alpha(1, 1, j)_*[f]$ が第 (j−1) 障害であり、帰納的に $\Phi_1^{j-1}[f]=0$ から（(2.5) 参照）$\alpha'_*[f]=0$ が得られ、

$$Y_2^{j-1} \xrightarrow{\theta_2^j} \Omega^{-1}Y_j^j \xrightarrow{\Omega^{-1}i_j} \Omega^{-1}Y_2^j \xrightarrow{\Omega^{-1}p_j} \Omega^{-1}Y_2^{j-1}$$

の exact 性から

(2.7)　$\Phi_1^j : H^{n_1}(X;\pi_1)\cap \mathrm{Ker}\,\Phi_1^{j-1} \to H^{n_j+1}(X;\pi_j)/\theta_{2*}^j\pi(X;Y_2^{j-1})$

なる $(j-1)^{th}$ cohomology operation が得られる。

3) 他の cohomology operation

Postnikov Construction (1.1) が与えられたとき、1)，2) のようにして $\theta_{1*}^2=\Phi_1^2, \Phi_1^3, \cdots\cdots, \Phi_1^j, \cdots\cdots, \Phi_1^m$ が定義されることをのべたが、全く同様に $Y_r^m=\mathfrak{P}(K(\pi_r, n_r), \theta_r^{r+1}, \cdots\cdots, \theta_r^j, \cdots\cdots, \theta_r^m)$ に対しても、primary-operation $\theta_{r*}^{r+1}=\Phi_r^{r+1}$，secondary-operation Φ_r^{r+2}，以下高次 operation Φ_r^j $(j\leqq m)$ が得られる。これらを総括して"Postnikov Construction (1.1) に附随したコホモロジー作用素"と名付けよう。

次に、これ等作用素の特性を簡単に纏めておく。

定理 (2.8)　任意の整数対 $(r, j)(1\leqq r\leqq j\leqq m)$ に対し、Φ_r^j は θ_r^j によって特性化される。即ち、

① $\Phi_r^j[p_r^{j-1}]=\{\theta_r^j\}$，$\Phi_r^j[p_r^i]=0$ (j≦iのとき)　ただし $p_r^r : Y_r^r \to Y_r^r$ は identity map とする。

② $u\in H^{n_r}(X:\pi_r)$ が $\Phi_r^{j-1}(u)=0$ のとき、帰納的に $g : X\to Y_r^{j-1}$ なる写像が存在し、$p_{r*}^{j-1}[g]=[f]$ ($f : X\to Y_r^r$ は natural isomorphism $\pi(X, Y_r^r)\approx H^{n_r}(X;\pi_r)$ で u に対応する class の代表元) となる。こゝに $\Phi_r^j(u)=g^*\{\theta_r^j\}$ が g のとり方に関せず一意的に決まる。

尚。Φ_r^j はすべて additive である。即ち

$$\Phi_r^j(u_1+u_2)=\Phi_r^j(u_1)+\Phi_r^j(u_2)$$

定理 (2.9)　任意の整数組 $(r, i, j)(1\leqq r<i<j\leqq m)$ に対し、つねに $\Phi_i^j\Phi_r^i=0$ である。こゝに Φ_i^j は $\Omega^{-1}(Y)$ の Postnikov Construction で (2.8) の意味で θ_i^j に対応するものを示す。

§3. 高次コホモロジー作用素の構成

一般に高次コホモロジー作用素といえば、unstable なものや、構成の複雑なものが多い。この間の事情については、工藤先生の話の中にも（§5，6）伺えると思う。こゝでは極く限られた種類の作用素について、それを誘導する Postnikov construction を中心としてのべよう。

1)　$\theta_1\in H^{n_2+1}(\pi_1, n_1;\pi_2)(n_2<2n_1-1)$ を stable な primary cohomology operation とするとき、space $Y_1^2=\mathfrak{P}(K(\pi_1, n_1), \theta_1)$ を

(3.1)　$Y_2^2=K(\pi_2, n_2)\xrightarrow{i} Y_1^2 \xrightarrow{p} K(\pi_1, n_1)=Y_1^1 \xrightarrow{\theta_1} K(\pi_2, n_2+1)$

が exact になる様に構成する。(natural fibering $L(\pi_2, n_2)\xrightarrow{\delta} K(\pi_2, n_2+1)$ から θ_1 で誘導される。)

2)　$\theta_2\in H^{n_3+1}(\pi_2, n_2;\pi_3)(n_3<2n_2-1, n_3<2n_1-3)$ を stable な primary cohomology operation とし、

(3.2)　　$\theta_2\,\theta_1=0$

(θ_2 の suspension image が θ_2) なる条件を満足するとしよう。(3.1) から誘導される図式

$$
\begin{tikzcd}
H^{n_2+1}(Y_1^1\,;\pi_2) \arrow[d, "\theta_2"] & H^{n_2}(Y_2^2\,;\pi_2) \arrow[l, "\theta_1^*"'] \arrow[d, "\theta_2"] & & \\
H^{n_3+2}(Y_1^1\,;\pi_3) & H^{n_3+1}(Y_2^2\,;\pi_3) \arrow[l, "\theta_1^*"'] & H^{n_3+1}(Y_1^2\,;\pi_3) \arrow[l, "i^*"'] & H^{n_3+1}(Y_1^1\,;\pi_3) \arrow[l, "p^*"']
\end{tikzcd}
$$

は commutative で、条件 (3.2) によって $i^*\theta_1^3=\theta_2$ となる如き $\theta_1^3 \in H^{n_3+1}(Y_1^2\,;\pi_3)$ の存在がわかる。斯かる θ_1^3 (の一つ) を用いて、space $Y_1^3=\tilde{\mathrm{P}}(K(\pi_1, n_1), \theta_1, \theta_1^3)$ を

(3.3) $\quad Y_3^3=K(\pi_3, n_3) \xrightarrow{i} Y_1^3 \xrightarrow{p} Y_1^2 \xrightarrow{\theta_1^3} K(\pi_3, n_3+1)$

が exact になる様に構成する。(natural fibering $L(\pi_3, n_3) \xrightarrow{\delta} K(\pi_3, n_3+1)$ から θ_1^3 で誘導される。) 斯かる構成に附随する secondary operation Φ_1^3 が関係式 (3.2) によって誘導されるものに外ならない。その意味で $\Phi_1^3=\Phi(\theta_1, \theta_2)$ と書くことにしよう。Φ_1^3 に関する次の定理は本質的なものである。

定理 (3.4) 関係式 $\theta_2\,\theta_1=0$ (安定域における) は (安定) secondary cohomology operation

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) : H^{n_1}(X\,;\pi_1) \cap \operatorname{Ker} \theta_1 \to H^{n_3+1}(X\,;\pi_3)/\theta_{2*} H^{n_2}(X\,;\pi_2)$$

を誘導し、$\Phi(\theta_1, \theta_1)$ は primary cohomology operation を法として一意的に定まる。

3) $\quad Y_1^j=\tilde{\mathrm{P}}(Y_1^{j-1}, \theta_1^j)=\tilde{\mathrm{P}}(K(\pi_1, n_1), \theta_1, \theta_1^3, \cdots\cdots, \theta_1^j)$ を帰納的に $\theta_{j-1} \circ \Phi(\Phi_1^{j-2}, \theta_{j-2})=0$ なる関係式を基として構成された Postnikov Construction とする。この Construction に附随する $(j-1)^{\text{th}}$ cohomology operation Φ_1^j が $\Phi(\Phi_1^{j-1}, \theta_{j-1})$ と表示される。こゝで $(1<n_1<\cdots\cdots<n_{j+1}<2n_1-3, n_{j+1}<2n_j-1)$ なる n_{j+1} につき、$\theta_j \in H^{n_{j+1}+1}(\pi_j, n_j\,;\pi_{j+1})$ を

(3.5) $\quad \theta_j\,\theta_1^j=0 \qquad$ 即ち $\theta_j \Phi_1^j=0$

なる条件を満す stable primary cohomology operation としよう。帰納的に次の図式は commutative で下の列は exact である。

$$
\begin{tikzcd}
H^{n_j+1}(Y_1^{j-1}\,;\pi_j) \arrow[d, "\theta_j"] & H^{n_j}(Y_j^j\,;\pi_j) \arrow[l, "\alpha(1,j-1,j)^*"'] \arrow[d, "\theta_j"] & & \\
H^{n_{j+1}+2}(Y_1^{j-1}\,;\pi_{j+1}) & H^{n_{j+1}+1}(Y_j^j\,;\pi_{j+1}) \arrow[l, "\alpha(1,j-1,j)^*"'] & H^{n_{j+1}+1}(Y_1^j\,;\pi_{j+1}) \arrow[l, "i^*"'] & H^{n_{j+1}+1}(Y_1^{j-1}\,;\pi_{j+1}) \arrow[l, "p^*"']
\end{tikzcd}
$$

こゝに $\alpha(1, j-1, j)$ は fiber space $(Y_1^j, Y_1^{j-1}, Y_j^j)$ に対してきまるもので (定理 (2.1) 参照) θ_1^j に外ならない。故に図式の exact 性から $i^*\theta_1^{j+1}=\theta_j$ となる如き θ_1^{j+1} の存在が云える。こゝで $Y_1^{j+1}=\tilde{\mathrm{P}}(Y_1^j, \theta_1^{j+1})$ を 2) と同様に構成すれば $\Phi_1^{j+1}(\Phi_1^j, \theta_j)$ が得られる。

定理 (3.6) 関係式 $\theta_j \Phi_1^j=0$ (安定域における) は (安定) j-th cohomology operation

$$\Phi_1^{j+1} : H^{n_1}(X : \pi_1) \cap \operatorname{Ker} \Phi_1^j \longrightarrow H^{n_{j+1}+1}(X\,;\pi_{j+1})/\Phi_2^{j+1}\text{-image}$$

を誘導し、Φ_1^{j+1} は (j−1)−th cohomology operation を法として一意的に決る。こゝに (j−1)−th cohomology operation Φ_2^{j+1} は帰納的に

$$\Phi_2^{j+1}=\Phi(\Phi_2^j, \theta_j)$$

としてきまるものである。

例 (3.7) Bockstein higher operations.

Z_m を m を法とした整数の加法群とし、p を素数とするとき、

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow Z_{p^{h+1}} \longrightarrow Z_{p^h} \longrightarrow 0 \qquad (1 \leqq h)$$

なる Abelian group extension に対応する cohomology class ($H^{+1}(\pi; G) \cong \operatorname{Ext}_{abel}(\pi; G)$) を β_h と書くことにすれば、$\beta_h=\frac{1}{p^h}\delta$ で、帰納的に β_h は $\beta_1 \circ \beta_{h-1}=0$ によってきまる (定理 (3.6) 参照。但し法は 0 となる) h−th cohomology operation である。

5. 安定オ二種コホモロジー作用素

武蔵工大　　山ノ下　常　与

第一種コホモロジー作用素 $\theta : H^n(X, \pi) \to H^q(X, G)$ において、特に $\pi = G = Z_p$ とし、かつ coboundary 準同型 $\delta^* : H^m(X, Z_p) \to H^{m+1}(Y, X; Z_p)$, $\delta^* = (-1)^m \delta$（δ は通常の coboundary 準同型）と交換可能とする：すなわち次の図式

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, Z_p) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{q+1}(Y, X; Z_p) \\ \theta \uparrow & & \uparrow \theta \\ H^n(X, Z_p) & \xrightarrow[\delta^*]{} & H^{n+1}(Y, X; Z_p) \end{array}$$

〔Fig.1〕

が交換可能とする。上の作用素 θ は任意の自然数 n に対して定義されねばならない。このような第一種コホモロジー作用素を安全第一種コホモロジー作用素（Z_p 上の）と呼ぶことにする。これは第一種コホモロジー作用素の理論（〔29〕,〔9〕）から、Steenrod 代数（Z_p 上の）A の元と考えることが出来る。以下安定第一種コホモロジー作用素（Z_p 上の）と Steenrod 代数の元とを同一視する。

いま A の元の間に次の関係式

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = 0 \quad ,$$

（α_i, β_i は A の正の次元の homogeneous な元）があったとき、Z_p 上の安定第二種コホモロジー作用素

$$\Phi : H^+(X, Z_p) \cap (\cap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \beta_i) \to H^+(X, Z_p) / \Sigma_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \alpha_i \quad ,$$

（ただし $H^+(X, Z_p)$ は X のコホモロジー群の正の次元の要素全体）を定義しよう。

図式

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\theta'} & K(G', q') \\ \downarrow \rho & & \\ K(\pi, n) & \xrightarrow{\theta} & K(Z_p, n+n_1) \times \cdots\cdots \times K(Z_p, n+n_m) \end{array}$$

〔Fig.2〕

において、$\pi = G' = Z_p$, $q' = n + \deg \alpha_i + \deg \beta_i - 1$ とし、θ, θ' を次のように定める；

$H^n(Z_p, n; Z_p) = \operatorname{Hom}(Z_p, Z_p)$ の基本的なコホモロジー類を u，$H^{n+n_i}(Z_p, n+n_i; Z_p)$ の基本的なコホモロジー類を〔β_i〕($i = 1, \cdots, m$) とするとき $\pi(L, A \times B) = \pi(L, A) \times \pi(L, B)$ から（cf.〔29〕），$\theta^*〔\beta_i〕= \beta_i u$ で θ のホモトピー類は定まる。θ を射影とするファイバー空間のファイバーとして、K を考え得るようになる。従って n が十分大きいとき、次の完全系列が得られる。

$$\leftarrow H^j(Z_p, n; Z_p) \xleftarrow{\theta^*} H^j(\times_{i=1}^{m} K(Z_p, n+n_i), Z_p) \xleftarrow{\tau} H^{j-1}(K, Z_p)$$

$$\xleftarrow{\rho^*} H^{j-1}(Z_p, n; Z_p) \leftarrow \cdots$$

（$\tau = \theta^{*-1} \circ \delta^*$，通常 $\theta^{*-1} \circ \delta$ を transgression とよぶ。）

$H(\times_{i=1}^{m} K(Z_p, n+n_i), Z_p)$ の homogeneous な元 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i〔\beta_i〕$ の θ^* 像は $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i u$ になり、これは仮定から 0 である。故に $H^{q'}(K, Z_p)$ に属する適当な元 γ が存在して、$\tau\gamma = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i〔\beta_i〕$. われわれは θ' を $\theta'^*(v) = \gamma$（v は $H^{q'}(Z_p, q'; Z_p)$ の基本的なコホモロジー類）で定義する。

これで工藤・水野氏と同様な議論によって（θ, θ'）に随伴されたコホモロジー作用素（定義域は $\cap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \beta_i$）$\Phi$ ができる。

次に Φ の像は何を modulus として定まるか計算すると、$\Sigma \operatorname{Im} \alpha_i$ となる。

以上を代数的に簡単化してみよう。C_0 を Steenrod 代数 A とし、C_1 を〔β_1〕,……,〔β_m〕を基底とする A—自由加群とする。C_0 には通常のように degree を考え、$\deg〔\beta_i〕= \deg \beta_i$ ($i = 1, \cdots\cdots, m$) として C_1 に degree を拡張して $d〔\beta_i〕= \beta_i$ ($i = 1, \cdots\cdots, m$) で定める。Ker d の homogeneous な元 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i〔\beta_i〕$ を z とすると、(d, z) に随伴された安定第二種コホモロジー作用素 Φ は次の性質をもつ。

(A. 1) $\varepsilon \circ d = 0$ であるような A—準同型 $\varepsilon : C_0 \to H^+(X, Z_p)$（以下 $H^+(X, Z_p)$ を $H^+(X)$ と略記する。）に対して、$\Phi(\varepsilon(1))$ が定義される。

（$\varepsilon d〔\beta_i〕= \beta_i \varepsilon(1) = 0$, $\varepsilon d = 0$ は $\beta_i \varepsilon(1) = 0$ ($i = 1, \cdots, m$) に同値である。）

$\varepsilon(1)$ の次元を ℓ，$\deg \alpha_i + \deg \beta_i = t + 1$ とするとき

(A. 2)　$\Phi(\varepsilon(1)) \in H^{l+t}(X) / \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \alpha_i$.

fをYからXへの連続写像としたとき

(A.3)　$g^*\Phi(\varepsilon(1)) = \Phi(g^*\varepsilon(1))$.

(A.4)　$\delta^*\Phi(\varepsilon(1)) = \Phi(\delta^*\varepsilon(1))$.

さらに (X, Y) を空間の一組として次の可換な図形を構成したとする。 ($\varepsilon \circ d = 0$, $i^*\varepsilon = 0$ を仮定する。)

$$\begin{tikzcd} H^+(Y) & H^+(X) \arrow[l, "i^*"'] & H^+(X, Y) \arrow[l, "j^*"'] & H^+(Y) \arrow[l, "\delta"'] & H^+(X) \arrow[l, "i^*"'] \\ & & C_0 \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[u, "\eta"'] & C_1 \arrow[l, "(-1)^m d"'] \arrow[u, "\zeta"'] & \end{tikzcd}$$

〔Fig・3〕

(A.5)　$i^*\Phi(\varepsilon(1)) = \{\zeta z\} \mod i^* \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\, a_i$.

(A.1) から (A.5) はΦを完全に規定するもので、これらを安定第二種コホモロジー作用素の公理としてよい。(cf. 〔1〕) .

定理1. (イ)　(d, z) に随伴された安定第二種コホモロジー作用素が存在する。

(ロ)　(d, z) に随伴された二つの作用素Φ, Φ′ が存在すれば、C_0 / dC_1 に適当な元 c が存在して

$$\Phi(\varepsilon(1)) - \Phi'(\varepsilon(1)) = \{\varepsilon(c)\} .$$

〔証〕 (イ)はすでに証明されているから、(ロ)を証明すればよい。 (θ , θ') に随伴されたものと (d, z) に随伴された作用素は対応しているから、前者について、特別な空間Xは universal な例であるから、空間Xの場合を証明してこれを解釈すればよい。γ のとり方は、$\tau\gamma = \sum_{i=1}^{m} a_i[\beta_i]$ で規定されているから、ρ^* 像だけの自由度がある。ρ^* 像は $\rho^*(H^+(Z_p, n) / \mathrm{Im}\,\theta^*)$ である。(何故なら $\rho^* \circ \theta^* = 0$) ρ^* はこの場合εに、θ^* はdに対応している。

注意1. $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$, すなわちΦは加法的である。

注意2. C_0 はただ一つのA－自由基底をもつと定めたが、二つ以上の基底をもった場合、やはり (A.1) から (A.5) ($\varepsilon(1)$をεと置きかえる) でΦを規定することができる。この場合の作用素を多変数の安定第二種コホモロジー作用素と呼ぶ。

例1. $\triangle^1$ を完全系列 $0 \to Z_p \to Z_{p^2} \to Z_p \to 0$ に随伴された Bockstein 作用素と

する。$\triangle^1 \circ \triangle^1 = 0$ という関係式が成り立つ。C_0 をA, C_1 を只一つのA－基底 $[\triangle^1]$をもつ加群とする。境界作用素dを $d[\triangle^1] = \triangle^1$ で定める。明かに$\triangle^1[\triangle^1]$ は d－輪体である。故に $(d, \triangle[\triangle^1])$ に随伴された作用素$\triangle^2$ ができる。

$$\triangle^2 : H^l(X, Z_p) \cap \mathrm{Ker}\, \triangle^1 \to H^{l+1}(X, Z_p) / \triangle^1 H^l(X, Z_p) .$$

この作用素が自明でないとき、$H_l(X, Z)$ は Z_{p^2} の直和因子をもつ。(〔21〕, 〔52〕).

例2　Z_2 上の Steenrod 代数Aにおいて、Adem の関係式 $Sq^2 Sq^2 + Sq^3 Sq^1 = 0$ がある。A－複体を次のように定める。

$$H^l(X, Z_2) \xleftarrow{\varepsilon} C_0 = A \xleftarrow{d} C_1 = A[Sq^1] \oplus A[Sq^2]$$

$$d[Sq^1] = Sq^1 , \ d[Sq^2] = Sq^2 , \ Sq^1\varepsilon(1) = Sq^2\varepsilon(1) = 0 .$$

C_1 の d－輪体 $Sq^2[Sq^1] + Sq^2[Sq^2] = z$ をとるとき、(d, z) に随伴された作用素ができる。$\Phi_{1,1}$ と記すと、

$$\Phi_{1,1} : H^l(X, Z_2) \cap \mathrm{Ker}\, Sq^1 \cap \mathrm{Ker}\, Sq^2 \to$$

$$H^{l+3}(X, Z_2) / Sq^3 H^l(X, Z_2) + Sq^2 H^{l+1}(X, Z_2)$$

εは e^{l+3} の境界 S^{l+2} から S^l の上への連続写像 (constant 写像にホモトピックでない) として、εで cell e^{l+3} を S^l に附着させたものをXとしている。$X = S^l \cup_{\varepsilon} e^{l+3}$.

このとき $Sq^i H^l(X, Z_2) = 0$, $i = 1, 2$, $Sq^3 H^l(X, Z_2) = Sq^1 Sq^2 H^l(X, Z_2) = 0$ だから、$\Phi_{1,1} : H^l(X, Z_2) \to H^{l+3}(X, Z_2)$ は自明でなくなる。(〔2〕, 〔5〕).

次に作用素Φに関する扱いの上で、有用な定理をあげる,

定理2. (イ)　d－輪体 z_t に対して、(d, z_t) に随伴された作用素をΦ_t , modulus を $Q_t(X)$, $z = \sum a_t z_t$ としたとき、(d, z) に随伴された作用素Φが存在して次式を満す。

$$\sum_t a_t \Phi_t(\varepsilon(1)) = \{\Phi(\varepsilon(1))\} \mod \sum a_t Q_t(X)$$

(ロ)　可換な図式

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "d"'] & C_1' \arrow[d, "d'"] \\ C_0 \arrow[r, "m_0"] & C_0' \end{tikzcd}$$

において、d, d' はすでに定義したようなもので、m_0 , m_1 は degree 0のA一準同型とする。Φを (d , z) に随伴された作用素としたとき、(d' , $m_1 Z$) に随伴された作用素 Φ' が存在して、

$$\Phi(\varepsilon' m_0(1)) = \{\Phi'(\varepsilon'(1))\}$$

が成り立つ。$\varepsilon' : C_0' \to H^{+}(X)$ は augmentation とする。

証明は略するが、その大凡のところを述べる。(イ) は universal な例について成立つことを云えばよい。(ロ) は universal な例について、ファイバー空間を作り、それらの間に m_0 , m_1 に対応するファイバー写像を作る。この時 (ロ) が成立つことを云えばよい。

例 3. $\triangle^2 Sq^4 = Sq^2 \Phi_{1,1} + Sq^4 \triangle^2$ が成り立つ。図式において

$$\begin{array}{ccc} C_1 = A[\triangle^1] & \xrightarrow{m_1} & C_1' = A[\triangle^1] + A[Sq^2] \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ C_0 = A & \xrightarrow{m_0} & C_0' = A \end{array}$$

Fig

d , d' は例1 , 例2で示したように作る。($p=2$のとき$\triangle^1$ はSq^1である事は注意を要する。) $m_0(1) = Sq^4$, $m_1[\triangle^1] = Sq^2 Sq^1[Sq^2] + Sq^2[Sq^1]$ とすると上の図式に交換可能になる。そこで定理2の (ロ) を使用すると、(d , $\triangle^1[\triangle^1]$) に随伴された作用素は$\triangle^2$と記したから、

$$\triangle^2 Sq^4 = \Phi'$$

ここにΦ' は$m_1 \triangle^1[\triangle^1] = \triangle^1(Sq^2 Sq^1[Sq^2] + Sq^4[Sq^1])$

$$= Sq^3 Sq^1[Sq^2] + Sq^5[Sq^1]$$

$$= Sq^2(Sq^2[Sq^3] + Sq^3[Sq^1]) + Sq^4(Sq^1[Sq^1])$$

(これはAdem の関係式を使う。) に随伴された作用素である。しかるに、A一複体 $C_0 + C_1$ において5次元のところでは $C_0' / dC_1' = 0$ だから、Φ' は定理 1(イ) から一意的に定る。更に定理 2(ロ) を使用すると、

$$\Phi' = Sq^2 \Phi_{1,1} + Sq^4 \triangle^2$$

を得る。

6. 函数的コホモロジー作用素

名大　島田信夫

函数的コホモロジー作用素は Steenrod [34] により導入され、Hopf 不変量のコホモロジー的解釈、合成写像の essentiality の判定などに使われた[5]。

第二種作用素は第一種函数的作用素と密接な関係があり [26]、実際両者を結ぶ関係式により第二種作用素の計算がより簡単な第一種作用素とその函数化のそれに帰せられる。この関係式は第二種作用素を特徴づけるものであり、これを第二種作用素の公理的定義に採り入れることもできる。以下この方式で第二種作用素を定義し、一つの応用例を述べる[1]。

1. 函数的作用素

簡単のため安定な場合に限る。素数pを固定して特異コホモロジー群 $H^k(X, Z_p)$ を単に $H^k(X)$ で表わす。$H^{+}(X) = \sum_{k>0} H^k(X)$ とおき、$H^{+}(X)$ のn個の直積 $H^{+}(X) \times \cdots \times H^{+}(X)$ を $H^{+}(X)^n$ で表わす。n個の安定第一種作用素の順序列 (a_1 , $\cdots$, a_n) をaで表わし

$$\overline{a} : H^{+}(X)^n \to H^{+}(X)$$

なる作用素を $\overline{a}\, u = a_1 u_1 + \cdots\cdots + a_n u_n$ ($u = (u_1, \cdots\cdots, u_n)$) で定義する。

いま写像 $f : Y \to X$ に対して、作用素$\overline{a}$の函数化

$$\overline{a}_f : \operatorname{Ker} \overline{a} \cap \operatorname{Ker} f^{*n} \to H^{+}(Y) / \operatorname{Im} f^{*} + \operatorname{Im} \overline{a}$$

はつぎの公理によって一意的に定まり準同型となる。

($\overline{F}_1$) ホモトピー可換な図式

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ {\scriptstyle \tilde{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

に対して $\overline{a}_{f'}(g^{*n} u) = \tilde{g}^{*} \overline{a}_f(u)$.

($\overline{F}_2$) 懸垂ファンクターSおよび懸垂同型$\sigma : H^k(X) \to H^{k+1}(SX)$ に対して

$$\sigma \overline{a}_f(u) = \overline{a}_{Sf}(\sigma u) .$$

ただし $\sigma u = (\sigma u_1, \cdots\cdots, \sigma u_n) \in H^{+}(SX)^n$ とする。

$(\underline{F}_3)$ YをXの部分空間、$i: Y\to X$を挿入写像、$u\in H^+(X)^n$を$i^{*n}u=0$，$\bar{\alpha}\ u=0$

なる元とすれば、つぎの図式

$$\begin{tikzcd}
H^+(Y)^n & H^+(X)^n \arrow[l, "i^{*n}"'] \arrow[d, "\bar{\alpha}"] & H^+(X,Y)^n \arrow[l, "j^{*n}"'] \arrow[d, "\bar{\alpha}"] & H^+(Y)^n \arrow[l, "\delta^n"'] \arrow[d, "\bar{\alpha}"] & \\
 & H^+(X) & H^+(X,Y) \arrow[l, "j^*"'] & H^+(Y) \arrow[l, "\delta"'] & H^+(X) \arrow[l, "i^*"']
\end{tikzcd}$$

において $u'\in H^+(X,Y)^n$ および $v\in H^+(Y)$ を、$j^{*n}u'=u$，$\delta v=\bar{\alpha}u'$ の

条件のもとにえらぶことができる。このとき

$$\bar{\alpha}_f(u)=\{(-1)^k v\} \quad \mathrm{mod\ Im}\ i^*+\mathrm{Im}\ \bar{\alpha}$$

ただし $k=\mathrm{Min}_i\ \dim u_i$

同様にして $\underline{\beta}: H^+(X)\to H^+(X)^n$ を $\underline{\beta}u=(\beta_1 u,\cdots\cdots,\beta_n u)$ で定義すれば写像 $f: Y\to X$に対する作用素 $\underline{\beta}$ の函数化

$$\underline{\beta}_f: \mathrm{Ker}\ \underline{\beta}\cap\mathrm{Ker}\ f^*\to H^+(Y)^n/\mathrm{Im} f^{*n}+\mathrm{Im}\ \underline{\beta}$$

も上と類似な公理 $(\underline{F}_1)-(\underline{F}_3)$ により一意的に定まる。特に$n=1$の場合 $\bar{\alpha}_f$，$\underline{\beta}_f$ ともに普通の函数的作用素である。

2. 第二種作用素

第一種作用素の間の一つの関係 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=0$ （ただし α_i，β_i は次数正なるもの）は上の記号で簡単に $\bar{\alpha}\circ\underline{\beta}=0$ と表わせる。この関係に対応する任意の安定第二種作用素（山ノ下氏の記事参照）

$$\Phi: \mathrm{Ker}\ \underline{\beta}\to\mathrm{Coker}\ \bar{\alpha}=H^+(X)/\mathrm{Im}\ \bar{\alpha}$$

に対し、つぎの二つの公式が成立つ。

(I) $u\in\mathrm{Ker}\ \underline{\beta}\cap\mathrm{Ker}\ f^*$ に対して

$$f^*\Phi(u)=\bar{\alpha}\circ\underline{\beta}_f u \quad \mathrm{mod\ Im}\ f^*\circ\bar{\alpha}.$$

(II) $\underline{\beta}f^*u=0$ ならば

$$\Phi f^*u=-\bar{\alpha}_f(\underline{\beta}u) \quad \mathrm{mod\ Im}\ f^*+\mathrm{Im}\ \bar{\alpha}.$$

逆に、与えられた関係 $\bar{\alpha}\circ\underline{\beta}=0$ に対して

$$\Phi: \mathrm{Ker}\ \underline{\beta}\to\mathrm{Coker}\ \bar{\alpha}$$

は

(S_1) $\Phi f^*=f^*\Phi \qquad \mathrm{mod\ Im}\ \bar{\alpha}.$

(S_2) $\Phi\sigma=\sigma\Phi \qquad \mathrm{mod\ Im}\ \bar{\alpha}.$

(S_3) 上記の公式(I)または(II)のいづれか一方。

なる三公理を満足するものとして少くとも一つ存在し、この様な作用素Φは準同型写像となり、第一種作用素を modulo にすれば一意的に定まる。(S_3)として(II)をとった場合、このことを簡単に述べよう。

$u\in H^k(X)$ が $\underline{\beta}u=0$ を満足するとき $\Phi(u)$ が定まればよい。そのため写像 $f: X\to K(Z_p, k)$ を $f^*\iota=u$なるようにとり（ιは$H^k(Z_p,k;Z_p)$ の生成元）、(II) を適用すれば $\Phi u=\Phi f^*\iota=-\bar{\alpha}_f(\underline{\beta}\iota)$ mod Im $f^*+\mathrm{Im}\ \bar{\alpha}$. しかるに $\mathrm{Im} f^*$は丁度uに第一種作用素をほどこしたもので生成されているからΦは第一種作用素を moduloにして定まる。またこれが Adams の安定第二種作用素と一致することも証明できる。

3. 応用例

Z_2 係数の場合を考える。Steenrod 平約の間の関係 $Sq^1Sq^4+Sq^2Sq^1Sq^2+Sq^4Sq^1=0$ に対応する第二種作用素は一意的に定まり、これをAdamsの記号に従って$\Phi_{0,2}$と書く。これを無限次元射影空間Pで調べよう。$H^*(P)$ は二次元の生成元y（同じ記号で整係数の場合をも表わすことにする）で生成された多項式環である。$\Phi_{0,2}(y^k)$ が定義されるためにはkが4の倍数でなければならない。

定理 $\Phi_{0,2}(y^{4n})=ny^{4n+2}$

これを証明するため $N=8n$ とおく。いま底空間 $B=K(Z,N)$ の上のファイバー $F=K(Z_2,N+1)\times K(Z,N+4)$ なる或るファイバー空間をEとする。$H^N(B,Z)$，$H^{N+1}(F,Z_2)$，$H^{N+4}(F,Z)$ にぞくする基本類をそれぞれι，η，ξで表わすとき、transgression 準同型τにより $\tau\eta=Sq^2\iota$，$\tau\xi=\triangle_* Sq^4\iota\ (\in H^{N+5}(B,Z))$となるものとする。ただし$\triangle_*$は係数の完全系列$0\to Z\to Z\to Z_2\to 0$ に対する Bockstein 作用素である。$i: F\to E$を挿入写像、$\rho: E\to B$を射影，$\bar{\iota}=\rho^*\iota$ とする。

補題1. $H^{N+4}(E,Z)$ の元vが存在して

(1) $i^*v=2\xi$，

(2) $v=Sq^4\bar{\iota}$ mod 2.

証）$\tau(2\xi)=0$から(1)を満足するようなvが存在する。それを一つとる。$i^*v=0$

mod 2 だから $(v \bmod 2) \in \mathrm{Im}\ \rho^*$。従って $v = \nu Sq^4 \bar{\iota} \bmod 2$ と書ける。しかるに $Sq^1_i\, v = \xi \bmod 2$は簡単に証明できる。一方 $Sq^1_i(Sq^4 \bar{\iota}) = \xi \bmod 2$も函数作用素の定義から直ちに知れるから、$\nu = 1$ つまり $v = Sq^4 \bar{\iota} \bmod 2$である。

つぎに $P^2 = P \times P$のコホモロジー環の生成元y_1 , y_2 を $d^* y_j = y$ ($j = 1, 2$) なるように定める。ただし $d : P \to P^2$ は対角線写像。

<u>補題2.</u> 写像 $g : P^2 \to E$ が存在して

(1) $g^* \bar{\iota} = y_1^{2n} \cdot y_2^{2n}$,

(2) $g^* v = n(y_1^{2n+2}\, y_2^{2n} + y_1^{2n}\, y_2^{2n+2})$,

ただし、これらは整係数である。

証) 条件(1)を満足する写像g'はすぐに得られる。補題1の(2)により

$$g'^* v = n(y_1^{2n+2}\, y_2^{2n} + y_1^{2n}\, y_2^{2n+2}) + 2w$$

となるように或る元$w \in H^{N+4}(P^2, Z)$ が存在する。いま$h : P^2 \to K(Z, N+4) \subset F$ を $h^* \xi = -w$ なる写像として$g = h \cdot g'$とおく。ただし・は主ファイバー空間 (E, B, F) における積を意味するものとする。そうすればgは条件(2) を満足する。

定理の証明) $f = g \circ d : P \to E$ とおけば補題2により$f^* \bar{\iota} = y^{4n}$, $f^* v = 2ny^{4n+2}$, $Sq^1_f\, v = ny^{4n+2} \bmod \mathrm{Im}\ f^*$ がわかる。公式(II)を適用して、また$Sq^1 \bar{\iota} = 0$, $Sq^2 \bar{\iota} = 0$ に注意して

$$\Phi_{0,2}(y^{4n}) = \Phi_{0,2}(f^* \bar{\iota}) = Sq^1_f(Sq^4 \bar{\iota}) = Sq^1_f v = ny^{4n+2} \quad \bmod \mathrm{Im}\ f^* ,$$

しかるに加群$H^+(E, Z_2)$の次元$< 2N$なる部分は$\bar{\iota}$および$\Phi_{1,1} \bar{\iota}$ ($\Phi_{1,1}$は Adem 作用素) に第一種作用素をほどこしたもので生成されていて、それらのf^*による像は問題の次元 $N + 4 = 8n + 4$では零しかない。これで定理が証明される。

7. Cohomology Operation 文献

(1) <u>J. F. Adams</u>, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. 72 (1960), 20-104. and Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 279-282.

(2) <u>J. Adem</u>, The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 38 (1952).

(3) " , Relations on iterated reduced powers, ibid 39 (1953).

(4) " , The relations on Steenrod powers of cohomology classes, Alg. Geo. and Top. Pronceton U. Press (1956).

(5) " , Un criterio cohomologico para determinar composiciones esenticiales de tramsformaciones, Bolléten Soc. Mate. Mexicana 1 (1956) 38-48.

(6) <u>S. Araki</u>, On the Steénrod reduced powers in singular homology theories, Mem. Fac. Sci. Kyushyu U. A. 9 (1956).

(7) " , Steenrod reduced powers in the special sequences associated with a fibering I. II. Mem. Fac. Sci. Kyusyu U. A. 11 (1957).

(8) <u>R. Bott</u>, On symmetric products and the Steenrod squares, Ann. of Math. 57 (1953).

(9) <u>H. Cartan</u>, Sur les groupes d'Eilenberg-Maclane $H(\pi, n)$, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 40 (1954).

(10) <u>H. Cartan</u>, Sur l'iteration des opération de Steenrod, Comment. Math. Helv. 29 (1955).

(11) H. Cartan, Une theorie axiomatiques des carres de Steenrod, C. R. Paris 230 (1950).

(12) " , Seminaries de topology, E. N. S. 1954/55.

(13) B. Eckmann. Cohomology of groups and transfer, Ann. of Math. 58 (1953).

(14) S. Eilenberg, S. MacLane, Cohomology theory on abstract groups I Ann. of Math. 48 (1947).

(15) " , On the groups $H(\pi,n)$, Ann. of Math. 58 (1953), 60 (1954).

(16) " , Relation between homology and homotopy groups of spaces, Ann. of Math., 51 (1950).

(17) S.Eilenberg, J.A. Zilber, Semi-simplicial complexes and singuler homology, Ann. of Math. 51 (1950).

(18) F. Hirzebruch, On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953).

(19) T. Kudo, A transgression theorem, Mem. Fac. Sci. Kyusyu U. (A) 9 (1956).

(20) T. Kudo, S. Mukoda, S. Saito, Reduction formulas of Steenrod'd D_i in the cubic singular cohomology theory, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. (A) 9 (1956).

(21) T. Nakamura, Eilenberg-MacLane のホモロジー群について, 数学 7 (1955).

(22) " , Equivalence between two definitions of the cohomology operations, Sci. Paper of College of Gen. Edu. U. of Tokyo 9 (1959).

(23) M. Nakaoka, Note on cohomological operations, J. Inst. Poly. Osaka City U. 4 (1953).

(24) " , Reduced power of axioms. 大阪市大位相数学講究録 1 (1955).

(25) F. P. Peterson, Functional cohomology operations, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), 197-211.

(26) F. P. Peterson, N. Stein, Secondary cohomology operations: two formulas, Amer. J. Math. 81 (1959), 281-305.

(27) L. Pontrjagin, A classification of mappings of the three dimensional complex into the two dimensional sphere, Recueil Math. N. S. 9 (51) (1941).

(28) J. P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math. 54 (1951).

(29) " , Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helv. 27 (1953).

(30) N. Shimada, Homotopy classification of mappings of a 4-dimensional complex into a 2-dimensional sphere, Nagoya Math. J. 5 (1953), 127-144.

(31) " , Triviality of the mod p Hopf invariants, Proc. Japan Acad. 36 (1960) 68-69.

(32) " , On stable functional cohomology operations, ibid, 183-186.

(33) N. E. Steenrod, Products of cocycles and extensions of mappings, Ann. of Math. 48 (1947).

(34) " , Cohomology invariants of mappings, Ann. of Math. 50 (1949).

(35) N. E. Steenrod, Reduced powers of cohomology classes, Ann. of Math. 56 (1952).

(36) " , Homology groups of symmetric groups and reduced power operations, Cyclic reduced powers of cohomology classes, Prod. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953).

(37) " , Cohomology operations and obstractions to extending continuous functions, Colloque note of Princeton U. (1957).

(38) " , Cohomology operations derived from the symmetric groups, Comment. Math. Helv. 31 (1957).

(39) N. E. Steenrod, Emery Thomas, Cohomology operation derived from cyclic groups, Comment. Math. Helv. 32 (1957).

(40) E. Thomas, A generalization of the Pontrjagin square cohomology operations Proc. Nat. Acad. Sei. U. S. A. 42 (1956).

(41) " , The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with derived powers, Mem. Amer. Math. Soc. (1957).

(42) " , The functional Pontrjagin cohomology operation, Boletin de la Soc. Math. Mexicana, 1958.

(43) E. Thomas, F. Peterson, A note on non-stable cohomology operation, ibid (1958).

(44) R. Thom, Classes caracteristiques et i-carres C. R. Paris 230 (1950).

(45) " , Variétés plongees et i-carres C. R. Paris 230 (1950).

(46) " , Une theorie axiomatique des puissances de Steenrod, Colloque de Top. Strasburg

1951.

(47) R. Thom, Espaces fibres en spheres et carres de Steenrod, Ann. Sci. E. N. S. 69 (1952).

(48) H. Toda, P-primary Components of homotopy groups I Exact sequences in Steenrod algebra, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 31 (1958).

(49) C. T. C. Wall, Generators and relations for the Steenrod algebra, Ann. Math., 72 (1960).

(50) W. T. Wu, Classes caracteristiques et i-carres d'une variete, C. R. Paris 230 (1950).

(51) " , Les i-carres dans une variete grassmannienne, C. R. Paris 230 (1950).

(52) " , Sur les puissances de Steenrod, Colloques de Top. de Strasbourg (1951).

(53) T. Yamanoshita, On certain cohomological operation, J. Math. Soc. Japan 8 (1956).

(54) " , On the mod p Hopf invariant, Proc. Japan Acad., 36 (1960).