第７３回
トポロジーシンポジウム
講演集

2026 年（令和 8 年）8 月 18 日～8 月 21 日

於　弘前大学

はしがき

この講演集は 2026 年 8 月 18 日から 8 月 21 日までの 4 日間、弘前大学において開催された第 73 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。(ただし、一部の原稿についてはシンポジウム終了後から 10 月 31 日までの期間に修正版に差し替えをおこなっている。) その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

令和 8 年度科学研究費補助金

研究種目　基盤研究(S)
研究代表者　佐伯修
研究課題名　特異点論と幾何的トポロジーが織りなす数学イノベーション
研究課題番号　25K24558

研究種目　基盤研究(A)
研究代表者　河澄響矢
研究課題名　リーマン面に関わるトポロジーと代数
研究課題番号　26H01994

研究種目　基盤研究(A)
研究代表者　大槻知忠
研究課題名　3 次元双曲多様体上の量子トポロジー
研究課題番号　21H04428

世話人：　山本稔（弘前大学）
逆井卓也（東京大学）
鳥居猛（岡山大学）
主催：日本数学会トポロジー分科会

第 73 回トポロジーシンポジウム プログラム

日時: 2026 年 8 月 18 日 (火) 午後 〜 8 月 21 日 (金) 午前
会場: 弘前大学文京町キャンパス 総合教育棟 401 講義室
住所: 〒 036-8560 青森県弘前市文京町一番地
集会ホームページ: https://sites.google.com/g.ecc.u-tokyo.ac.jp/topsymp2026/

8 月 18 日 (火)

14:40–15:40 粕谷 直彦 (北海道大学)
Classification of orientable torus bundles over closed orientable surfaces 1

16:00–17:00 鎌田 直子 (名古屋市立大学)
仮想結び目とその周辺 11

8 月 19 日 (水)

9:30–10:30 多賓 雅樹 (東京大学)
Various Notions of Tangent Spaces in Diffeology 21

10:50–11:50 堀口 達也 (明石工業高等専門学校)
正則半単純 Hessenberg 多様体の座標環と正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環 31

13:30–14:30 企画講演: 河澄 響矢 (東京大学)
曲面のループ演算, フレーミングそして写像類群 43

14:50–15:50 Yichen Tong (西湖大学)
Chromatic structure in the fundamental groups of directed graphs 59

16:10–17:10 山形 颯 (福岡大学)
マトロイドにおける多項式の圏化について 70

8 月 20 日 (木)

9:30–10:30 甲斐 涼哉 (奈良教育大学)
カンドルの幾何学的不変量について 80

10:50–11:50 越野 克久 (神奈川大学)
距離関数のなす空間の幾何について 90

13:30–14:30 企画講演: 下川 航也 (お茶の水女子大学)
分子がつくる構造のトポロジー 105

14:50–15:50 坂井 健人 (東京大学)
Large-scale geometry of electric Teichmüller spaces and k-multicurve graphs 116

16:10–17:10 早野 健太 (慶應義塾大学)
最適化に現れる制約関数芽の $\mathcal{K}[G]$-分類・認識と制約想定
（濱田直希（株式会社サイバーエージェント）と寺本央（関西大学）との共同研究） . 125

8 月 21 日 (金)

9:30–10:30 片田 舞 (東京大学)
Quasi-cellular categories and the structure of the Brauer category 138

10:50–11:50 平澤 美可三 (名古屋工業大学)
Alexander polynomials of knots and links, arithmetic progressions and persistently Salem polynomials
（村杉邦男氏との共同研究） 147

Classification of orientable torus bundles over closed orientable surfaces

粕谷 直彦　(北海道大学)*

任意の非負整数 g に対し、種数 g の有向閉曲面を Σ_g で表す。本稿では、筆者が野田一成氏（北海道大学）との共著論文 [9] において行った Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの同型類の分類について概説する。尚、研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」においても同じ内容の講演を行ったため、その予稿集原稿と内容が大きく重複することをご容赦いただきたい。

1. 主定理とその背景

有向 S^1 束の同型類がオイラー類によって完全に分類されることはよく知られている。そこで、次に有向 T^2 束の同型類を分類したい、というのは自然な問題意識であろう。ところが、2023 年時点では、底空間が有向閉曲面 Σ_g の場合でさえ、以下の分類結果があるばかりであった（T^2 束のモノドロミーおよびオイラー類については 3 章を参照）。

(1) S^2 上の T^2 束の同型類はオイラー類によって完全に分類され、同型類全体は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と一対一対応がつく。

(2) T^2 上の（向き付け可能とは限らない）T^2 束の同型類は、モノドロミーとオイラー類の観点から完全に分類されている。(Sakamoto–Fukuhara [14])

そこで、$g \geq 2$ の場合の分類に取り組み、有向 T^2 束に限って解決したのが、論文 [9] の主定理（後述の定理 9）である。

一方、Σ_g 上の有向 T^2 束は、Σ_g 上の特異ファイバーをもたない種数 1 の Lefschetz fibration とみなすこともできる。実のところ、「Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの同型類分類」という問題を考え始めた元々の動機は、松本幸夫氏による種数 1 の Lefschetz fibration の分類定理である。

定理 1 (Kas [8], Moishezon [12], Matsumoto [11])**.** 特異ファイバーをもつ S^2 上の relatively minimal な種数 1 の Lefschetz fibration は、rational elliptic surface $E(1) \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ のある有限個のファイバー和

$$E(m) := m\#_f E(1) \to S^2$$

と同型である。また、特異ファイバーをもつ Σ_g 上の relatively minimal な種数 1 の Lefschetz fibration は、ある $E(m) \to S^2$ と Σ_g 上の自明 T^2 束とのファイバー和と同型である。

この定理の前半部分（底空間が S^2 の場合）は、Kas と Moishezon によって独立に得られた結果である。松本氏の寄与は、それを底空間が Σ_g の場合に拡張したことである。証明方法は、Moishezon の議論に基づいており、モノドロミー準同型の分類問題を、群

* e-mail: nkasuya@math.sci.hokudai.ac.jp

同型 $PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ を通じて、word problem に帰着させる、というものである。因みに、後に紹介するチャートという道具を用いた定理の別証明が知られている [7]。

さて、次のように考えると、定理の主張は極めて非自明な内容であることが分かる。S^2 上の任意の種数 1 の Lefschetz fibration を用意する。これと Σ_g 上の任意の有向 T^2 束 ξ とのファイバー和をとれば、Σ_g 上の種数 1 の Lefschetz fibration が得られる。同様に、Σ_g 上の自明 T^2 束とのファイバー和も Σ_g 上の種数 1 の Lefschetz fibration であるが、定理 1 によれば、これらは Lefschetz fibration として同型である。つまり、ξ がどんなに捻れていようとも、Lefschetz fibration とのファイバー和をとった瞬間に捻れの情報は消えてしまう、ということである。

しかし、よく考えてみると、Σ_g $(g \geq 2)$ 上の非自明な T^2 束の具体例を知らないことに気づく。もちろん、T^2 上の非自明 T^2 束たちのファイバー和をとることで、Σ_g 上の非自明 T^2 束は得られるが、それは実質的に $g = 1$ の場合の例である。そこで、それ以外に $g \geq 2$ に特有の例、即ち、ファイバー和分解不可能な例があるか否か、ということが気になってくる。この問いに対する以下の解答が、本講演の主定理である。

定理 2 (講演の主定理)**.** $g \geq 1$ とする。任意の Σ_g 上の有向 T^2 バンドルは g 個の T^2 上の T^2 束のファイバー和と同型である。

この定理は次の結果の系である。

定理 3 (K–Noda [9])**.** $g \geq 1$ とする。任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ に対し、

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \rangle$$

なる生成系 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \leq i \leq g}$ が存在して、すべての i について $\rho(\alpha_i) = e$ が成立する。

従って、講演では主に定理 3 の証明を行う。尚、ファイバーの種数が 2 以上の場合には、以下の結果が知られており、我々の定理 2 と好対照をなしている。

定理 4 (Baykur–Margalit [2])**.** 任意の $g \geq 1$, $h \geq 2$ に対し、非自明なファイバー和分解を許容しない Σ_g 上の有向 Σ_h 束が存在する。

これにより、有向閉曲面上の有向 Σ_h 束の分類は、$h = 1$ と $h \geq 2$ とで、様相が著しく異なることが分かる。このように定理 2 の主張は注目に値するものであるが、その一方で、g 個の T^2 上の T^2 束のファイバー和が 2 種類与えられたとき、それらが同型になるための必要十分条件については何も述べておらず、分類定理と呼ぶには相応しくない。もちろん、原論文の主定理（後述の定理 9）では、その必要十分条件を明らかにしているのであるが、講演では時間の都合上、この部分について十分に説明することはできない。そこで、講演中は分類の第 1 ステップである定理 3 に注力する一方で、そこから分類定理に至る展開を本稿最終章で解説することとする。

2. ファイバー束の同型類分類

一般に、底空間 M 上の F バンドルの同型類全体は、M から分類空間 $\mathrm{BDiff}(F)$ への連続写像のホモトピー類全体と一対一対応することが知られている。従って、ファイバー束の同型類の分類問題は、底空間から分類空間への連続写像のホモトピー分類問題に

帰着される。それでもなお、ファイバー束の同型類を分類することは、有向 S^1 束などの少数の例外を除き、大抵の場合、極めて難しい問題である。というのも、分類空間 $\mathrm{BDiff}(F)$ のホモトピー型を具体的に理解することが一般には困難だからである。

ただし、有向閉曲面上の有向曲面束の同型類の分類については、ある程度のことが知られているので、ここで簡単にまとめておこう。以下では、底空間を Σ_g, ファイバーを Σ_h と表すことによって、両者を区別する。

(1) Σ_g 上の有向 S^2 束の同型類はただ 2 つ。

(2) Σ_g 上の有向 T^2 束の同型類は、モノドロミーとオイラー類のみで決定される。

(3) Σ_g 上の有向 Σ_h 束 $(h \geq 2)$ の同型類は、モノドロミーのみで決定される。

以下、各ケースについて簡単に補足する。$h = 0$ の場合、$\mathrm{Diff}_+(S^2)$ は $SO(3)$ とホモトピー同値である (Smale [15]) から、有向 S^2 バンドルの分類はランク 3 の有向実ベクトル束の分類に帰着される。従って、$SO(3)$ の弧状連結性と $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ より、Σ_g 上の有向 S^2 バンドルの同型類はちょうど 2 つしかないことが分かる。一方、$h \geq 1$ の場合は、$\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h)$ が連結ではないため、モノドロミーと呼ばれる群準同型

$$\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{MCG}(h)$$

を考慮する必要が出てくる。ただし、$\mathrm{MCG}(h)$ は写像類群 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h))$ を表している。$h \geq 2$ の場合はさらに、$\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h)$ の各連結成分が可縮である (Earle–Eells [3]) から、

$$\pi_k(\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h)) = 0 \ \ (k \geq 1)$$

であり、従って、有向 Σ_h 束の同型類はモノドロミーのみで決定されることが分かる。ただし、曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の非可換性と写像類群 $\mathrm{MCG}(h)$ の複雑さが障害となって、モノドロミーの具体的な分類はほぼ不可能であろうと思われる。つまり、このケースでは、同型類の分類定理と呼べるような結果を得ることはほとんど望めない。

一方、$h = 1$ の場合は、$\mathrm{Diff}_+(T^2)$ が部分群

$$\mathrm{Aff}_+(T^2) = T^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z})$$

とホモトピー同値である (Hamstrom [5]) ことが知られているため、状況は比較的良い。というのも、$\mathrm{MCG}(1) = SL(2;\mathbb{Z})$ はそこまで複雑な群ではないからである。また、$\pi_1(\mathrm{Diff}_+(T^2)) = \mathbb{Z}^2$ であることに起因して、モノドロミーに加えて、オイラー類と呼ばれる Σ_g の局所係数 2 次コホモロジー類が現れ、この 2 つによって有向 T^2 束の同型類は完全に決定されることが分かる（後述の命題 5 を参照)。ただし、これを以って同型類分類が完了する訳ではない。なぜなら、曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ から $SL(2;\mathbb{Z})$ への群準同型を分類することは、$g \geq 2$ の場合に、全く容易でないからである。そして、それを解決したということが、我々の結果の根幹部分である。

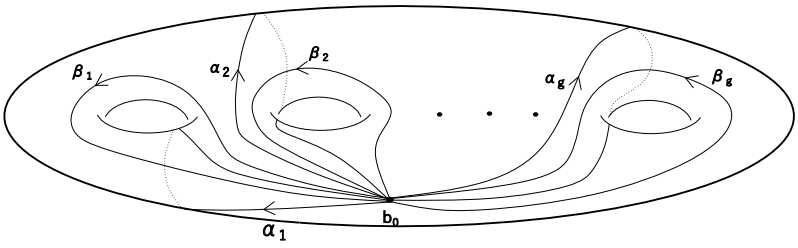


図 1: $\pi_1(\Sigma_g)$ の生成系

3. 有向 T^2 束のモノドロミーおよびオイラー類

2 次元トーラス T^2 を、$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とみなす。$\mathrm{Aff}_+(T^2)$ は $\mathbb{R}^2$ の向きと格子 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ を保つ線型変換および平行移動が誘導する微分同相によって生成される $\mathrm{Diff}_+(T^2)$ の部分群であるから、

$$\mathrm{Aff}_+(T^2) = T^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z})$$

である。$\mathrm{Diff}_+(T^2)$ は $\mathrm{Aff}_+(T^2)$ とホモトピー同値なので、$\mathrm{MCG}(1) = SL(2;\mathbb{Z})$ であり、

$$\pi_k(\mathrm{Diff}_+(T^2)) = \pi_k(T^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z})) = \pi_k(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (k=1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases}$$

であることも分かる。

さて、有向 T^2 束のモノドロミーとオイラー類について、詳しくみていこう。任意の有向 T^2 束 $\pi\colon M^4 \to \Sigma_g$ をとり、底空間 Σ_g 上の基点 b_0 を固定し、Σ_g を以下のように胞体分割する。まず、基本群 $\pi_1(\Sigma_g, b_0)$ の生成系 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ を図 1 のようにとり、b_0 を 0 胞体 e^0 とし、$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ に対応する 1 胞体をそれぞれ $e^1_1, e^1_2, \ldots, e^1_{2g-1}, e^1_{2g}$ とする。これらがなす 1 骨格に対し、2 胞体 e^2 をループ $[\alpha_1, \beta_1]\cdots[\alpha_g, \beta_g]$ に沿って貼れば、胞体分割

$$\Sigma_g = \left(e^0 \cup (e^1_1 \cup e^1_2 \cup \cdots \cup e^1_{2g-1} \cup e^1_{2g})\right) \cup e^2$$

が得られる。ここで、同一視 $F_{b_0} = \pi^{-1}(b_0) \cong T^2$ を与える微分同相を 1 つ固定すると、同型 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(F_{b_0})) \cong SL(2;\mathbb{Z})$ が定まり、各 1 胞体に沿ったモノドロミー (return map) が $SL(2;\mathbb{Z})$ の元として表される。そこで得られた $SL(2;\mathbb{Z})$ の元を、$k = 2i-1$ のとき A_i, $k = 2i$ のとき B_i とおけば、

$$\rho(\alpha_1) = A_1,\ \rho(\beta_1) = B_1,\ \cdots,\ \rho(\alpha_g) = A_g,\ \rho(\beta_g) = B_g$$

であり、$[A_1, B_1]\cdots[A_g, B_g] = E_2$ を満たす。このようにしてモノドロミー ρ を表示する $2g$ 個の行列が得られ、それらが 1 骨格上の T^2 束の同型類を定めている。

あとは、$e^2 \cong D^2$ 上の自明バンドル $D^2 \times T^2$ がどのように貼り合わされるかを記述すれば、π の同型類を復元することができる。そこで、1 骨格の小さな近傍 N をとる。すると、その境界 $\partial N = S^1$ 上では π は自明なので、貼り合わせの情報は変換関数 $N \cap \mathrm{Int}(e^2) \to \mathrm{Diff}_+(T^2)$ として表され、$N \cap \mathrm{Int}(e^2) \simeq S^1$ より、$\pi_1(\mathrm{Diff}_+(T^2)) = \mathbb{Z}^2$

の元が定まる。これを (m,n) とおけば、有向 T^2 バンドル $\pi\colon M^4 \to \Sigma_g$ の同型類は $[A_1,B_1]\cdots[A_g,B_g]=E_2$ を満たす

$$A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g \in SL(2;\mathbb{Z}) \text{ および } (m,n)\in\mathbb{Z}^2$$

というデータのみで記述できたことになる。この T^2 束を $M(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g;m,n)$ という記号で表すことにする。

次に、有向 T^2 バンドル $\xi=(M(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g;m,n),\pi,\Sigma_g,T^2)$ のオイラー類を

$$\pi\colon M(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g;m,n)\to\Sigma_g$$

が cross section を持つための障害類として定義する。まず、π を 1 骨格上に制限すると、2 次元実ベクトル束の zero section に対応する section が存在するが、これが 2 胞体 e^2 上まで延長可能であることと、$(m,n)=(0,0)$ であることは同値である。よって、$(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ は π が cross section を持つための障害を表していると考えられそうである。しかし、この考察には不十分な点がある。なぜなら、$\pi_1(T^2)\cong\mathbb{Z}^2$ という同一視の仕方は canonical ではないので、$(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ のままでは「障害類」として well-defined ではないからである。この問題は、1 つのファイバー $F_b=\pi^{-1}(b)$ に対して、同一視 $\pi_1(F_b)\cong\mathbb{Z}^2$ を固定したとしても、解決されない。というのも、$\gamma\in\pi_1(\Sigma_g,b)$ に沿ったモノドロミーの作用があるので、$\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ と $\rho(\gamma)\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ の区別はつかないからである。このような不都合を解消するものが、局所系 $\{\pi_1(T^2)\}$ である。これは一言で言えば、各点 $b\in\Sigma_g$ における茎が $\pi_1(F_b)\cong\mathbb{Z}^2$ に同型なモノドロミー ρ に付随する局所定数層である。つまり、$l(0)=l(1)=b$ なる Σ_g 上の loop l に対し、その $\{\pi_1(T^2)\}$ へのリフト $\widetilde{l}$ が始点 $\widetilde{l}(0)$ を定めれば一意的に決まり、

$$\widetilde{l}(0)=\rho([l])\,\widetilde{l}(1)$$

を満たすということである。ξ の cross section の存在に関する障害類 $e(\xi)$ はこれを係数とする 2 次コホモロジー類として定まる。障害類 $e(\xi)$ の属する加群を書き下せば

$$H^2\left(\Sigma_g;\{\pi_1(T^2)\}\right)\cong\mathbb{Z}^2/\sim$$

である。ただし、同値関係 $\sim$ は以下のように定義される。

$$(k_1,k_2)\sim(l_1,l_2)\iff\begin{pmatrix}l_1-k_1\\l_2-k_2\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{r}(\rho(\gamma_i)-E_2)\boldsymbol{u}_i \text{ なる } \gamma_i\in\pi_1(\Sigma_g),\boldsymbol{u}_i\in\mathbb{Z}^2 \text{ が存在。}$$

よって、$e(\xi)=[(m,n)]$ と表せる。これが有向 T^2 バンドルのオイラー類である。
一旦、オイラー類が定義されれば、次の命題を証明することはそれほど難しくない。

命題 5. $\xi=(E,\pi,\Sigma_g,T^2)$, $\xi'=(E',\pi',\Sigma_g,T^2)$ をともに有向 T^2 バンドルとし、それぞれのモノドロミーおよびオイラー類を ρ,ρ', $e(\xi),e(\xi')$ と表す。このとき、ξ と ξ' が同型であるための必要十分条件は、$\rho\circ f_*=Q\rho'Q^{-1}$ かつ $e(\xi)=f^*e(\xi')$ を満たす $f\in\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ および $Q\in SL(2;\mathbb{Z})$ が存在することである。

注意 6. [14] では、障害類 $e(\xi)$ に関する説明および命題 5 の $g = 1$ の場合の証明が詳述されており、その議論を拡張して命題 5 を得ることは容易である。一方、[14] におけるモノドロミー分類の議論は、$\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ の可換性に依存しており、$g \geq 2$ の場合を解決するためには別の方法が必要である。

4. 定理 3 の証明のアイディア

証明の基本的な考え方は次の通りである。任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ に対し、$\rho(\gamma) = e$ を満たす non-trivial separating curve γ の存在を示したい。というのも、そのような γ が存在すれば、γ に沿って Σ_g を切り開き、それぞれの境界に円板を貼り付けることで、ρ を 2 つの準同型

$$\pi_1(\Sigma_k) \to PSL(2;\mathbb{Z}),\ \ \pi_1(\Sigma_{g-k}) \to PSL(2;\mathbb{Z})$$

に分解できるからである。そして、そのような γ を見出す際に役立つのが「チャート」である。これは元々、鎌田氏 [6] によって曲面結び目の研究のために導入されたものであるが、曲面群から有限表示群への準同型を記述することができる非常に有用な道具である。有限表示群 G を固定したとき、G–チャートとは具体的には何かというと、有向曲面上の有向グラフであって、各辺は G の生成元でラベル付けされており、各頂点から出ている辺のラベルを順に読んでいくと G の関係式となっているもののことである（ただし、チャートでは、hoop と呼ばれる頂点のない loop も辺として許される）。$PSL(2;\mathbb{Z})$ は自由積 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ と同型であるから、この有限表示に関する ρ のチャートをとると、頂点は 2 価頂点と 3 価頂点の 2 種類しかない。しかも、2 価頂点から出ている辺のラベルは全て a, 3 価頂点では全て b なので、2 価頂点と 3 価頂点が辺で結ばれることはない。そのため、2 価頂点の連結成分はつねに simple closed curve であり、これを少しずらせば、チャートと交わらない simple closed curve が得られる（2 価頂点が存在しなくても、hoop があれば同じことができる）。この事実が、定理 3 の証明における非常に重要なポイントとなる。

定理 3 の証明の概略. 任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ に対し、その群表示 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ に関するチャート Γ をとる。そして、Γ の 2 価頂点の連結成分および hoop として現れる Σ_g 上の simple closed curve 全体の集合を X_Γ とおく。証明は種数 g に関する帰納法による。即ち、閉曲面 Σ_g を種数 k と種数 $g-k$ に分ける separating curve γ であって、$\rho(\gamma) = e$ となるものの存在を示す（但し、$1 \leq k \leq g$）。以下の 3 通りに場合分けして議論すると、いずれの場合も所望の separating curve γ が存在することが言える。

(1) $X_\Gamma = \emptyset$ のとき.

(2) $X_\Gamma \neq \emptyset$ かつ X_Γ の中に non-trivial separating curve が存在するとき.

(3) $X_\Gamma \neq \emptyset$ かつ X_Γ の全ての元が non-separating curve であるとき.

$g = 1$ の場合の主張は [14] において証明済みなので、これで帰納法が回る。 □

5. 有向閉曲面上の有向T^2束の分類

5.1. 曲面群から$PSL(2;\mathbb{Z})$への準同型の分類

任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ をとる。部分群 $\mathrm{Im}(\rho) \subset \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ に Kurosh's subgroup theorem ([10]) を適用すれば、$\mathrm{Im}(\rho)$ の部分群 $H_1, \dots, H_m$ が存在して、

$$\mathrm{Im}(\rho) = (H_1 * \cdots * H_k) * (H_{k+1} * \cdots * H_l) * (H_{l+1} * \cdots * H_m),$$
$$H_1 \cong \cdots \cong H_k \cong \mathbb{Z},\ \ H_{k+1} \cong \cdots \cong H_l \cong \mathbb{Z}_3,\ \ H_{l+1} \cong \cdots \cong H_m \cong \mathbb{Z}_2$$

と表せる。このとき、定理 3 を足掛かりにすると、以下を示すことができる。

定理 7. 任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ に対し、次を満たす写像類 $f \in \mathrm{MCG}(g)$ が存在する。

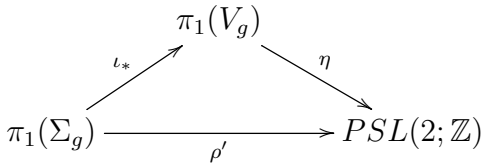
$$(\rho \circ f_*)(\alpha_i) = e\ \ (1 \le i \le g),\ \ (\rho \circ f_*)(\beta_i) = \begin{cases} 1 \in H_i \cong \mathbb{Z} & (1 \le i \le k), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_3 & (k+1 \le i \le l), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_2 & (l+1 \le i \le m), \\ e & (m+1 \le i \le g). \end{cases}$$

特に、任意の 2 つの準同型 $\rho_1, \rho_2\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ について、以下は同値である。

(1) $\mathrm{Im}(\rho_1) = \mathrm{Im}(\rho_2)$.

(2) $\rho_2 = \rho_1 \circ f_*$ なる写像類 $f \in \mathrm{MCG}(g)$ が存在する。

定理 7 の証明の概略. V_g で種数 g のハンドル体を表す。各 i について $(\rho \circ \varphi_*)(\alpha_i) = e$ となる写像類 $\varphi \in \mathrm{MCG}(g)$ の存在は分かっていたので、$\rho' = \rho \circ \varphi_*$ とおけば、これは以下が可換図式となるように factorize する。



つまり、$\iota\colon \Sigma_g \to V_g$ を包含写像としたとき、$\rho' = \eta \circ \iota_*$ を満たす準同型

$$\eta\colon F_g \cong \pi_1(V_g) \to PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

が存在するということである。$\eta(F_g) = \mathrm{Im}(\rho') = \mathrm{Im}(\rho)$ に注意すれば、

$$\eta(F_g) = (H_1 * \cdots * H_k) * (H_{k+1} * \cdots * H_l) * (H_{l+1} * \cdots * H_m)$$

であり、Grushko's theorem ([4], [16]) を繰り返し用いれば、

$$(\eta \circ \gamma)(a_i) = \begin{cases} 1 \in H_i \cong \mathbb{Z} & (1 \le i \le k), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_3 & (k+1 \le i \le l), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_2 & (l+1 \le i \le m), \\ e & (m+1 \le i \le g) \end{cases}$$

を満たす$\gamma \in \mathrm{Aut}(F_g)$の存在が分かる。ただし、$a_i$ $(1 \leq i \leq g)$ は自由群F_gの生成元である。$\mathrm{Aut}(F_g)$の具体的な有限表示 ([1], [13]) を利用すれば、$\mathrm{Aut}(F_g)$の各元はV_gの写像類によって実現されることが分かる。そこで、$\gamma \in \mathrm{Aut}(F_g)$に対応する$V_g$の写像類を$h$としたとき、$f = \varphi \circ h|_{\Sigma_g}$とおけばよい。 □

5.2. 曲面群から$SL(2;\mathbb{Z})$への準同型の分類

定理 7 における $\rho \circ f_*$ のことを、$\mathrm{MCG}(g)$作用に関するρの標準型と呼ぶことにする。射影

$$p_*\colon \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SL(2;\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2;\mathbb{Z}))$$

を$p_*(\widetilde{\rho}) = p \circ \widetilde{\rho}$によって定める。ただし、$p\colon SL(2;\mathbb{Z}) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ は商写像である。すると、任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ について、$\#p_*^{-1}(\rho) = 2^{2g}$ である。このρの2^{2g}個のリフトのうち、どのペアが$\mathrm{MCG}(g)$作用で移り合うかを考えると以下のような結果となる。

定理 8. $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2;\mathbb{Z}))$は標準型であるとする。このとき、 $m > l$ ならば、$p_*^{-1}(\rho)$はちょうど2^k個の$\mathrm{MCG}(g)$軌道を持ち、$m = l$ならば、ちょうど2^{k+1}個の軌道を持つ。

証明の議論のポイントは、ρのリフト$\widetilde{\rho}$について、$\mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$が$-E_2$を含むか否かに注目することである。$m > l$の場合は、自動的に$-E_2 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$なので、

$$\widetilde{\rho}(\alpha_1) = \pm E_2,\ \cdots,\ \widetilde{\rho}(\alpha_k) = \pm E_2$$

の符号の選択がそのまま各軌道に対応し、それ以外の$2g-k$個の符号選択は$\mathrm{MCG}(g)$作用で吸収されることが示される。一方、$m = l$の場合は、$-E_2 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$, $-E_2 \notin \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$ どちらのケースも現れる。$-E_2 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$の場合は、先ほどと全く同様に$2^k$個の軌道が得られ、$-E_2 \notin \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$の場合は、自動的に $\widetilde{\rho}(\alpha_1) = \cdots = \widetilde{\rho}(\alpha_k) = E_2$ となるから、今度は $\widetilde{\rho}(\beta_1),\ \cdots,\ \widetilde{\rho}(\beta_k)$ の選択に対応して、2^k 個の軌道が得られ、合わせて 2^{k+1} 個となる。いずれのケースでも、写像類群$\mathrm{MCG}(g)$の基本群$\pi_1(\Sigma_g)$やホモロジー群$H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$への作用を見ながら慎重に議論する必要があり、なかなか骨が折れるが、ρを標準型にとっておいたことが効いて、最終的には議論が上手くいく。([9, Propositions 5.3–5.6])

5.3. 分類定理

命題 5, 定理 7および定理 8を踏まえれば、以下の分類定理が得られる。

定理 9 (Σ_g**上の有向**T^2**束の分類** [9, Theorem 1.5])**.** ξ_1, ξ_2 を Σ_g 上の任意の2つの有向T^2束とし、

$$\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\rho}_2 \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SL(2;\mathbb{Z}))$$

をそのモノドロミー準同型とする。2つの準同型$p \circ \widetilde{\rho}_1$, $p \circ \widetilde{\rho}_2$はともに定理 7の意味で標準型であるとし、$\xi_1$, ξ_2 は整数 $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$および符号$\varepsilon_i$, δ_iを用いて、それぞれ

$$M(\varepsilon_1 E_2, B_1, \ldots, \varepsilon_g E_2, B_g; m, n),\ \ M(\delta_1 E_2, C_1, \ldots, \delta_g E_2, C_g; k, l),$$

と表されているとする。このとき、ξ_1とξ_2が同型であることと次の条件を全て満たす$Q \in SL(2;\mathbb{Z})$が存在することは同値である。

(1) $\mathrm{Im}(\widetilde{\rho}_1) = Q\mathrm{Im}(\widetilde{\rho}_2)Q^{-1}$.

(2) $p\circ\widetilde{\rho}_1$ の2つのリフト $\widetilde{\rho}_1$, $Q\widetilde{\rho}_2Q^{-1}$ は定理 8 の意味で、同じ $\mathrm{MCG}(g)$ 軌道に属する。

(3) $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_g = 1$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{g}(B_i - E_2)\boldsymbol{x}_i$$

を満たす $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_g \in \mathbb{Z}^2$ が存在し、それ以外の場合は、

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{g}(B_i - E_2)\boldsymbol{x}_i$$

を満たす $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_g \in \mathbb{Z}^2$ が存在する。

定理 9 の系として、以下が直ちに従う。

系 10. ξ_1, ξ_2 を Σ_g 上の任意の2つの有向 T^2 束とする。これらのモノドロミー群（モノドロミー準同型の像）がともに $SL(2;\mathbb{Z})$ に一致するならば、ξ_1 と ξ_2 は同型である。

参考文献

[1] H. Armstrong, B. Forrest and K. Vogtmann, *A presentation for* $\mathrm{Aut}(F_n)$, J. Group Theory **11**-2 (2008), 267–276.

[2] R. I. Baykur and D. Margalit, *Indecomposable surface bundles over surfaces*, J. Topol. Anal. **5** (2013), no. 2, 161–181.

[3] C. J. Earle and J. Eells, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, JDG **3** (1969), 19–43.

[4] I. Grushko, *On the bases of a free product of groups*, Mat. Sbornik **8** (1940), 169–182.

[5] M. E. Hamstrom, *The space of homeomorphisms on a torus*, Illinois J. Math. **9** (1965), 59–65.

[6] S. Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topol. Appl. **154** (2007), 1430–1446.

[7] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matumoto and K. Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, JMSJ **57** (2005), 537–555.

[8] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami Shoten (1977), 107–111.

[9] N. Kasuya and I. Noda, *Classification of orientable torus bundles over closed orientable surfaces*, JMSJ Advance Publication (2026), 1–41.

[10] A. G. Kurosh, *The Theory of Groups, vol. II*, New York: Chelsea (1956).

[11] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology, **25**-4 (1986), 549–563.

[12] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag (1977).

[13] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, Math. Ann. **91** (1924), 169–209.

[14] K. Sakamoto and S. Fukuhara, *Classification of T^2-bundles over T^2*, Tokyo J. Math., Vol. 6, No. 2 (1983), 311–327.

[15] S. Smale, *Diffeomorphisms of the* 2*-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.

[16] J. R. Stallings, *A topological proof of Grushko's theorem on free products*, Math. Z. **90** (1965), 1–8.

仮想結び目とその周辺

鎌田　直子　(名古屋市立大学)*

1　初めに

仮想結び目 (virtual knot) は, L. Kauffman によって文献 [16] で導入された, 結び目のガウスコードダイアグラムに着目した (古典的) 結び目の拡張である. 幾何学的には向きづけられた閉曲面上の結び目ダイアグラムを表しているが, それは厚みのある閉曲面内の結び目の安定同値類に対応している ([2, 14]). Jones 多項式や結び目群など, 結び目のいくつかの不変量は仮想結び目に自然に拡張される ([16]). しかし, Goeritz 不変量など結び目の不変量には自然な形では仮想結び目に拡張できない場合もある. 一方, 仮想結び目に固有の不変量も導入されている. 例えば, Jones 多項式を細密化して得られる多項式不変量が, H. Dye と L. Kauffman, および Y. Miyazawa によってそれぞれ導入されている ([3, 19]). また, L. Kauffman によって導入された odd writhe ([17]), affine index 多項式 ([18]), A. Henrich による不変量 ([5]), および Y. H. Im, K. Lee, Y. Lee による index 多項式 ([7]), S. Satoh と K. Taniguchi の n-writhe ([22]) などがある.

仮想結び目は仮想結び目ダイアグラムの一般化 Reidemeister 変形による同値類として定義されるが, 溶接結び目 (welded knot) は仮想結び目ダイアグラムに対し, 仮想結び目の場合とは異なる変形によって生成される同値関係の同値類として定義される ([4]). R. Fenn, R. Rimányi と C. Rourke [4] によって溶接結び目として同値な仮想結び目ダイアグラムの結び目群は同型であることが示された. また, S. Satoh [21] は, 溶接結び目を用いてトーラス型リボン曲面結び目を表示する方法を導入し, 表示されたトーラス型リボン曲面結び目の結び目群が, もとの溶接結び目の結び目群と同型であることを示した.

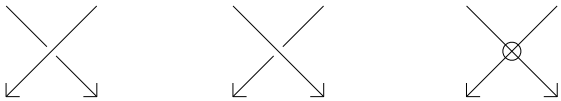
捻り仮想結び目 (twisted virtual knot) は M. Bourgoin [1] によって導入された概念である. 仮想結び目は向きづけられた閉曲面を底空間とした I バンドル内の結び目の安定同値類に対応しているのに対して, 捻り仮想結び目は (向きづけられない場合も含んだ) 閉曲面を底空間とした向きづけられた I バンドル内の結び目の安定同値類に対応している. 捻り仮想結び目に対しても Jones 多項式や結び目群などの不変量が定義されている. 捻り仮想結び目も結び目の拡張である ([1], [15]).

本講演では仮想結び目, 溶接結び目, 捻り仮想結び目など, 拡張された結び目について, それらと古典的結び目との違いに着目した研究手法と得られた結果を紹介する.

* 〒467-8501 名古屋市 瑞穂区 瑞穂町 山の畑 1　名古屋市立大学 大学院理学研究科
e-mail: kamada@nsc.nagoya-cu.ac.jp
web: https://www.nsc.nagoya-cu.ac.jp/~kamada/kamadaJ.html
本研究は科研費 (課題番号：23K03118) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: MSC-57M25, MSC-57M27
キーワード：仮想結び目, 結び目

2 仮想絡み目と溶接絡み目

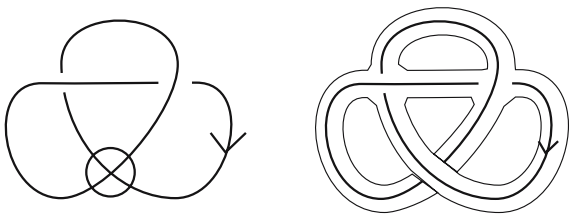
(向きづけられた) 仮想絡み目ダイアグラムは, 図 1 に示すように, 各二重点に正, 負, または仮想の情報を付した, $\mathbb{R}^2$ 内にはめ込まれた有限個の円周である. 円周の個数が n 個であるとき, これを n 成分仮想絡み目ダイアグラムという. 特に, 1 成分の場合を仮想結び目ダイアグラムという.



(a) 正の交点　(b) 負の交点　(c) 仮想交点

図 1　仮想絡み目ダイアグラムの交点

仮想絡み目ダイアグラムの例を図 2(a) に示す.



(a) 仮想絡み目ダイアグラム　(b) 抽象絡み目ダイアグラム

図 2　仮想絡み目ダイアグラムと抽象絡み目ダイアグラムの例

仮想絡み目は, 仮想絡み目ダイアグラムに対する図 3 に示す一般化 Reidemeister 変形によって生成される同値関係の同値類として定義される.

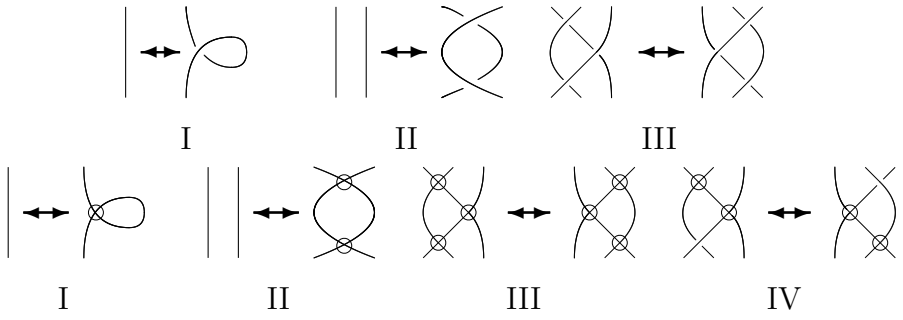


図 3　一般化 Reidemeister 変形

抽象絡み目ダイアグラム ([14]) とは, 向きづけられたコンパクト曲面 Σ と, その上の絡み目ダイアグラム D の組 (Σ, D) であって, $|D|$ が Σ の変形レトラクトとなるものをいう. ここで, $|D|$ は D の交点を頂点に置き換えて得られるグラフである. 図 2 (b) に抽象絡み目ダイアグラムの例を示す.

仮想絡み目ダイアグラムの集合から抽象絡み目ダイアグラムの集合への写像 ϕ を, 図 4

に示すように定義する. (図 4のラベル i や $i+1$ は後の議論で用いるもので, 対応 ϕ には不要である.)

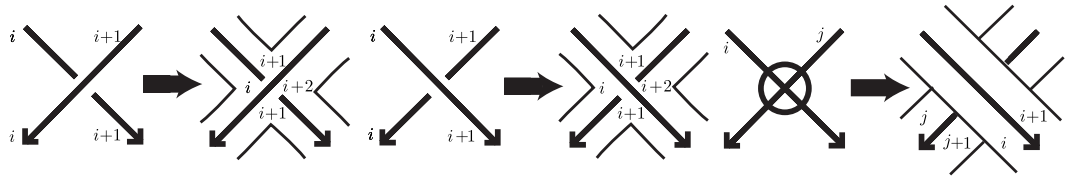


図 4　仮想絡み目ダイアグラムと抽象絡み目ダイアグラムの対応

仮想絡み目ダイアグラム D からこの写像 ϕ によって得られた抽象絡み目ダイアグラム $\phi(D)$ を, 仮想絡み目ダイアグラム D に付随する抽象絡み目ダイアグラムと呼ぶ. 図 2 において (b) は (a) の仮想絡み目ダイアグラムに付随する抽象絡み目ダイアグラムである.

図 5 に示す仮想絡み目ダイアグラムの変形を溶接変形という.

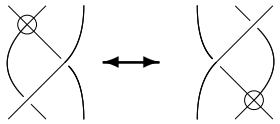


図 5　溶接変形

仮想絡み目ダイアグラムに対する一般化 Reidemeister 変形と溶接変形によって生成される同値関係の同値類を, 溶接絡み目という.

定理 1 ([4]). 溶接絡み目として同値な仮想絡み目ダイアグラムの絡み目群は同型である.

3 almost classical 仮想絡み目

仮想絡み目ダイアグラム D に付随する抽象絡み目ダイアグラムを (Σ, D_Σ) とする. $\Sigma - D_\Sigma$ の領域が checkerboard 彩色可能であるとき, 仮想絡み目ダイアグラム D は checkerboard 彩色可能であるという. 図 6 に checkerboard 彩色可能な仮想絡み目ダイアグラムとそれに付随する抽象絡み目ダイアグラムの例を示す. (古典的) 絡み目ダイアグラムは checkerboard 彩色可能である.

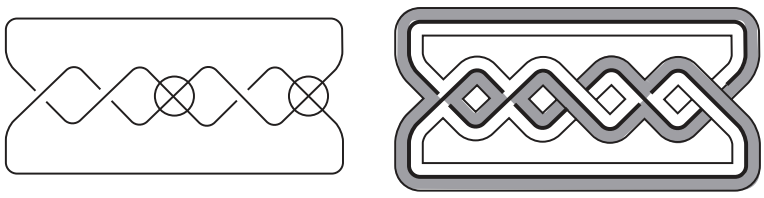


図 6　checkerboard 彩色可能な仮想絡み目ダイアグラムと抽象絡み目ダイアグラム

仮想絡み目の Jones 多項式 (f 多項式) は絡み目の Jones 多項式の拡張であり, 仮想絡

み目ダイアグラム D に対して, その Jones 多項式 $f_D(A)$ は $\mathbb{Z}[A^{\pm 2}]$ に属する. D が n 成分の古典的絡み目ダイアグラムと同値であるとき, $f_D(A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}]A^{2(n-1)}$ である.

定理 2 ([9]). D を n 成分の仮想絡み目ダイアグラムとする. D が checkerboard 彩色可能であるとき, D の Jones 多項式 $f_D(A)$ に対して次が成立する.

$$f_D(A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}]A^{2(n-1)}$$

D を n 成分の仮想絡み目ダイアグラムとし, (Σ, D_Σ) を D に付随する抽象絡み目ダイアグラムとする. 図 4 に示すように $\Sigma - D_\Sigma$ が Alexander numbering をもつとき, D を almost classical 仮想絡み目ダイアグラムという. また, D が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ で Alexander numbering をもつとき, D を m-almost classical 仮想絡み目ダイアグラムという. D が checkerboard 彩色可能であることと $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で Alexander numbering をもつことは同値である. D が almost classical 仮想絡み目ダイアグラムならば, それは checkerboard 彩色可能である.

仮想絡み目ダイアグラム D の多変数多項式不変量 R_D は $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, \dots]$ に値をもつ ([3, 19]). D が古典的絡み目ダイアグラムと同値であるとき, $R_D = f_D(A)$ が成立する.

定理 3 ([20]). D を n 成分の almost classical 仮想絡み目ダイアグラムとする. 次が成立する.

$$R_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}]A^{2(n-1)}$$

定理 4 ([11]). D を m-almost classical 仮想絡み目ダイアグラムとする. m が偶数 (または奇数) のとき, R_D は $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_{m/2}, d_{2m/2}, \dots]$ (または $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_m, d_{2m}, \dots]$) に値をもつ.

4 巡回被覆と二重化写像

本節では, 与えられた仮想絡み目ダイアグラムから almost classical 仮想絡み目ダイアグラムを構成する方法として, 巡回被覆と二重化写像を紹介する. D を仮想絡み目ダイアグラムとする. 両端点を古典的交点とする D 上の滑らかな曲線で, その内部に古典的交点は含まないものを D のセミアークと呼ぶ. (セミアークの上に仮想交点はあっても構わない.) Alexander numbering は, D に付随する抽象絡み目ダイアグラムの補領域に付けられる番号付けであるが, 図 4 に示すように, セミアークへの番号付けとして同値に記述することができる.

図 7に示すように, 仮想絡み目ダイアグラム D のセミアーク上に置かれた向き付きの点を D 上の有向カット点という. 有向カット点の向きは, ダイアグラム D の向きとは無関係である. 有向カット点で, その点の向きに沿って図 7 に示すようにセミアークの Alexander numbering を 1 ずつ変化させると約束するとき, 適切に有限個の有向カット点を D 上に置くことによって, 有向カット点を考慮することにより, D が Alexander numbering をもつようにすることができる. このような D 上の有向カット点の集合のことを, D のカットシステムと呼び, $C(D)$ と書く.

図 7　有向カット点

仮想絡み目ダイアグラムとカットシステムの例を図 8 に示す.

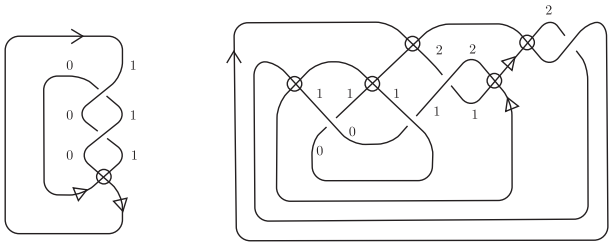


図 8　仮想絡み目ダイアグラムとカットシステムの例

仮想絡み目ダイアグラム D に対して, カットシステムは一意的ではないが, D の任意の二つのカットシステムは, 図 9 に示すカット点移動と呼ばれる基本変形を適当に繰り返せば互いに移り合うことが知られている ([10]).

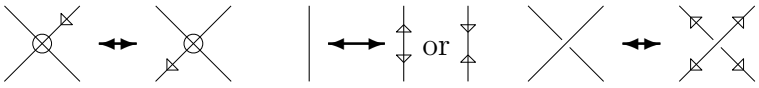


図 9　カット点移動

D を仮想絡み目ダイアグラム, $C(D) = \{c_1, \ldots, c_l\}$ を D のカットシステムとし, $c_1, \ldots, c_l$ の y 座標は全て異なり, それぞれの y 座標をもつ水平線上には D の交点がないものとする. D の m 個のコピー $D^1, \ldots, D^m$ を x 軸方向に並べる. 各 j $(j = 1, \ldots, l)$ に対して c_j に対応する $D^1, \ldots, D^m$ 上の有向カット点 $c_j^1, \ldots, c_j^m$ は同じ y 座標にある. $c_j^1, \ldots, c_j^m$ を含む直線の近傍 N_j において $D^1 \sqcup \cdots \sqcup D^m$ に図 10 のような変形を施す.

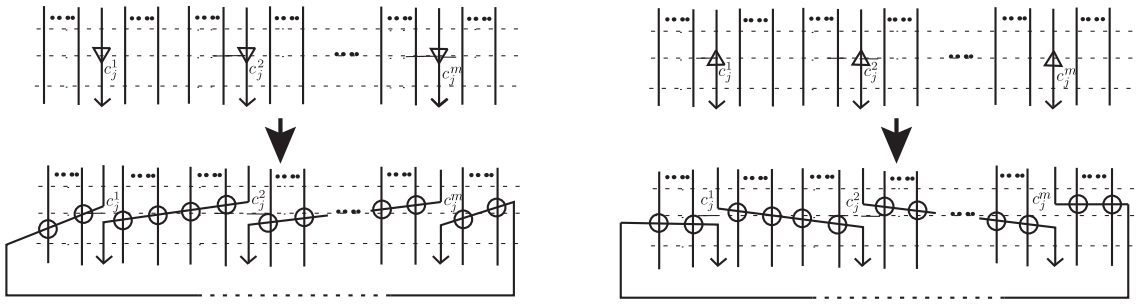


図 10　m-almost classical 仮想絡み目化

このようにして得られる, 仮想絡み目ダイアグラムの集合から仮想絡み目ダイアグラムの集合への写像を m-巡回被覆写像と呼び, φ_m とおく. 図 11 に仮想結び目ダイアグラム

D とそのカットシステムおよび φ_3 による像の例を示す.

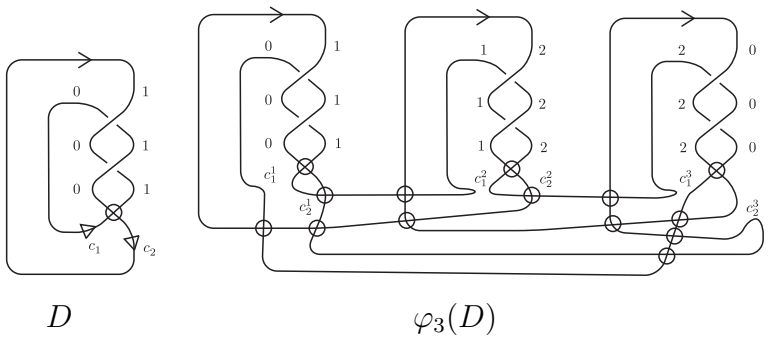


図 11　3-巡回被覆の例

定理 5([10]). D と D' を同値な仮想絡み目ダイアグラムとする. $\varphi_m(D)$ と $\varphi_m(D')$ は m-almost classical 仮想絡み目であり, 仮想絡み目として同値である.

次に, 2 種類の二重化写像を紹介する. 図 12(a) (または図 12(b)) に示す仮想絡み目ダイアグラムの集合から仮想絡み目ダイアグラムの集合への写像を ψ_1 (または ψ_2) とする.

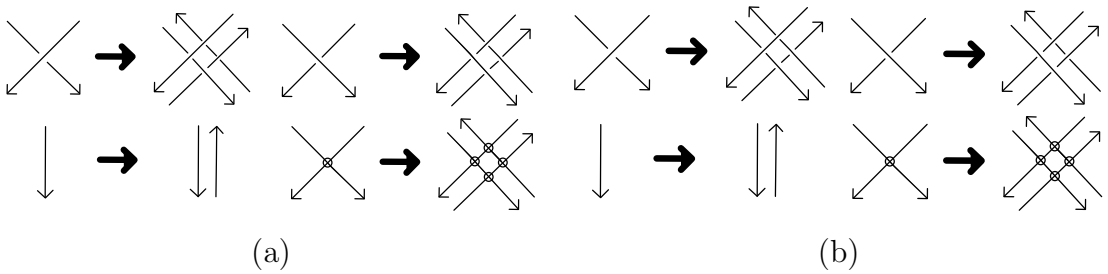


図 12　写像 ψ_1, ψ_2 の対応

図 13 に仮想結び目ダイアグラムと写像 ψ_1 によるその像の例を示す.

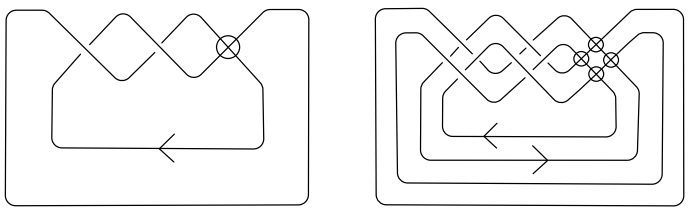


図 13　写像 ψ_1 の例

写像 ψ_2 は, K. Ishikawa と K. Tanaka の論文 [8] の図 4 に登場するダイアグラムの二重化と同じものであり, カンドル彩色とバイカンドル彩色の関係で重要な役割を果たしている ([8] では doubled diagram と呼ばれている).

定理 6 ([12]). D と D' を同値な仮想絡み目ダイアグラムとする. $\psi_\nu(D)$ と $\psi_\nu(D')$ は almost classical 仮想絡み目であり, 仮想絡み目として同値である.

5 巡回被覆と二重化写像の応用

J. H. Lee と G. T. Jin が 2001 年に次の定理を示した.

定理 7 ([6]). $L_1, \ldots, L_k$ を絡み目とし, $D_1, \ldots, D_k$ をそれぞれの絡み目ダイアグラムとする. また, L を $L_1, \ldots, L_k$ を部分絡み目として含む任意の絡み目とする. このとき, L の絡み目ダイアグラム D であって, 各 i に対して $D|_{L_i}$ と D_i が $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとなるものが存在する.

溶接絡み目に関しても類似の主張が成立する.

定理 8 ([13]). $L_1, \ldots, L_k$ を溶接絡み目とし, $D_1, \ldots, D_k$ をそれぞれの仮想絡み目ダイアグラムとする. また, L を $L_1, \ldots, L_k$ を部分溶接絡み目として含む任意の溶接絡み目とする. このとき, L の仮想絡み目ダイアグラム D であって, 各 i に対して $D|_{L_i}$ と D_i が $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとなるものが存在する.

しかし, 仮想絡み目の場合は類似の主張が成立しない.

定理 9 ([13]). ある仮想絡み目 L_1, L_2 とそれらを表す仮想絡み目ダイアグラム D_1, D_2, および, ある仮想絡み目 L で次の条件を満たすものが存在する.

(i) L は L_1, L_2 を部分仮想絡み目とする.
(ii) L の仮想絡み目ダイアグラム D であって, 各 $i = 1, 2$ に対して, D を L_i に制限した部分仮想絡み目ダイアグラム $D|_{L_i}$ と D_i が $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとなるものは存在しない.

定理 9の証明には 2-巡回被覆が用いられる. D_i $(i = 1, 2)$ を自明ループ (交点を持たない自明な結び目ダイアグラム) とし, L_i を D_i が表す自明な結び目とする. 仮想絡み目 L を図 14(a) に示すダイアグラム $D' = D'_1 \cup D'_2$ が表す 2 成分仮想絡み目とする.

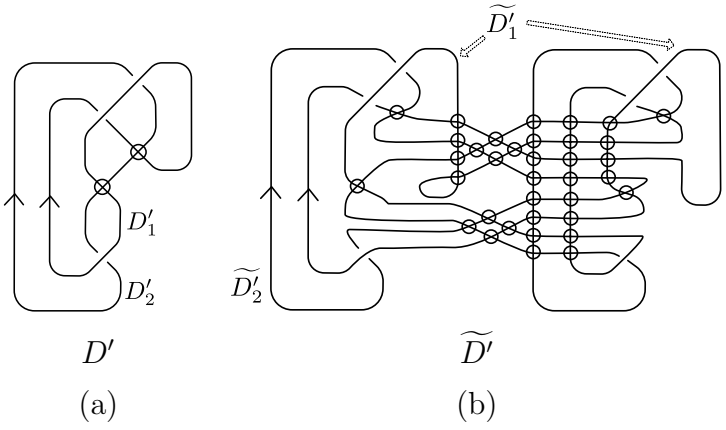


図 14　定理 9の例

D'_1 は自明ループと同値である. D'_2 は自明ループである. よって, 定理の (i) が成り立つ. (ii) については, L を表す任意のダイアグラム D に対して, それを L_1 に制限した部分仮想絡み目ダイアグラム $D|_{L_1}$ は, 自明ループ D_1 に $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックにならない. こ

のことは, 次のようにして分かる. D の 2-巡回被覆仮想絡み目ダイアグラム $\widetilde{D} = \varphi_2(D)$ と D' の 2-巡回被覆仮想絡み目ダイアグラム $\widetilde{D'} = \varphi_2(D')$ を考えると, $\widetilde{D}$ と $\widetilde{D'}$ は仮想絡み目として同値である. $\widetilde{D}$ は $D|_{L_1}$ の 2-巡回被覆となる部分ダイアグラム $\widetilde{D}\big|_{L_1}$ をもち, $\widetilde{D'}$ は D'_1 の 2-巡回被覆となる部分ダイアグラム $\widetilde{D'_1}$ をもつ. $\widetilde{D}\big|_{L_1}$ と $\widetilde{D'_1}$ は仮想絡み目として同値である. $D|_{L_1}$ が D_1 にイソトピックとなると仮定すると, $\widetilde{D}\big|_{L_1}$ は, $\mathbb{R}^2$ 内で 2 成分の自明ループとイソトピックである. 一方, $\widetilde{D'_1}$ は図 14(b) に示すように絡み数 1 の 2 成分絡み目であり, 2 成分の自明ループと同値ではない. 従って, $D|_{L_1}$ は自明ループ D_1 に $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとはならない.

捻り仮想絡み目に関しても定理 9と同様の例が存在する. 図 15 に示す捻り仮想絡み目ダイアグラムはその例である.

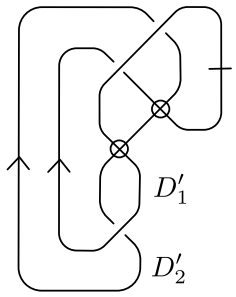
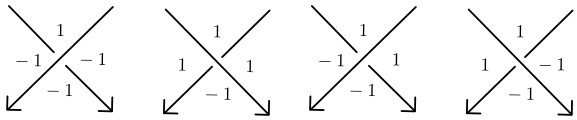


図 15　定理 9の例 (捻り仮想絡み目)

空間グラフに対しては R. Shinjo が [23] において定理 7と類似の主張を示している.

任意の仮想絡み目ダイアグラムに対して ψ_1 (または ψ_2) の像は checkerboard 彩色可能な仮想絡み目ダイアグラムとなる. それを利用して Goeritz 不変量に類似した不変量を定義することができる. 仮想絡み目ダイアグラム D の各古典的交点の近傍において, $\mathbb{R}^2 - D$ の各局所領域に, 図 16(a) または (b) に示すように局所インデックス 1 または -1 を割り当てる. 図 16(a) を第 1 インデックス, (b) を第 2 インデックスという.



第 1 インデックス　　第 2 インデックス

(a)　　(b)

図 16　古典的交点近傍のインデックス

D を仮想絡み目ダイアグラム, $a_1, \ldots, a_r$ を D のセミアークとする. $\nu = 1, 2$ に対して, 第 ν Goeritz 行列

$$G_\nu(D) = (p^\nu_{ij})_{1 \le i,j \le r}$$

を次のように定義する. $i \neq j$ のとき, p^ν_{ij} を, セミアーク a_i と a_j の両方に接する領域に

割り当てられた第 ν インデックスの総和とし, 対角成分は $p_{ii}^{\nu} = -\sum_{i \neq j} p_{ij}^{\nu}$ とする.

定理 10 ([12]). D と D' を同値な仮想絡み目ダイアグラムとする. このとき, $G_1(D)$ と $G_1(D')$ のねじれ不変量は一致する. また, $G_2(D)$ と $G_2(D')$ のねじれ不変量は一致する.

6 溶接絡み目から溶接絡み目への写像

仮想絡み目ダイアグラム D に対し, 仮想絡み目ダイアグラム $\eta(D)$ を図 17 に示す対応によって定義する. 定理 11より, この対応は溶接絡み目の集合から溶接絡み目の集合への写像を誘導する.

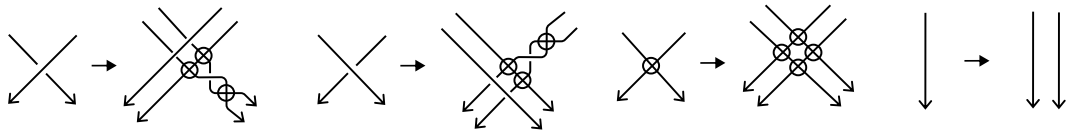


図 17　溶接絡み目から溶接絡み目への写像

図 18 に仮想結び目ダイアグラム D と結び目ダイアグラム D' の写像 η による像の例を示す. この写像 η について以下の定理が成立する.

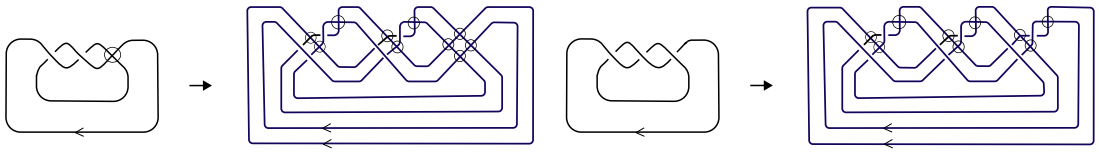


図 18　写像 η の例

定理 11. 仮想絡み目ダイアグラム D, D' が溶接絡み目として同値ならば, $\eta(D)$ と $\eta(D')$ も溶接絡み目として同値である.

定理 12. D を仮想結び目ダイアグラムとし, $\langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle_{\mathrm{qdle}}$ を D の基本カンドルとする. L を D のプリファードロンジチュードとする. $\eta(D)$ の基本カンドルは $\langle x_1, \ldots, x_m, y \mid r_1, \ldots, r_n, y^L = y \rangle_{\mathrm{qdle}}$ と表すことができる.

定理 13. 仮想絡み目ダイアグラム D に対して, L を D のプリファードロンジチュードとする. D の絡み目群において $L \neq 1$ であるならば, $\eta(D) = D_1 \cup D_2$ は D_1 と D_2 の非交和とは溶接絡み目として同値ではない.

参考文献

[1] M. O. Bourgoin, *Twisted link theory*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), no. 3, 1249–1279.

[2] J. S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, J. Knot Theory Ramifications 11 (2002), no. 3, 311–322.

[3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Virtual crossing number and the arrow polynomial*, J. Knot Theory Ramifications 18 (2009), 1335–1357.

[4] R. Fenn, R. Rimányi and C. Rourke *The braid-permutation group*, Topology 36 (1997), 123–135.

[5] A. Henrich, *A sequence of degree one Vassiliev invariants for virtual knots,* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 4, 461–487.

[6] J.H. Lee and G. T. Jin, *Link diagrams realizing prescribed subdiagram partitions*, Kobe J. Math. 18 (2001), 199–202.

[7] Y. H. Im, K. Lee and Y. Lee, *Index polynomial invariant of virtual links,* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 5, 709–725.

[8] K. Ishikawa and K. Tanaka, *Quandle colorings vs. biquandle colorings*, Topology Appl. 345 (2024), 108832 (25 pages).

[9] N. Kamada, *On the Jones polynomials of checkerboard colorable virtual knots*, Osaka J. Math. 39 (2002), 325–333.

[10] N. Kamada, *Cyclic covering of virtual link diagrams*, Internat. J. Math. 30 (2019), no. 14, 1950072 (16 pages).

[11] N. Kamada, *A multivariable polynomial invariant of virtual links and cut systems*, Topology Appl. 301 (2021), 107518 (13 pages).

[12] N. Kamada, *Conversion to almost classical virtual links and pseudo Goeritz matrices*, J. Knot Theory Ramifications 31 (2022), no. 14, 2250098 (16 pages).

[13] N. Kamada, *Diagrams realizing prescribed sublink diagrams for virtual links and welded links*, Kobe J. Math. 40 (2023), no. 1–2, 57–68.

[14] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), no. 1, 93–106.

[15] N. Kamada and S. Kamada, *Virtual links which are equivalent as twisted links*, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), no. 5, 2273–2285.

[16] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. 20 (1999), no. 7, 663–690.

[17] L. H. Kauffman, *A self-linking invariant of virtual knots*, Fund. Math. 184 (2004), 135–158.

[18] L. H. Kauffman, *An affine index polynomial invariant of virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications 22 (2013), no. 4, 1340007 (30 pages).

[19] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, J. Knot Theory Ramifications 17 (2008), no. 11, 1311–1326.

[20] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, Y. Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, J. Knot Theory Ramifications 21 (2012), no. 10, 1250095 (18 pages).

[21] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), 531–542.

[22] S. Satoh and K. Taniguchi, *The writhe of a virtual knot*, Fundamenta Mathematicae 225 (2014), no. 1, 327–341.

[23] R. Shinjo, Lee-Jin の結果の空間グラフの正則図への拡張について, 早稲田大学教育学部学術研究 (数学編) 53 (2005), 67 – 71.

Various Notions of Tangent Spaces in Diffeology

多賓 雅樹 (東大数理・JSPS 特別研究員 DC1)*

1 導入と diffeology の定義

本稿では，diffeological space 上の接空間のいくつかの構成を概説する．通常の可微分多様体では，接ベクトルは曲線の速度としても，関数環上の微分作用素としても定義でき，どちらも同じ接空間を与える．diffeological space の圏では，この二つの見方から得られる接空間が一般には一致しないことが，Christensen–Wu [CW16] により知られている．著者はこの現象をさらに押し進め，多様体上の接空間関手の diffeological space への拡張が非可算無限個存在することを示した [Tah25]．本稿の目的は，著者の一連の論文 [Tah26a, Tah26b, Tah26c, Tah25] に基づき，この非一意性が単なる病理ではなく，diffeological space の幾何を反映する構造であることを，具体例に沿って説明することである．

まず diffeology とは何かを説明する．多様体の圏は，商や部分集合，写像空間を取る操作について閉じていない．例えば多様体を群作用で割った軌道空間や，多様体の間の滑らかな写像全体の空間は，一般にはもはや多様体ではない．diffeological space は，Souriau [Sou80] により 1980 年頃に導入された多様体の一般化であり，こうした対象にも「滑らかさ」の構造を直接与えることができる．多様体がチャート，すなわち $\mathbb{R}^n$ の開集合との可逆な対応で記述されるのに対し，diffeology では，$\mathbb{R}^n$ の開集合から集合 X への写像のうちどれを「滑らかなパラメータ付け」と認めるかを，公理を満たすように直接指定する．チャートと異なり可逆性を要求しないため，特異性を持つ空間に対してもそのまま意味を持つ．

定義 1.1. 集合 X 上の *diffeology* とは，各 $n \geq 0$ と $\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対する写像 $p\colon U \to X$ の族 $\mathcal{D}$ であって，次を満たすものをいう．

1. 任意の定数写像 $U \to X$ は $\mathcal{D}$ に属する．
2. $p\colon U \to X$ が $\mathcal{D}$ に属し，$f\colon V \to U$ が通常の意味で滑らかならば，$p \circ f\colon V \to X$ も $\mathcal{D}$ に属する．
3. 写像 $p\colon U \to X$ が，U の開被覆 $\{U_i\}$ 上でそれぞれ $p|_{U_i} \in \mathcal{D}$ を満たすならば，$p \in \mathcal{D}$ である．

$\mathcal{D}$ の元を X の *plot* と呼ぶ．diffeology を備えた集合を *diffeological space* と呼ぶ．

三つの公理は，定数写像は滑らかであること，滑らかな写像との合成で滑らかさが保たれ

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: taho(at)ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は JSPS 科研費 JP24KJ0881 の助成を受けたものです．

ること，滑らかさは局所的に判定できる性質であることを要請している．diffeology の基本事項をまとめた標準的な教科書として [IZ13] を挙げておく．

diffeological space X, Y の間の写像 $F\colon X \to Y$ は，任意の plot $p\colon U \to X$ に対して $F \circ p$ が Y の plot になるとき滑らかであるという．これにより diffeological space の圏 Dflg が得られる．任意の可微分多様体 M は，通常の意味で滑らかな写像 $U \to M$ を plot とすることで diffeological space とみなせる．この対応のもとで写像の滑らかさは通常の意味のそれと一致し，多様体の圏は Dflg の充満部分圏になる．さらに diffeology は商集合，部分集合，写像空間などにも自然に定義されるため，多様体の枠組みを外れる対象を統一的に扱える．

本稿で繰り返し使う代表例は, irrational torus T_α と軌道空間 H_n の二つの商 diffeological space である．どちらも集合や位相空間としては単純に見えるが，diffeology は商写像に由来する滑らかさを記憶している．

例 1.2 (商 diffeology と部分 diffeology)**.** diffeological space X から集合 Y への全射 $q\colon X \to Y$ に対し，q が滑らかになる最小の diffeology（商 diffeology）が Y 上に定まる．具体的には，各点の近傍で q を通して局所的に lift できる写像 $p\colon U \to Y$ 全体が plot となる．また，部分集合 $A \subset X$ には，包含 $A \hookrightarrow X$ が滑らかになる最大の diffeology（部分 diffeology）を入れる．これらは次の普遍性を持つ：商からの写像 $f\colon Y \to Z$ が滑らかであることは $f \circ q$ が滑らかであることと同値であり，部分集合への写像 $g\colon Z \to A$ が滑らかであることは X への写像とみなして滑らかであることと同値である．このとき，例えば平面内の交差 $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid st = 0\}$ に部分 diffeology を入れたものと，二本の直線の原点を貼り合わせた商 diffeological space は，位相空間としては同相であるが，diffeological space としては同型ではない．

例 1.3 (irrational torus)**.** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し，$T_\alpha := \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ は商写像 $\pi_\alpha\colon \mathbb{R} \to T_\alpha$ による商 diffeology を持つ．$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の稠密部分群なので，T_α 上の実数値滑らかな関数はすべて定数である．

例 1.4 (軌道空間 H_n)**.** 標準的な $O(n)$ 作用による軌道空間 $H_n := \mathbb{R}^n/O(n)$ は集合としては $[0, \infty)$ と同一視できるが，diffeology は n を記憶しており，H_n と H_m は $n = m$ のときに限って diffeomorphic である．

最後に，次節以降で用いる構成を三つ準備する．diffeological space X には，すべての plot $p\colon U \to X$ が連続になる最も細かい位相が定まる．これを D-**位相**と呼び，この位相に関する開集合・近傍をそれぞれ D-開集合・D-開近傍と呼ぶ．また，直積集合 $\prod_\alpha X_\alpha$ には，各射影との合成がすべて plot になる写像を plot とする**積** *diffeology* が入る．さらに，滑らかな写像全体の集合 $C^\infty(X, Y)$ には，付随する写像 $(u, x) \mapsto p(u)(x)$ が $U \times X$ 上で滑らかになるような写像 $p\colon U \to C^\infty(X, Y)$ を plot とする *functional diffeology* が入る．

これにより，関数の空間から $\mathbb{R}$ への線形写像に対して「滑らかである」という条件が意味を持つ．この条件が次節の外部接空間の定義で本質的な役割を果たす．

2 内部接空間と外部接空間

以後，基点付き diffeological space (X, x) を考える．本節では，Christensen–Wu [CW16] により導入された二つの接空間を復習する．一つは「plot から入ってくる速度ベクトル」を集める内部接空間であり，もう一つは「実数値関数を微分する作用素」としての外部接空間である．多様体では両者は一致するが，diffeological space では十分な関数や十分な曲線が存在するとは限らないため，両者はずれる．

定義 2.1 ([CW16])**.** (X, x) に対し，$p(0) = x$ を満たす pointed plot $p\colon (U, 0) \to (X, x)$ 全体を考える．内部接空間は

$$T_x^{\mathrm{int}}(X) := \bigoplus_{p \in \mathrm{Plots}(X,x)} T_0 U_p \Big/ R$$

で定義される．ここで R は，plot の再パラメータ付け $p = q \circ f$ に対し $v \in T_0 U_p$ と $T_0 f(v) \in T_0 U_q$ を同一視する関係で生成される部分空間である．

内部接空間は plot の速度ベクトルを貼り合わせる構成であり，曲線による接ベクトルの一般化である．多様体では座標近傍から来る plot が十分に多いため，通常の接空間と一致する．一方，外部接空間は関数を微分する作用素として定義される．

定義 2.2 ([CW16])**.** $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ を，x の D-開近傍上で定義された滑らかな実数値関数の芽の代数とする．外部接空間は，$\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ から $\mathbb{R}$ への滑らかな線形写像 D で Leibniz 則 $D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g)$ を満たすもの全体である：

$$\hat{T}_x(X) := \left\{ D\colon \mathcal{C}^\infty_{X,x} \to \mathbb{R} \mid D \text{ は滑らかな線形写像で Leibniz 則を満たす} \right\}.$$

ここで芽の代数 $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ は，x の各 D-開近傍 U 上の関数空間 $C^\infty(U, \mathbb{R})$ の functional diffeology から，芽を取る商として誘導される diffeology を持つ．Christensen–Wu は，滑らかさが他の条件から自動的に従うかは不明であると述べ，外部接空間の定義では滑らかさを条件に含めている [CW16, 3.4.2].

この問題は次節に譲り，ここでは内部接空間と外部接空間の違いを見る．基本例においても，両者には大きなずれが見られる [CW16]．irrational torus では，滑らかな実数値関数が定数しかないため外部接空間は消えるが，商写像 $\mathbb{R} \to T_\alpha$ が生き残るため内部接空間は $\mathbb{R}$ になる．逆に H_n の原点では，曲線の速度は商の効果で潰れて内部接空間は消える一方，関数 $q_n\colon H_n \to \mathbb{R}$，$[v] \mapsto \|v\|^2$ を微分する作用素が外部接空間に非自明な方向を与える．このように，内部接空間と外部接空間は異なる種類の滑らかさを抽出している．

内部接空間から外部接空間には自然な写像がある．内部接ベクトル $[p, v] \in T_x^{\mathrm{int}}(X)$ に対し $\eta_x([p, v])([f]) := d_0(f \circ p)(v)$ と置けば，これは関数の芽に作用する滑らかな微分作用

素，すなわち外部接ベクトルを与える [CW16]．多様体ではこの写像は同型であるが，一般にはそうではない．

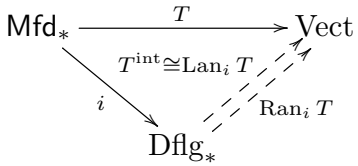
定義 2.3 ([Vin08, Tah25])**.** 自然な写像 η_x の像として定まる空間 $\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X) := \mathrm{Im}(\eta_x)$ を *Vincent* **型接空間**と呼ぶ．

これは「曲線から来て，かつ実数値関数で検出できる」方向だけを残す構成であり，Vincent [Vin08] による構成の再定式化である [Tah25]．定義から $\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X) \cong T_x^{\mathrm{int}}(X)/\ker \eta_x$ かつ $\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X) \subset \hat{T}_x(X)$ であるため，Vincent 型接空間は内部接空間と外部接空間の中間に位置するものとみなせる．

基本例での振る舞いを表にまとめる．ここで $\mathbb{R}^2$ 上の wire diffeology とは，滑らかな曲線 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 全体が生成する diffeology である．

(X, x)	$T_x^{\mathrm{int}}(X)$	$\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X)$	$\hat{T}_x(X)$
n 次元多様体	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$
irrational torus T_α	$\mathbb{R}$	0	0
軌道空間 H_n の原点	0	0	$\mathbb{R}$
wire diffeology on $\mathbb{R}^2$	無限次元	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$

圏論的には，内部接空間は古典的接空間関手の左 Kan 拡張として特徴付けられることが知られている [CW16].



では，外部接空間は右 Kan 拡張として得られるだろうか．これが次節の出発点となる．

3 外部接空間の変種と右 Kan 拡張

本節の内容は著者の論文 [Tah26a, Tah26b] による．

前節末の問いには，実は次の形で答えることができる．外部接空間の定義を少し修正した空間 $\hat{\mathbb{T}}_x^R(X) := \mathrm{Der}_x(C^\infty(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$，すなわち大域的な関数環上の（滑らかとは限らない）微分作用素全体の空間が，通常の基点付き写像を射とする圏 Dflg_* 上の右 Kan 拡張になることが示せるのである [Tah26a]．ここで施した微修正は，二つの軸に分解できる．すなわち，微分作用素の定義域を芽の代数 $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ から functional diffeology を入れた大域的な関数環 $C^\infty(X, \mathbb{R})$ に取り替えたこと（局所か大域か）と，微分作用素から滑らかさの条件を外したこと（滑らかか代数的か）である．

定義 3.1 ([Tah26a])**.** 二軸の選択に応じて，次の四つの空間が定まる．

定義域	滑らかな微分作用素	代数的微分作用素
芽の代数 $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$	外部接空間 $\hat{T}_x(X)$	**右側接空間** $\hat{T}^R_x(X)$
関数環 $C^\infty(X,\mathbb{R})$	**大域外部接空間** $\hat{\mathbb{T}}_x(X)$	**大域右側接空間** $\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)$

Christensen–Wu の外部接空間は左上の局所・滑らか版であり，以後は右側接空間が中心的な役割を果たす．これら四つの変種がどのようなときに差を持つのかを知ることが，次の目標になる．

まず，局所か大域かの軸を考える．右 Kan 拡張として得られた $\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)$ は，接空間に期待される局所性を一般には満たさない．実際，座標軸の交差 $\{st=0\}\subset\mathbb{R}^2$ の x 軸上の原点以外を一点 x_0 につぶした商空間 X では，$\{x_0\}$ が D-開な一点集合であるにもかかわらず，大域的な関数環が商空間全体の制約を通して y 軸方向を検出するため，$\hat{\mathbb{T}}^R_{x_0}(X)\cong\mathbb{R}$ となる．bump 関数が十分に存在する空間（smoothly regular な空間）ではこの現象は起こらず $\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)\cong\hat{T}^R_x(X)$ が成り立つが [Tah26a]，一般には大域的な微分作用素は局所的なデータに落ちない．

そこで，射を「基点近傍で定義された滑らかな写像の芽」に取り替える．$\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ を，対象は基点付き diffeological space，射は基点を保つ滑らかな写像の芽 $[f,U]_x\colon (X,x)\to(Y,y)$ である圏とする．この圏では D-開近傍の包含 $(U,x)\hookrightarrow(X,x)$ が同型射になるため，$\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ 上の関手は自動的に局所性を持つ．

定理 3.2 ([Tah26a])**.** 古典的接空間関手 $T\colon \mathrm{Mfd}^{\mathrm{loc}}_*\to\mathrm{Vect}$ を包含 $i\colon \mathrm{Mfd}^{\mathrm{loc}}_*\hookrightarrow\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ に沿って右 Kan 拡張すると，右側接空間関手が得られる：

$$\mathrm{Ran}_i\, T(X,x)\cong\hat{T}^R_x(X).$$

証明の鍵は Leibniz 則の出所である．右 Kan 拡張の元は，各滑らかな芽 $g\colon(X,x)\to(M,g(x))$ に対して古典的接ベクトル $v_g\in T_{g(x)}M$ を割り当てる，後合成と整合的な族である．実数値関数の芽 f に対して $D(f):=v_f\in T_{f(x)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ と定め，$(f,g)\colon X\to\mathbb{R}^2$ と積写像 $\mu\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に整合性を適用すると，$\mathbb{R}^2$ 上の古典的な積の微分公式から D の Leibniz 則 $v_{fg}=g(x)v_f+f(x)v_g$ が従う．逆向きには，右側接ベクトルを各芽に沿って押し出すことで整合的な族が復元される．

以上より，先の表の右の列に並ぶ二つの代数的変種は，それぞれ圏 Dflg_* と $\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ 上の右 Kan 拡張として特徴付けられたことになる．残るのは，外部接空間と右側接空間の違い，すなわち微分作用素に滑らかさを課すかどうかである．実際，滑らかさは他の条件から自動的には従わない．

定理 3.3 ([Tah26b])**.** $X=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ を可算個の直線の bouquet とし，0 をその貼り合わせ点とする．このとき

$$\hat{T}_0(X)\cong\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\qquad \hat{T}^R_0(X)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\right).$$

特に $\hat{T}_0(X) \subsetneq \hat{T}_0^R(X)$ である．

貼り合わせ点での関数の芽 f は各枝上の芽の列とみなせるので，枝ごとの一階微分の列 $\mathbf{d}f := \big(f_1'(0), f_2'(0), \ldots\big) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ が定まり，右側接ベクトルはちょうど $\mathbf{d}f$ に代数的な線形汎関数を作用させるものとして書ける．一方，積 diffeology を持つ $\prod_n \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への滑らかな線形写像は，有限個の座標にしか依存しないことが示せる．したがって滑らかな微分作用素の全体は $\bigoplus_n \mathbb{R}$ に対応する．例えば，有限支持列の上では消えるが $(1,1,1,\ldots)$ では非零になる代数的汎関数は，Leibniz 則を満たすが滑らかでない微分作用素を与える．直感的には，滑らかな微分作用素は有限個の枝にしか依存できないが，代数的な微分作用素は無限個の枝に同時に依存できるのである．

4　pencil diffeology と方向ごとの一階微分

前節の bouquet は，可算個の直線を一点で貼り合わせた空間であった．本節で扱う pencil diffeological space は，非滑らかな微分作用素の研究との関連で Iglesias-Zemmour が著者に示唆した空間であり，平面 $\mathbb{R}^2$ の原点を通る非可算個の直線が bouquet の枝の役割を果たす [Tah26c]．そこでも同じ現象が起こり，さらにその Zariski 余接空間の記述には位相的な条件が現れる．

定義 4.1 (pencil diffeology，[Tah26c])．*pencil diffeological space* P とは，集合 $\mathbb{R}^2$ に次の diffeology を入れたものである．写像 $p\colon U \to P$ が plot であるとは，各 $u_0 \in U$ に対しある開近傍 $V \subset U$ が存在して，次のいずれかが成り立つことをいう．

1. $p(u_0) \neq 0$ であり，$p|_V \colon V \to \mathbb{R}^2$ は通常の意味で滑らかである．
2. $p(u_0) = 0$ であり，原点を通るある直線 $L \subset \mathbb{R}^2$ が存在して，$p(V) \subset L$ かつ $p|_V \colon V \to L$ は通常の意味で滑らかである．

つまり，原点の外では通常の平面と同じだが，原点を通る滑らかさは，原点を通る直線族（pencil）に沿ってのみ検出される．このとき，関数 F が P 上滑らかであることは，原点の外で通常の意味で滑らかであり，かつ原点を通る各直線への制限が滑らかであることと同値になる．例えば $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$（ただし $f(0,0)=0$）は P 上滑らかであるが，通常の意味では原点で滑らかでない．

$\mathcal{C}^\infty_{P,0}$ を原点における滑らかな関数の芽の代数，$I_0(P)$ を原点で消える芽のなすイデアルとし，*Zariski* **余接空間** $E_0(P) := I_0(P)/I_0(P)^2$ を考える（商 diffeology を入れる．多様体では通常の余接空間と一致する）．右側接空間と外部接空間はそれぞれ $E_0(P)$ の代数的双対・滑らかな双対として書けるので [CW16]，以下ではこの一つの空間を調べればよい．$f \in I_0(P)$ は原点を通る各直線 $L \in \mathbb{RP}^1$ に沿って通常の微分 $d_0(f|_L) \in L^*$ を持つので，

方向ごとの一階微分をまとめた線形写像

$$\tilde{J}\colon I_0(P) \to \prod_{L\in\mathbb{RP}^1} L^*, \qquad \tilde{J}(f)_L = d_0(f|_L)$$

が定まる．

定理 4.2 ([Tah26c])**.** $\tilde{J}$ は滑らかな線形写像であり，

$$\ker \tilde{J} = I_0(P)^2$$

が成り立つ．特に $\tilde{J}$ は単射な滑らかな線形写像

$$J\colon E_0(P) \hookrightarrow \prod_{L\in\mathbb{RP}^1} L^*$$

を誘導する．

すなわち，pencil diffeology の Zariski 余接空間は方向ごとの一階微分で完全に決まる．次の問題は，どのような微分の族がここで実現されるかである．単位ベクトル $v \in S^1$ に対し $h(v) := \tilde{J}(f)_{\mathbb{R}v}(v)$ と置くと h は S^1 上の奇関数になり，この対応でベクトル空間 $\prod_L L^*$ は S^1 上の奇関数全体 $\mathrm{Odd}(S^1)$ と同一視できる．通常の $\mathbb{R}^2$ の滑らかな芽から得られる h は，一つの線形汎関数の制限 $h(v) = \langle a, v\rangle$ の形に限られ，特に連続である．可算ブーケでは各枝の一階微分は独立であり，任意の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ が実現される．pencil は両者の中間であり，実現される h は次の弱い連続性でちょうど特徴付けられる．

定義 4.3. 関数 $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$ が **σ-連続**であるとは，S^1 の閉集合の列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$S^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ かつ各 $h|_{C_n}$ が連続であることをいう．σ-連続な奇関数全体のなすベクトル空間を $\mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$ と書く．

定理 4.4 ([Tah26c])**.** 上の同一視のもとで

$$J(E_0(P)) = \mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$$

が成り立つ．

σ-連続な関数は連続とは限らないが，常に Borel 可測である．Zariski 余接空間という微分幾何的な不変量の記述に，このような位相的な条件が現れるのが pencil の特徴である．

例 4.5. $e_1 = (1,0)$ とし，$h(\pm e_1) = \pm 1$，それ以外の点で $h = 0$ となる奇関数 h を考える．h は連続ではないが，$\{\pm e_1\}$ とそれを避ける閉集合たちに分ければ σ-連続である．実際にこの h を実現するには，偶関数 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ で $\rho(0) = 1$，$|u| \geq 1$ で $\rho(u) = 0$ となるものを取り，$F(x,y) = x\,\rho\big(y/(x^2+y^2)\big)$（ただし $F(0,0) = 0$）と置けばよい．F は P 上滑らかであり，その方向ごとの一階微分はちょうど h になる．

この記述から，原点における外部接空間や右側接空間も計算できる．

定理 4.6 ([Tah26c])**.** 同一視 $E_0(P) \cong \mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$ のもとで，$E_0(P)$ 上の滑らかな線形汎関数は評価写像の有限線形結合に限る：

$$\mathrm{Hom}^\infty_{\mathbb{R}}(E_0(P), \mathbb{R}) = \mathrm{span}\{\mathrm{ev}_v \mid v \in S^1\}.$$

したがって自然な同型

$$\hat{T}_0(P) \cong \bigoplus_{L \in \mathbb{RP}^1} L, \qquad \hat{T}^R_0(P) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Odd}_\sigma(S^1), \mathbb{R}\big)$$

があり，特に $\hat{T}_0(P) \subsetneq \hat{T}^R_0(P)$ が成り立つ．

外部接空間が「方向ごとの微分」の有限和で尽くされるのに対し，右側接空間は $\mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$ の代数的双対全体であり，はるかに大きい．bouquet では可算個の枝が滑らかさと代数の差を生んだが，pencil では平面上の非可算個の方向が同じ役割を果たしている．

5 test space による無限個の接空間関手

最後に，多様体上の古典的接空間関手を diffeological space へ拡張する方法が無限個存在するという著者の結果を説明する [Tah25]．ここで **接空間関手** とは，$\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ 上の関手 $F\colon \mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_* \to \mathrm{Vect}$ であって，$\mathrm{Mfd}^{\mathrm{loc}}_*$ への制限が古典的接空間関手と同型になるものを指す．内部接空間，外部接空間，右側接空間，Vincent 型接空間はいずれもその例であり，多様体上では一致するが，特異な空間上では互いに異なる．では，このような拡張はどのくらい存在するのだろうか．

出発点は第 2 節で定義した Vincent 型接空間 $\hat{T}^{\mathrm{Vin}}_x(X) = \mathrm{Im}(\eta_x)$ である．この構成では，$\mathbb{R}$ が「X を測る試験空間」として二重に使われている．一つは X から $\mathbb{R}$ への関数で内部接ベクトルを識別する方向，もう一つは $\mathbb{R}$ から X への曲線で右側接ベクトルを生成する方向である．この $\mathbb{R}$ の役割を，一般の基点付き diffeological space (Y, y) に置き換えるのが次の構成である．

定義 5.1 ([Tah25])**.** 基点付き diffeological space (Y, y) を固定する．

1. (Y, y)-**内部型接空間**を，$T^{\mathrm{int}}_x(X)$ の商

$$T^{(Y,y)}_x(X) := T^{\mathrm{int}}_x(X) \Big/ \sim_Y$$

として定義する．ここで $v \sim_Y w$ は，任意の芽 $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ に対して

$$T^{\mathrm{int}}(f)(v) = T^{\mathrm{int}}(f)(w)$$

が成り立つことを意味する．

2. (Y, y)-**右側型接空間**を，$\hat{T}^R_x(X)$ の部分空間

$$\hat{T}^{(Y,y)}_x(X) := \Big\langle \hat{T}^R(f)(D) \;\Big|\; f\colon (Y, y) \to (X, x),\ D \in \hat{T}^R_y(Y) \Big\rangle$$

として定義する．

$(Y, y) = (\mathbb{R}, 0)$ とすれば，どちらも Vincent 型接空間と一致する．さらに，test space が非自明な接ベクトルを一つでも持てば，多様体上では通常の接空間が復元される．

命題 5.2 ([Tah25])**.** M を滑らかな多様体，$x \in M$ とする．

1. $T_y^{\mathrm{int}}(Y) \neq 0$ ならば $T_x^{(Y,y)}(M) \cong T_x M$ である．
2. $\hat{T}_y^R(Y) \neq 0$ ならば $\hat{T}_x^{(Y,y)}(M) \cong T_x M$ である．

したがって，これらは古典的接空間関手の拡張を与える．

ここで重要なのは，test space (Y, y) の幾何をほとんど仮定していないことである．Y として商空間や強い特異性を持つ diffeological space を自由に使えるという自由度が，次の二つの無限族を生み出す．第一の族は irrational torus を用いる．

定理 5.3 ([Tah25])**.** $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とし，$x \in T_\alpha$, $y \in T_\beta$ とする．このとき

$$T_x^{(T_\beta, y)}(T_\alpha) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \alpha = \dfrac{a + b\beta}{c + d\beta} \text{ となる } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ が存在するとき,} \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

したがって (T_β, y) を動かすと，非同型な接空間関手が非可算個得られる．

背景には，irrational torus の間の滑らかな写像の剛性がある．上の条件はある非定数な滑らかな写像 $T_\alpha \to T_\beta$ の存在と同値である．実際，非定数写像 $T_\alpha \to T_\beta$ は $\mathbb{R}$ 上のアファイン写像から降りてくるため，その存在条件が一次分数変換の形で書ける．この同値関係は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上に非可算個の同値類を持つので，非同型な関手も非可算個得られる．

第二の族は，軌道空間 $H_n = \mathbb{R}^n / O(n)$ を用いる右側型の構成である．

定理 5.4 ([Tah25])**.** $m, n \geq 1$ とする．このとき

$$\hat{T}_0^{(H_m, 0)}(H_n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & m \leq n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

したがって $\{\hat{T}^{(H_m,0)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は互いに同型でない接空間関手を与える．

$m \leq n$ のときは，標準的な埋め込み $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ の誘導する $\bar{\iota}\colon H_m \to H_n$ が $q_n \circ \bar{\iota} = q_m$ を満たし，右側接ベクトルを非零のまま押し出す．一方 $m > n$ のときは，任意の滑らかな芽 $(H_m, 0) \to (H_n, 0)$ について，右側接ベクトルが検出する二次の項が階数の制約で消える．この意味で，$(H_m, 0)$-右側型接空間は軌道空間の特異性の「鋭さ」を測っている．

以上の二つの族を合わせると，diffeological space 上の接空間関手は，単に複数あるだけでなく，非可算個の非同型な例を持つことが分かる．

おわりに

diffeological space 上の接空間は一意ではなく，その分岐は次の三つの軸で整理できる．

- 曲線か関数か：内部接空間と外部接空間の違いであり，T_α と H_n が対照的な例を与える．
- 局所か大域か：右 Kan 拡張は大域的な圏では局所性を失い，芽の圏 $\mathrm{Dflg}_*^{\mathrm{loc}}$ に移ることで右側接空間が得られる．
- 滑らかか代数的か：bouquet や pencil の例が示すように，Leibniz 則だけからは滑らかさは従わない．

さらに test space の選択により，古典的接空間関手の拡張は非可算個存在する．

この非一意性は，不便さというより，対象に応じて異なる微分的不変量を設計できる柔軟性と捉えられる．実際，T_α の特異性は内部型で，H_n の特異性は右側型でよく検出され，pencil の Zariski 余接空間には σ-連続性という位相的な概念が現れた．接空間関手の分類，特異性に応じた test space の選択，接束や高階の接構造への拡張などが今後の課題である．講演では，これらの結果をできるだけ具体例に沿って説明する予定である．

参考文献

[CW16] J. Daniel Christensen and Enxin Wu, Tangent spaces and tangent bundles for diffeological spaces, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **57** (2016), no. 1, 3–50.

[IZ13] Patrick Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 185, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[Sou80] J.-M. Souriau, Groupes différentiels, in *Differential geometrical methods in mathematical physics*, Lecture Notes in Math., vol. 836, Springer, Berlin, 1980, pp. 91–128.

[Tah25] Masaki Taho, Infinitely Many Tangent Functors on Diffeological Spaces, arXiv:2511.17871, 2025.

[Tah26a] Masaki Taho, Tangent spaces of diffeological spaces and their variants, *Topology Appl.* **381** (2026), 109741.

[Tah26b] Masaki Taho, Diffeological Spaces with a Non-Smooth Derivation, *Topology Appl.* **390** (2026), 109889.

[Tah26c] Masaki Taho, The Zariski Cotangent Space at the Origin of the Pencil Diffeological Space, arXiv:2608.01687, 2026.

[Vin08] Martin Vincent, *Diffeological differential geometry*, Master's thesis, University of Copenhagen, 2008.

正則半単純 Hessenberg 多様体の座標環と正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環

堀口　達也（明石工業高等専門学校）

1. 序文

Hessenberg 多様体は，1980 年代後半頃に導入された旗多様体の代数的部分多様体であり ([9, 10])，(1) Springer fiber (Weyl 群の幾何学的表現と関連 [23, 24])，(2) Peterson 多様体 (旗多様体の量子コホモロジーと関連 [18, 19, 20])，(3) weight polytope に付随するトーリック多様体 ([9])，を特別な場合として含む．

Hessenberg 多様体の中で「正則冪零型」と「正則半単純型」と呼ばれる二種類の重要なクラスがある．正則冪零 Hessenberg 多様体は，Peterson 多様体と旗多様体を自然に繋ぐもので，そのコホモロジー環は他分野における超平面配置と関連している ([5])．具体的に述べると，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環は，イデアル配置と呼ばれる超平面配置の対数微分加群の言葉を用いて記述することができる．一方，正則半単純 Hessenberg 多様体は，weight polytope に付随するトーリック多様体と旗多様体を自然に繋ぐもので，そのコホモロジー環の上に Weyl 群の作用がある ([25])．A 型の場合，正則半単純 Hessenberg 多様体のコホモロジー環上の対称群の作用は，他分野におけるグラフ理論の彩色対称関数と関係している ([8, 21])．さらに，正則半単純 Hessenberg 多様体のコホモロジー環上の Weyl 群作用の不変部分環をとると，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と環同型になることも知られている ([2, 5])．

本稿では，A 型の場合に得られた正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と正則半単純 Hessenberg 多様体の座標環の関係に関する結果 ([15]) について紹介する．A 型正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示は，[2] によって与えられた．具体的には，各 $i \geq j \geq 1$ に対して，多項式 $f_{i,j}$ を導入し，これらの多項式 $f_{i,j}$ を用いて，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示が記述される．これらの多項式 $f_{i,j}$ を Fomin–Gelfand–Postnikov の手法 ([11]) を用いて量子化すると，$f_{i,j}$ の量子化 $F_{i,j}$ たちは，正則半単純 Hessenberg 多様体の単位元周りの開集合における座標環と関連することが分かった．特に，正則半単純 Hessenberg 多様体の単位元周りの開集合における座標環において，“量子パラメータを忘れる”と，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環が得られる．

本稿ではまず (A 型)Hessenberg 多様体の基本的な性質について 2 節で紹介し，[2] で与えられた正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示を 3 節で説明する．4 節では，旗多様体の量子コホモロジー環および Fomin–Gelfand–Postnikov によって導入された量子化写像を説明する．その後，5 節で，[16] で与えられた正則冪零 Hessenberg 多様体の単位元周りの開集合における座標環の説明を行い，6 節で主結果の説明をする．

2. A 型 Hessenberg 多様体

本稿を通して，以下の記号を用いる．

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$$

(A 型) 旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列全体からなる．

$$Fl(\mathbb{C}^n) := \{V_\bullet = (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \text{ for all } i \in [n]\}$$

A 型 Hessenberg 多様体は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の代数的部分多様体であり，線形写像と Hessenberg 関数の 2 つのデータから定まる．まずは Hessenberg 関数の定義から始める．

定義 2.1. 関数 $h : [n] \to [n]$ が次の 2 条件

(i) $h(1) \leq h(2) \leq \ldots \leq h(n)$
(ii) 各 $j \in [n]$ に対して，$h(j) \geq j$

を満たすとき，h を **Hessenberg 関数**という．Hessenberg 関数 h は各値を並べて，

$$h = (h(1), h(2), \ldots, h(n))$$

と表される．

Hessenberg 関数 $h : [n] \to [n]$ の**双対** $h^* : [n] \to [n]$ を

$$h^*(i) = |\{j \in [n] \mid h(j) \geq n + 1 - i\}| \quad \text{for } i \in [n] \tag{2.1}$$

で定義する．$n \times n$ の格子を用意し，各 j 列目に上から $h(j)$ 個の箱を塗ることで，Hessenberg 関数 h はしばしば視覚化される．このとき，その双対 h^* は，h で表される箱の集まりを反対角線に関して折り返すことで視覚化される．

例 2.2. $n = 5$ とする．$h = (3, 3, 4, 5, 5)$ は Hessenberg 関数であり，その双対は $h^* = (2, 3, 5, 5, 5)$ である．これらの Hessenberg 関数は図 1 のように視覚化される．

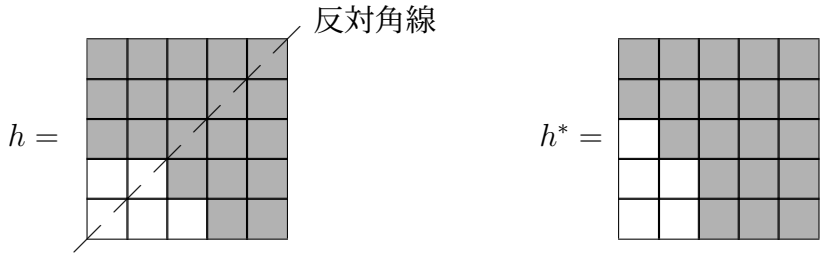


図 1. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ と $h^* = (2, 3, 5, 5, 5)$ に対応する箱の集まり

定義 2.3. $X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を線形写像，$h : [n] \to [n]$ を Hessenberg 関数とする．このとき，X と h に付随する **Hessenberg 多様体** $\mathrm{Hess}(X, h)$ は

$$\mathrm{Hess}(X, h) = \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for any } i \in [n]\}$$

で定義される．

X が零写像または $h=(n,n,\dots,n)$ のとき，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は全体の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ と一致することが定義から分かる．X を冪零写像，Hessenberg 関数を $h=(1,2,\dots,n)$ に取った Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ を **Springer fiber** という．Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の代数的な部分多様体である．そのことを見るために，旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ が等質空間 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ と同一視されることを思い出しておく．ここで，B は一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の中の上三角行列全体からなる部分群を表す．同一視 $Fl(\mathbb{C}^n)\cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ のもと，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は次のように書ける．

$$\mathrm{Hess}(X,h)=\{gB\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}Xg\in H\} \tag{2.2}$$

ここで，H は Hessenberg 関数 h に付随する Hessenberg 空間[1]と呼ばれ，次で定義される $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$（$n$ 次正方行列全体）の部分空間である．

$$H:=\{(a_{ij})\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij}=0 \text{ if } i>h(j)\} \tag{2.3}$$

U を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の lower unipotent group とする．

$$U=\left\{ g=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ x_{21} & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ x_{n1} & \cdots & x_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\} \cong \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tag{2.4}$$

このとき，対応 $U\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B;\ g\mapsto gB$ により，U は単位元 $eB\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ の周りの旗多様体の開集合と自然に思える．S_n を n 次対称群とし，$w\in S_n$ を置換行列と思うと，$\{wU\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B \mid w\in S_n\}$ は旗多様体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ の開被覆をなす．(2.2) と (2.3) より，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は局所的に定義方程式

$$(g^{-1}Xg)_{ij}=0 \quad \text{if } i>h(j) \text{ for all } g\in wU \tag{2.5}$$

で定義される旗多様体の代数的な部分多様体である．

例 2.4. $n=5$ とし，Hessenberg 関数 $h=(3,3,4,5,5)$ を考える．このとき，h に付随する Hessenberg 空間 H は次で与えられる．

$$H=\left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & *\\ 0 & 0 & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_5(\mathbb{C}) \;\middle|\; * \text{ は任意の複素数} \right\}$$

例えば，単位元周りの開集合 U 上では，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は

$$(g^{-1}Xg)_{ij}=0 \quad \text{for } (i,j)=(5,1),(4,1),(5,2),(4,2),(5,3)$$

で定義される．ここで，$g\in U$ は (2.4) の形で与えられる．

---

[1] 一般に，Hessenberg 空間は B のリー環 $\mathfrak{b}$ を含む $\mathfrak{b}$-submodule として定義され，Hessenberg 空間全体と Hessenberg 関数全体は，(2.3) により，1 対 1 に対応している．

任意の $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$\mathrm{Hess}(X,h) \cong \mathrm{Hess}(gXg^{-1},h); V_\bullet \mapsto gV_\bullet$$

であるので，X をジョルダン標準形と仮定してもよい．

以下，線形写像 X を次の 2 つの行列に取って考える．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$$

Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ と $\mathrm{Hess}(S,h)$ をそれぞれ**正則冪零 Hessenberg 多様体**，**正則半単純 Hessenberg 多様体**という．これらの基本的な性質について以下では説明をしていく．

2.1. **正則冪零 Hessenberg 多様体** $\mathrm{Hess}(N,h)$**.**

$h = (2,3,4,\ldots,n,n)$ のとき，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ を**Peterson 多様体**という．Peterson 多様体は，5 節で説明するように，旗多様体の量子コホモロジー環と関連している ([18, 19, 20])．また，$n \geq 3$ のとき，Peterson 多様体は特異であることが知られている ([17, 18])．旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は $h = (n,n,\ldots,n)$ とする $\mathrm{Hess}(N,h)$ と思えたので，正則冪零 Hessenberg 多様体は Peterson 多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える．正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ の幾何学的性質について述べる．

命題 2.5 ([3, 6, 22])**.** $h : [n] \to [n]$ を Hessenberg 関数とする．このとき，次が成立．

(1) 正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$ で与えられる．
(2) すべての正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ は既約である．
(3) 任意の $j \in [n-1]$ に対して，$h(j) > j$ と仮定する．このとき，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ が正規である必要十分条件は，Hessenberg 関数 h が次の条件を満たすことである．

$$h(i-1) > i \text{ or } h(i) > i+1 \text{ for all } 1 < i < n-1$$

注意 2.6. 命題 2.5 (1) における $\mathrm{Hess}(N,h)$ の複素次元 $\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$ は，Hessenberg 関数 h を箱の集まりと思うと，対角線より真に下に位置する箱の総数を表している．例えば，Hessenberg 関数が $h = (3,3,4,5,5)$ の場合，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ の複素次元は 5 である（図 2 参照）．

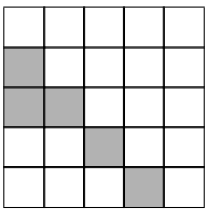


図 2. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hess}(N, h = (3,3,4,5,5))$ を表す箱の集まり

2.2. **正則半単純 Hessenberg 多様体** $\mathrm{Hess}(S,h)$**.**

$a_1,\dots,a_n$ を相異なる実数とし，$n!$ 個の点 $(a_{w(1)},\dots,a_{w(n)})\in\mathbb{R}^n$ $(w\in S_n)$ の凸包を **permutohedron** という．$h=(2,3,4,\dots,n,n)$ のとき，正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は，permutohedron に付随する滑らかな射影トーリック多様体であることが知られている ([9])．このトーリック多様体は **permutohedral 多様体**と呼ばれている．$h=(n,n,\dots,n)$ とする $\mathrm{Hess}(S,h)$ も旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ と思えたので，正則半単純 Hessenberg 多様体は permutohedral 多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える．正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ の幾何学的性質について纏める．

命題 2.7 ([6, 9])**.** $h:[n]\to[n]$ を Hessenberg 関数とする．このとき，次が成立．

(1) 正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は等次元的であり，その複素次元は $\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$ で与えられる．

(2) 正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ が連結である必要十分条件は，Hessenberg 関数 h が次の条件を満たすことである．

$$h(j)>j \text{ for all } j\in[n-1] \tag{2.6}$$

(3) すべての正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は滑らかである．

注意 2.8. 命題 2.5 (1) と命題 2.7 (1) より，任意の Hessenberg 関数 h に対して，

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hess}(N,h)=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hess}(S,h)$$

が成立．

3. コホモロジー環

この節では [2] で与えられた正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジー環の明示的表示について紹介する．よく知られているように，旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ のコホモロジー環の明示的表示は

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]/(e_1^{(n)},\dots,e_n^{(n)}) \tag{3.1}$$

で与えられる ([7])．ここで，各 x_i は次数 2 の元で，$e_k^{(n)}$ は変数を $x_1,\dots,x_n$ とする次数 $2k$ の基本対称式を表す．

$$e_k^{(n)}=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

[2] において，多項式 $f_{i,j}$ $(i\ge j\ge 1)$ を次の漸化式

$$\begin{aligned} f_{j,j}&=x_1+\cdots+x_j;\\ f_{i,j}&=f_{i-1,j-1}+(x_j-x_i)f_{i-1,j}\quad\text{for } i>j \end{aligned} \tag{3.2}$$

で導入した．ここで，任意の $*$ に対して，$f_{*,0}=0$ と約束する．この漸化式は

$$f_{i,j}=\sum_{k=1}^{j}\left(\prod_{\ell=j+1}^{i}(x_k-x_\ell)\right)x_k \tag{3.3}$$

と明示的に解くことができる．ここで，$i=j$ のときは $\prod_{\ell=j+1}^{i}(x_k-x_\ell)=1$ と約束する．これらの多項式を用いて，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジー環を次のように記述した．

定理 3.1 ([2])**.** $h : [n] \to [n]$ を任意の Hessenberg 関数とし，$\mathrm{Hess}(N,h)$ を $Fl(\mathbb{C}^n)$ の中の正則冪零 Hessenberg 多様体とする．このとき，包含写像 $\mathrm{Hess}(N,h) \subset Fl(\mathbb{C}^n)$ が導く制限写像 $H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$ は全射であり，次の次数付き $\mathbb{Q}$-代数としての同型が成立．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(f_{h(1),1}, f_{h(2),2},\dots,f_{h(n),n}) \tag{3.4}$$

注意 3.2. (3.4) に関する注意を述べておく．

(1) 明示的表示 (3.4) に現れる x_i は (3.1) に現れる x_i の制限写像 $H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$ による像を表している．
(2) $h = (n,n,\dots,n)$ の場合，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ は全体の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ と一致した．このとき，(3.4) の右辺に現れるイデアル $(f_{h(1),1}, f_{h(2),2},\dots,f_{h(n),n})$ は $(e_1^{(n)},\dots,e_n^{(n)})$ と $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ では一致するが，$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ では一致しない．特に，(3.4) は $\mathbb{Z}$-係数では成立しないことが分かる．
(3) Peterson 多様体の（有理数係数）コホモロジー環の明示的表示は [12] により与えられており，その表示は (3.4) から復元できる．また，Peterson 多様体の整数係数のコホモロジー環は [4] で与えられている．

漸化式 (3.2) を用いると，(3.4) は次のように書き直せる．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(f_{i,j} \mid i \geq h(j)) \tag{3.5}$$

この表示は，無駄な生成元を含んでいるが，6 節における主結果の形と比較しやすい形になっている．

次に，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ と正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ のコホモロジー環が関連する結果について紹介する．正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ のコホモロジー環の上には対称群 S_n の作用がある ([25])．この対称群 S_n の作用に関する不変部分環を取ることで，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と同型になるという結果が得られた．

定理 3.3 ([2])**.** 任意の Hessenberg 関数 h に対して，次の次数付き $\mathbb{Q}$-代数としての同型が成立．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q})^{S_n}$$

ここで，右辺は S_n 作用による $H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q})$ の不変部分環を表す．

4. 量子化写像

旗多様体の量子コホモロジー環は $\mathbb{Z}$-加群として

$$QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[q_1,\dots,q_{n-1}] \otimes H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$$

と定義され，$QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$ 上の積構造は，$H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$ 上の通常のカップ積を量子パラメータ $q_1,\dots,q_{n-1}$ で変形したものである．旗多様体の量子コホモロジー環の明示的表示は，(3.1) の量子アナログとして Givental–Kim と Ciocan-Fontanine に

よって，以下のように与えられている．まず，次の行列を考える．

$$M_n = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & x_{n-1} & q_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{pmatrix}$$

量子基本対称式 $E_i^{(n)}$ を，λ を変数とする M_n の特性多項式の λ^{n-i} の係数に $(-1)^i$ をかけたもので定義する．すなわち，I_n を n 次単位行列とすると，

$$\det(\lambda I_n - M_n) = \lambda^n - E_1^{(n)}\lambda^{n-1} + E_2^{(n)}\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n E_n^{(n)}$$

である．定義より，$q_1 = \cdots = q_{n-1} = 0$ とすると，量子基本対称式 $E_i^{(n)}$ は通常の基本対称式 $e_i^{(n)}$ に特殊化されることに注意しておく．各量子パラメータ q_i の次数を 4 とすると，量子基本対称式 $E_i^{(n)}$ は次数 $2i$ の斉次多項式となることに注意しておく．

定理 4.1 ([13, 14])**.** 次の次数付き環としての同型が成立．

$$QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\ldots,E_n^{(n)}) \tag{4.1}$$

注意 4.2. 明示的表示 (4.1) において，$q_1 = \cdots = q_{n-1} = 0$ とすると，(3.1) が得られる．

Fomin–Gelfand–Postnikov は [11] において，多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]$ 上に量子化写像

$$\psi : \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}] \to \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]$$

を定義し，量子シューベルト多項式を次のように導入した．まず，量子化写像の幾何学的意味から説明する．量子化写像 ψ は $\mathbb{Z}[q_1,\ldots,q_{n-1}]$-加群としての同型写像であり，任意の $1 \le i \le k \le n$ に対して，

$$\psi(e_i^{(k)}) = E_i^{(k)}$$

が成立する．量子化写像 ψ は環準同型写像ではないが，イデアル $(e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)})$ をイデアル $(E_1^{(n)},\ldots,E_n^{(n)})$ の上に写す．したがって，ψ が誘導する写像は，幾何学的には，$\mathbb{Z}[q_1,\ldots,q_{n-1}]$-加群としての同型写像

$$\mathbb{Z}[q_1,\ldots,q_{n-1}] \otimes H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$$

を表している．Fomin–Gelfand–Postnikov は，量子化写像の性質を調べ，量子シューベルト多項式を組合せ的に定義した．まず，$i_1,\ldots,i_m$ $(0 \le i_k \le k)$ に対して，

$$e_{i_1,\ldots,i_m} = e_{i_1}^{(1)} \cdots e_{i_m}^{(m)} \tag{4.2}$$

を用意する．これらの多項式は無限変数の多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots]$ の $\mathbb{Z}$-基底をなす．特に，自然な射影 $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)})$ による $e_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ の像たちは，$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)})$ の $\mathbb{Z}$-基底をなす．同様に，

$$E_{i_1,\ldots,i_m} = E_{i_1}^{(1)} \cdots E_{i_m}^{(m)}$$

とおくと，$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}] \to \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)})$ による $E_{i_1,\dots,i_{n-1}}$ の像たちは，剰余環 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)})$ の $\mathbb{Z}[q_1,\dots,q_{n-1}]$-加群としての基底をなす．Fomin–Gelfand–Postnikov は，任意の $1 \le m \le n$ に対して，

$$\psi(e_{i_1,\dots,i_m}) = E_{i_1,\dots,i_m}$$

を示し，この観点から，量子シューベルト多項式を次のように定義した．$w \in S_n$ に付随するシューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w$ を

$$\mathfrak{S}_w = \sum c_{i_1,\dots,i_{n-1}} e_{i_1,\dots,i_{n-1}} \quad (c_{i_1,\dots,i_{n-1}} \in \mathbb{Z})$$

と一意的に表したとき，**量子シューベルト多項式** $\mathfrak{S}_w^q$ を

$$\mathfrak{S}_w^q = \sum c_{i_1,\dots,i_{n-1}} E_{i_1,\dots,i_{n-1}}$$

と定義する．特に，量子シューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w^q$ は，量子化写像 ψ によるシューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w$ の像である．この方法を用いて，(3.3) における多項式 $f_{i,j}$ の量子化を 6 節で定義する．

5. 座標環

Hessenberg 多様体の話に戻る．$h = (2,3,4,\dots,n,n)$ のときの正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ を Peterson 多様体と呼んでいた．ここでは，Peterson 多様体を Pet_n と表すことにする．(2.4) における lower unipotent group U は，旗多様体の単位元周りの開集合と自然に同一視できたことを思い出そう．このとき，Dale Peterson は $\mathrm{Pet}_n \cap U$ の座標環 $\mathbb{C}[\mathrm{Pet}_n \cap U]$ と旗多様体の量子コホモロジー環の間の驚くべき関係を発見した．

定理 5.1 ([18, 19, 20])**.** 次の $\mathbb{C}$-代数としての同型が成立．

$$\mathbb{C}[\mathrm{Pet}_n \cap U] \cong QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{C}) \tag{5.1}$$

定理 4.1 と定理 5.1 より，次の $\mathbb{C}$-代数としての同型が得られる．

$$\mathbb{C}[\mathrm{Pet}_n \cap U] \cong \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)}) \tag{5.2}$$

[16] において，この同型を正則冪零 Hessenberg 多様体の場合に次のように拡張した．z_{ij} を U 上の座標関数とする．

$$z_{ij}(g) = x_{ij} \quad \text{for } g \in U$$

$g \in U$ で表される旗が $\mathrm{Hess}(X,h)$ に属すための条件は，(2.5) より，

$$(g^{-1}Xg)_{ij} = 0 \quad \text{for all } i > h(j)$$

であった．各 $i \ge j \ge 1$ に対して，

$$\nu_{i,j}(g) = (g^{-1}Ng)_{ij} \quad \text{for } g \in U$$

とおくと，$\mathrm{Hess}(N,h) \cap U$ の座標環は

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(N,h) \cap U] = \mathbb{C}[z_{ij} \mid 1 \le j < i \le n]/(\nu_{i,j} \mid i > h(j))$$

と定義される．

注意 5.2. $\mathrm{Hess}(N,h)\cap U$ はスキーム論的交叉を表している．Hessenberg 関数 h が条件 (2.6) を満たすとき，$\mathrm{Hess}(N,h)\cap U$ は被約であることが知られている ([1])．

行列

$$\widetilde{M_n}=\begin{pmatrix} x_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ -1 & x_2 & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & x_{n-1} & q_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{pmatrix}$$

を考え，量子基本対称式のときのように，$\widetilde{E_i^{(n)}}$ を

$$\det(\lambda I_n-\widetilde{M_n})=\lambda^n-\widetilde{E_1^{(n)}}\lambda^{n-1}+\widetilde{E_2^{(n)}}\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n\widetilde{E_n^{(n)}}$$

と定義する．剰余環

$$Q_n=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,q_{rs}\mid 1\le r<s\le n]/(\widetilde{E_1^{(n)}},\ldots,\widetilde{E_n^{(n)}})$$

とおき，環準同型写像

$$\varphi:\mathbb{C}[z_{ij}\mid 1\le j<i\le n]\to Q_n;\quad z_{ij}\mapsto \widetilde{E_{i-j}^{(n-j)}} \tag{5.3}$$

を定義する．

定理 5.3 ([16])**.** (5.3) で定義された写像 φ は $\mathbb{C}$-代数としての同型写像であり，任意の $1\le r<s\le n$ に対して，

$$\varphi^{-1}(q_{rs})=-\nu_{n+1-r,\,n+1-s}$$

が成立．特に，任意の Hessenberg 関数 $h:[n]\to[n]$ に対して，$\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(N,h)\cap U]\cong\frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,q_{rs}\mid 2\le s\le n, n-h(n+1-s)<r<s]}{({}^hE_1^{(n)},\ldots,{}^hE_n^{(n)})} \tag{5.4}$$

を得る．ここで，${}^hE_i^{(n)}$ は

$${}^hE_i^{(n)}=\widetilde{E_i^{(n)}}|_{q_{rs}=0\ (2\le s\le n\ \ and\ \ 1\le r\le n-h(n+1-s))} \tag{5.5}$$

で定義される．

注意 5.4. $h=(2,3,4,\ldots,n,n)$ のとき，(5.4) は (5.2) を表している．

定義 (5.5) において，どの量子パラメータ q_{rs} が 0 になるかは，視覚的には次のように解釈できる．w_0 を S_n の最長元とし，行列 $w_0\widetilde{M_n}w_0$ を考える．H を Hessenberg 関数 h に付随する Hessenberg 空間とするとき，$w_0\widetilde{M_n}w_0$ が H に属す条件が，すべての $2\le s\le n$ と $1\le r\le n-h(n+1-s)$ に対して $q_{rs}=0$ を満たすことである．

例 5.5. $h=(3,3,4,5,5)$ の場合を考えると，$\widetilde{E_i^{(5)}}$ において $q_{13}=q_{14}=q_{15}=q_{24}=q_{25}=0$ とおいたものが ${}^hE_i^{(5)}$ である（図 3 参照）．

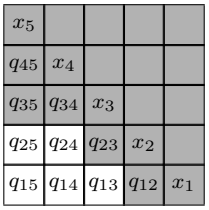


図 3. $h=(3,3,4,5,5)$ の場合の $w_0\widetilde{M}_5w_0$ の中にある変数

6. 主結果

5 節で述べた正則冪零 Hessenberg 多様体のときのように，正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ のときも，各 $i\geq j\geq 1$ に対して，

$$\xi_{i,j}(g)=(g^{-1}Sg)_{ij}\quad \text{for } g\in U$$

とおき，$\mathrm{Hess}(S,h)\cap U$ の座標環を

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(S,h)\cap U]=\mathbb{C}[z_{ij}\mid 1\leq j<i\leq n]/(\xi_{i,j}\mid i>h(j))$$

と定義する．

注意 6.1. 任意の Hessenberg 関数 h に対して，スキーム論的交叉 $\mathrm{Hess}(S,h)\cap U$ は被約であることが知られている ([6])．

さて，主結果について述べよう．(3.3) における多項式 $f_{i,j}$ を，4 節で説明した Fomin–Gelfand–Postnikov の手法を用いて量子化する．(4.2) における多項式 $e_{i_1,\dots,i_m}$ たちは $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\dots]$ の $\mathbb{Z}$-基底をなすので，

$$f_{i,j}=\sum c_{i_1,\dots,i_m}e_{i_1,\dots,i_m}\quad (c_{i_1,\dots,i_m}\in\mathbb{Z})$$

と一意的に書ける．このとき，$f_{i,j}$ の**量子化** $F_{i,j}$ を

$$F_{i,j}=\sum c_{i_1,\dots,i_m}\widetilde{E_{i_1,\dots,i_m}}$$

で定義する．ここで，$\widetilde{E_{i_1,\dots,i_m}}=\widetilde{E_{i_1}^{(1)}}\cdots\widetilde{E_{i_m}^{(m)}}$ を表す．定義より，すべての量子パラメータ q_{rs} を 0 にすると，$F_{i,j}$ は $f_{i,j}$ に特殊化される．

定理 6.2. (1) 各 $i\geq j\geq 1$ に対し，量子化 $F_{i,j}$ は $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_i,q_{rs}\mid 1\leq r<s\leq i]$ に属す．

(2) 多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,q_{rs}\mid 1\leq r<s\leq n]$ において，イデアル $(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)})$ はイデアル $(F_{n,1},\dots,F_{n,n})$ と一致する．特に，次が成立．

$$Q_n=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,q_{rs}\mid 1\leq r<s\leq n]/(F_{n,1},\dots,F_{n,n})$$

(3) 任意の $1\leq j\leq i\leq n-1$ に対して，

$$\varphi^{-1}(F_{i,j})=(-1)^{i-j}\xi_{n+1-j,\,n-i}$$

が成立．特に，任意の Hessenberg 関数 $h:[n]\to[n]$ に対して，φ は $\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(S,h)\cap U]\cong\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,q_{rs}\mid 1\leq r<s\leq n]/(F_{i,j}\mid i\geq h^*(j)) \tag{6.1}$$

を導く．ここで，h^* は (2.1) で定義された h の双対を表す．

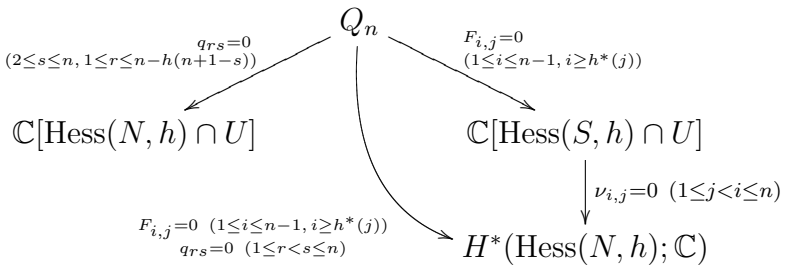
定理 6.2 の (6.1) の右辺において，すべての量子パラメータ q_{rs} を 0 とすると，(3.5) より，コホモロジー環 $H^*(\mathrm{Hess}(N,h^*);\mathbb{C})$ になることが分かる．一方，$\mathrm{Hess}(N,h)$ と $\mathrm{Hess}(N,h^*)$ は同相であるため，(6.1) において，すべての量子パラメータを忘れると，$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{C})$ が得られる．定理 5.3 より，量子パラメータ q_{rs} は $-\nu_{n+1-r,\,n+1-s}$ に対応していたことを思い出すと，次の結果を得る．

系 6.3. 任意の Hessenberg 関数 $h:[n]\to[n]$ に対して，$\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(S,h)\cap U]/(\nu_{i,j}\mid i>j)\cong H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{C})$$

が得られる．

結果を一つの図式に纏めると次のようになる．



References

[1] H. Abe, L. DeDieu, F. Galetto, and M. Harada, *Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton–Okounkov bodies*, Selecta Math. (N.S.) **24** (2018), no. 3, 2129–2163.

[2] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, *The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2019** (2019), 5316–5388.

[3] H. Abe and E. Insko, *On singularity and normality of regular nilpotent Hessenberg varieties*, J. Algebra **651** (2024), 70–110.

[4] H. Abe and H. Zeng, *The integral cohomology rings of Peterson varieties in type A*, arXiv:2203.02629.

[5] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, J. Reine Angew. Math. **764** (2020), 241–286.

[6] D. Anderson and J. Tymoczko, *Schubert polynomials and classes of Hessenberg varieties*, J. Algebra **323** (2010), no. 10, 2605–2623.

[7] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115–207.

[8] P. Brosnan and T. Y. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. **329** (2018), 955–1001.

[9] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529–534.

[10] F. De Mari and M. A. Shayman, *Generalized Eulerian numbers and the topology of the Hessenberg variety of a matrix*, Acta Appl. Math. **12** (1988), no. 3, 213–235.

[11] S. Fomin, S. Gelfand, and A. Postnikov, *Quantum Schubert polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 3, 565–596.

[12] Y. Fukukawa, M. Harada, and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), no. 3, 1147–1159.

[13] I. Ciocan-Fontanine, *Quantum cohomology of flag varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN **1995** (1995), no. 6, 263–277.

[14] A. Givental and B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices*, Comm. Math. Phys. **168** (1995), no. 3, 609–641.

[15] T. Horiguchi, *Coordinate rings of regular semisimple Hessenberg varieties and cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties*, arXiv:2512.11565.
[16] T. Horiguchi and T. Shirato, *Coordinate rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in the open opposite Schubert cell*, Forum Math. Sigma **13** (2025), Paper No. e44, 42 p.
[17] E. Insko and A. Yong, Patch ideals and Peterson varieties, *Transform. Groups* **17** (2012), no. 4, 1011–1036.
[18] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 43–91.
[19] D. Peterson, *Quantum cohomology of G/P*, Lecture Course, M.I.T., Spring Term, 1997.
[20] K. Rietsch, *Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 363–392.
[21] J. Shareshian and M. L. Wachs, *Chromatic quasisymmetric functions*, Adv. Math. **295** (2016), 497–551.
[22] E. Sommers and J. Tymoczko, *Exponents for B-stable ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 8, 3493–3509.
[23] T. A. Springer, *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, *Invent. Math.* **36** (1976), 173–207.
[24] T. A. Springer, *A construction of representations of Weyl groups*, *Invent. Math.* **44** (1978) 279–293.
[25] J. Tymoczko, *Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties*, Toric topology, Contemp. Math., **460** American Mathematical Society, Providence, RI, (2008), 365–384.

第 73 回トポロジーシンポジウム講演予稿
2026 年 8 月 19 日

曲面のループ演算、フレーミングそして写像類群

河澄 響矢 (東大数理)

はじめに

今回は詳細を省略しますが、写像類群の重要なコホモロジー類である森田 Mumford 類 (Mumford-Morita-Miller 類, MMM 類) [48, 43, 41] およびそのねじれ係数版 [20] の「素 (もと)」として第一 Johnson 準同型 [16] というものがあります [46, 31, 32]。Johnson 準同型の背景に曲面の基本群の Magnus 展開があるとの北野晃朗さんの指摘 [35] を受けて、私は Magnus 展開を一般化した自由群の expansion を考え始めました [21]。expansion にはもっと重要な意味があるはずだという信念はありましたが、それが何なのかわかりませんでした。量子不変量と私の研究も踏まえて G. Massuyeau さんが symplectic expansion の概念を提案しました [38] が、依然として余りわかりません。久野雄介さんが symplectic expansion にともなう拡大第一 Johnson 準同型 [45] の Dehn ツイストでの値について具体的な公式を与えたことが大きな転機になりました。そこでは $(\log x)^2/2$ という函数が現れます [28]。ここからが今日の講演の内容になります。結論だけ先に述べれば、Lie 理論での柏原-Vergne 問題 [19, 5] は、実は、種数 0 曲面の基本群の expansion であって Goldman-Turaev 双代数の形式性を与えるものを求める問題だったのです [2]。ここから正種数の柏原-Vergne 問題なるものが expansion の問題として定式化されます [1, 4]。以上の議論では曲面の framing が現れます。これは古田幹雄さんの指摘 [47, p.569] に由来します。本講演の後半では、曲面の framing について、最近の自分の仕事 [24, 26, 33, 34] を含めて簡単に整理します。企画講演なのに自分の仕事の話ばかりになってしまい恐縮です。

目 次

1 曲面の写像類群と Dehn ツイスト **2**

2 Goldman Lie 代数とその基本群の群環への作用 **3**

3 Turaev 余括弧積と Johnson 準同型 **6**

4 Goldman-Turaev 形式性としての柏原 Vergne 問題 **7**

5 曲面の $\mathbb{K}$-framing と $\mathbb{K}$-二次形式 **10**

1 曲面の写像類群と Dehn ツイスト

Σ を**空でない境界をもつ**向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面とする。曲面の分類定理により、Σ は種数と境界成分数によって完全に分類される。種数 g 境界成分数 $n+1$ の向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面を $\Sigma_{g,n+1}$ と表す。$g, n \geq 0$ である。境界成分に 0 から n までの番号をつけ $\partial_j\Sigma$, $0 \leq j \leq n$, とする $\partial\Sigma = \coprod_{j=0}^{n} \partial_j\Sigma$. 基点を $* \in \partial_0\Sigma$ ととる。基本群 $\pi := \pi_1(\Sigma, *)$ は階数 $2g+n$ の自由群である。

曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$ の写像類群を $\Gamma = \Gamma_{g,n+1}$ とする。つまり、境界 $\partial\Sigma$ を点毎に固定する Σ の C^∞ 微分同相全体の群 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma \operatorname{rel} \partial\Sigma)$ を、単位元とイソトピックな C^∞ 微分同相のなす正規部分群で商をとったものが Γ である。群 Γ の生成元として、単純閉曲線 $C \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ に沿う右手 Dehn ツイスト $t_C \in \Gamma$ がとれる。右手 Dehn ツイスト $t_C \in \Gamma$ は、C の管状近傍 $N(C)$ においては図 1 で与えられ、その外側では恒等写像である C^∞ 微分同相の同値類である。曲面の向き Σ に関して、C に向かっていく路が右に曲がるのが右手 Dehn ツイストである。そこで Dehn ツイスト t_C は C の向きのとり方によらない。また、左に曲がる左手 Dehn ツイストは右手 Dehn ツイストの逆元である。Dehn-Lickorish の定理に

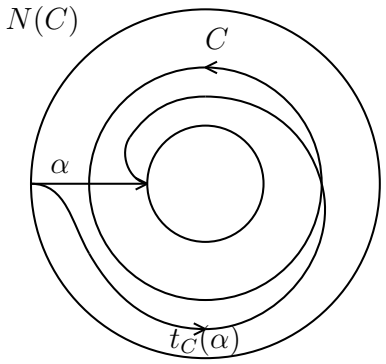


図 1: 単純閉曲線 C の管状近傍 $N(C)$ における右手 Dehn ツイスト t_C

より、写像類群は右手 Dehn ツイストたちで生成される。より詳しい結果については門田直之氏の第 69 回トポロジーシンポジウム予稿 [42] を参照。たとえば、$g \geq 1$ のとき $\Gamma_{g,1}$ (resp. $\Gamma_{g,n+1}$) は非分離的単純閉曲線と境界成分に並行な単純閉曲線の右手 Dehn ツイストたちで生成される [17] (resp. [36])。ここで単純閉曲線 C が**非分離的**（non-separting）であるとは、補集合 $\Sigma \setminus C$ が連結であることをいう。

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。右手 Dehn ツイスト t_C の第一ホモロジー群 $H := H_1(\Sigma; \mathbb{K})$ への作用を表すのが Picard-Lefschetz の公式

$$\forall X \in H,\ (t_C)_* X = X - (X \cdot [C])[C] \in H \tag{1.1}$$

である。ここで $\cdot$ は (代数的) 交叉数、$[C] \in H$ は単純閉曲線（に向きを入れたもの）の定めるホモロジー類である。

我々は Picard-Lefschetz の公式 (1.1) の高次化を考えたい。基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ の群環 $\mathbb{K}\pi := \{\sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma \gamma;\ \text{有限個の } \gamma \text{ を除き } a_\gamma = 0\}$ および添加イデアル $I\pi := \mathrm{Ker}(\mathrm{aug} : \mathbb{K}\pi \to$

$\mathbb{K}$, $\sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma\gamma \mapsto \sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma$) を考える。これらには写像類群 Γ が自然に作用しており、添加写像 aug による同型 $\mathbb{K}\pi/I\pi \cong \mathbb{K}$ および $\mathbb{K}\Gamma$-加群としての次の同型がなりたつ

$$H \cong (I\pi)/(I\pi)^2, \quad [\gamma] \mapsto (\gamma - 1) \bmod (I\pi)^2,$$

そこで次の問題は $\mathbb{K}\pi/(I\pi)^3$ における右手 Dehn ツイスト t_C の作用の記述であるが、久野 [28, 定理 6.5.3] は

$$(t_C)_* = \exp\left(\text{"}\tfrac{1}{2}(\log C)^2\text{ "}\right) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}\pi/(I\pi)^3)$$

という記述を得た。これを完備群環 $\widehat{\mathbb{K}\pi} := \varprojlim_{m\to\infty} \mathbb{K}\pi/(I\pi)^m$ に拡張したのが次の定理である。

定理 1.1 ($\Sigma_{g,1}$ については久野-河澄 [28], 一般の境界つき曲面については Massuyeau-Turaev [40], 久野-河澄 [30])**.**

$$(t_C)_* = \exp\left(\text{"}\tfrac{1}{2}(\log C)^2\text{ "}\right) \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{K}\pi}).$$

定理の主張についていくつか補足する。まず、[28] では $\Sigma_{g,1}$ の基本群の symplectic expansion [38] についての定理として述べている。つぎに、一般に $\mathbb{K}$-結合代数 A について導分 Lie 代数 $\mathrm{Der}(A) := \{D : A \to A;\ \mathbb{K}\text{-線型写像}, \forall a_1, \forall a_2 \in A, D(a_1a_2) = (Da_1)a_2 + a_1(Da_2)\}$ を考える。A に位相が入っているときは $\mathrm{Der}(A)$ も連続なものだけを考える。このとき、適当な位相のもとで、指数函数 $\exp : \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Aut}(A)$, $D \mapsto \exp(D) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m$, を考えることができる場合がある。それが定理右辺の exp である。そうすると $\text{"}\frac{1}{2}(\log C)^2\text{ "}$ は $\mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ の元であるが、それを正当化するのが曲面 Σ の（完備化された） Goldman-Lie 代数である。

2 Goldman Lie 代数とその基本群の群環への作用

一般に $\mathbb{K}$-単位結合代数 A について、集合 $\{ab - ba;\ a, b \in A\} \subset A$ の生成する $\mathbb{K}$-線型部分空間を $[A, A]$ と表し、それによる商ベクトル空間を

$$|A| := A/[A, A]$$

と表す。交換子によって A を Lie 代数とみたときの可換化であり、一般には単なる $\mathbb{K}$-ベクトル空間である。単位元 $1 \in A$ の定める元を $\mathbf{1} \in |A|$ と表す。群環 $\mathbb{K}\pi$ について $|\mathbb{K}\pi|$ は π の共役類全体の集合

$$\hat{\pi} := \pi/\mathrm{conj} = [S^1, \Sigma] = \{\Sigma \text{ の自由ループの自由ホモトピー類 }\}$$

の生成する自由 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ である。その意味で $\gamma \in \pi$ の自由ホモトピー類を $|\gamma| \in \hat{\pi} \subset |\mathbb{K}\pi|$ と表すことにする。自由ループ α と $\beta \in \hat{\pi}$ の Goldman bracket $[\alpha, \beta] \in \mathbb{Z}\hat{\pi} \subset \mathbb{K}\hat{\pi}$ は、α と β を generic immersions (特異点として横断的二重点のみを許すはめ込み) で代表させて

$$[\alpha, \beta] := \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \varepsilon_p(\alpha, \beta)|\alpha_p\beta_p| \in \mathbb{Z}\hat{\pi} \subset \mathbb{K}\hat{\pi} = |\mathbb{K}\pi|$$

とおくことで定義される。ここで代表元 α と β の交点の集合 $\alpha\cap\beta$ は横断的二重点のみからなるから有限集合であり、各交点 $p\in\alpha\cap\beta$ の接空間 $T_p\Sigma$ において α と β の定める向きが Σ の向きに一致するかどうかで、局所交叉数 $\varepsilon_p(\alpha,\beta)\in\{\pm1\}$ が定まる。また、α_p と β_p は交点 p を基点とした $\pi_1(\Sigma,p)$ の元を表し、積 $\alpha_p\beta_p\in\pi_1(\Sigma,p)$ の定める自由ループを $|\alpha_p\beta_p|\in\hat{\pi}$ と表している。このとき、Goldman は次を示している。

定理 (Goldman [13])**.** (1) bracket $[\cdot,\cdot]:\hat{\pi}\times\hat{\pi}\to\mathbb{Z}\hat{\pi}$ は well-defined である。
(2) 組 $(|\mathbb{K}\pi|,[\cdot,\cdot])$ は $\mathbb{K}$-Lie 代数である。

これによって $[\cdot,\cdot]$ は Goldman bracket と呼ばれ、組 $(|\mathbb{K}\pi|,[\cdot,\cdot])$ は曲面 Σ の Goldman Lie 代数と呼ばれる。(1) の証明は図 2 の 3 種類の局所変形で不変なことを証明する。$(\omega1)$ は monogon (=fishtail) の生成消滅、$(\omega2)$ は bigon の生成消滅、そして $(\omega3)$ は二重点の乗り越えである。Goldman bracket は曲面上の平坦束のモジュライ空間上の函数たちの

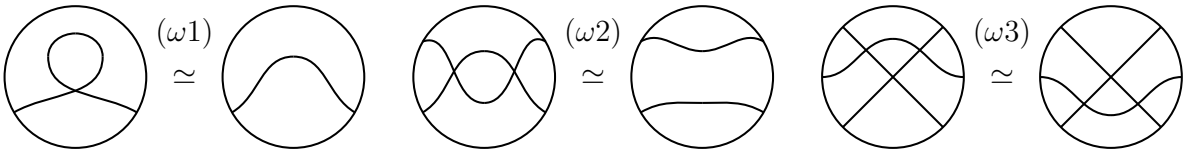


図 2: 3 種類の局所変形

Poisson 括弧積に由来するので、Lie 括弧積でなければならないが、とりあえず (2) は定義から直接計算して証明する。

なお、Goldman Lie 代数の中心を求めることは重要な問題であった。中心が、線型空間として、自明ループないし境界ループの冪で生成されることが Etingof [12] (閉曲面), Kabiraj [18] (パンツ曲面以外) および和久田 [55] (パンツ曲面) によって証明されている。

定理 1.1 に現れる "$\frac{1}{2}(\log C)^2$" は、添加イデアル $I\pi$ に関する Goldman Lie 代数の完備化 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}|=\widehat{\mathbb{K}\hat{\pi}}=\varprojlim_{m\to\infty}|\mathbb{K}\pi|/|(I\pi)^m|$ の元として定義される。つまり、$|\alpha|=C\in\hat{\pi}$ をみたす based loop $\alpha\in\pi$ をとると、完備群環 $\widehat{\mathbb{K}\pi}$ の元として $\log\alpha=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}(\alpha-1)^m$ および $\frac{1}{2}(\log\alpha)^2$ が定義でき、対応する元として $\frac{1}{2}(\log C)^2:=|\frac{1}{2}(\log\alpha)^2|\in|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ が定義できる。これは C の自由ホモトピー類だけで決まり、α のとり方によらない。完備化された Goldman Lie 代数 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ には Goldman bracket $[\cdot,\cdot]:|\widehat{\mathbb{K}\pi}|\times|\widehat{\mathbb{K}\pi}|\to|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ が well-defined に拡張する。

さて、定理 1.1 の証明の鍵の一つは、次のように定義される based Goldman bracket [28]

$$\sigma:|\mathbb{K}\pi|\to\mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi),\quad \alpha\mapsto\sigma(\alpha),$$

であった。$\alpha\in\hat{\pi}$ と $\gamma\in\pi$ を generic immersions にとり

$$\sigma(\alpha)(\gamma):=\sum_{p\in\alpha\cap\gamma}\varepsilon_p(\alpha,\gamma)\gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*}\in\mathbb{Z}\pi\subset\mathbb{K}\pi$$

と定義する。ここで γ_{*p} および γ_{p*} は、それぞれ基点 $*$ から交点 p まで、および交点 p から基点 $*$ までの γ の segments を表す。α_p で寄り道するわけである。

定理 2.1 (久野-河澄 [28]). (1) σ は well-defined である。
(2) $\sigma : |\mathbb{K}\pi| \to \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi)$ は Lie 代数準同型である。
(3) (2) の σ は (連続な) Lie 代数準同型 $\sigma : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ を誘導する。

証明は Goldman Lie 代数の場合と全く同じである。

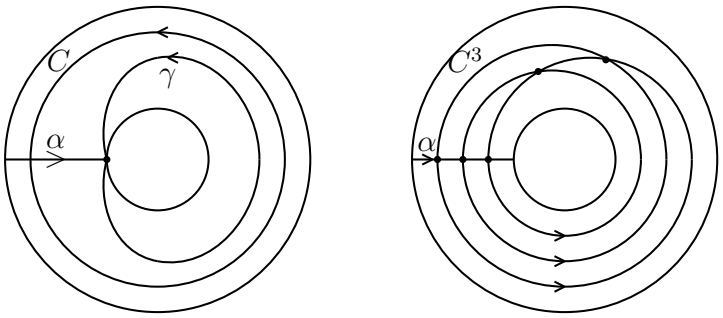


図 3: $\sigma(C^n)(\gamma)$ の計算

定理 1.1 の証明. Seifert-van Kampen の定理から、単純閉曲線 C の管状近傍 $N(C)$ において証明すれば充分である [30]。そこで図 3 の状況を考えると、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\sigma(C^n)(\alpha) = n\alpha\gamma^n$ である。これは、任意の $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ について $\sigma(f(C))(\alpha) = \alpha\gamma f'(\gamma)$ であることを意味する。一方、$t_C(\alpha)\gamma = \alpha\gamma$ だから対数をとって $(\log t_C)(\alpha) = \alpha(\log \gamma)$ となる。両者を比較すると微分方程式 $xf'(x) = \log x$ が得られる。不定積分して

$$f(x) = \int_1 \frac{1}{x} \log x dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$$

となる。つまり $\log t_C = \sigma(\frac{1}{2}(\log x)^2) \in \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ がわかる。定理が示された。 □

ここでは [30] で与えた証明を紹介した[1]。
さて、Lie 代数準同型 σ について次がなりたつ。

定理 2.2 (久野-河澄 [30]). $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ のとき σ は次の同型を与える

$$\sigma : |\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{K}\pi}) := \{D \in \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi});\ \text{連続}, D(\partial_0\Sigma) = 0\}.$$

ここで $\mathbf{1} = |1| \in |\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ は中心に属するから商 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1}$ には Lie 代数の構造が遺伝する。一般の Σ でも、基本亜群を考えて $\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ の定義を修正すれば同様の同型がなりたつ。Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma) := \mathrm{Ker}(\Gamma \to \mathrm{Aut}(H))$ の上では対数 $\log : \mathcal{I}(\Sigma) \to \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ がとれるから、Lie 代数準同型

$$\sigma^{-1} \circ \log : \mathcal{I}(\Sigma) \to |\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1}$$

が定義できる。これは Johnson 準同型に他ならず、Johnson 準同型を幾何的に再構成したことになる。すると Johnson 像の制約条件を求める問題はループ演算の問題として捉えることもできる。

[1] 日本語の解説文として [27] も参照していただけると幸いです。

3 Turaev 余括弧積と Johnson 準同型

Turaev [53] の先駆的な仕事として 2 種類のループ演算

$$\lambda : \mathbb{Z}\pi \times \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}\pi \quad \text{および} \quad \mu : \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}\pi/\mathbb{Z}\mathbf{1}$$

の発見がある。Goldman bracket および based Goldman bracket は λ から誘導され、Turaev cobracket および based Turaev cobracket は μ から誘導される。これから述べるように framing の問題があるため、Turaev cobracket δ の完備化は、とりあえず $\delta : |\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1} \to (|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1})^{\hat{\otimes}2}$ として定義される。次がなりたつ。

定理 3.1 (久野-河澄 [29])**.**

$$(\sigma^{-1} \circ \log)(\mathcal{I}(\Sigma)) \subset \mathrm{Ker}\left(|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1} \xrightarrow{\delta} (|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1})^{\hat{\otimes}2}\right)$$

したがって、Turaev cobracket を考えることは、写像類群の観点からも意味がある。そこで以下 Turaev cobracket の定義を思い出す。

単位区間 $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ の端点を $\partial I := \{0,1\} \subset I$ と表し、$I^\circ := I \setminus \partial I$ とおく。境界成分 $\partial_0\Sigma$ には Σ から決まる向きが入っているが、基点 $* \in \partial_0\Sigma$ における境界成分 $\partial_0\Sigma$ に沿う負の方向の接ベクトル v_* を一つとる。generic immersion $\gamma : (I, \partial I) \to (\Sigma, *)$ であって $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(1) = v_* \in T_*\Sigma$ をみたすものを考える[2]。$t', t'' \in I$, $t' < t''$, について γ の $[t', t'']$ への制限を $\gamma_{t't''}$ と表す。また、γ の I° への制限 $\gamma|_{I^\circ}$ の自己交叉点全体の集合を Γ_γ と表す。γ は generic immersion だから、任意の $p \in \Gamma_\gamma$ について $0 < t_1^p < t_2^p < 1$ が唯一つ存在して $\gamma(t_1^p) = \gamma(t_2^p) = p$ をみたす。

$$\Gamma_\gamma^\pm := \{p \in \Gamma_\gamma;\ \varepsilon(\dot\gamma(t_1^p), \dot\gamma(t_2^p)) = \pm 1\}$$

とおくと、$\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma^+ \amalg \Gamma_\gamma^-$ となる。based Turaev cobracket $\mu(\gamma)$ は

$$\mu(\gamma) := \sum_{p \in \Gamma_\gamma} \varepsilon(\dot\gamma(t_1^p), \dot\gamma(t_2^p)) |\gamma_{t_1^p t_2^p}| \otimes \gamma_{0t_1^p}\gamma_{t_2^p 1} \in |\mathbb{Z}\pi| \otimes \mathbb{Z}\pi \tag{3.1}$$

によって定義される。図 1 の 3 種類の局所変形のうち、$(\omega 2)$ と $(\omega 3)$ で $\mu(\gamma)$ は不変であるが、$(\omega 1)$ では不変ではない。図 4 のように向きがついている場合、monogon の頂点の寄与は $-\mathbf{1} \otimes \gamma$ となるからである。そこでオリジナルな based Turaev cobracket は $\mu \bmod \mathbb{Z}\mathbf{1} \otimes \mathbb{Z}\pi$ として定義される。この ambiguity を消すために曲面 Σ の framing、つまり接束 $T\Sigma$ の向きを保つ大域的自明化 $\xi : T\Sigma \cong \Sigma \times \mathbb{R}^2$ を考える[3]。Σ は空でない境界をもつから接束 $T\Sigma$ は自明である。§5 で説明するように framing ξ は immersion γ の回転数 $\mathrm{rot}_\xi(\gamma)$ を定める。図 4 について左辺の局所交叉数は -1 で右辺の左側の閉路の回転数は $+1$ である。これらを打ち消すように

$$\mu^\xi(\gamma) := \mu(\gamma) + (\mathrm{rot}_\xi(\gamma) + 1)(\mathbf{1} \otimes \gamma) \in |\mathbb{Z}\pi| \otimes \mathbb{Z}\pi$$

[2] [29, 4] などでは γ の始ベクトルおよび終ベクトルは $\partial_0\Sigma$ に「直交」している。それは、[22] での広義積分を収束させるために、v_* が $\partial_0\Sigma$ と横断的でなければならないことに由来する。そこで回転数 $\mathrm{rot}_\xi\gamma$ の補正に違いが出てくる。

[3] framing を考えることになった背景には、後述する Earle 類についての古田幹雄さんの指摘 [47, p.569] もありました。framing なしの定理 3.1 で損なわれるのは Earle 類だったからです。

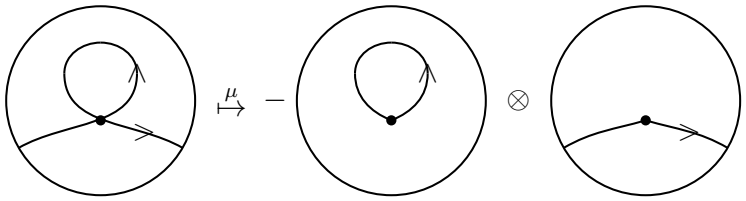


図 4: monogon の寄与

と補正すると、well-defined な写像

$$\mu^{\xi} : \mathbb{Z}\pi \to |\mathbb{Z}\pi| \otimes \mathbb{Z}\pi$$

がえられる。これが framed based Turaev cobracket [4] である。なお μ^{ξ} の定義式で $(\mathrm{rot}_{\xi}(\gamma)+1)$ と $+1$ がついているのは積公式のためである。μ^{ξ} の定数項の積公式については §5 で説明する。一般の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V について交代化作用素を $\mathrm{alt} : V \otimes V \to V \otimes V$, $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_1 \wedge v_2 := v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$, とする。framed Turaev cobracket

$$\delta^{\xi} : |\mathbb{Z}\pi| \to |\mathbb{Z}\pi| \otimes |\mathbb{Z}\pi|, \quad |\gamma| \mapsto \mathrm{alt}(1 \otimes |\cdot|)(\mu^{\xi}(\gamma) - \mathbf{1} \otimes \gamma),$$

が定義できる。たとえば $\mathrm{rot}_{\xi}(C) = 0$ をみたす単純閉曲線 C と任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $\delta^{\xi}(C^n) = 0$ である。回転数の仮定がない場合は $\delta(C^n) = 0 \in (|\mathbb{Z}\pi|/\mathbb{Z}\mathbf{1})^{\otimes 2}$ となっている。(図 3 の右側を参照。) δ^{ξ} は完備化に移行して $\delta^{\xi} : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to |\widehat{\mathbb{K}\pi}|^{\hat{\otimes} 2}$ となり、Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma)$ を Chillingworth 群に縮小することで定理 3.1 と同じことがなりたつ [4]. expansion を通して、ここから榎本佐藤 trace [10] が導かれる。

Turaev [54] は Turaev cobracket δ を導入することにより Goldman bracket $[\cdot,\cdot]$ との三つ組 $(|\mathbb{Z}\pi|/\mathbb{Z}\mathbf{1}, [\cdot,\cdot], \delta)$ が Lie 双代数になることを示した。framed version でも同じく三つ組 $(|\mathbb{Z}\pi|, [\cdot,\cdot], \delta^{\xi})$ は Lie 双代数になる。

4 Goldman-Turaev 形式性としての柏原 Vergne 問題

ここまでに散見された自由群の expansion について述べておく。曲面 Σ は空でない境界をもつから、基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ は自由群である。すでに使っている記号だが、$\gamma \in \pi$ のホモロジー類を $[\gamma] \in H = H_1(\Sigma; \mathbb{K})$ と表す。添加イデアル $I\pi \subset \mathbb{K}\pi$ の冪が定める群環 $\mathbb{K}\pi$ の filtration $\{(I\pi)^m\}_{m=0}^{\infty}$ を考える。これは π の降中心列に対応する[4]。このとき完備次数商の同型

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(\mathbb{K}\pi) := \prod_{m=0}^{\infty} (I\pi)^m/(I\pi)^{m+1} &\xrightarrow{\cong} \widehat{T}(H) := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m} \\ (\gamma_1 - 1)\cdots(\gamma_m - 1) &\mapsto [\gamma_1]\cdots[\gamma_m] := [\gamma_1] \otimes \cdots \otimes [\gamma_m], \end{aligned} \tag{4.1}$$

[4] $n \geq 1$ の場合、基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,n+1}, *)$ の降中心列の代わりに、境界をまわる閉路に重み 2 を付与する weight filtration を考えるべきで、群環 $\mathbb{K}$ の filtration も expansion の定義も修正する必要がある。ただし、種数 0 の場合は番号付けが変わるだけでここの議論はそのままなりたつ。

がなりたち、完備 Hopf 代数の構造を保つ。この同型により両者を同一視する。$|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ は Lie 双代数だから、同型 (4.1) を通して $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $|\widehat{T}(H)|$ にも Lie 双代数の構造が入る。ここで余積 Δ は、任意の $\gamma \in \pi$ について $\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$ および任意の $X \in H$ について $\Delta(X) = X\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}X$ をみたす代数準同型として定まっている。

写像 $\theta_m : \pi \to H^{\otimes m}$, $m \geq 0$, の集まり、ないし写像

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m : \widehat{\mathbb{K}\pi} \to \mathrm{gr}(\mathbb{K}\pi) = \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$$

が (group-like) expansion であるとは、θ が完備 Hopf 代数の同型であって、$\mathrm{gr}(\theta)$ が恒等写像であることをいう。後者の条件は、任意の $\gamma \in \pi$ について $\theta_0(\gamma) = 1$ かつ $\theta_1(\gamma) = [\gamma]$ と言い換えられる。とくに第 2 項 θ_2 について、写像類群 Γ 上の写像 $\tau_1^{\theta} : \Gamma \to H^* \otimes H^{\otimes 2}$ を任意の $\varphi \in \Gamma$ について

$$\tau_1^{\theta}(\varphi) : \gamma \in \pi \mapsto \theta_2(\gamma) - \varphi_* \theta_2(\varphi^{-1}(\gamma)),$$

によって定義すると、これは 1-コサイクルであって、そのコホモロジー類 $[\tau_1^{\theta}] \in H^1(\Gamma; H^* \otimes H^{\otimes 2})$ は森田 [45] による拡大第一 Johnson 準同型である。

さて、柏原 Vergne 問題 [19, 5] は種数 0 曲面で適切な expansion を求める問題であった [2]。以下、状況が簡単な曲面 $\Sigma_{g,1}$ に限って説明する。この場合、$H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{K})$ 上の代数的交叉数 $\cdot : H \otimes H \to \mathbb{K}$ は非退化である。同型 (4.1) を通して $|\widehat{T}(H)|$ に入った Lie 双代数の構造は次で与えられる[5]

$$\begin{aligned}
&[|X_1 \cdots X_m|, |Y_1 \cdots X_m|] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_i \cdot Y_j) |X_{i+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1} Y_{j+1} \cdots Y_n Y_1 \cdots Y_{j-1}|, \\
&\delta |X_1 \cdots X_m| = \sum_{i<j} (X_i \cdot X_j) |X_{i+1} \cdots X_{j-1}| \wedge |X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}|.
\end{aligned}$$

ここで $X_i, Y_j \in H$ としている。これは necklace Lie 双代数と呼ばれる構造である。

さて、Massuyeau [38] は $\Sigma_{g,1}$ の基本群の group-like expansion について条件

$$\theta\left(\prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i {\alpha_i}^{-1} {\beta_i}^{-1}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{g} [\alpha_i] \wedge [\beta_i]\right)$$

をみたすものを symplectic と呼んだ。ここで $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{g} \subset \pi$ は symplectic 生成系であるが、この条件は symplectic 生成系の取り方によらない。左辺の中身は $\partial_0 \Sigma_{g,1}$ を一周するループで、右辺の中身は交叉形式から決まるからである。まず $\Sigma_{g,1}$ については定理 1.1 の副産物として次の定理がわかった。

定理 4.1 (久野-河澄 [28])**.** θ が symplectic expansion ならば、同型 $|\theta| : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \cong |\widehat{T}(H)|$ は bracket を保つ。

[5] $\Sigma_{g,1}$ に限っては framed Turaev cobracket の framing の情報は次数商をとると隠れるが、条件 (KV2) には framing の情報が含まれている。

一般の曲面についても Massuyeau-Turaev [40], 久野-河澄 [30] によって symplectic expansion の代わりに special expansion[6] を考えると同様のことがなりたつことがわかっている。

それでは cobracket はどうなのか？最初に得られたのは Massuyeau の次の結果である。

定理 (Massuyeau [39])**.** Kontsevich 積分から誘導される種数 0 曲面 $\Sigma_{0,n+1}$ の expansion θ について $|\theta| : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to |\widehat{T}(H)|$ は、bracket と cobracket を保つ。つまり Lie 双代数の同型である。

そこで柏原 Vergne 問題である。Alekseev-Torossian [5] による自由 Lie 代数での定式化では、柏原 Vergne 問題は 2 つの条件 (KV1) と (KV2) からなる。expansion の条件に読み直すと、(KV1) は種数 0 曲面 $\Sigma_{0,n+1}$ の special expansion の条件そのものである。つまり、(KV1) とは、Goldman bracket を保つことに他ならない[7]。(KV2) が Turaev cobracket に対応してほしいのだが、次がわかる。

定理 4.2 (Alekseev-Kawazumi-Kuno-Naef [2])**.** 種数 0 曲面 $\Sigma_{0,n+1}$ の special expansion θ つまり (KV1) をみたす expansion について、条件 (KV2) をみたすことと、$|\theta|$ が cobracket を保つこと、つまり $|\theta|$ が Lie 双代数同型であることとは同値である。

この定理は、柏原 Vergne 問題を、$|\theta|$ が Lie 双代数同型である expansion θ を求める問題、つまり Goldman-Turaev Lie 双代数の形式化問題として、正種数の曲面に拡張することを示唆している。

定理 4.3 (Alekseev-Kawazumi-Kuno-Naef [1, 4])**.** (1) 曲面 $\Sigma_{g,n+1}$ とその framing ξ について柏原 Vergne 問題が定式化される。

(2) 種数 1 の以下の framing ξ を除き、柏原 Vergne 問題は解をもつ: すべての境界成分 $\partial_j\Sigma$, $0 \le j \le n$, について $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma) = -1$ であって $\mathrm{rot}_\xi(\alpha_1)$ と $\mathrm{rot}_\xi(\beta_1)$ のいずれかは 0 でない。

(3) 任意の (KV1) の解 θ について、(KV2) をみたすことと、$|\theta|$ が対応する framing つき曲面の Goldman-Turaev Lie 双代数についての同型を与えることとは同値である。

解の構成には、Alekseev-Torossian [5] が Drinfeld 結合子から構成したものと、Enriquez [11] の楕円結合子を貼り合わせる。後者は種数 1 の Drinfeld 結合子となる。

なお、この定理の混合 Hodge 構造を用いた別証明が Hain [14] により与えられている。この別証明では、種数 1 の例外について代数幾何的な意味付けが明らかになっている。

ごく最近、谷口東曜は次の定理を証明している。

定理 (谷口 [51, 52])**.** (1) 任意の g について種数 g Gonzalez-Drinfeld 結合子が存在する。

(2) 任意の g について種数 g Gonzalez-Drinfeld 結合子は Goldman-Turaev Lie 双代数の形式化を与える。

ただし、種数 1 の Gonzalez-Drinfeld 結合子にともなう framing ξ は $\mathrm{rot}_\xi(\alpha_1) = \mathrm{rot}_\xi(\beta_1) = 0$ をみたす。

---

[6] この special という用語は伊原康隆先生の研究に由来する。

[7] 本当は少しだけずれがある。それについては [3] で明らかにした。

5 曲面の $\mathbb{K}$-framing と $\mathbb{K}$-二次形式

ここまでの話は framing から expansion がみたすべき条件 (KV2) を誘導する話であった。逆に、expansion θ から framing を回復することを考える。framing は拡大第一 Johnson 準同型 τ_1^θ のあたりに住んでいるので $\Sigma_{g,1}$ ならば symplectic expansion の最初の方の項から導かれるはずである。10 年ほど前に F. Naef 氏からこの問題を質問されたが、そのときには答えられなかった。通常の自明化ではだめで、framing を $\mathbb{K}$-係数に拡張する必要があった。今回の講演とは別の文脈の仕事 [25] で、スピン構造についても気になることがある。スピン構造とは $\mathbb{Z}/2$-framing である。そこで、この §5 では $\mathbb{K}$ **は単位可換環とする。**

そもそも、多様体のスピン構造とは接枠束の二重被覆のことである。曲面の場合に、スピン構造を theta 指標と明確に対応づけたのが Johnson [15] である。ちなみに Johnson は theta 指標を二次形式と呼んでいる。theta 指標とは、函数 $q : H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ であって、任意の $X_1, X_2 \in H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2)$ について $q(X_1+X_2) = q(X_1)+q(X_2)+X_1\cdot X_2$ をみたすものだからである。spin 構造 ξ は mod2 回転数 rot_ξ を定めるが、Johnson は、対応する二次形式 q_ξ の値として、単純閉曲線 C について $q_\xi(C) = \mathrm{rot}_\xi(C)+1$ であることしか本質的に言っていない。そこで、少なくとも 3 つの疑問が出てくる。

(1) generic immersion での q_ξ の値はどうなるか？

(2) $+1$ はなぜなのか？

(3) spin 構造に限らず framing や r-spin 構造には一般化できるか？

この 3 つの疑問は framed Turaev cobracket μ^ξ の定数項をとることで回答があたえられる。

$\mathbb{K}$-framing ξ やその回転数 rot_ξ を定義するために、一般に Σ を空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面とする。曲面 Σ の接束 $T\Sigma$ から 0 切断を除いた空間 $T\Sigma\backslash(0\text{-section})$ の正の実数 $\mathbb{R}_{>0}$ のスカラー倍作用による商を $U\Sigma := (T\Sigma\backslash(0\text{-section}))/\mathbb{R}_{>0}$ とする。これは単位接束であり、Σ の向きから誘導される向きをもつ主 S^1 束である。$\varpi : U\Sigma \to \Sigma$ を主 S^1 束の射影とし、$\iota : S^1 \hookrightarrow U\Sigma$ を向きを保つファイバーの包含とする。Σ は空でない境界をもつので主 S^1 束 $U\Sigma$ は自明であり、短完全列

$$0 \to H^1(\Sigma;\mathbb{K}) \xrightarrow{\varpi^*} H^1(U\Sigma;\mathbb{K}) \xrightarrow{\iota^*} H^1(S^1;\mathbb{K}) \to 0 \tag{5.1}$$

がなりたつ。条件 $\langle \iota^*\xi, [S^1]\rangle = 1$ をみたす元 $\xi \in H^1(U\Sigma;\mathbb{K})$ を、Σ の $\mathbb{K}$-framing とよび、その全体を $F(\Sigma;\mathbb{K})$ と表すことにする。ここには写像類群 Γ が自然なやり方で作用している。$F(\Sigma;\mathbb{Z})$ は主 S^1 束 $U\Sigma$ の自明化のホモトピー類全体の集合であり、$F(\Sigma;\mathbb{Z}/2)$ は Σ の spin 構造全体の集合である。$\mathbb{K}$-framing $\xi \in F(\Sigma;\mathbb{K})$ とはめ込み $\alpha : S^1 \to \Sigma$ について

$$\mathrm{rot}_\xi(\alpha) := \langle \xi, \dot\alpha_*[S^1]\rangle \in \mathbb{K}$$

と定め、ξ に関する α の ξ-回転数とよぶ。ここで $\dot\alpha : S^1 \to U\Sigma$ は速度ベクトルとする。境界 $\partial\Sigma = \coprod_{j=0}^n \partial_j\Sigma$ について、Poincaré-Hopf の定理により

$$\sum_{j=0}^n \mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma) = \chi(\Sigma) \in \mathbb{K} \tag{5.2}$$

がなりたつ[8]。

[8] 公式 (5.2) は常識だと思いますが [24, 26] に証明を書きました。

ここで $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2$ つまり spin 構造について注意しておくと、$\chi(\Sigma)<0$ のとき Fuchs 表現についてリフト $\rho:\pi_1(\Sigma)\to SL_2(\mathbb{R})$ をとることは spin 構造 ξ を指定することに対応する。このとき、$\mathrm{trace}(\partial_j\Sigma)$ の符号が $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)$ に他ならない[9]。とくに、超 Riemann 面での Ramon punctures の個数がつねに偶数であることは公式 (5.2) に他ならない。写像類群による商集合 $F(\Sigma;\mathbb{Z}/2)/\Gamma$ についてであるが、$F(\Sigma_{g,0};\mathbb{Z}/2)/\Gamma_{g,0}=F(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}/2)/\Gamma_{g,1}$ が Arf 不変量によって偶奇二つに分かれることは古典的である[10]。一般の場合も $F(\Sigma_{g,n+1};\mathbb{Z}/2)/\Gamma_{g,n+1}$ は Arf 不変量と $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)\in\mathbb{Z}/2$, $0\le j\le n$, によって分類される。

つぎに $\mathbb{K}=\mathbb{Z}$ つまり Σ の本来の framing であるが、$g\neq 1$ のときは、境界の情報 $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)\in\mathbb{Z}$, $0\le j\le n$, と誘導する spin 構造の Arf 不変量によって分類される。 相対 $\mathbb{Z}$-framing や相対 spin 構造、さらに相対 r-spin 構造について Randal-Williams [49] は相対 Arf 不変量を導入し、$g\neq 1$ のとき、その写像類群による軌道が境界の情報と相対 Arf 不変量で分類されることを示している。残る種数 1 の場合、つまり商集合 $F(\Sigma_{1,n+1};\mathbb{Z})/\Gamma_{1,n+1}$ については [24] で記述した。境界の情報 $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)\in\mathbb{Z}$, $0\le j\le n$, に加えて、整数環 $\mathbb{Z}$ において集合 $\{\mathrm{rot}_\xi(C);\ C\subset\Sigma\setminus\partial\Sigma$ 非分離的単純閉曲線 $\}$ が生成するイデアル $\mathfrak{a}(\xi)$ によって分類されるというものである。これは定理 4.3 (2) と辻褄があっている。

さて、一般の単位可換環 Σ と一般の空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面 Σ にもどって $\xi\in F(\Sigma;\mathbb{K})$ とする。$\gamma\in\pi=\pi_1(\Sigma,*)$ について based framed Turaev cobracket $\mu\xi(\gamma)$ の定数項を $q_\xi(\gamma):=(\mathrm{aug}\otimes\mathrm{aug})\mu^\xi(\gamma)$ とする。つまり、γ を $\dot\gamma(0)=\dot\gamma(1)=v_*$ をみたす generic immersion であらわしたとき

$$q_\xi(\gamma)=\sharp\Gamma^+_\gamma-\sharp\Gamma^-_\gamma+\mathrm{rot}_\xi(\gamma)+1\in\mathbb{K} \tag{5.3}$$

となる。次の補題は μ^ξ の積公式 [29, 4] からわかるが、図 5 からわかる公式

$$\sharp\Gamma^+_{\gamma_1\gamma_2}-\sharp\Gamma^-_{\gamma_1\gamma_2}=\Gamma^+_{\gamma_1}-\Gamma^-_{\gamma_1}+\Gamma^+_{\gamma_2}-\Gamma^-_{\gamma_2}+\gamma_1\cdot\gamma_2+1$$

から直ちに得られる。図 5 の基点の上の自己交叉が $+1$ となっている。

補題 5.1. 任意の $\gamma_1,\gamma_2\in\pi$ について次がなりたつ

$$q_\xi(\gamma_1\gamma_2)=q_\xi(\gamma_1)+q_\xi(\gamma_2)+\gamma_1\cdot\gamma_2\in\mathbb{K}.$$

ここから逆算すると積公式がなりたつように q_ξ を定義するために $+1$ が必要になる。これが先ほどの疑問 (2) の答えである。もちろん初期ベクトル v_* を正の向きにとれば $+1$ は -1 に置き換わる。積構造をみたすということは $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2$ の場合、Johnson の意味での二次形式になっている。γ が単純閉曲線の場合に、同じ値をとるから、これが Johnson の二次形式そのものである。(5.3) は generic immersion で定義されているから疑問 (1) の答えにもなっている。さらに (3) もわかったことになる。

集合 $Q(\Sigma;\mathbb{K}):=\{q:\pi\to\mathbb{K};$ 写像, $\forall\gamma_1,\forall\gamma_2\in\pi,\ q(\gamma_1\gamma_2)=q(\gamma_1)+q(\gamma_2)+\gamma_1\cdot\gamma_2\}$ を考える。この集合の元を曲面 Σ の $\mathbb{K}$-二次形式とよぶことにすると、q_ξ も曲面 Σ の $\mathbb{K}$-二次形式である。一対一対応

$$F(\Sigma;\mathbb{K})\cong Q(\Sigma;\mathbb{K}),\quad \xi\mapsto q_\xi, \tag{5.4}$$

[9] これも常識だと思いますが [25] に証明を書きました。
[10] 超楕円的写像類群で考える場合は [56] およびその文献を参照。

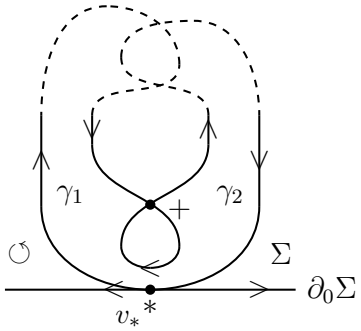


図 5: q_ξ の積公式の証明

がなりたつ。これも Johnson [15] の一般化である。

さて、短完全列 (5.1) は写像類群 Γ 加群の拡大とみることができるから、拡大類 $k_{\mathbb{K}} \in H^1(\Gamma; H^1(\Sigma;\mathbb{K}))$ を考えることができる。これが古田 [47, p.569] のやり方での Earle 類 [9] の構成を $\mathbb{K}$ に一般化したものである[11]。$\xi \in F(\Sigma;\mathbb{K})$ についてコサイクル $k_\xi : \Gamma \to H^1(\Sigma;\mathbb{K})$ を $\varphi \in \Gamma$ について $\varphi\cdot\xi - \xi = \varpi^*(k_\xi(\varphi))$ をみたすものとして定義する。コホモロジー類 $k_{\mathbb{K}}$ は、定義により、k_ξ のコホモロジー類である。コホモロジー類 $k_{\mathbb{K}}$ をコサイクルの集合とみると、種数 g が 1 以上ならば、$H^1(\Sigma;\mathbb{K})^\Gamma = 0$ だから、写像

$$F(\Sigma;\mathbb{K}) \to k_{\mathbb{K}}, \quad \xi \mapsto k_\xi, \tag{5.5}$$

は全単射である。

ここから $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし[12]、曲面 $\Sigma_{g,1}$, $g \geq 1$, を考える。任意の expansion θ の第 2 項 θ_2 は、任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ について $\theta_2(\gamma_1\gamma_2) = \theta_2(\gamma_1) + \theta_2(\gamma_2) + [\gamma_1][\gamma_2] \in H^{\otimes 2} = H_1(\Sigma;\mathbb{K})^{\otimes 2}$ をみたす。両辺の代数的交点数 $\cdot$ をとってえられる $\cdot \circ \theta_2 : \pi \to \mathbb{K}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ の二次形式である。一対一対応 (5.4) によって対応する $\mathbb{K}$-framing を $\xi_\theta \in F(\Sigma;\mathbb{K})$ とする。一方、θ は拡大第一 Johnson 準同型 $\tau_1^\theta : \Gamma \to H^* \otimes H^{\otimes 2}$ を定める。縮約写像 $\mathfrak{c} : H^* \otimes H^{\otimes 2} \to H$, $f \otimes X_1X_2 \mapsto f(X_1)X_2$, による $\mathfrak{c}_*[\tau_1^\theta] \in H^1(\Gamma; H)$ が Earle 類であることは Johnson [16], 森田 [45] によってわかっている[13]。コサイクルのレベルで次が得られた。

定理 5.2 (河澄 [26])**.** θ が symplectic expansion であるとき、コサイクルとしての一致 $\mathfrak{c} \circ \tau_1^\theta = -k_{\xi_\theta}$ がなりたつ。

これによって symplectic expansion θ の定める $\mathbb{K}$-framing が ξ_θ であることがわかる。定理の証明では、Johnson [17] の形での Dehn-Lickorish の定理を使って、非分離的単純閉曲線の右手 Dehn ツイストの場合に帰着させる。曲面 $\Sigma_{g,n+1}$, $n \geq 1$, についても、基本群の降中心列の代わりに weight filtration を考え、基本亜群を考えれば同様にできる。

最後に、別の仕事の宣伝をする。写像類群 $\Gamma_{g,1}$ の自明係数安定コホモロジー代数は Madsen-Weiss [37] で決定された。とくに有理自明係数安定コホモロジー代数は MMM

[11] Torelli 群では Chillingworth [7, 8] の観察が先行するが、古田の指摘は写像類群全体に関わる。
[12] 適切に修正すれば以下の結果は任意の単位可換環でなりたつ。
[13] この話題については Apisa-Salter [6] の最近の発展もある。

類の多項式環である。一方、有理ねじれ係数安定コホモロジー群は有理自明係数安定コホモロジー代数上の加群であるが、まだわからないことが残っている。安定コホモロジーを考えるので、そのねじれ係数は、曲面とその間の埋め込みのなす圏から $\mathbb{Q}$-ベクトル空間への函手であるべきである。Soulié [50] によって、その函手が「多項式的」かつ反変函手であるとき、ねじれ係数安定コホモロジー群は有理自明係数安定コホモロジー代数上自由である。しかし、共変函手のときねじれ係数安定コホモロジー群が有理自明係数安定コホモロジー代数上自由でない例を最初にみつけたのが Soulié-河澄 [33] である。答えは簡単で $H_1(U\Sigma;\mathbb{Q})$ がそれであった。どれくらい自由 (平坦) でないか？を測定するのが Tor 群である。 Soulié-河澄 [34] では、外積 $\Lambda^d H_1(U\Sigma;\mathbb{Q})$ を調べた。$d=2$ の場合は自由だが、$d=1, \geq 3$ では Tor 群は消えず、自由ではない。$d=3,4,5$ について Tor 群を具体的に計算したが、爆発的に複雑になる。一方、反変函手についても自由基底の与え方は未解決である。写像類群の有理ねじれ係数安定コホモロジー群について、やるべきこと/できることは残っている。

参考文献

[1] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. **355**, 123–127 (2017)

[2] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, Adv. Math. **326**, 1–53 (2018)

[3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne, Quantum Topology, **11**, 657–689 (2020)

[4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, preprint, arXiv: 1804.09566v3, to appear in: Mem. Amer. Math. Soc.

[5] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[6] P. Apisa and N. Salter, Invariant measures on moduli spaces of twisted holomorphic 1-forms and strata of dilation surfaces, preprint, arXiv: 2507.10685 (2025)

[7] D. Chillingworth, Winding numbers on surfaces, I, Math. Ann. **196**, 218–249 (1972)

[8] D. Chillingworth, Winding numbers on surfaces, II, Math. Ann. **199**, 131–153 (1972)

[9] C. Earle, Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties, Ann. of Math. **107**, 255–286 (1978)

[10] N. Enomoto and T. Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, Algebr. Geom. Topol.,**14** 627–669 (2014)

[11] B. Enriquez, Elliptic associators, Selecta Math. (N.S.) **20** (2014), no. 2, 491–584.

[12] P. Etingof, Casimirs of the Goldman Lie algebra of a closed surface, Int. Math. Res. Not. **2006** (2006), 1–5.

[13] W. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, Invent. math. **85**, 263–302, (1986)

[14] R. Hain, Hodge theory of the Turaev cobracket and the Kashiwara-Vergne problem, J. Eur. Math. Soc. **23**, 3889–3933 (2021)

[15] D. Johnson, Spin structures and quadratic forms on surfaces, J. London Math. Soc. **(2)22**, 365–373 (1980)

[16] D. Johnson, An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$, Math. Ann. **249**, 225–242 (1980)

[17] D. Johnson, The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for $\mathcal{J}$, Ann. Math. **118**, 423–442 (1983)

[18] A. Kabiraj, Center of the Goldman Lie algebra, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), no. 5, 2839–2849.

[19] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. **47** (1978), no. 3, 249–272.

[20] N. Kawazumi, A generalization of the Morita-Mumford classes of extended mapping class groups for surfaces, Invent. math. **131** 137–149 (1998)

[21] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, arXiv: 0505497 (2005)

[22] N. Kawazumi, Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces, preprint, math.GT/0603158 (2006)

[23] N. Kawazumi, On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces, Advanced Studies in Pure Mathematics (Groups of Diffeomorphisms), **52** 383–400 (2008)

[24] N. Kawazumi, The mapping class group orbits in the framings of compact surfaces, Quarterly J. Math., **69**, 1287–1302 (2018)

[25] N. Kawazumi, A topological proof of Wolpert's formula for the Weil-Petersson symplectic form in terms of the Fenchel-Nielsen coordinates, Geometriae Dedicata **219**, article number 56, (2025)

[26] N. Kawazumi, $\mathbb{K}$-framings and $\mathbb{K}$-quadratic forms on surfaces, preprint, arXiv: 2604.2753 (2026)

[27] 河澄響矢, トポロジーとリー代数 — 曲線を曲線で微分する, 数学の現在 π, 斎藤, 河東, 小林編, 東京大学出版会, 86–106, (2016)

[28] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum Topology **5** 347–423 (2014)

[29] N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersection of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), no. 6, 2711–2762.

[30] N. Kawazumi and Y. Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, 'Handbook of Teichmueller theory', edited by A. Papadopoulos, Volume V, EMS Publishing House, Zurich, 2015, pp. 98–165.

[31] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable characteristic classes, Math. Res. Lett. **3** (1996), 629–641.

[32] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the Mumford-Morita-Miller classes, preprint, available at https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/preprint/pdf/2001-13.pdf, 2001.

[33] N. Kawazumi and A. Soulié, Stable twisted cohomology of the mapping class groups in the unit tangent bundle homology, Bull. Lond. Math, Soc., **56** 3358–3381 (2024)

[34] N. Kawazumi and A. Soulié, Stable twisted cohomology of the mapping class groups in the exterior powers of the unit tangent bundle homology, arXiv: 2311.01791 (2023)

[35] T. Kitano, Johnson's homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori, Topology Appl. **69** 165–172 (1996)

[36] C. Labruere and L. Paris, Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups, Algebr. Geom. Topol., **1** 73–114 (2001)

[37] I. Madsen and M. Weiss, The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford ' s conjecture, Ann. of Math., **165**, 843–941 (2007)

[38] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, Bull. Soc. Math. France **140** (2008), 101–161.

[39] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev's loop operations, Quantum Topol. **9** (2018), no. 1, 39–117.

[40] G. Massuyeau and V. G. Turaev, Fox pairngs and generalized Dehn twists, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 6, 2403–2456.

[41] E. Y. Miller, The homology of the mapping class group, J. Differemtial Geom. **24** (1986), 1–14.

[42] 門田直之, 写像類群の生成系に関する研究の変遷, 第 69 回トポロジーシンポジウム講演集, https://www.mathsoc.jp/~topology/topsymp/2022/ts2022Monden.pdf (2022)

[43] S. Morita, Characteristic classes of surface bundles, Invent. math. **90** (1987) 551–577.

[44] S. Morita, Families of jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, I, Ann. Inst. Fourier, **39** 777–810 (1989)

[45] S. Morita, The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, Invent. Math. **111**, 197-224 (1993)

[46] S. Morita, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 159–186.

[47] S. Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles, J. Diff. Geom. **47** 560–599 (1997)

[48] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry*, Progr. Math. **36**, Birkhäuser, Boston, 1983, 271–328.

[49] O. Randal-Williams, Homology of the moduli spaces and mapping class groups of framed, r-Spin and Pin surfaces, J. Topology **7** 155–186 (2014)

[50] A. Soulié, Some computations of stable twisted homology for mapping class groups, Comm. Algebra **48** 2467–2491 (2020)

[51] T. Taniguchi, Drinfeld associators and Kashiwara-Vergne associators in higher genera, preprint, arXiv:2511.00473v3 (2026)

[52] T. Taniguchi, The framed version of the universal KZB connection in higher genera, preprint, arXiv:2607.04342 (2026)

[53] V. G. Turaev, Intersections of loops in two-dimensional manifolds, Math. USSR Sbornik **35** 229–250 (1979)

[54] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup., **24**. 635–704 (1991)

[55] A. Wakuda, Separability Criteria for loops via the Goldman bracket, preprint, arXiv: 2511.18503 (2025)

[56] Gefei Wang, The Artin braid group actions on the set of spin structures on a surface, Hokkaido Math. J., **52** 427–462 (2023)

以上。

Chromatic structure in the fundamental groups of directed graphs

Yichen Tong

Abstract

Directed graphs are basic combinatorial objects, and discrete homotopy theory studies graphs and directed graphs using methods from algebraic topology. This extended abstract surveys a series of ideas in which homotopy and homology theories for directed graphs are linked by Hurewicz and Seifert–van Kampen-type theorems. The central objects are the r-fundamental groupoids of Di–Ivanov–Mukoseev–Zhang and the magnitude–path spectral sequence of Asao. The former form a family of fundamental groupoids that is sensitive to the quasimetric structure of a directed graph, whereas the latter interpolates between magnitude homology, path homology, and reachability homology. The main message is that the two filtrations are linked by a one-dimensional Hurewicz theorem: the $(1,0)$-entry of the spectral sequence is the abelian shadow of the corresponding r-fundamental group. I explain this through concrete examples, a combinatorial model of the groupoids in terms of paths and C_r-homotopies, a Hurewicz theorem, and a Seifert–van Kampen theorem with applications to Mayer–Vietoris sequences. I also briefly describe the higher homotopy groups of directed graphs introduced by Li–Wu–Yau–Zhang, their Hurewicz theorem with singular cubical homology, and a more general cubical-set framework that suggests future higher-groupoid and higher Seifert–van Kampen theorems.

This note is based on joint work with Daisuke Kishimoto.

1 Directed graphs, maps, and the box product

In this section, we fix notation and recall the basic definitions. A *directed graph* G consists of a set of vertices $V(G)$ and a set of directed edges

$$E(G) \subset V(G) \times V(G) \setminus \Delta,$$

where $(x, y) \in E(G)$ means an edge from x to y. In this convention there are no loop edges and no multiple edges with the same direction. Thus an edge from x back to itself and two distinct arrows from x to y are excluded. The two opposite arrows $x \to y$ and $y \to x$, however, may coexist, because they are two different ordered pairs. A subgraph is defined in the evident way. The underlying undirected graph $\widehat{G}$ is obtained by forgetting directions; if both (x, y) and (y, x) are present, then $\widehat{G}$ has two edges between x and y.

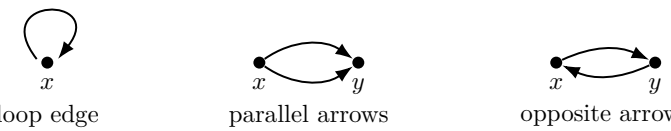


Figure 1: Our convention for directed graphs excludes loop edges and multiple edges with the same direction, but it allows a pair of opposite directed edges.

Maps of directed graphs are slightly more flexible than graph homomorphisms. A map $f\colon G \to H$ is a function on vertices such that every directed edge (x, y) of G is sent either to a directed edge $(f(x), f(y))$ of H or is collapsed to a vertex, that is, $f(x) = f(y)$. Thus maps are allowed to contract edges. This is important because homotopies of paths and maps in this theory are combinatorial analogues of deformation, and degeneracies must be allowed.

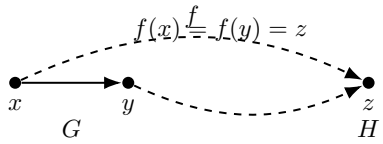


Figure 2: A map of directed graphs may collapse an edge to a vertex. This is why maps are not required to send every edge to an edge.

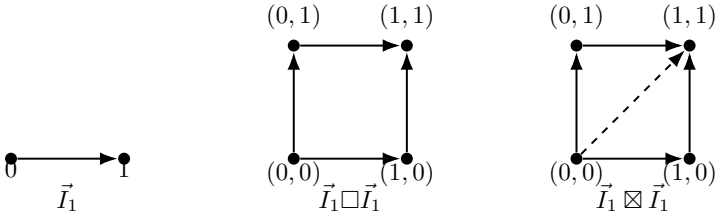


Figure 3: The directed interval, its box square, and its strong square. The strong product has the diagonal edge; the box product does not.

The *box product* $G \square H$ is the directed graph with

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H),$$

and an edge $((g_0, h_0), (g_1, h_1))$ when exactly one coordinate moves along an edge and the other coordinate remains fixed. Thus either $g_0 = g_1$ and $(h_0, h_1) \in E(H)$, or $(g_0, g_1) \in E(G)$ and $h_0 = h_1$. The *strong product* $G \boxtimes H$ is obtained by adding the diagonal edges in which both coordinates move simultaneously. The strong product is the categorical product in DiGraph, while the box product is the cubical product used to build grid-shaped homotopies. Figure 3 shows the smallest example.

For a directed graph G, define the directed distance

$$d_G(x, y) = \min\{n \mid x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n = y\},$$

with value ∞ if no directed path exists. This is a *quasimetric*: $d_G(x, y)$ need not equal $d_G(y, x)$, but the triangle inequality holds. For a tuple $(x_0, \ldots, x_n)$, set

$$L(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} d_G(x_i, x_{i+1}).$$

The length L is the bridge between the homotopical filtration and the homological spectral sequence below.

2 From path homology and fundamental groups to MPSS and filtered nerves

In this section, we introduce several algebraic-topological invariants of directed graphs and explain how they are related.

2.1 Homological invariants of a directed graph

Path homology, introduced by Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau [5], is a homology theory of directed graphs that remembers the directions of edges. The path homology of a directed graph G is denoted by $\mathrm{PH}_*(G)$. Its construction is inspired by the simplicial homology theory: one starts with allowed paths in G and takes the alternating sum obtained by deleting vertices, but terms that are not allowed paths must be handled carefully. This produces a genuinely directed invariant. For instance, in degree one, path homology records directed cycles in a way that differs from the ordinary homology of the underlying one-dimensional simplicial complex. Path homology also has familiar formal properties, such as a Künneth formula for box products, and Mayer–Vietoris sequences under appropriate hypotheses.

Magnitude homology, introduced by Hepworth–Willerton [10], is another homological invariant of directed graphs, originally motivated by the categorification of graph magnitude. The magnitude homology of a directed graph G is denoted by $\mathrm{MH}^*_*(G)$; the extra grading records length. A third invariant is reachability homology, introduced by Hepworth–Roff [8]. The reachability homology of a directed graph G is denoted by $\mathrm{RH}_*(G)$. It is built from tuples of vertices that are mutually reachable in the directed sense, and it is the limiting homology to which the magnitude–path spectral sequence converges. Hepworth–Roff also studied the bigraded form of path homology and the MPSS from this viewpoint [9].

Asao [1] showed that magnitude homology and path homology are joined by a spectral sequence, called the *magnitude–path spectral sequence* (MPSS). For readers who do not usually use spectral sequences, the following informal picture is enough. A spectral sequence is a sequence of successive approximations of bigraded modules

$$E^1 \Rightarrow E^2 \Rightarrow E^3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow E^\infty$$

to the homology of a filtered chain complex. Each page E^{r+1} is obtained as the homology of the preceding page E^r with respect to a differential d^r, and the limiting page E^∞ encodes the associated graded information of the desired homology.

For the MPSS, the filtration comes from directed length. The first pages have the form

$$E^1_{p,q}(G) \cong \mathrm{MH}^p_{p+q}(G), \qquad E^2_{p,0}(G) \cong \mathrm{PH}_p(G),$$

and the spectral sequence converges to reachability homology $\mathrm{RH}_*(G)$. Thus, the MPSS starts with magnitude homology, has path homology on the horizontal axis of the second page, and eventually converges to reachability homology. The term $E^r_{1,0}(G)$ may be regarded as a group of one-dimensional cycles after imposing all relations visible up to the r-th stage.

2.2 Homotopical invariants of a directed graph

Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau also introduced a fundamental group $\pi_1(G, v)$ for a pointed directed graph (G, v) [6]. Its loops are directed-graph paths in the flexible sense explained below, and its equivalence relation is generated by C-homotopies. This construction is a directed analogue of the

fundamental group of a space: it records nonabelian information about loops before passing to homology.

Di–Ivanov–Mukoseev–Zhang later introduced a filtered homotopical model that parallels the MPSS [4]. Let $\mathrm{N}(G)$ be the nerve whose n-simplices are tuples $(x_0, \dots, x_n)$ of finite directed length

$$L(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} d_G(x_i, x_{i+1}).$$

The filtered pieces are

$$\mathrm{N}_n^r(G) = \{(x_0, \dots, x_n) \mid L(x_0, \dots, x_n) \le r\}, \qquad r = 0, 1, 2, \dots,$$

and they form a filtration

$$\mathrm{N}^0(G) \subset \mathrm{N}^1(G) \subset \mathrm{N}^2(G) \subset \cdots \subset \mathrm{N}(G).$$

Informally, $\mathrm{N}(G)$ remembers the directions but not the length bound, whereas the filtration records how much directed length is allowed.

For $1 \le r < \infty$, the *r-fundamental groupoid* is the edge-path groupoid of this filtered nerve:

$$\Pi_1^r(G) = \Pi_1(\mathrm{N}^r(G)),$$

and $\Pi_1^\infty(G) = \Pi_1(\mathrm{N}(G))$. These groupoids form a natural sequence

$$\Pi_1^1(G) \longrightarrow \Pi_1^2(G) \longrightarrow \Pi_1^3(G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Pi_1^\infty(G),$$

which is the identity on objects and is surjective on hom-sets. At a basepoint v, we write

$$\pi_1^r(G, v) = \Pi_1^r(G)(v, v).$$

Two identifications explain why this is a genuine extension of older directed fundamental groups:

$$\Pi_1^1(G) \cong \text{the edge-path groupoid of } \widehat{G}, \qquad \pi_1^2(G, v) \cong \pi_1(G, v).$$

Thus Π_1^1 forgets the directions, while Π_1^2 recovers the GLMY fundamental group. Higher values of r retain information about the directed length scale at which loops become filled.

2.3 The Hurewicz connection

The homological and homotopical constructions above are not independent. The same length filtration produces both the MPSS and the tower of r-fundamental groupoids:

$$\text{homotopy:} \qquad \Pi_1^1(G) \longrightarrow \Pi_1^2(G) \longrightarrow \Pi_1^3(G) \longrightarrow \cdots$$

$$\text{homology:} \qquad E^1(G) \Longrightarrow E^2(G) \Longrightarrow E^3(G) \Longrightarrow \cdots .$$

The bridge is a Hurewicz theorem. In the classical GLMY case, the Hurewicz map identifies $\mathrm{PH}_1(G)$ with the abelianization of $\pi_1(G, v)$ under the usual connectedness assumption. The result discussed here refines this statement page by page: for each $r \ge 2$, the group $E^r_{1,0}(G)$ is the abelianization of $\pi_1^r(G, v)$, and the limiting statement identifies $\mathrm{RH}_1(G)$ with the abelianization of $\pi_1^\infty(G, v)$. The next section gives the combinatorial model that makes this statement visible.

3 A combinatorial description of the r-fundamental groupoids

The simplicial definition of $\Pi_1^r(G)$ is concise, but a path-based description is more useful in a talk. Let I_n be a directed line graph with vertices $0, 1, \ldots, n$, where each consecutive edge may point in either direction. A *path* in G is a map $I_n \to G$. Since the orientations in I_n may alternate, such a path is a zig-zag in G; a map $I_n \to G$ is an n-step path. A *directed path* is the special case in which the domain is $\vec{I}_n$, so all edges of the domain point forward:

$$0 \to 1 \to \cdots \to n.$$

Thus, a directed path always follows the arrows in G, whereas a general path may move forward and backward along directed edges by choosing orientations in the domain. Concatenation and reversal of paths are defined as usual.



Figure 4: A path in G may be a zig-zag, whereas a directed path follows arrows in the forward direction.

The elementary relation is controlled by a graph Γ_r. For $r \geq 2$, Γ_r has two directed paths of length r with the same initial and terminal vertices:

$$u_0 = v_0 \to u_1 \to \cdots \to u_{r-1} \to u_r = v_r,$$

$$v_0 = u_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{r-1} \to v_r = u_r.$$

A map $\Gamma_r \to G$ therefore gives two directed paths of length r with the same endpoints. Informally, a C_r-homotopy permits the insertion or deletion, within a larger path, of a loop that goes once around such an image of Γ_r.

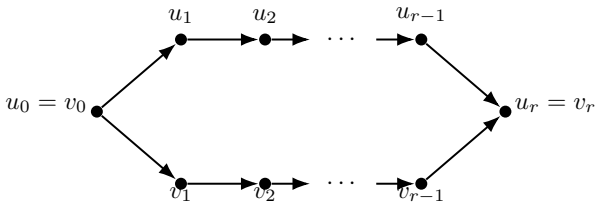


Figure 5: The graph Γ_r. A map $\Gamma_r \to G$ witnesses an elementary C_r-homotopy.

We specify the cases when $r = 0, 1, 2$. A C_0-homotopy inserts or deletes a one-step constant path. Thus, the constant path of length one at x is equivalent to the length-zero constant path at x; this is the reparameterization relation. A C_1-homotopy inserts or deletes a backtrack $x \to y \leftarrow x$. Thus it is the weakest equivalence relation under which the concatenation of a path with its inverse is identified with the constant path.

For the C_2-homotopy, one inserts or deletes the clockwise perimeter of the image of a map $\Gamma_2 \to G$. Such a map may be degenerate. Besides the backtrack already permitted at scale one, its basic nonconstant images are the directed triangle and the directed square shown in Figure 6; these are the elementary C_2 configurations described in [11, Figure 3].

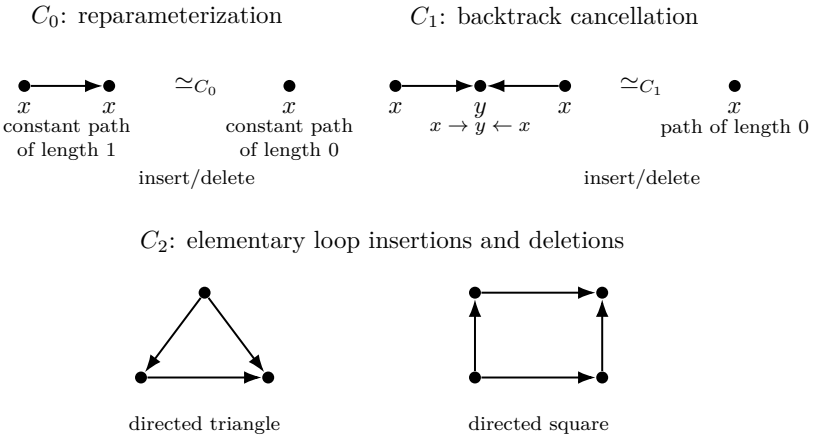


Figure 6: Elementary C_r-homotopy relations.

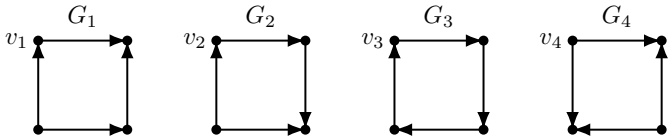
Precisely, for $1 \le r < \infty$, one defines a groupoid $\widetilde{\Pi}_1^r(G)$ whose objects are the vertices of G and whose morphisms are C_r-homotopy classes of paths. Concatenation gives composition, and reversal gives inverses. The combinatorial theorem is

$$\widetilde{\Pi}_1^r(G) \cong \Pi_1^r(G).$$

For $r = \infty$, two paths are equivalent if they are C_r-homotopic for some finite r.

This model is the one to keep in mind. The parameter r records how long a directed "diamond" is allowed to be before its two sides are identified. Small r imposes only short local relations; large r sees larger directed shortcuts.

Example 3.1 (Four directed squares)**.** *Consider the following four orientations of a square, each based at its upper-left vertex v_i.*



Their r-fundamental groups at the chosen basepoints are

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$
G_1	$\mathbb{Z}$	0	0	0
G_2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0
G_3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
G_4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

This example, from [11, Example 2.7], shows that the whole sequence of r-fundamental groupoids can distinguish directed graphs that are not distinguished by looking at only one fixed value of r.

Example 3.2 (A loop killed at a prescribed scale)**.** *Let Γ_m itself be regarded as a directed graph, and take the basepoint $v = u_0 = v_0$. The loop that follows the upper path from v to $u_m = v_m$ and*

then returns along the lower path is visible at small scales, but it is killed by the C_m-relation. More precisely,

$$\pi_1^r(\Gamma_m, v) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r < m, \\ 0, & r \geq m. \end{cases}$$

This is the basic reason the sequence

$$\pi_1^1(G, v) \to \pi_1^2(G, v) \to \cdots$$

can contain more information than a single fundamental group: it records the directed length scale at which a loop becomes filled.

Example 3.3 (Products)**.** *For $r \geq 2$, the r-fundamental groupoid behaves well with products:*

$$\Pi_1^r(G \square H) \cong \Pi_1^r(G) \times \Pi_1^r(H) \cong \Pi_1^r(G \boxtimes H).$$

In the box square of Figure 3, the two directed paths from $(0,0)$ to $(1,1)$ differ by the standard directed square. The product theorem says that, from the viewpoint of $r \geq 2$ fundamental groupoids, the cubical and strong products have the same one-dimensional homotopy theory.

The Hurewicz theorem: statement and idea

The Hurewicz theorem compares this sequence of r-fundamental groups with the $(1,0)$-line of the MPSS.

Theorem 3.4 (Hurewicz theorem for π_1^r and MPSS)**.** *Let (G, v) be a connected pointed directed graph. There is a commutative ladder*

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1^2(G,v) & \longrightarrow & \pi_1^3(G,v) & \longrightarrow & \pi_1^4(G,v) & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle h^2} & & \downarrow{\scriptstyle h^3} & & \downarrow{\scriptstyle h^4} & & \\ E^2_{1,0}(G) & \longrightarrow & E^3_{1,0}(G) & \longrightarrow & E^4_{1,0}(G) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

such that each h^r is the abelianization map. Moreover, there is a limiting Hurewicz map

$$h^\infty \colon \pi_1^\infty(G, v) \longrightarrow \mathrm{RH}_1(G)$$

which is likewise the abelianization map.

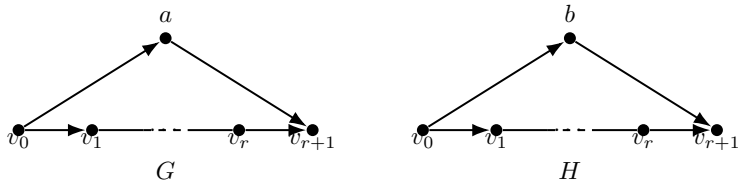
The idea of proof is conceptually simple. First, $\Pi_1^r(G)$ is the fundamental groupoid of the filtered nerve $\mathrm{N}^r(G)$. Thus, the classical Hurewicz map for $|\mathrm{N}^r(G)|$ gives a map from $\pi_1^r(G, v)$ to the first homology of the r-th filtered piece. Second, the MPSS is built from the same filtration. Its differentials impose homological versions of the C_r-relations. Therefore, after abelianization, the path-level relation measured by $\Pi_1^r(G)$ matches the homological relation measured by $E^r_{1,0}(G)$. At $r = 2$, the theorem recovers the GLMY Hurewicz theorem because $\pi_1^2(G, v) \cong \pi_1(G, v)$ and $E^2_{1,0}(G) \cong \mathrm{PH}_1(G)$.

One should not think of the theorem merely as an analogy. It says that MPSS has a genuine one-dimensional homotopy interpretation: its $(1,0)$-line is the abelianization of the corresponding stage of the fundamental group tower.

4 Seifert–van Kampen theorem and Mayer–Vietoris sequences

For ordinary spaces, the Seifert–van Kampen theorem computes the fundamental group of a union from the fundamental groups of the pieces. In the directed graph setting this is more delicate. Directed homotopies can use a filling whose edges lie partly in G and partly in H, even if neither piece contains the filling. The following example is the warning sign.

Example 4.1 (Failure of naive Seifert–van Kampen theorem)**.** *Fix $r \geq 2$ and consider the following pair of directed graphs. Each piece contains a loop based at v_0, but the directed filling that compares the two loops appears only after the pieces are united.*



In this example, $\pi_1^r(G, v_0)$ and $\pi_1^r(H, v_0)$ are generated by loops α_G and α_H, while $G \cap H$ is 1-homotopy equivalent to a point. If the usual pushout theorem held without hypotheses, the two generators would remain unrelated in the union. However, in $G \cup H$ one can form a C_2-homotopy using the vertex a from G and the vertex b from H, giving the relation $\alpha_G \alpha_H^{-1} = 1$. Thus, the naive pushout is too large.

The solution of this is a separability condition. A degenerate Γ_r in $G \cup H$ is the image of a map $\Gamma_r \to G \cup H$, allowing collapses and identifications. A pair (G, H) is *r-separable* if every degenerate Γ_r in the union can be subdivided into degenerate Γ_r's each lying entirely in G or entirely in H. In other words, every elementary directed filling in the union can be decomposed into elementary fillings in the pieces. This is exactly the condition needed to prevent new mixed C_r-relations.

Theorem 4.2 (Seifert–van Kampen theorem for r-fundamental groupoids)**.** *Let (G, H) be an r-separable pair of directed graphs, with $1 \leq r \leq \infty$. Then the square*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1^r(G \cap H) & \longrightarrow & \Pi_1^r(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1^r(H) & \longrightarrow & \Pi_1^r(G \cup H) \end{array}$$

is a pushout of groupoids.

The proof uses the combinatorial description above. One constructs the algebraic pushout groupoid and the natural functor to $\Pi_1^r(G \cup H)$. Surjectivity comes from the fact that every path in the union is a concatenation of edges from the two pieces. Injectivity is where r-separability enters: every relation generated by a C_r-homotopy in the union can be subdivided into relations already present in one piece or the other. Thus no mixed relation is missing from the pushout.

Passing to based groups gives the corresponding group-level statement when the intersection is connected. Combining this result with the Hurewicz theorem gives a Mayer–Vietoris sequence for the $(1, 0)$-line of the MPSS. If (G, H) is r-separable, $2 \leq r < \infty$, and G, H, and $G \cap H$ are connected, then

$$E_{1,0}^r(G \cap H) \xrightarrow{((i_G)_*, (i_H)_*)} E_{1,0}^r(G) \oplus E_{1,0}^r(H) \xrightarrow{(j_G)_* - (j_H)_*} E_{1,0}^r(G \cup H) \to 0$$

is exact. This is one of the main applications: the homotopical pushout theorem yields a homological exact sequence for MPSS terms.

There is also a pushout version. Given a pushout of directed graphs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ i\ } & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \cup_A H, \end{array}$$

one defines an r-cofibration $i\colon A \to G$, interpolating between the cofibrations used in path homology and the long cofibrations used in reachability homology. If i is an r-cofibration, then for all $s \geq r$ the corresponding square of Π_1^s is a pushout. Consequently, for finite $s \geq r$, one obtains exact Mayer–Vietoris sequences for $E^s_{1,0}$. This gives a partial answer to the question of whether cofibration-type hypotheses imply Mayer–Vietoris sequences beyond the E^1 and E^2 pages.

5 Higher homotopy groups and singular cubical homology

The story above is one-dimensional: it concerns fundamental groupoids and the $(1,0)$-line of a spectral sequence. A natural next question is what higher homotopy theory of directed graphs should look like.

Li-Wu-Yau-Zhang introduced higher homotopy groups $\bar{\pi}_n(G, v)$ of a pointed directed graph [12]. Their representatives are spherical n-dimensional grids. A grid is a map

$$I_1 \square I_2 \square \cdots \square I_n \longrightarrow G,$$

where each I_k is a directed line graph. Spherical means that the boundary of the box is sent to the basepoint v. Homotopies are generated by subdivisions and elementary grid homotopies. For $n = 1$, this recovers the GLMY fundamental group:

$$\bar{\pi}_1(G, v) \cong \pi_1(G, v).$$

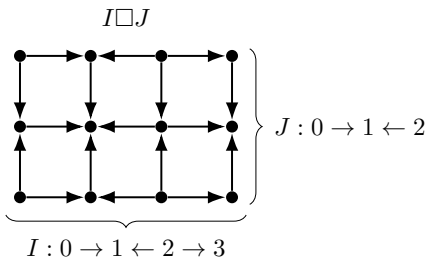


Figure 7: A two-dimensional grid directed graph built as the box product of two zig-zag directed line graphs.

The natural homology target for these higher groups is not path homology in all degrees, but singular cubical homology [7]. Let $Q_n(G)$ be the free abelian group generated by maps

$$(\vec{I})^{\square n} \longrightarrow G,$$

modulo degenerate grids, with the usual cubical boundary. The resulting homology is denoted $\mathrm{QH}_*(G)$. There is a discrete Hurewicz map [13]

$$h_*\colon \bar{\pi}_n(G,v) \longrightarrow \mathrm{QH}_n(G),$$

which sends a spherical grid to the signed sum of its elementary directed n-cubes.

Theorem 5.1 (Higher Hurewicz theorem for directed graphs)**.** *Let (G,v) be a pointed directed graph. If G is $(n-1)$-connected in the cubical-nerve sense, then*

$$h_*\colon \bar{\pi}_n(G,v) \longrightarrow \mathrm{QH}_n(G)$$

is the abelianization for $n=1$ and an isomorphism for $n \geq 2$.

This theorem extends the one-dimensional GLMY Hurewicz theorem, since the first singular cubical homology agrees with the first path homology. It also generalizes the Hurewicz theorem for undirected graphs proved in [2]. Finally, it explains why singular cubical homology is the correct higher-dimensional target: it is built from exactly the same cubical grids that represent higher directed homotopy.

The proof comes from a more general result for cubical sets. One defines discrete homotopy groups $\pi_n^{\delta}(K,v)$ for pointed cubical sets. For quasisymmetric cubical sets, these groups are naturally isomorphic to the ordinary homotopy groups of their geometric realizations:

$$\pi_*^{\delta}(K,v) \cong \pi_*(|K|,v).$$

There is a Hurewicz theorem for these discrete homotopy groups: if K is $(n-1)$-connected, then

$$\pi_n^{\delta}(K,v) \longrightarrow H_n(K)$$

is abelianization for $n=1$ and an isomorphism for $n \geq 2$. The directed-graph theorem follows by applying this cubical theorem to the cubical nerve $\mathrm{N}_1 G$ and identifying

$$\pi_n^{\delta}(\mathrm{N}_1 G, v) \cong \bar{\pi}_n(G,v), \qquad H_n(\mathrm{N}_1 G) \cong \mathrm{QH}_n(G).$$

6 Future directions

The results above suggest that directed graphs should have a richer nonabelian homotopy theory than a sequence of fundamental groupoids alone. I conclude by emphasizing three directions.

Higher groupoid models. The r-fundamental groupoid models one-dimensional directed homotopy at a fixed length scale. The LWYZ higher homotopy groups show that higher directed spheres exist and admit a Hurewicz theorem. A natural next step is to construct higher-groupoid or higher-categorical models of a directed graph whose one-dimensional truncations recover $\Pi_1^r(G)$ and whose higher homotopy groups recover the grid-based groups. Such a model should remember not only groups but also compositions of higher directed homotopies.

Higher Seifert–van Kampen theorem. The current Seifert–van Kampen theorem is a pushout theorem for Π_1^r. A higher version should describe the homotopy type of a union by a higher pushout, under a suitable higher-separability condition requiring every elementary directed n-dimensional filling in the union to decompose into fillings in the pieces. This would be the directed-graph analogue of the principle that homotopy colimits, rather than ordinary colimits, control gluing.

Applications to Mayer–Vietoris sequences. The one-dimensional Seifert–van Kampen theorem gives exact Mayer–Vietoris sequences for $E^r_{1,0}$ of the MPSS. A higher-groupoid theorem should produce higher Mayer–Vietoris sequences or exact couples for other MPSS entries, possibly explaining more of the differentials in the spectral sequence through explicit directed homotopies. In this sense, the long-term goal is not merely to compute invariants, but to understand the geometric meaning of the MPSS page by page.

References

[1] Y. Asao, *Magnitude homology and path homology*, Bull. Lond. Math. Soc. **55** (2023), no. 1, 375-398.

[2] D. Carranza and C. Kapulkin, *Cubical setting for discrete homotopy theory, revisited*, Compositio Math. **160** (2024), no. 12, 2856-2903.

[3] D. Carranza, B. Doherty, K. Kapulkin, M. Opie, M. Sarazola, and L. Wong, *Cofibration category of digraphs for path homology*, Algebr. Comb. **7** (2024), no. 2, 475-514.

[4] S. Di, S. O. Ivanov, L. Mukoseev, and M. Zhang, *On the path homology of Cayley digraphs and covering digraphs*, J. Algebra **653** (2024), 156-199.

[5] A. Grigor'yan, Y. Lin, Y. Muranov, and S.-T. Yau, *Homologies of path complexes and digraphs*, arXiv:1207.2834.

[6] A. Grigor'yan, Y. Lin, Y. Muranov, and S.-T. Yau, *Homotopy theory for digraphs*, Pure Appl. Math. Q. **10** (2014), no. 4, 619-674.

[7] A. Grigor'yan and Y. Muranov, *On homology theories of cubical digraphs*, Pacific J. Math. **322** (2023), no. 1, 39-58.

[8] R. Hepworth and E. Roff, *The reachability homology of a directed graph*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2025), no. 3, rnae280.

[9] R. Hepworth and E. Roff, *Bigraded path homology and the magnitude-path spectral sequence*, arXiv:2404.06689.

[10] R. Hepworth and S. Willerton, *Categorifying the magnitude of a graph*, Homology Homotopy Appl. **19** (2017), no. 2, 31-60.

[11] D. Kishimoto and Y. Tong, *The fundamental group and the magnitude-path spectral sequence of a directed graph*, J. Lond. Math. Soc. (2) **112** (2025), no. 1, Paper No. e70210.

[12] J. Li, J. Wu, S.-T. Yau, and M. Zhang, *Homotopy groups and Puppe sequence of digraphs*, arXiv:2402.01110.

[13] S. Theriault, J. Wu, S.-T. Yau, and M. Zhang, *Calculating higher digraph homotopy groups*, arXiv:2504.04119.

[14] D. Kishimoto and Y. Tong, *Discrete homotopy groups of cubical sets*, preprint.

マトロイドにおける多項式の圏化について

山形　颯（福岡大学）*

概　　要

Khovanov は，Jones 多項式を次数付き Euler 標数として復元するホモロジー理論を構成した．これを契機として，同様の構成によるグラフや超平面配置など様々な組合せ論的対象に対する多項式の圏化が研究されている．本稿では，マトロイドの特性多項式および符号つき Tutte 多項式の圏化について概説する．

1　マトロイドと特性多項式

この節ではマトロイドに関する基本的な定義と例，および特性多項式について述べる．主な参考文献としては [2, 7, 8, 11] を参照されたい [*1]．

1.1　マトロイドの定義と例

マトロイドを定義する前に，例を述べる．

例 1.1. $\mathbb{R}$ 上の行列

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える．$E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ を列番号の集合とする．$\mathcal{I}$ を E の部分集合 I の族であって，I に添字付けられた列ベクトルが $\mathbb{R}$ 上で線形独立なもの全体とする．この時，$\mathcal{I}$ は，$E \setminus \{7\}$ の 3 元以下の部分集合のうち，$\{1,2,4\}$，$\{2,3,5\}$，$\{2,3,6\}$，および $\{5,6\}$ を含むものを除いたもの全体からなる．

このような例を念頭に，より一般の集合に対し線型独立性が定義できるよう抽象化された概念がマトロイドで，1935 年に Nakasawa[6, 10], Whitney [12] らによって独立に導入された．

定義 1.2. マトロイド M とは集合 E と以下の条件 (I1)-(I3) を満たす E の部分集合族 $\mathcal{I}$ の組 $(E,\mathcal{I})$ のことをいう．

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$;

(I2) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$;

(I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies$ ある $e \in I_2 \setminus I_1$ が存在して $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

E はマトロイド M の**台集合**，$\mathcal{I}$ の元はマトロイド M の**独立集合**と呼ばれ，$I \notin \mathcal{I}$ ならば I は**従属集合**と呼ばれる．

マトロイドには多くの特徴づけが知られており，それらを定義として採用されることもしばしばある．次のものはそのうちの一つであり，ランク関数を用いた特徴づけである．

* e-mail: so.yamagata@fukuoka-u.ac.jp

キーワード：マトロイド，グラフ，超平面配置，彩色多項式，特性多項式，圏化

[*1] 本稿では扱わないが，有向マトロイド [1] というものがあり，こちらは超平面配置における Salvetti complex など，よりトポロジーに関連した対象として知られる．

命題 1.3. E を集合とする．また関数 $\mathrm{rank}_M : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が次の条件を満たすとする．

1. $X \subset E$ に対し，$0 \leq \mathrm{rank}_M(X) \leq |X|$;
2. $X_1 \subset X_2 \subset E \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}_M(X_1) \leq \mathrm{rank}_M(X_2)$;
3. $X_1, X_2 \subset E \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}_M(X_1) + \mathrm{rank}_M(X_2) \geq \mathrm{rank}_M(X_1 \cap X_2) + \mathrm{rank}_M(X_1 \cup X_2)$.

ここで $\mathcal{I} = \{X \subset E \mid \mathrm{rank}_M(X) = |X|\}$ は独立集合全体の集合であり，特にマトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ が得られる．rank_M をマトロイド M の**ランク関数**という．

ここでマトロイドの例をいくつか挙げる．

例 1.4 (一様マトロイド)**.** 台集合として $E = \{1, \ldots, n\}$ とし，$S \subset E$ に対し，ランク関数を $\mathrm{rank}_{U_{k,n}}(S) = \min\{k, |S|\}$ と定義する．この時ランク関数はマトロイドのランク関数の公理を満たすことが確かめられる．ここで得られるマトロイド $U_{k,n} = (E, \mathrm{rank}_{U_{k,n}})$ をランク k の一様マトロイドという．

例 1.5 (線形マトロイド)**.** $A = (v_1, \ldots, v_n)$ を体 $\mathbb{F}$ 上の $m \times n$ 行列とする．ここで v_i は A の第 i 列ベクトルである．台集合を $E = \{1, \ldots, n\}$ とし，$S \subset E$ に対し，ランク関数を $\mathrm{rank}_{M(A)}(S) = \mathrm{rank}(A_S)$ と定義する．ただし A_S は S に属する列ベクトルからなる部分行列を表す．この時ランク関数はマトロイドのランク関数の条件を満たすことが確かめられる．ここで得られるマトロイド $M(A) = (E, \mathrm{rank}_{M(A)})$ を線形マトロイドという．

例 1.6 (グラフィックマトロイド)**.** G を頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$（ループや多重辺を許す）をもつグラフとする．台集合を $E = E(G)$ とし，$S \subset E$ に対し，ランク関数を $\mathrm{rank}_{M(G)}(S) = |V(G)| - k([G; S])$ と定義する．ここで，$[G; S]$ は頂点集合として $V(G)$，辺集合として $S \subset E(G)$ をもつグラフ（スパニンググラフと呼ばれる）であり，$k([G; S])$ は $[G; S]$ の連結成分の数を表す．この時ランク関数はマトロイドのランク関数の公理を満たすことが確かめられる．ここで得られるマトロイド $M(G) = (E(G), \mathrm{rank}_{M(G)})$ をグラフィックマトロイドという．

マトロイド M が体 $\mathbb{F}$ 上の線形マトロイドで表される時，M を **$\mathbb{F}$-表現可能マトロイド**という．例えばグラフィックマトロイドは任意の体 $\mathbb{F}$ 上で表現可能であることが知られている．

定義 1.7. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとする．M の**双対マトロイド** M^* を，台集合を E とし，ランク関数を $\mathrm{rank}_{M^*}(X) = |X| + \mathrm{rank}_M(E \setminus X) - \mathrm{rank}_M(E)$ と定義することで得られるマトロイドとする．

定義 1.8.

- $S \subseteq E$ が**サーキット**であるとは，S が最小の従属集合であることをいう．
- $S \subseteq E$ が**コサイクル**であるとは，S が M^* のサーキットであることをいう．

1.2 マトロイドに付随する（特性）多項式

定義 1.9. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとし，$e, e_1, e_2 \in E$ とする．

- e が**ループ**であるとは，$\mathrm{rank}_M(e) = 0$ であることをいう．
- e が**コループ**であるとは，$\mathrm{rank}_M(E) - \mathrm{rank}_M(E \setminus e) = 1$ であることをいう．
- e_1 と e_2 が**平行**であるとは，$\mathrm{rank}_M(\{e_1, e_2\}) = 1$ であることをいう．

注意 1.10. グラフィックマトロイドにおけるループは辺としてのループ，コループはブリッジ（その辺を除くとグラフの連結成分が 1 つ増えるような辺），平行元は多重辺にそれぞれ対応する．

定義 1.11. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとし，$e \in E$ とする．

- M の e による**削除** $M \setminus e$ を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M \setminus e}(S) = \mathrm{rank}_M(S)$

により定義する．

- M の e による縮約 M/e を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M/e}(S) = \mathrm{rank}_M(S \cup e) - \mathrm{rank}_M(e)$ により定義する．

注意 1.12.
- A を行列，$M(A)$, $\mathcal{A}(A)$ をそれぞれ A から定まる線形マトロイド，中心的超平面配置とする．この時，$\chi_{M(A)}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}(A)}(\lambda)$ が成り立つ．
- グラフ G の彩色多項式を $P_G(\lambda)$，グラフ G から定まるグラフィックマトロイド $M(G)$ の特性多項式を $\chi(M(G);\lambda)$ とする．この時，$P_G(\lambda) = \lambda^{k(G)}\chi(M(G);\lambda)$ が成り立つ．ここで $k(G)$ はグラフ G の連結成分の数を表す．

定義 1.13. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとする．M の**特性多項式** $\chi(M;\lambda)$ は次のように定義される：

$$\chi(M;\lambda) = \sum_{S \in 2^E} (-1)^{|S|} \lambda^{\mathrm{rank}_M(E) - \mathrm{rank}_M(S)}.$$

命題 1.14. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとし，$e \in E$ とする．この時，次が成り立つ：

$$\chi(M;\lambda) = \begin{cases} 0 & M \text{ がループを持つ時,} \\ (\lambda - 1)\chi(M \setminus e;\lambda) & e \text{ がコループの時,} \\ \chi(M \setminus e;\lambda) - \chi(M/e;\lambda) & e \text{ がループでもコループでもない時.} \end{cases}$$

2 マトロイドの特性ホモロジー

この節ではマトロイドに対し，次数付きオイラー標数として特性多項式を持つようなホモロジーを定義する．そのために，マトロイドに対し，特定の代数系を対応させることで構成を行う．はじめにマトロイドの（擬）表現を導入し，これを用いてチェイン複体を構成することでホモロジーを定義する．さらにいくつかの基本的な性質と，Dancso–Licata によって導入された超平面配置の特性ホモロジーとの関係を述べる．

2.1 マトロイドの擬表現

マトロイドの表現可能性については，Nelson [5] により次のような結果が示されている．

定理 2.1（[5]） n 元集合上の表現可能マトロイドの個数を $r(n)$ とすると，

$$r(n) \leq 2^{n^3/4}$$

が成り立つ．

一方，Knuth [4] は n 元集合上のマトロイド全体の個数 $m(n)$ について

$$\log\log m(n) \geq n - \frac{3}{2}\log n - O(1)$$

を示した．したがって，

$$\frac{r(n)}{m(n)} \longrightarrow 0$$

が成り立ち，ほとんどすべてのマトロイドは表現可能ではないことが分かる．このことから，表現可能マトロイドのみを対象とする構成では，一般のマトロイドを扱う理論として適用範囲が大きく制限されてしまう．そこで，[9] において，表現可能性を緩めた概念として擬表現を導入した．

定義 2.2. R を PID，N を有限生成 R-加群，$\mathcal{S}(N)$ を N の部分加群全体のなす集合とする．R-**擬表現**，あるいは単に**擬表現**とは，写像 $\rho : 2^E \to \mathcal{S}(N)$ であって，次の条件を満たすものである：

- $\mathrm{rank}_R\rho(S) = \mathrm{rank}_M(S)$, $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(E) = N$;
- $S_1 \subset S_2 \subset E$ ならば $\rho(S_1) \subset \rho(S_2)$;
- $\mathrm{rank}_M(S_1) = \mathrm{rank}_M(S_2)$ かつ $S_1 \subset S_2$ ならば $\rho(S_1) = \rho(S_2)$.

ここで注意として，任意のマトロイド M に対し，擬表現 ρ は存在する．R として体 $\mathbb{F}$ を取ると，擬表現はベクトル空間 N の部分空間の族とみなすことができる．特に，マトロイドが線形表現を持つ場合には，その表現ベクトルを法ベクトルとする中心的超平面配置を対応させることができる．以後，擬表現 ρ を持つマトロイドを $M_\rho := (E, \mathrm{rank}_M, \rho)$ と書くことにし，この節に限り擬表現つきのマトロイドを扱う．擬表現つきのマトロイドに対し，削除・縮約を以下のように定義する：

定義 2.3. $M = (E, \mathrm{rank}_M, \rho)$ を擬表現を持つマトロイドとする．

- M の e による削除 $(M \setminus e, \rho_{\setminus e})$ を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M\setminus e}(S) = \mathrm{rank}_M(S)$，$\rho_{\setminus e}(S) = \rho(S)$ により定義する．
- M の e による縮約 $(M/e, \rho_{/e})$ を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M/e}(S) = \mathrm{rank}_M(S \cup e) - \mathrm{rank}_M(e)$，$\rho_{/e}(S) = \rho(S \cup e)/\rho(e)$ により定義する．

2.2 マトロイドの特性ホモロジーと基本的な性質

ここでマトロイドの特性ホモロジーを定義する．E の部分集合 S に対し擬表現 (M, ρ) をもつマトロイド対し

$$C^{S,j}(M, \rho) = \bigwedge^j N/\rho(S)$$

と定める．この時 (i, j)-次のチェイン群を $C^{i,j}(M, \rho) = \bigoplus_{S \in \binom{E}{i}} C^{S,j}(M, \rho)$ と定義する．ここで $\binom{E}{i} = \{S \subset E \mid |S| = i\}$ である．j について和をとることで i 次のチェイン群 $C^i(M, \rho) = \bigoplus_{j \geq 0} C^{i,j}(M, \rho)$ が定義される．

次に境界作用素を定義する．$S \subset E$ かつ $e \notin S$ のとき，加群準同型 $N/\rho(S) \to N/\rho(S \cup e)$ によって誘導される準同型 $d^{S,e}_{(M,\rho)} : \bigwedge^j N/\rho(S) \to \bigwedge^j N/\rho(S \cup e)$ を考える．(i, j) 次の境界作用素を

$$d^{i,j}_{(M,\rho)} = \bigoplus_{\substack{S \in \binom{E}{i} \\ e \notin S}} \epsilon^{S,e} d^{S,e}_{(M,\rho)}$$

と定義する．ここで $\epsilon^{S,e}$ を

$$\epsilon^{S,e} = \begin{cases} -1 & |\{e' \in S \mid e' < e\}| \text{ が奇数の時} \\ 1 & \text{他の場合} \end{cases}$$

と定める．j について和をとることで i 次の境界作用素 $d^i_{(M,\rho)} = \bigoplus_{j \geq 0} d^{i,j}_{(M,\rho)}$ が得られる．特に $d^{i+1}_{(M,\rho)} \circ d^i_{(M,\rho)} = 0$ が成り立ち，チェイン複体 $\mathcal{C}(M, \rho) = (C^\bullet(M, \rho), d^\bullet_{(M,\rho)})$ が得られる．

定義 2.4. $\mathcal{C}(M, \rho)$ のコホモロジーを**マトロイド (M, ρ) の特性コホモロジー**と呼び $H^\bullet(M, \rho)$ と表す．

定理 2.5（[9]） 次数つきオイラー標数を取ると $\chi_q(\mathcal{C}(M, \rho)) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \mathrm{rank}_R H^{i,j}(M, \rho) = \chi(M; 1 + q)$ が成り立つ．

基本的な性質をいくつか述べる．削除・縮約性に関する等式は長完全系列として得られる．

定理 2.6（[9]） 擬表現つきのマトロイド $(M,\rho)=(E,\mathrm{rank}_M,\rho)$ およびコループではない $e\in E$ を考える．この時，次の長完全列がある：

$$\begin{aligned}0\to H^0(M,\rho)&\xrightarrow{\beta^*}H^0(M\setminus e,\rho_{\setminus e})\xrightarrow{\gamma^*}H^0(M/e,\rho_{/e})\xrightarrow{\alpha^*}H^1(M,\rho)\\&\xrightarrow{\beta^*}H^1(M\setminus e,\rho_{\setminus e})\xrightarrow{\gamma^*}H^1(M/e,\rho_{/e})\xrightarrow{\alpha^*}\cdots\\&\xrightarrow{\beta^*}H^i(M\setminus e,\rho_{\setminus e})\xrightarrow{\gamma^*}H^i(M/e,\rho_{/e})\xrightarrow{\alpha^*}H^{i+1}(M,\rho)\\&\to\cdots.\end{aligned}$$

命題 2.7 ([9])**.** 擬表現つきのマトロイド $(M,\rho)=(E,\mathrm{rank}_M,\rho)$ がループを持つ時，全ての i に対し $H^i(M,\rho)=0$ が成り立つ．

命題 2.8 ([9])**.** 擬表現つきのマトロイド $(M,\rho)=(E,\mathrm{rank}_M,\rho)$ に対し，e が平行元である時，全ての i に対し $H^i(M,\rho)\simeq H^i(M\setminus e,\rho_{\setminus e})$ が成り立つ．

2.3 超平面配置の特性ホモロジーとの関係

Dancso–Licata [3] は超平面配置に対する特性ホモロジーを構成した．ここではマトロイドの特性ホモロジーが，その自然な一般化となることを説明する．$\mathcal{A}=\{H_1,\dots,H_n\}$ を複素ベクトル空間 V 内の中心的超平面配置とする．各超平面を $H_i=\nu_i^{\perp}$ と表す．ここで $\nu_i\in V^*$ は H_i の法ベクトルである．

各部分集合 $S\subset[n]$ に対し，$H_S=\bigcap_{i\in S}H_i$ とおく．Dancso–Licata の特性ホモロジーでは，(i,j)-次のチェイン群は

$$C^{i,j}_{arr}(\mathcal{A})=\bigoplus_{|S|=i}\bigwedge^{j}H_S$$

で与えられる．微分は，$e\notin S$ に対する自然な射 $H_S\longrightarrow H_{S\cup e}$ から誘導される写像の交代和として定義される．この複体の次数つき Euler 標数は，超平面配置 $\mathcal{A}$ の特性多項式を与える．一方，法ベクトル $\nu_1,\dots,\nu_n$ から線形マトロイド $M(\mathcal{A})$ が定まる．すなわち，台集合を $[n]$ とし，

$$\mathrm{rank}_{M(\mathcal{A})}(S)=\dim\langle\nu_i\mid i\in S\rangle$$

このとき $\rho(S)=\langle\nu_i\mid i\in S\rangle$ とおけば，$M(\mathcal{A})$ の擬表現が得られる．したがって，前節の構成からマトロイドの特性ホモロジー複体 $C^{i,j}(M(\mathcal{A}),\rho)=\bigoplus_{|S|=i}\bigwedge^j V^*/\rho(S)$ が得られる．ここで，H_S は $\rho(S)$ の直交補空間であるから，内積を用いて自然に $H_S\cong V^*/\rho(S)$ と同一視できる．この同一視の下で，Dancso–Licata 側の射 $H_S\longrightarrow H_{S\cup e}$ は，マトロイド側の商写像 $V^*/\rho(S)\longrightarrow V^*/\rho(S\cup e)$ に対応する．従って，各 S および j について $\bigwedge^j H_S\cong\bigwedge^j V^*/\rho(S)$ が成り立ち，これらを $|S|=i$ について直和することで $C^{i,j}_{arr}(\mathcal{A})\cong C^{i,j}(M(\mathcal{A}),\rho)$ を得る．さらに，この同型は微分と可換であるため，チェイン複体の同型を与える．

以上より，次が従う．

定理 2.9（[9]） 超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し，

$$H^{\bullet}_{arr}(\mathcal{A},\Bbbk)\cong H^{\bullet}(M(\mathcal{A}),\rho)\otimes\Bbbk$$

が成り立つ．

3 符号つきマトロイドと符号つき Tutte 多項式への拡張

3.1 符号つきマトロイドにおける Reidemeister 変形

ここで一旦，グラフを用いた結び目の記述について復習を行う．結び目が与えられた時，そのダイアグラムを考えることができる．さらに結び目図式から面グラフ（face graph）が定義できる．これは結び目図式を 2-彩色し，領域ごとに頂点を置き，交点で向かい合う領域同士の間に辺を引いて構成される．結び目の各交点でクロスの仕方に応じて，それぞれ対応する辺に $+/-$ の符号を付けると符号つきグラフが得られる（図 1 参照）．

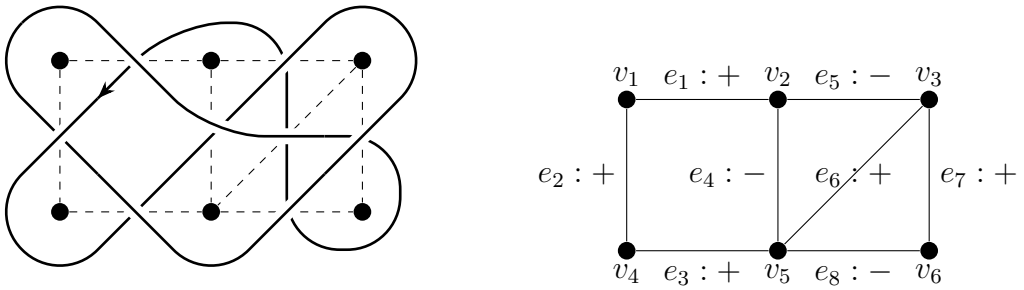


図 1　左：結び目図式，右：対応する符号つきグラフ

対応するグラフィックマトロイドの表現行列は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ここで列は辺 $e_1, \ldots, e_8$ の順に，行は頂点 $v_1, \ldots, v_6$ の順に対応している．

さて結び目図式の Reidemeister 変形は，符号つきグラフの局所変形として記述できた．Reidemeister move I は符号が正のループを追加・削除する操作に，Reidemeister move II は符号が互いに逆の多重辺ペアを追加・削除する操作に，Reidemeister move III は $Y\Delta$ 交換（図 2 参照）にそれぞれ対応する．

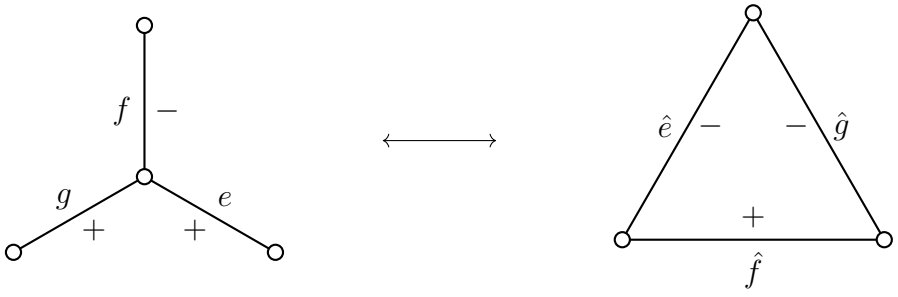


図 2　$Y\Delta$ 交換：Y 字形のグラフを三角形グラフに置き換える

この概念をマトロイドに一般化しよう．

定義 3.1. 符号つきマトロイド (M, sgn) とは，マトロイド M に対し，符号関数 $\mathrm{sgn} : E \to \{+, -\}$ を付加したものである．sgn は E の各元に $+$ または $-$ の符号を割り当てる．

このとき，符号つきマトロイドに対する（weak）Reidemeister move を次のように定義する．

(wRI) 符号が反対の 2 つのループを追加または削除する．

(RII) 符号が反対の 2 つの平行元を追加または削除する．

(RIII) ΔY 交換 [*2]を行う．このとき，交換に関わる 3 元集合 T 上の符号を反転する．

図 3 はダイアグラム，および対応するグラフィックマトロイドにおける Reidemeister move の例を示している．

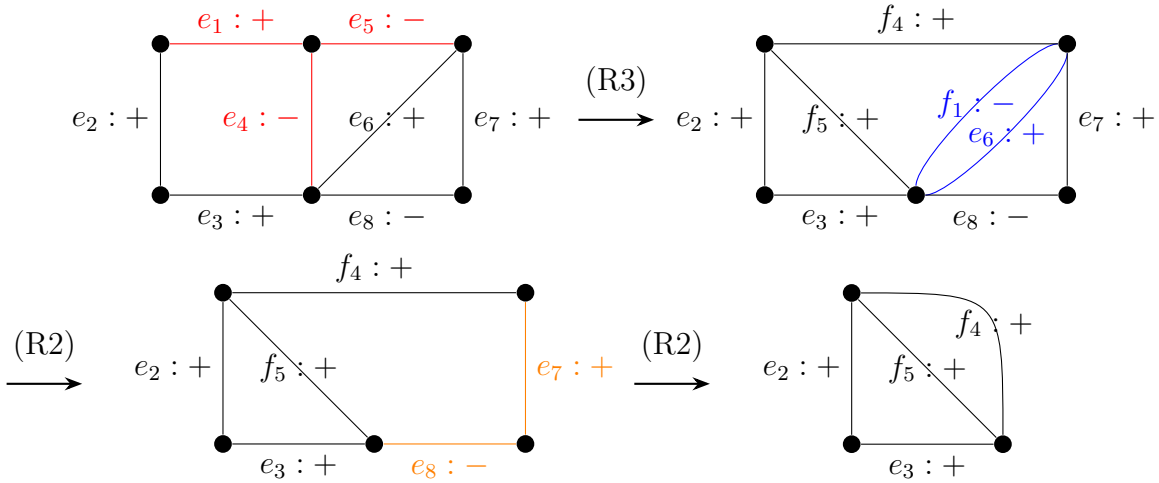


図 3　符号つきグラフ上の Reidemeister 変形

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_6 & e_7 & e_8 & e_4 & e_5 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
\xrightarrow{(R3)}
\begin{array}{c|cccccccc}
 & e_2 & e_3 & e_6 & e_7 & e_8 & e_4 & e_5 & e_1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\begin{array}{c}(R2)\ \&\\ 行基本変形\end{array}}
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_2 & e_3 & e_7 & e_8 & f_4 & f_5 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\xrightarrow{(R2)}
\begin{array}{c|cccc}
 & e_2 & e_3 & f_4 & f_5 \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{array}
$$

3.2　符号つきランク母関数と Reidemeister 不変性

定義 3.2. (M, sgn) を台集合 E 上の符号つきマトロイドとする．M の**符号つきランク母関数**を

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = \sum_{S \subset E} \alpha^{|S|_- + |E \setminus S|_+} \beta^{|E \setminus S|_- + |S|_+} x^{\mathrm{corank}_M(S)} y^{\mathrm{null}(S)}$$

により定義する．ここで $S \subset E$ に対し，$\mathrm{null}(S) = |S| - \mathrm{rank}_M(S)$, $S_+ = \{e \in S \mid \mathrm{sgn}(e) = +\}$, $S_- = \{e \in S \mid \mathrm{sgn}(e) = -\}$ とする．

[*2] マトロイドにおける ΔY 交換については誌面の都合上割愛するが，マトロイドの表現行列の局所的な置き換えで与えられるものである．

符号つきランク母関数は，結び目理論における Jones 多項式を包含する．実際，符号つきマトロイド (M, sgn) に対し，

$$J_M(q) = R(M, \mathrm{sgn}; (-q)^{-1/2}, (-q)^{1/2}, q + q^{-1}, q + q^{-1})$$

と定めると，結び目図式から得られる符号つきグラフィックマトロイドの場合には，これは通常の framed Jones 多項式と一致する．次の性質は符号つきグラフ上で成り立つ事実をマトロイドに一般化したものである．

補題 3.3 (Saito–Y.)**.** 符号つきマトロイド (M, sgn) の符号つきランク母関数 $R(M, \mathrm{sgn}, \alpha, \beta, x, y)$ は，適切な代入のもとで Reidemeister move (wRI)，(RII)，(RIII) に関して不変である．すなわち，次が成り立つ．

(wRI) e, f を符号が反対のコループとする．$\alpha\beta = 1$ かつ $x = -(\alpha^2 + \beta^2)$ ならば，

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = R(M \setminus \{e, f\}, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y).$$

(RII) e, f を符号が反対の平行元とする．$\alpha\beta = 1$ かつ $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta y = 0$ ならば，

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = R(M \setminus \{e, f\}, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y).$$

(RIII) $T \subset E$ を三角形とする．すなわち，$|T| = 3$ であり，任意の $t \in T$ に対して $\mathrm{rank}_M(T \setminus \{t\}) = \mathrm{rank}_M(T) = 2$ が成り立つとする．さらに，T は二つの正符号の元と一つの負符号の元からなるとする．このとき，

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = R(\Delta_T(M), \mathrm{sgn}_T; \alpha, \beta, x, y)$$

ここで $\Delta_T(M)$ は T に関する $Y\Delta$ 交換を表す．

定義 3.4. 符号つきマトロイド (M, sgn) の（正規化された）**符号つき Tutte 多項式** $\bar{T}(M, \mathrm{sgn}; \alpha, x, y)$ を

$$\bar{T}(M, \mathrm{sgn}; \alpha, x, y) = R(M, \mathrm{sgn}; \alpha + 1, 1, x - 1, y - 1)$$

で定義する．

3.3 符号つきマトロイドの Tutte ホモロジー

ここでは正規化された符号つき Tutte 多項式を圏化するホモロジーを概説する．本節の構成では，表現行列から核と余核を用いてチェイン複体を構成する．この構成は体上の表現可能マトロイドに対して定義できるが，体ごとに別々に扱うよりも，それらを統一的に記述できる枠組みとして partial field を用いる方が自然である．partial field はグラフィックマトロイド，正則マトロイドなど，多くの重要なクラスを統一的に扱うことができ，さらに今後関手性を考える際の自然な舞台となる．

定義 3.5. $\mathbb{P} = (R, G)$ が **partial field** であるとは，R が可換環，$G \subset R^\times$ が部分群であり，$-1 \in G$ かつ G が環として R を生成することをいう．また，

$$\mathbb{P}^\times = G, \quad \mathbb{P} = G \cup \{0\}$$

と書く．

M を partial field $\mathbb{P}=(R,G)$ 上のランク r のマトロイドとし，A を M を表す $\mathbb{P}$-行列とする．行基本変形，列の入れ替え，各列への $\mathbb{P}^\times$ 倍を施すことで，A は

$$A=(I_r\ D)$$

の形に取ることができる．ここで I_r は r 次単位行列である．この行列は準同型 $A:R^E\longrightarrow R^r$ を定める．各部分集合 $S\subset E$ に対して，A_S を S に属する列からなる部分行列とし，短完全系列

$$0\longrightarrow\ker A_S\longrightarrow R^S\xrightarrow{A_S}R^r\longrightarrow\operatorname{coker}A_S\longrightarrow 0$$

を考える．符号つきマトロイドの Tutte ホモロジーのチェイン群は，$\ker A_S$ と $\operatorname{coker}A_S$ の両方を用いて定義される．$S\subset E$ に対し，$\widetilde{S}\coloneqq(E\setminus S)_-\sqcup S_+$ とおく．この時，チェイン群を

$$C_{sT}^{S,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})=\bigwedge^k R^S\otimes\bigwedge^{j_1}\operatorname{coker}A_{\widetilde{S}}\otimes\bigwedge^{j_2}\ker A_{\widetilde{S}}$$

とおき，

$$C_{sT}^{i,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})=\bigoplus_{S\in\binom{E}{i}}C_{sT}^{S,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})$$

と定義する．

次に微分を定義する．$S\subset E$, $l\notin S$ に対し，自然な写像 $\iota:R^S\longrightarrow R^{S\cup l}$ がある．また $S\subset E$, $e\notin S$ に対して，S から $S\cup e$ へ移るとき，A_S と $A_{S\cup e}$ の間には自然な写像があり，これらにより誘導される写像から微分 $\delta_{sT}^{S,l}:C_{sT}^{S,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})\longrightarrow C_{sT}^{S\cup l,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})$ が定まり，従って $\delta^i:C_{sT}^{i,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})\longrightarrow C_{sT}^{i+1,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})$ が定まる．

この写像は特に $\delta^{i+1}\circ\delta^i=0$ が成り立ち，従ってチェイン複体 $\mathcal{C}_{sT}(M,\mathrm{sgn})=(C_{sT}^\bullet(M,\mathrm{sgn}),\delta^\bullet)$ が得られる．そのホモロジーを M の**符号つき Tutte ホモロジー**と呼び，$H_{sT}^\bullet(M,\mathrm{sgn})$ と書く．

この構成は，前節で定義した正規化された符号つき Tutte 多項式

$$\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)=R(M,\mathrm{sgn};\alpha+1,1,x-1,y-1)$$

と対応している．

実際，

$$\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)=\sum_{S\subset E}(\alpha+1)^{|S|}(x-1)^{\operatorname{corank}_M(\widetilde{S})}(y-1)^{\operatorname{null}_M(\widetilde{S})}$$

と書ける．

ここで，$\bigwedge^\bullet R^S$ の次数付き階数は $(\alpha+1)^{|S|}$ を与え，$\operatorname{coker}A_{\widetilde{S}}$ および $\ker A_{\widetilde{S}}$ の次数付き階数はそれぞれ $\operatorname{corank}_M(\widetilde{S})$，$\operatorname{null}_M(\widetilde{S})$ を与える．

したがって，これらの外積代数の次数付き階数を取ることで，$\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)$ の各項が復元され，次が成り立つ．

定理 3.6（Saito–Y.）　符号つき Tutte ホモロジー $H_{sT}^\bullet(M,\mathrm{sgn})$ の次数つき Euler 標数は，M の正規化された符号つき Tutte 多項式を復元する．すなわち，

$$\chi_q(\mathcal{C}_{sT}(M,\mathrm{sgn}))=(-1)^{\operatorname{rank}(E)+|E_-|}\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,-x,-y)$$

が成り立つ．

なお，双対マトロイドを表す行列 $A^\perp$ を用いることで，$\operatorname{coker}A_S$ と $\ker A_S$ は双対的に記述できる．この双対性は，符号つき Tutte 多項式の対称性

$$\bar{T}(M^*,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)=\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,y,x)$$

のホモロジー的な反映とみなすことができる．

今回得られた構成は，グラフや超平面配置に対する既存の圏化を（符号つき）マトロイドの枠組みへ拡張するものであり，今後はその関手性や Reidemeister 不変性との関係を明らかにすることが課題である．

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招きくださった先生方に感謝申し上げます．また，本稿について貴重なコメントをいただいた齋藤琢弥氏（北海道大学）に感謝申し上げます．本研究は JSPS 科研費若手研究（課題番号 24K16926）および日本学術振興会二国間交流事業（課題番号 JPJSBP120256504）の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Günter M. Ziegler. *Oriented matroids*, volume 46 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[2] Thomas Brylawski and James Oxley. The Tutte polynomial and its applications. In *Matroid applications*, volume 40 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 123–225. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[3] Zsuzsanna Dancso and Anthony Licata. Odd Khovanov homology for hyperplane arrangements. *J. Algebra*, 436:102–144, 2015.

[4] Donald E. Knuth. The asymptotic number of geometries. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 16:398–400, 1974.

[5] Peter Nelson. Almost all matroids are nonrepresentable. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(2):245–248, 2018.

[6] Hirokazu Nishimura and Susumu Kuroda, editors. *A lost mathematician, Takeo Nakasawa*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. The forgotten father of matroid theory.

[7] James Oxley. What is a matroid.

[8] James Oxley. *Matroid theory*, volume 21 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, second edition, 2011.

[9] Radmila Sazdanovic and Martha Yip. A categorification of the chromatic symmetric function. *J. Combin. Theory Ser. A*, 154:218–246, 2018.

[10] Dai Tamaki. Matroid. `http://pantodon.jp/index.rb?body=matroid`. 最終閲覧日: 2026 年 8 月 1 日.

[11] K. Truemper. *Matroid decomposition*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[12] Hassler Whitney. On the Abstract Properties of Linear Dependence. *Amer. J. Math.*, 57(3):509–533, 1935.

カンドルの幾何学的不変量について

甲斐 涼哉[*1] (奈良教育大学)

1 はじめに

カンドルは群の共役演算の一般化とみなされる代数系である．その公理は，結び目図式の基本変形 (詳しくは [Kam17] を参照)，もしくは対称空間の点対称が満たす性質 (詳しくは [Loo69] を参照) に対応する．本稿では，2 種類のカンドルの幾何学的不変量として，対称空間論の観点から導入した Euler 標数，粗幾何学の観点から導入した距離を紹介する．それぞれ，大阪公立大学の田丸博士氏との共同研究 [KT25]，及び立命館大学の岩本光平氏，鹿児島大学の児玉悠弥氏との共同研究 [IKK26] に基づく．

2 カンドル

この節では，カンドルの基本事項について概観する．

定義 2.1 ([Joy82])**.** 空でない集合 X 上の二項演算 $\triangleleft$ が以下の条件を満たすとき，$(X, \triangleleft)$ を**カンドル**という：

1. 任意の $x \in X$ に対して，$x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in X$ に対して，右からの演算 $s_y \colon X \to X$, $s_y(x) \coloneqq x \triangleleft y$ は全単射.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

右からの演算 $s_y \colon X \to X$ を y での**点対称**という．また, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $x \triangleleft^n y := s_y^n(x)$ とかく．文脈から明らかな場合は，$(X, \triangleleft)$ を単に X とかく．

X, Y をカンドルとする．写像 $f \colon X \to Y$ がカンドル演算を保つとき**カンドル準同型**であるという．また，全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい，カンドル同型が存在するとき，二つのカンドルは**同型**であるという．部分集合 $A \subset X$ が，任意の $a \in A$ に対して $s_a^{\pm 1}(A) \subset A$ を満たすとき，A を**部分カンドル**という．

例 2.2 ([Loo69])**.** (M, s) を対称空間とする．つまり，M は多様体で, $s : M \to \mathrm{Diff}(M)$ は各点 $x \in M$ に対して点対称写像 s_x を定める写像である．このとき，M 上の二項演算 $\triangleleft$ を $x \triangleleft y := s_y(x)$ と定めると，$(M, \triangleleft)$ はカンドルとなる．

[*1] kai.ryoya.d8@cc.nara-edu.ac.jp

したがって，カンドルは対称空間の位相構造や微分構造を忘れて，(一般化した) 点対称の代数構造に着目したものとみなせる．この意味で，カンドルは ‘対称空間の離散化’ とみなすことができる．典型的な対称空間として，実数直線 $\mathbb{R}$ と球面 S^n の具体的な構造を与える．

例 2.3. 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \triangleleft y := 2y - x$ で定めると，$\mathbb{R}$ 上のカンドル演算となる．これは，$\mathbb{R}$ の自然な対称空間としての構造と一致する． $\mathbb{R}$ の離散部分カンドル $R_\infty := \mathbb{Z}$ を**無限二面体カンドル**と呼ぶ.

例 2.4. 円周 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ には，$\mathbb{R}$ のカンドル構造から自然にカンドル構造が誘導される．つまり，$[x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して，$[x] \triangleleft [y] := [2y - x]$ で定めると，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のカンドル構造となる．このとき，n 点集合 $R_n := \{[0], [1/n], \ldots, [(n-1)/n]\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は有限部分カンドルになり，**二面体カンドル**と呼ばれる.

例 2.5. n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ を対称空間とみなし，カンドル構造を定める．つまり，$x, y \in S^n$ に対し，$x \triangleleft y := 2\langle x, y\rangle y - x$ と定めると，S^n 上のカンドル演算となる．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積である．特に，$n = 1$ のとき，例 2.4 の S^1 のカンドルと同型である．S^n の有限部分カンドル $DS^n := \{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ を**離散球面**と呼ぶ．ただし，$\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である.

カンドル X の自己カンドル同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(X)$ と書き，$\mathrm{Aut}(X)$ の群構造を $fg := g \circ f$ で定める．このとき，$\mathrm{Aut}(X)$ を X の**自己同型群**といい，X に右から作用する．$\mathrm{Aut}(X)$ の右作用が推移的であるとき，X を**等質**であるという．カンドルの二番目と三番目の公理から点対称 s_y はカンドル同型となる.

定義 2.6. カンドル X に対して，点対称のなす集合 $\{s_y \mid y \in X\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を**内部自己同型群**といい，$\mathrm{Inn}(X)$ とあらわす．$\mathrm{Inn}(X)$ の X への右作用の軌道を，X の**連結成分**という．特に連結成分が一つ (つまり，$\mathrm{Inn}(X)$ の作用が推移的) のとき，X は**連結**であるという.

次の群は Joyce [Joy82] によって transvection group として導入された.

定義 2.7. カンドル X に対して，$\{s_x s_y^{-1} \mid x, y \in X\}$ で生成される $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を **displacement 群**といい，$\mathrm{Dis}(X)$ であらわす.

一般に，$\mathrm{Inn}(X)$ の軌道と $\mathrm{Dis}(X)$ の軌道が等しいことが知られている [HSV16]．したがって，カンドル X の連結成分は，$\mathrm{Dis}(X)$ の作用の軌道と一致する．この節の最後に，カンドルの一般的なクラスを紹介する.

例 2.8. 群 G とその元 z に対して，g の共役類を $z^G = \{g^{-1}zg \mid g \in G\}$ と表す．このとき，$x, y \in z^G$ に対して，$x \triangleleft y := y^{-1}xy$ で定めると，z^G 上のカンドル演算となる．このとき，$\mathrm{Conj}(z^G) := (z^G, \triangleleft)$ を z^G 上の**共役カンドル**という．より一般に，共役演算

で閉じた部分集合 $X \subset G$ は共役カンドルの構造を持つ.

例 2.9. G を群，$\sigma : G \to G$ を群の自己同型写像とする．このとき，$g, h \in G$ に対して，$g \triangleleft h := \sigma(gh^{-1})h$ で定めると，G 上のカンドル演算となる．このとき，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) := (G, \triangleleft)$ を G 上の**一般化 Alexander カンドル**という．また，G がアーベル群のとき，**Alexander カンドル**という.

例 2.10. G を群，H を G の部分群，$\sigma : G \to G$ を群の自己同型写像とする．H が $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ の部分群であるとき，三つ組 (G, H, σ) を**カンドルの三つ組**という．(G, H, σ) がカンドルの三つ組のとき，右剰余類 $Hg, Hh \in H\backslash G$ に対して，$Hg \triangleleft Hh := H\sigma(gh^{-1})h$ で定めると，$H\backslash G$ 上のカンドル演算となる．このカンドルを，$Q(G, H, \sigma) := (H\backslash G, \triangleleft)$ とかく．任意の等質カンドルは $Q(G, H, \sigma)$ の形で書けることが知られている [Joy82].

3 Euler 標数：対称空間からの不変量

連結コンパクト Lie 群の等質空間の Euler 標数は，極大トーラスの作用の固定点の数と一致することが知られている [HS41]．特に，連結コンパクト対称空間の場合には，その点対称から自然に導かれる displacement 群の作用を用いて，Euler 標数が計算できる．これを踏まえて，この節ではカンドルに Euler 標数を定義する．また，いくつかのカンドルに対する Euler 標数の計算結果も与え，さらに，位相空間の Euler 標数と類似したいくつかの性質を見る．この節の内容は田丸博士氏との共同研究 [KT25] に基づく.

3.1 カンドルの Euler 標数の定義

カンドルの Euler 標数を，$\mathrm{Dis}(X)$ の作用を用いて，以下のように定義する.

定義 3.1. カンドル X の **Euler 標数** $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X)$ を次で定義する：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g, X) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}.$$

ここで，$\#A$ は集合 A の濃度，$\mathrm{Fix}(g, X)$ は g の作用の X における固定点集合を表す.

まず典型的な具体例として n 次元球面を考える.

例 3.2. 例 2.5 で見たように，球面 S^n は対称空間としての構造から，カンドルとなる．このとき，内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(S^n)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ は以下の通りである：

$$\mathrm{Inn}(S^n) = \begin{cases} \mathrm{SO}(n+1) & n\text{: 偶数} \\ \mathrm{O}(n+1) & n\text{: 奇数} \end{cases}, \quad \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1).$$

ここで，$\mathrm{Dis}(S^n)$ の元 g は，次元に応じて以下の形の元に $\mathrm{Dis}(X)$ 内で共役である：

$$g \sim_{\text{共役}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n+1}{2}}} \end{pmatrix} & \text{if } n\text{: 奇数,} \end{cases} \qquad (R_\theta \in \mathrm{SO}(2)).$$

一般的な θ_i をとると，S^n 上の固定点の数は，n が偶数のときは 2 個，n が奇数のときは固定点が 0 個となることがわかる．固定点の数は共役で不変なので，g の固定点の数も同じである．よって，球面のカンドルとしての Euler 標数 $\chi^{\mathrm{Qdle}}(S^n)$ は位相空間としての Euler 標数 $\chi^{\mathrm{Top}}(S^n)$ と等しく，以下が得られる：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(S^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数.} \end{cases}$$

この例を一般化することで，コンパクト Riemann 対称空間のカンドル Euler 標数は，位相空間としての Euler 標数に一致することがわかる．その鍵となるのは次の Hopf と Samelson の結果 [HS41] である．

命題 3.3 ([HS41], [Püt02])**.** M を連結コンパクト Lie 群 G の等質空間とする．また，T を G の極大トーラスとして，その生成元 t_0 を取る．このとき，次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Top}}(M) = \#\mathrm{Fix}(T, M) = \#\mathrm{Fix}(t_0, M).$$

χ^{Qdle} を Euler 標数と呼ぶ理由は次の定理が成り立つからである．

定理 3.4. 連結コンパクト Riemann 対称空間 X に対して，

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \chi^{\mathrm{Top}}(X).$$

証明の概略は以下の通りである．

- 連結コンパクト Riemann 対称空間 X の $\mathrm{Dis}(X)$ は連結コンパクト Lie 群であることを示す．
- 連結 Riemann 対称空間 X は $\mathrm{Dis}(X)$ の等質空間，つまり X はカンドルとして連結であることを示す．
- 命題 3.3 を適用する．

注意 3.5. 定理 3.4 では対称空間のコンパクト性は重要な仮定である．実際，非コンパクト対称空間である $\mathbb{R}^n$ では，位相空間としての Euler 標数は 1 であるが，カンドルとしての Euler 標数は 0 となり，それぞれの Euler 標数は一致しない．

3.2 カンドル Euler 標数の例

ここでは，いくつかの (有限) カンドルの Euler 標数を紹介する．

例 3.6. X を空でない集合とする．$x, y \in X$ に対して，$x \triangleleft y = x$ で定義する．このとき，$(X, \triangleleft)$ を**自明カンドル**といい，カンドル Euler 標数は X の濃度 $\#X$ と一致する．

例 3.7. 自然数 $n > 2$ に対して，例 2.4 で導入した二面体カンドル R_n の Euler 標数は 0 となる．これは円周の位相空間としての Euler 標数と等しい．

例 3.8. 群 G 上の点対称を $s_x(y) := xy^{-1}x$ で定義し，$\mathrm{Core}(G) := (G, s)$ を G 上の**コアカンドル**という．一般に，コアカンドルとしての点対称によって，Lie 群は対称空間とみなされる．$\mathrm{Core}(G)$ が非自明カンドルのとき，つまり，G が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいくつかの直積と同型でないとき，カンドル Euler 標数は 0 になる．これは，非自明な連結コンパクト Lie 群の Euler 標数と等しい．

例 3.9. 群 G と非自明な自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，例 2.9 で導入した一般化 Alexander カンドル $\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ のカンドル Euler 標数は 0 となる．これも，非自明な連結コンパクト Lie 群の Euler 標数と等しい．

カンドル Euler 標数が 0 ではない非自明カンドルも存在する．

例 3.10. 例 2.5 で導入した離散球面 DS^n のカンドル Euler 標数は

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(DS^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数.} \end{cases}$$

となる．これは球面 S^n の Euler 標数と等しい．

2 以上の整数 n に対して，カンドル Euler 標数が n となるカンドルが存在する．一方で，有限連結カンドルに対しては，Burnside の補題から次の命題が直ちに従う．

命題 3.11. 濃度が 2 以上の有限連結カンドルのカンドル Euler 標数は 0 である．

命題 3.11 において，有限性の仮定は重要である．実際，対称空間としての 2 次元球面は連結カンドルであるが，定理 3.4 からカンドル Euler 標数は 2 となり，0 ではない．

3.3 カンドル Euler 標数の性質

この節では，カンドル Euler 標数の一般的な性質として，位相空間の Euler 標数に似た性質を紹介する．

$X_1 = (X_1, s^1), X_2 = (X_2, s^2)$ をカンドルとする．このとき，直積集合 $X_1 \times X_2$ 上に

$$s_{(x_1,x_2)}(y_1, y_2) := (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2))$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, s)$ を X_1 と X_2 の**直積カンドル**という．キネットの公式から，CW 複体の直積の Euler 標数は，それぞれの Euler 標数の積となることが知られている．カンドルの Euler 標数についても同様に次が成り立つ．

定理 3.12. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

また，直和集合 $X_1 \sqcup X_2$ 上に

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_i, \\ s_x^i(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases}$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2 = (X_1 \sqcup X_2, s)$ を X_1 と X_2 の **interaction-free union** という．位相空間の直和の Euler 標数は，それぞれの Euler 標数の和になることが知られている．interaction-free union のカンドル Euler 標数は，Euler 標数の和によって上から評価できる．

定理 3.13. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

定理 3.13 の不等式で，等号が成り立たない例を $\mathrm{Inn}(X)$ がアーベル群であるような等質カンドルで構成することができる．

4　カンドルの距離：粗幾何学からの不変量

注意 3.5 で述べた通り，前節の Euler 標数はコンパクト対称空間を想定した不変量である．したがって，コンパクト対称空間の離散化と期待できる有限カンドルに対して適した不変量であるいえる．一方で，非自明な結び目の基本カンドルや，非コンパクト対称空間の離散部分カンドルなど，興味深い可算無限カンドルも多くある．

無限離散群の研究手法の一つである幾何学的群論の手法に基づいて，この節では，カンドル構造から自然に定まる内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ の作用を用いて，カンドルの各連結成分に距離を導入する．その距離の擬等長類は，作用する群の有限生成集合の取り方に依らずに定まる．さらに，典型的な距離空間と擬等長同型な連結成分を持つカンドルの例を与える．この節の内容は岩本光平氏と児玉悠弥氏との共同研究 [IKK26] に基づく．

4.1　準備: Schreier グラフ

ここでは，距離の導入に用いる Schreier グラフについて紹介する．

定義 4.1. 群 G が空でない集合 X に右作用しているとする．また，G の生成集合 S をとる．このとき，S に関する G の X への右作用の **Schreier グラフ** $\mathrm{Sch}(X;G,S)$ とは，頂点集合を X，辺集合を $\{(x, x\cdot s) \mid x\in X, s\in S\}$ とする (無向) グラフである．

注意 4.2. $X=G$ として，右作用を $x\cdot g := xg$ で定めると，対応する Schreier グラフは，群の Cayley グラフと一致する．

$\mathrm{Sch}(X;G,S)$ の連結成分は，右作用の軌道と 1:1 に対応することが簡単に確かめられる．$\mathrm{Sch}(X;G,S)$ の各連結成分は，グラフ構造から定まる弧長距離 d_S^{Sch} によって距離空間となる．したがって，この距離の制限によって，右作用の各軌道は距離空間となる．この距離は生成集合 S の取り方に依存するが，擬等長類は有限生成集合の取り方に依らずに定まる．

命題 4.3. 群 G が空でない集合 X へ右作用しているとする．このとき，有限生成集合 $S,T\subset G$ と X の G-軌道 O に対して，恒等写像 $\mathrm{id}\colon (O, d_S^{\mathrm{Sch}}) \to (O, d_T^{\mathrm{Sch}})$ は擬等長同型写像である．

4.2 カンドルの距離

この節では, カンドル構造から定まる自然な群作用の Schreier グラフを用いて，カンドルの連結成分にグラフ構造と距離を導入する．

定義 4.4. X をカンドルとする．

1. 生成集合 $A\subset \mathrm{Inn}(X)$ に関する $\mathrm{Inn}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$.
2. 生成集合 $U\subset \mathrm{Dis}(X)$ に関する $\mathrm{Dis}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$.

$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ は Winker [Win84] によって導入された**カンドルの diagram** の一般化になっている．$\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ の作用に着目する理由は以下の命題が成立するからである．

命題 4.5. X をカンドルとする．このとき，X の連結成分全体の集合，$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ の連結成分全体の集合，$\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$ の連結成分全体の集合は，それぞれ 1:1 に対応する．

よって，グラフ構造から定まる弧長距離の制限として，カンドルの各連結成分に距離が定まる．

定義 4.6. O をカンドル X の連結成分とする．$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ から定まる O 上の距離を，$A\subset \mathrm{Inn}(X)$ に関する **inner 距離**といい，d_A^{Inn} で表す．$\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$ から定まる O 上の距離を，$U\subset \mathrm{Dis}(X)$ に関する **displacement 距離**といい，d_U^{Dis} で表す．

群の語距離の場合と同様に，これらの距離の擬等長類は有限生成集合に依らずに定まる．

定理 4.7. O をカンドル X の連結成分とする．

1. 有限生成集合 $A, B \subset \mathrm{Inn}(X)$ に対して, 二つの距離空間 (O, d_A^{Inn})，(O, d_B^{Inn}) は擬等長同型である．
2. 有限生成集合 $U, V \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して，二つの距離空間 (O, d_U^{Dis})，(O, d_V^{Dis}) は擬等長同型である．

有限生成カンドルの内部自己同型群は有限生成である．一方で，有限生成カンドルであっても displacement 群が有限生成であるとは限らない．実際，自由カンドルや非ファーバー結び目の結び目カンドルは，有限生成カンドルであるが，displacement 群は有限生成ではない．

定理 4.7 より，$\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ がどちらも有限生成であるとき，それぞれの作用に関する Schreier グラフから，カンドル X の各連結成分には二種類の距離の擬等長類が定まる．一般にこれらの擬等長類は異なるものである．

命題 4.8. 以下の条件を満たすカンドル X とその連結成分 O が存在する：

1. $\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ は有限生成.
2. 任意の有限生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ と $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して，二つの距離空間 (O, d_A^{Inn}) と (O, d_U^{Dis}) は擬等長同型ではない.

実際，無限二面体カンドル R_∞ は命題 4.8 の条件を満たす例となる．この節の最後に，特別な場合についてこれらの距離の性質を述べる．

命題 4.9. O と O' を等質カンドル X の連結成分とする．

1. 有限生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ に対して，距離空間 (O, d_A^{Inn})，(O', d_A^{Inn}) は擬等長同型である．
2. 有限生成集合 $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して, 距離空間 (O, d_U^{Dis})，(O', d_U^{Dis}) は擬等長同型である．

命題 4.10. カンドル X のある連結成分 O に，$\mathrm{Dis}(X)$ は自由に作用しているとする．このとき，$\mathrm{Dis}(X)$ の有限生成集合に関する displacement 距離を持つ O と，有限生成集合に関する語距離を持つ $\mathrm{Dis}(X)$ は擬等長同型である．

カンドルの一番目の公理から，$\mathrm{Inn}(X)$ では命題 4.10 のような状況，つまり，$\mathrm{Inn}(X)$ の作用が自由になることはない．また，Eisermann [Eis14] によって導入されたカンドルの被覆理論によると，単連結カンドルは命題 4.10 の仮定を満たす．したがって，命題 4.10 は，単連結カンドルが自身に作用するある有限生成群と擬等長同型であることも示している．

4.3 例

最後に，典型的な距離空間と擬等長同型となるような連結成分を持つカンドルの例を与える．初めに，自由カンドルを考える．自由カンドルの詳細は [Kam17] などを参照せよ．有限階数の自由群は木と擬等長同型であったが，自由カンドルも同様の性質を持つ．

命題 4.11. A を濃度が 2 以上の有限集合とする．このとき，A 上で生成される自由カンドル $FQ[A]$ は有限生成 (したがって，$\mathrm{Inn}(FQ[A])$ は有限生成) で，各連結成分は inner 距離に関して木と擬等長同型である．

注意 4.12. 濃度が 2 以上の有限集合上で生成される自由カンドルの displacement 群は有限生成ではない．したがって，定理 4.7 を適用することができない．

以下，特別なクラスとして，一般化 Alexander カンドル (cf 例 2.9) の displacement 距離を考える．一般化 Alexander カンドル $\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ は等質で，各連結成分に displacement 群が自由に作用する．したがって，前節で述べた結果から次が従う．

定理 4.13. 群 G とその群自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ から定まる一般化 Alexander カンドルを $X := \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とする．このとき，$\mathrm{Dis}(X)$ が有限生成ならば，任意の X の連結成分は displacement 距離に関して，有限生成集合に関する語距離を持つ $\mathrm{Dis}(X)$ と擬等長同型である．

一般化 Alexander カンドルの displacement 群は以下のように与えられる．

補題 4.14. $X := \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とし，単位元 $1 \in G$ を含む X の連結成分を P とおく．

1. P は G の部分群で，$\mathrm{Dis}(X)$ と同型である．
2. σ が $g \in G$ の内部自己同型，つまり，$\sigma(x) := g^{-1}xg$ で与えられているとき，群 P は部分群 $[G, \langle\langle g \rangle\rangle_G]$ に同型である．ただし，$\langle\langle g \rangle\rangle_G$ は $\{g\}$ の G での正規閉包である．

定理 4.13，補題 4.14 を用いることで，Euclid 空間や双曲平面と擬等長な連結成分を持つカンドルの例を構成できる．

命題 4.15. $t \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ とする．このとき，displacement 距離に関して $\mathrm{GAlex}(\mathbb{Z}^n, t)$ の各連結成分は k 次元 Euclid 空間と擬等長同型である．ただし，$k := \mathrm{rank}(1 - t^{-1})$.

命題 4.16. 正整数 p, q, r に対して，$\Delta^+(p, q, r)$ を以下の表示で定義される群とする：

$$\Delta^+(p, q, r) = \langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1 \rangle_{\mathrm{Grp}}.$$

また，群自己同型 $\sigma : \Delta^+(p, q, r) \to \Delta^+(p, q, r)$ を生成元 a での内部自己同型とする．このとき，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ならば，displacement 距離に関して $\mathrm{GAlex}(\Delta^+(p, q, r), \sigma)$ の

連結成分は双曲平面と擬等長同型である.

注意 4.17. $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，双曲平面の各点にその点を中心とする θ-回転によって点対称を定めるとカンドルになる．$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ とする．このとき，$Y := \mathrm{Conj}(a^{\Delta^+(p,q,r)})$ は $\frac{2\pi}{p}$-回転によるカンドル構造を持つ双曲平面の離散部分カンドルになる.

また，3 次元球面内の結び目を特異点とする軌道体の基本群を用いて，3 次元の単連結等質 Riemann 多様体と擬等長な連結成分を持つカンドルも構成できる [IKK26, Proposition 5.6].

参考文献

[Eis14] Michael Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fundamenta Mathematicae*, 225(1):103–167, 2014.

[HS41] H. Hopf and H. Samelson. Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 13:240–251, 1941.

[HSV16] Alexander Hulpke, David Stanovský, and Petr Vojtěchovský. Connected quandles and transitive groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(2):735–758, February 2016.

[IKK26] Kohei Iwamoto, Ryoya Kai, and Yuya Kodama. Metrics for quandles. *International Journal of Mathematics*, page 2650053, June 2026.

[Joy82] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 23(1):37–65, 1982.

[Kam17] Seiichi Kamada. *Surface-Knots in 4-Space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Singapore, Singapore, 2017.

[KT25] Ryoya Kai and Hiroshi Tamaru. On the Euler characteristics for quandles. *International Journal of Mathematics*, 36(11):2550034, September 2025.

[Loo69] Ottmar Loos. *Symmetric Spaces. I: General Theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Püt02] Thomas Püttmann. Homogeneity rank and atoms of actions. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 22(4):375–399, 2002.

[Win84] Steven Karl Winker. *QUANDLES, KNOT INVARIANTS, AND THE N-FOLD BRANCHED COVER*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984.

GEOMETRY ON SPACES OF METRICS

KATSUHISA KOSHINO

Contents

1. Introduction 1
2. Recognizing topologies on spaces of metrics 2
2.1. The Borel complexity and the complete metrizability of spaces of metrics 2
2.2. The topological types of spaces of metrics 4
2.3. Problems 6
3. Isometric universality of spaces of metrics 6
3.1. Banach-Mazur type theorems 6
3.2. Kuratowski type theorems 8
3.3. Problems 8
4. Isometries between spaces of metrics 8
4.1. The peaking function argument 9
4.2. Composition operators 11
4.3. Problems 13
Acknowledgments 13
References 13

1. Introduction

This report provides a comprehensive overview of the author's recent research [35, 36, 30, 37] on the geometry of spaces of metrics on topological spaces, which will be compared with some well-known results on the one of spaces of continuous functions. Given a topological space X, we denote by $\mathrm{C}(X)$ the space of real-valued bounded continuous functions on X equipped with the topology of uniform convergence. The space $\mathrm{C}(X)$ is a Banach space with the sup-norm $\|\cdot\|$: for any $f \in \mathrm{C}(X)$,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\},$$

and it admits the sup-metric. Let $\mathrm{PM}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ be the spaces consisting of bounded continuous pseudometrics and bounded admissible metrics on X, that is, metrics inducing its topology, respectively, both of which are subspaces of $\mathrm{C}(X^2)$. As is easily observed, $\mathrm{PM}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ are cones in the Banach space $\mathrm{C}(X^2)$. In this report, we shall investigate the topological and metric structures of these function spaces.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46B04, 46E15, 52A07, 54C25, 54C35, 54E35, 54E40, 54E45, 54H05, 57N20.

Key words and phrases. space of metrics, pseudometric, admissible metric, the topology of uniform convergence, sup-norm, sup-metric, convex set, Hilbert space, absolute Borel class, completely metrizable, the Hausdorff metric extension theorem, isometric universality, isometry, the Banach-Mazur theorem, the Kratowski embedding theorem, the Banach-Stone theorem.

2. Recognizing topologies on spaces of metrics

Infinite-dimensional topology has developed together with the study of function spaces. Recognizing topologies on function spaces is one of the most important issues in that area. It is known that every infinite-dimensional Banach space is homeomorphic to a Hilbert space of the same density (cf. [1, 31, 52, 53]). In particular, we have the following:

Theorem 2.1. *For an infinite space X, the Banach space $\mathrm{C}(X)$ is homeomorphic to a Hilbert space of the same density.*

Research in this direction has advanced, and the topologies on many function spaces have been identified. In this section, we will decide the topological types of spaces consisting of metrics.

2.1. **The Borel complexity and the complete metrizability of spaces of metrics.** In the recognition of infinite-dimensional manifolds among function spaces, finding their Borel complexity plays a significant role. In this subsection, we shall study the Borel complexity and the complete metrizability of spaces of metrics, which summarizes the paper [36]. Recall that for a topological space X, the sup-metric is complete on $\mathrm{C}(X^2)$. The subspace $\mathrm{PM}(X)$ is closed in $\mathrm{C}(X^2)$, refer to the proof of [29, Lemma 5.1], so it is also complete. Y. Ishiki [27] showed that the space consisting of admissible metrics (not only bounded admissible metrics) on X with the topology of uniform convergence, that is, an extended space of $\mathrm{AM}(X)$, is a Baire space, and hence its open subspace $\mathrm{AM}(X)$ is also Baire. It is well-known that completely metrizable spaces are Baire (the Baire Category Theorem, cf. [44, Theorem 2.5.1]), however the inverse does not hold. For example, the space $\mathbb{R}\times(0,\infty)\cup\mathbb{Q}\times\{0\}$, where $\mathbb{R}$ is the real line and $\mathbb{Q}$ is the set of rationals, is Baire but not completely metrizable. Whether is $\mathrm{AM}(X)$ always completely metrizable or not?

Given a metrizable space Y, let $\mathfrak{A}_0(Y)$ be the family of open sets in Y, and let $\mathfrak{M}_0(Y)$ be the one of closed sets in Y. For a natural number n, define inductively the collections

$$\mathfrak{A}_n(Y)=\left\{\bigcup_{k<\aleph_0}A_k\;\middle|\;A_k\in\bigcup_{m<n}\mathfrak{M}_m(Y)\right\}\text{ and }\mathfrak{M}_n(Y)=\left\{\bigcap_{k<\aleph_0}A_k\;\middle|\;A_k\in\bigcup_{m<n}\mathfrak{A}_m(Y)\right\}.$$

Denote by $\mathfrak{A}_n$ (respectively, $\mathfrak{M}_n$) a class of spaces X such that X is belonging to $\mathfrak{A}_n(Y)$ (respectively, $\mathfrak{M}_n(Y)$) for every metrizable space Y which contains X as a subspace. We call $\mathfrak{A}_n$ and $\mathfrak{M}_n$ to be the *absolute Borel classes*. Recall the following:

- $\mathfrak{A}_0=\{\emptyset\}$ and $\mathfrak{M}_0$ is the class of compact metrizable spaces.
- $\mathfrak{M}_1$ is consisting of completely metrizable spaces (cf. [44, Theorem 2.5.2]).
- $\mathfrak{A}_1$ is consisting of σ-locally compact metrizable spaces (σ-compact metrizable spaces in the separable case) (cf. [48]).

The Borel complexity of spaces of metrics are restricted by the one of their underlying spaces as follows:

Theorem 2.2. *Let X be a metrizable space and $n\geq 1$. If $\mathrm{AM}(X)$ is in $\mathfrak{A}_n$ (respectively, $\mathfrak{M}_n$), then X is in $\mathfrak{M}_n$ (respectively, $\mathfrak{A}_n$).*

By $\mathrm{M}(X)$, denote the space of bounded continuous metrics on a space X. Note that $\mathrm{M}(X)$ coincides with $\mathrm{AM}(X)$ when X is compact, however that they are not coincident in general. For an example, define $d\in\mathrm{M}([0,1))$ by

$$d(x,y)=\min\{|x-y|,1-|x-y|\},$$

so $d\notin\mathrm{AM}([0,1))$. It follows from the similar argument as the proof of [29, Lemma 5.1] that $\mathrm{M}(X)$ is a G_δ set in $\mathrm{C}(X^2)$ if X is a σ-compact metrizable space, and that $\mathrm{AM}(X)$ is a G_δ set in $\mathrm{C}(X^2)$ if X is a separable locally compact metrizable space. Moreover, we have the following:

Proposition 2.3. *If X is a σ-compact metrizable space, then $\mathrm{AM}(X)$ is G_δ in $\mathrm{C}(X^2)$.*

Proof. Since X is σ-compact, we can write $X = \bigcup_{m<\aleph_0} X_m$, where X_m is a compact subset. Fix any admissible metric $d_X \in \mathrm{AM}(X)$. For $m, n < \aleph_0$, set

$$U(m,n) = \{d \in \mathrm{M}(X) \mid d \text{ fulfills the property } (\star)\}.$$

($\star$) There is $\delta > 0$ such that for all $x \in X_m$ and $y \in X$ with $d(x,y) < \delta$, $d_X(x,y) + \delta < 2^{-n}$.

Then we get that

$$\mathrm{AM}(X) = \bigcap_{m<\aleph_0} \bigcap_{n<\aleph_0} U(m,n),$$

and that each $U(m,n)$ is open in $\mathrm{M}(X)$. □

As a corollary of Theorem 2.2 and Proposition 2.3, we can give an equivalent condition on the complete metrizability of $\mathrm{AM}(X)$ as follows:

Corollary 2.4. *Assume that X is a separable metrizable space. Then X is σ-compact if and only if $\mathrm{AM}(X)$ is completely metrizable.*

The following example contains a good technique to prove Theorem 2.2.

Example 2.5. Let $Q = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ and $P = [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Suppose that X is the topological sum $P \oplus (0,1]$, so $\mathrm{AM}(X)$ is not completely metrizable. Indeed, for each $q \in Q$, define $d_q \in \mathrm{AM}(X)$ by

$$d_q(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{if } (x,y) \in P^2 \text{ or } (0,1]^2, \\ |x-q| + y & \text{if } x \in P \text{ and } y \in (0,1], \\ x + |y-q| & \text{if } x \in (0,1] \text{ and } y \in P. \end{cases}$$

Then the set

$$\{d_q \in \mathrm{AM}(X) \mid p \in Q\}$$

is a closed subset isometric to Q, which is not completely metrizable.

F. Hausdorff [18] showed the metric extension theorem, which states that for every metrizable space X and its closed set A, any $d \in \mathrm{AM}(A)$ can be extended over X. We can get its pseudometric version, where their sup-norms are preserved.

Theorem 2.6. *Suppose that X is a metrizable space and $A \subset X$ is a closed subset. For each $d \in \mathrm{PM}(A)$, there exists $\bar{d} \in \mathrm{PM}(X)$ such that $\bar{d}|_{A^2} = d$ and $\|\bar{d}\| = \|d\|$. Moreover, when $d \in \mathrm{AM}(A)$, we can choose its extension $\bar{d} \in \mathrm{AM}(X)$.*

This extension theorem has been developed due to the efforts by C. Bessaga [11, 7], T. Banakh [5, 7], O. Pikhurko [43] and M. Zarichnyi [62] (see also [9] for the variable domains case and [26] for the unbounded case), and we can obtain the following extensor on spaces of metrics.

Theorem 2.7. *Let X be a metrizable space and $A \subset X$ be a closed set. Then there exists an isometric embedding $E : \mathrm{PM}(A) \to \mathrm{PM}(Y)$ such that $E(d)|_{A^2} = d$ for all pseudometrics $d \in \mathrm{PM}(A)$ and $E(\mathrm{AM}(A)) \subset \mathrm{AM}(X)$.*

These results will play key roles in constructing "nice" metrics instead of Urysohn's lemma throughout the report.

Observe the following basic properties on absolute Borel classes.

Remark 2.8. The following hold.

(i) All closed subspaces of certain metrizable space in an absolute Borel class also belong to it.

(ii) If a metrizable space is a union of a locally finite family consisting of subspaces belonging to an absolute Borel class, then it is also belonging to the same one (cf. [16, 4.5.8 (a)]).
(iii) For a metrizable space X, $X \in \mathfrak{A}_n$, $n \geq 2$, (respectively, $X \in \mathfrak{M}_n$, $n \geq 1$,) if and only if $X \in \mathfrak{A}_n(Y)$ (respectively, $\mathfrak{M}_n(Y)$) for some completely metrizable space Y (cf. [45, Theorem 5.11.2]). If $X \notin \mathfrak{A}_1$, then there is a completely metrizable space Y such that $X \notin \mathfrak{A}_1(Y)$.

For spaces $A \subset X$, denote the interior and closure of A in X by $\mathrm{int}_X A$ and $\mathrm{cl}_X A$, respectively. Now we will provide a proof of Theorem 2.2.

Proof of Theorem 2.2. We only show the case that $\mathrm{AM}(X) \in \mathfrak{M}_n$. Suppose that X is not belonging to $\mathfrak{A}_n$, and take a bounded complete metric space $Y = (Y, \rho)$ so that $X \notin \mathfrak{A}_n(Y)$ by (iii) of Remark 2.8. Put $B = X \setminus \mathrm{int}_Y X$ and $Z = \mathrm{cl}_Y B \setminus X$, so $B \notin \mathfrak{A}_n(Y)$, $Z \notin \mathfrak{M}_n$ and $\mathrm{cl}_Y B = B \cup Z$. According to (ii) of Remark 2.8, we can find a locally finite open cover $\mathcal{U}$ of $\mathrm{cl}_Y B$ such that $Z \cap \mathrm{cl}_Y U \notin \mathfrak{M}_n$, $Z \cap U' \neq \emptyset$ and $\mathrm{cl}_Y U \cap \mathrm{cl}_Y U' = \emptyset$ for some $U, U' \in \mathcal{U}$. Fix any point $a \in Z \cap U'$ and choose a sequence $\{a_n\} \subset X \cap U'$ converging to the point a. Then $A = \{a_n\}$ and $B' = B \cap \mathrm{cl}_Y U$ are closed in X, and $Z' = Z \cap \mathrm{cl}_Y U \notin \mathfrak{M}_n$. Define $i : Z' \to \mathrm{AM}(A \oplus B')$ by

$$i(z)(x,y) = \begin{cases} \rho(x,y) & \text{if } (x,y) \in A^2 \text{ or } B'^2, \\ \rho(x,a) + \rho(y,z) & \text{if } x \in A \text{ and } y \in B', \\ \rho(x,z) + \rho(y,a) & \text{if } x \in B' \text{ and } y \in A. \end{cases}$$

Taking an extending map $E : \mathrm{AM}(A \oplus B') \to \mathrm{AM}(X)$ according to Theorem 2.7, we have that the composition $E \circ i$ is a closed embedding, which contradicts to (i) of Remark 2.8. □

2.2. **The topological types of spaces of metrics.** This subsection is devoted to determining the topological types of spaces of metrics, which provides a summary of the paper [35]. A topological space X is said to be *generalized compact* if every open cover of X has a subcover whose cardinality is less than the density of X. When X is a separable metrizable space, the compactness coincides with the generalized compactness. For an infinite cardinal κ, let $\ell_2(\kappa)$ be the Hilbert space of density κ (see [44, p. 16]):

$$\ell_2(\kappa) = \left\{ x \in \mathbb{R}^\kappa \;\middle|\; \sum_{\gamma<\kappa} x(\gamma)^2 < \infty \right\},$$

and denote $\ell_2(\aleph_0)$ by ℓ_2 for simplicity. The symbol ℓ_∞ stands for the space of bounded sequences with the sup-norm, which is homeomorphic to $\ell_2(2^{\aleph_0})$. We can classify the topologies of $\mathrm{PM}(X)$, $\mathrm{M}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ as follows:

Theorem 2.9. *Let X be a metrizable space of density κ. Then $\mathrm{PM}(X)$ is homeomorphic to*
(i) $[0,1)^{\kappa(\kappa-1)/2}$ *if X is finite;*
(ii) $\ell_2(2^{<\kappa})$ *if X is infinite and generalized compact;*
(iii) $\ell_2(2^\kappa)$ *if X is not generalized compact.*

Theorem 2.10. *Suppose that X is an infinite σ-compact metrizable space. Then the spaces $\mathrm{M}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ are homeomorphic to*
(i) ℓ_2 *if X is compact;*
(ii) ℓ_∞ *if X is not compact.*

Using the following criterion due to T. Dobrowolski and H. Toruńczyk [15, Theorem 2], and T. Banakh and R. Cauty [8, Theorem 2], we will prove Theorems 2.9 and 2.10, where a sufficient condition is given for G_δ convex sets in Fréchet spaces to be homeomorphic to Hilbert spaces.

Theorem 2.11. *Let C be a G_δ convex set in a Fréchet space. If the closure of C is not locally compact, then C is homeomorphic to a Hilbert space. Especially, if C is not separable, then C is homeomorphic to a non-separable Hilbert space.*

It is shown that $\mathrm{PM}(X)$ is the closure of $\mathrm{M}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ in $\mathrm{C}(X^2)$.

Proposition 2.12. *For every metrizable space X, $\mathrm{AM}(X)$ is dense in $\mathrm{PM}(X)$.*

Proof. For each $d \in \mathrm{PM}(X)$ and each $\epsilon > 0$, we will find $\rho \in \mathrm{AM}(X)$ with $\|d - \rho\| \leq \epsilon$. Fix any admissible metric $d_X \in \mathrm{AM}(X)$ of norm $\leq \epsilon$, and define $\rho \in \mathrm{AM}(X)$ by

$$\rho(x, y) = \max\{d(x, y), d_X(x, y)\}$$

for every $(x, y) \in X^2$, which is the desired. □

We will estimate the densities of $\mathrm{PM}(X)$, $\mathrm{M}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$.

Lemma 2.13. *If a metrizable space X contains a closed discrete subset of cardinality κ, then the density of $\mathrm{PM}(X)$ is greater than or equal to 2^κ.*

Proof. Take a closed discrete subset $D = \{x_\gamma \in X \mid \gamma < \kappa\}$ and fix a point $x_0 \in D$. We can define a pseudometric $d_a \in \mathrm{PM}(D)$ for each sequence $a = (a_\gamma)_{\gamma<\kappa} \in \{0, 1\}^\kappa$ by

(1) $d_a(x_0, x_0) = 0$ and $d_a(x_\gamma, x_0) = d_a(x_0, x_\gamma) = a_\gamma$ for any $0 < \gamma < \kappa$,
(2) $d_a(x_\gamma, x_\lambda) = |d_a(x_\gamma, x_0) - d_a(x_\lambda, x_0)|$ for any $0 < \gamma \leq \lambda < \kappa$.

Note that the subset

$$\{d_a \in \mathrm{PM}(D) \mid a \in \{0, 1\}^\kappa\}$$

is closed and discrete in $\mathrm{PM}(D)$, and hence the density of $\mathrm{PM}(D)$ is greater than or equal to 2^κ. By virtue of the metric extension theorem 2.6, the restriction

$$\mathrm{PM}(X) \ni d \mapsto d|_{D^2} \in \mathrm{PM}(D)$$

is surjective, which implies that the density of $\mathrm{PM}(X)$ is also greater than or equal to 2^κ. □

In the papers [10, 14], cardinal functions of topological spaces and their function spaces are estimated by the generalized compactness of them. Combining the above lemma with several results of those papers, we have the following:

Proposition 2.14. *Suppose that X is a metrizable space of density κ. The density of $\mathrm{PM}(X)$ is equal to $2^{<\kappa}$ if X is infinite and generalized compact, and is equal to 2^κ if X is not generalized compact.*

Now Theorems 2.9 and 2.10 are shown.

Proof of Theorem 2.9. We will prove only the infinite cases. Combining the latter part of Theorem 2.11 with Proposition 2.14, we can establish (iii) immediately.

Similarly, to show (ii), it remains to verify that $\mathrm{PM}(X)$ is not locally compact. Fix any pseudometric $d \in \mathrm{PM}(X)$ and any neighborhood U of d. Take $\epsilon > 0$ such that if $\|d - d'\| \leq \epsilon$, then $d' \in U$. Since X is infinite and generalized compact, we can choose a point $x \in X$ all of whose neighborhoods are of density $\geq \kappa$ according to [10, Lemma 11]. Hence for any neighborhood V of (x, x) in X^2, there is $y \in X$ such that $x \neq y$ and $(x, y) \in V$. Applying Theorem 2.6, we can obtain a pseudometric $e \in \mathrm{PM}(X)$ so that $e(x, y) = \epsilon$ and $\|e\| = \epsilon$. Let $\rho \in \mathrm{PM}(X)$ be defined by $\rho = d + e$. Then $\|d - \rho\| \leq \epsilon$ and $\rho(x, y) \geq \rho(x, x) + \epsilon$. By virtue of Arzerà-Ascoli's Theorem (refer to [41, Lemma 45.2]), the space $\mathrm{PM}(X)$ is not locally compact. □

Proof of Theorem 2.10. Recall that $\mathrm{PM}(X)$ is the closure of $\mathrm{M}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ by Proposition 2.12. As is seem in the above proof, $\mathrm{PM}(X)$ is not locally compact. Applying Theorem 2.11, we can prove Theorem 2.10. □

2.3. **Problems.** The complete topological classification of $\mathrm{PM}(X)$ is obtained. In fact, they are homeomorphic to a Hilbert space. In infinite-dimensional topology, it is known that for each absolute Borel class, there is its universal space, which is a dense subset of a Hilbert space. Their topological properties and characterizations have been studied, refer to [13, 60, 12, 47, 40, 33, 34] and [45, Section 5]. Moreover, there are a lot of research on function spaces that are homeomorphic to such spaces. In [23], the denseness and Borel hierarchy of function spaces consisting of several kinds of metrics are investigated.

Problem 2.15. *For a metrizable space X, which subspaces in $\mathrm{PM}(X)$ are homeomorphic to universal spaces for absolute Borel classes?*

3. Isometric universality of spaces of metrics

In this section, we shall study the metric structures of spaces of metrics, which is based on a joint work with Y. Ishiki [30]. Given a class $\mathcal{C}$ of metric spaces, we say that a metric space $Z = (Z, d)$ is *universal* for $\mathcal{C}$ if every $X = (X, \rho) \in \mathcal{C}$ can be isometrically embedded into Z. For an infinite cardinal κ, let $\mathcal{S}_\kappa$ be the class of bounded metric spaces of density $\leq \kappa$, and let $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\aleph_0}$ be the one of bounded separable metric spaces. Denote by $\mathcal{T}$ the class of totally bounded metric spaces. Note that $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. There are many results on the universality of function spaces. S. Banach and S. Mazur proved the following (see [4, Theorem 10 in Chapter XI]):

Theorem 3.1 (the Banach-Mazur theorem)**.** *The space $\mathrm{C}([0,1])$ is universal for $\mathcal{S}$.*

This section is devoted to giving variants of this famous theorem. Especially, we have the following:

Theorem 3.2. *The space $\mathrm{AM}([0,1])$ is universal for $\mathcal{T}$.*

3.1. **Banach-Mazur type theorems.** The following is a key lemma, which can be proven by the method based on Example 2.5.

Lemma 3.3. *Let $X = (X, d)$ be a bounded metric space. Then there exists an isometric embedding from X into the space $\mathrm{AM}(X \oplus \{*\})$.*

Proof. We shall define $I : X \to \mathrm{AM}(X \oplus \{*\})$ as follows: for each $z \in X$,

$$I(z)(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{if } x, y \in X; \\ d(x,z) + 1 & \text{if } x \in X \text{ and } y = *, \\ d(y,z) + 1 & \text{if } x = * \text{ and } y \in X, \\ 0 & \text{if } x = y = *. \end{cases}$$

Then the map I is an isometric embedding. □

We will investigate the universality of spaces of metrics on topological universal spaces.

Theorem 3.4. *Let $\mathcal{C}$ be a class of bounded metric spaces and Z be a metrizable space. Assume that the following condition is satisfied:*

(†) *For each $X = (X, d) \in \mathcal{C}$, there is a bounded metric space $Y = (Y, \rho)$ containing X as a subspace such that $\rho|_{X^2} = d$, and there exists a closed topological embedding from $Y \oplus \{*\}$ to Z.*

Then the space $\mathrm{AM}(Z)$ is universal for $\mathcal{C}$.

Proof. Take an extension $Y = (Y, \rho)$ of $X = (X, d) \in \mathcal{C}$ as in (†), and let $i : X \to Y$ be the inclusion map. It follows from Lemma 3.3 that there exists an isometric embedding $I : Y \to \mathrm{AM}(Y \oplus \{*\})$. By virtue of Theorem 2.7, we can obtain an isometric extensor $E : \mathrm{AM}(Y \oplus \{*\}) \to \mathrm{AM}(Z)$. Consequently, the composition $J = E \circ I \circ i$ is an isometric embedding from X to $\mathrm{AM}(Z)$. □

Let κ be an infinite cardinal. For every completely metrizable space Z of density $\leq \kappa$, there exists a topological embedding $f : Z \to \ell_2(\kappa)$ such that the image $f(Z)$ is closed in $\ell_2(\kappa)$, see [44, Theorem 6.2.4]. We denote by $\mathbf{Q} = [0,1]^{\aleph_0}$ the Hilbert cube. According to the method of the proof of the Urysohn metrization theorem (see [41, Theorem 34.1]), $\mathbf{Q}$ admits a topological embedding from any compact metrizable space.

Theorem 3.5. *The following statements are true.*

(1) *For every infinite cardinal κ, the space $\mathrm{AM}(\ell_2(\kappa))$ is universal for $\mathcal{S}_\kappa$.*
(2) *The space $\mathrm{AM}(\mathbf{Q})$ is universal for $\mathcal{T}$.*

Proof. For every bounded metric space $X = (X, d)$, take the completion $\overline{X} = (\overline{X}, \bar{d})$ of X. Then the extended space $\overline{X} \oplus \{*\}$ is a completely metrizable space of density $\leq \kappa$ if $X \in \mathcal{S}_\kappa$, and is a compact metrizable space if $X \in \mathcal{T}$. Therfore the condition (†) in Theorem 3.4 is fulfilled. □

As is easily observed, we have the following.

Lemma 3.6. *Let X be a metrizable space. For every $d \in \mathrm{PM}(X)$ and every $\rho \in \mathrm{AM}(X)$, their sum $d + \rho \in \mathrm{AM}(X)$.*

Applying the above lemma, we can prove the following:

Lemma 3.7. *Let $\mathcal{C}$ be a class of metric spaces, and let X be a metrizable space. If $\mathrm{PM}(X)$ is universal for $\mathcal{C}$, then so is $\mathrm{AM}(X)$.*

Proof. Fixing any admissible metric $d \in \mathrm{AM}(X)$, we can construct an isometric embedding $I_d : \mathrm{PM}(X) \to \mathrm{AM}(X)$ defined by $I_d(\rho) = \rho + d$ due to Lemma 3.6. □

Let X and Y be metrizable spaces, and $f : X \to Y$ be a continuous map. Then we can define an operator $J_f : \mathrm{PM}(Y) \to \mathrm{PM}(X)$ by $J_f(d)(x, y) = d(f(x), f(y))$.

Lemma 3.8. *Let X and Y be metrizable spaces, and let $f : X \to Y$ be a continuous surjection. If $\mathrm{AM}(Y)$ is universal for a class $\mathcal{C}$ of metric spaces, then so is $\mathrm{AM}(X)$.*

Proof. As is easily observed, the map $J_f : \mathrm{PM}(Y) \to \mathrm{PM}(X)$ is an isometric embedding. Let $I_d : \mathrm{PM}(X) \to \mathrm{AM}(X)$ be an isometric embedding as in Lemma 3.7 for any fixed $d \in \mathrm{AM}(X)$, so we can construct the desired isometric embedding $I_d \circ J_f|_{\mathrm{AM}(Y)}$. □

Combining Theorem 3.5(2) with the above lemma, we have the following:

Theorem 3.9. *Let X be a metrizable space such that there exists a continuous surjection from X to the Hilbert cube $\mathbf{Q}$. Then $\mathrm{AM}(X)$ is universal for $\mathcal{T}$.*

We are now in a position to prove Theorem 3.2.

Proof of Theorem 3.2. There exists a continuous surjection from $[0,1]$ to $\mathbf{Q}$ (the Hahn–Mazurkiewicz theorem, see [61, Theorem 31.5]). Thus the closed unit interval $[0,1]$ satisfies the assumption of Theorem 3.9. □

It is said that a metrizable space X is an *absolute retract*, briefly AR, provided that there is a retraction $r : Y \to X$ of an arbitrarily metrizable space Y that contains X as a closed subspace. Recall that X is an AR if and only if every map $f : A \to X$ from a closed set A in a metrizable space Y extends over Y (cf. [44, Theorem 6.2.5]). We can establish the following as a corollary of Theorem 3.9.

Corollary 3.10. *For every uncountable Polish space X, the space $\mathrm{AM}(X)$ is universal for $\mathcal{T}$.*

Proof. An arbitrary uncountable Polish space X contains a topological copy C of the Cantor set (the Cantor–Bendixson theorem, refer to [32, Corollary 6.5]). Then there is a continuous surjection $f : C \to \mathbf{Q}$ (cf. [61, Theorem 30.7]). Since $\mathbf{Q}$ is an AR (cf. [45, Theorem 3.8.7]), we can obtain an extension of f over X. Theorem 3.9 implies that $\mathrm{AM}(X)$ is universal for $\mathcal{T}$. □

3.2. **Kuratowski type theorems.** Due to the same argument as Theorem 3.4, we can construct some isometric embeddings from a given bounded metric space $X = (X, d)$ into $\mathrm{AM}(X)$, that is an analogue of the Kuratowski embedding theorem (cf. [19, p. 100]).

Theorem 3.11. *Let $X = (X, d)$ be a metric space satisfying either of the following:*

(1) *X contains a subset A such that A is uniformly homeomorphic to X and its closure $\mathrm{cl}_X A$ is a proper subset of X;*
(2) *X contains a closed proper subset B homeomorphic to X.*

Then there exits an isometric embedding from X into $\mathrm{AM}(X)$.

Proof. For a uniform homeomorphism $f : (X, d) \to (A, d|_{A^2})$ in the case (1), there exists an extended space $Y = (Y, \bar{d})$ of X and a homeomorphism $\bar{f} : Y \to \mathrm{cl}_X A$ such that $\bar{d}|_{X^2} = d$ and $\bar{f}|_X = f$. By the assumptions (1) and (2), we can choose points $p \in X \setminus \mathrm{cl}_X A$ and $q \in X \setminus B$, and regard the extended spaces $Y \oplus \{*\}$ and $X \oplus \{*\}$ homeomorphic to the closed subsets $\mathrm{cl}_X A \cup \{p\}$ and $B \cup \{q\}$ of X, respectively. It follows form the same argument as the proof of Theorem 3.4 that there exists an isometric embedding from X to $\mathrm{AM}(X)$. □

3.3. **Problems.** We obtain that the space $\mathrm{AM}([0, 1])$ is universal for $\mathcal{T}$. Compared with the Banach-Mazur theorem 3.1, it is natural to ask the following:

Problem 3.12. *Is $\mathrm{AM}([0, 1])$ universal for $\mathcal{S}$?*

P. Urysohn constructed a separable metric space universal for $\mathcal{S}$, which space is called the Urysohn universal metric space (see [54, 55]). It is known that this space is homeomorphic to ℓ_2 (cf. [56]) and has not only that universality but also a kind of homogeneity for finite subsets. In the category of ultrametric spaces, Y. Ishiki detected an analogue of the Urysohn universal metric space among function spaces consisting of ultrametrics (cf. [24, 25, 28]).

Problem 3.13. *Do the spaces $\mathrm{PM}(X)$ and $\mathrm{AM}(X)$ of a metrizable space X admit "nice" properties like the Urysohn universal space?*

4. Isometries between spaces of metrics

This section provides a concise overview of the paper [37]. Throughout this section, an isometry means a surjective isometry. Isometries between function spaces have been studied in functional analysis. The Banach-Stone theorem [3, 49], which asserts that the metric structures of function spaces decide the topological ones of their underlying spaces, is one of the most important results in that field.

Theorem 4.1 (the Banach-Stone theorem)**.** *Suppose that X and Y are compact Hausdorff spaces. Then X and Y are homeomorphic if and only if $\mathrm{C}(X)$ and $\mathrm{C}(Y)$ are isometric. In this case, for every isometry $T : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(Y)$, there is a homeomorphism $\phi : Y \to X$ such that for all functions $f \in \mathrm{C}(X)$ and for all points $y \in Y$,*

$$T(f)(y) = g(y)f(\phi(y)), \tag{$*$}$$

where $|g(y)| = 1$.

Various Banach-Stone type theorems have been researched (see [17] as a historical note), but there seem to be very few studies addressing this issue on multivariate function spaces. In this section, we shall establish a Banach-Stone type theorem on spaces of metrics. As will be easily observed in the proof of Theorem 4.3, $\mathrm{PM}(X)$ and $\mathrm{PM}(Y)$ (respectively, $\mathrm{AM}(X)$ and $\mathrm{AM}(Y)$) are isometric if metrizable spaces X and Y are homeomorphic. However, Theorems 2.9 and 2.10 mean that X and Y are not necessarily homeomorphic even if $\mathrm{PM}(X)$ and $\mathrm{PM}(Y)$ (respectively, $\mathrm{AM}(X)$ and $\mathrm{AM}(Y)$) are homeomorphic. In the case where X and Y are compact, M.E. Shanks [46] proved the converse of it as follows:

Theorem 4.2. *Suppose that X and Y are compact metrizable spaces. The following are equivalent:*

(1) *X and Y are homeomorphic;*
(2) *$\mathrm{PM}(X)$ and $\mathrm{PM}(Y)$ are isometric;*
(3) *$\mathrm{AM}(X)$ and $\mathrm{AM}(Y)$ are isometric.*

As is seen in the Banach-Stone theorem, isometries between function spaces can be described as weighted composition operators by homeomorphisms of their underlying spaces such as $(*)$. Furthermore, D. Hirota, I. Matsuzaki and T. Miura [21] (cf. [50]) showed a Banach-Stone type theorem on non-negative cones of continuous function spaces, where the isometries are composition operators of weight $= 1$. On the other hand, Shanks did not give such a canonical formula. For a metrizable space Z, set

$$\mathrm{Pc}(Z) = \{d \in \mathrm{AM}(Z) \mid \text{there are } \{z, w\} \subset Z \text{ and a compact set } K \subset Z \text{ such that } d(z,w) = \|d\| \text{ and if } d(x,y) = \|d\|, \text{ then } x, y \in K\},$$

$$\mathrm{Pp}(Z) = \{d \in \mathrm{AM}(Z) \mid \text{ there uniquely exists } \{z, w\} \subset Z \text{ such that } d(z,w) = \|d\|\}.$$

Remark that $\mathrm{Pp}(Z) \subset \mathrm{Pc}(Z)$, and that $\mathrm{AM}(Z) = \mathrm{Pc}(Z)$ when Z is compact. Let $\mathrm{P}(Z)$ be either $\mathrm{Pc}(Z)$ or $\mathrm{Pp}(Z)$. We shall generalize Theorem 4.2 and describe isometries as composition operators as follows:

Theorem 4.3. *Let X and Y be metrizable spaces. The following are equivalent:*

(1) *X and Y are homeomorphic;*
(2) *there is an isometry $T : \mathrm{PM}(X) \to \mathrm{PM}(Y)$ with $T(\mathrm{P}(X)) = \mathrm{P}(Y)$;*
(3) *there is an isometry $T : \mathrm{AM}(X) \to \mathrm{AM}(Y)$ with $T(\mathrm{P}(X)) = \mathrm{P}(Y)$;*
(4) *there is an isometry $T : \mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(Y)$.*

In this case, for each isometry $T : \mathrm{PM}(X) \to \mathrm{PM}(Y)$ with $T(\mathrm{P}(X)) = \mathrm{P}(Y)$, there exists a homeomorphism $\phi : Y \to X$ such that for any $d \in \mathrm{PM}(X)$ and for any $x, y \in Y$,

$$T(d)(x,y) = d(\phi(x), \phi(y)). \qquad (*)$$

Except for the case that the cardinality of X or Y is equal to 2, the homeomorphism ϕ can be chosen uniquely.

4.1. **The peaking function argument.** We will prove Theorem 4.3 by using the peaking function argument, which traces its history back to Stone's method, and is different from Shanks' one. From now on, suppose that X and Y are non-degenerate metrizable spaces and $T : \mathrm{PM}(X) \to \mathrm{PM}(Y)$ is an isometry. Then T is norm-preserving.

Proposition 4.4. *For any $d \in \mathrm{PM}(X)$, $\|T(d)\| = \|d\|$, and for any $\rho \in \mathrm{PM}(Y)$, $\|T^{-1}(\rho)\| = \|\rho\|$.*

Proof. This proposition follows from the equality $T(\mathbf{0}_{X^2}) = \mathbf{0}_{Y^2}$ immediately, where $\mathbf{0}_{X^2} \in \mathrm{PM}(X)$ and $\mathbf{0}_{Y^2} \in \mathrm{PM}(Y)$ are the zero functions on X^2 and Y^2 respectively. Assume that $T(\mathbf{0}_{X^2}) \neq \mathbf{0}_{Y^2}$,

so there exist points $x, y \in Y$ such that $T(\mathbf{0}_{X^2})(x,y) > 0$. Then

$$\max\{\|T(\mathbf{0}_{X^2})\|, \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\|\} < \left\| \frac{2\|T(\mathbf{0}_{X^2})\| + \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\|}{\|T(\mathbf{0}_{X^2})\|} T(\mathbf{0}_{X^2}) \right\|.$$

Since T is isometric, by the similar argument as in Lemmas 2.3 and 2.4 of [21],

$$\begin{aligned} 2\|T(\mathbf{0}_{X^2})\| + \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\| &> \left\| \frac{2\|T(\mathbf{0}_{X^2})\| + \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\|}{\|T(\mathbf{0}_{X^2})\|} T(\mathbf{0}_{X^2}) - T(\mathbf{0}_{X^2}) \right\| \\ &= \left\| T^{-1}\left(\frac{2\|T(\mathbf{0}_{X^2})\| + \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\|}{\|T(\mathbf{0}_{X^2})\|} T(\mathbf{0}_{X^2}) \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{2\|T(\mathbf{0}_{X^2})\| + \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\|}{\|T(\mathbf{0}_{X^2})\|} T(\mathbf{0}_{X^2}) \right\| \\ &= 2\|T(\mathbf{0}_{X^2})\| + \|T^{-1}(\mathbf{0}_{Y^2})\|. \end{aligned}$$

This is a contradiction. □

Given a metrizable space Z, let $\mathrm{Fin}_2(Z)$ be the hyperspace consisting of non-empty finite sets in Z of cardinality ≤ 2, which is endowed with the Vietoris topology. Denote by $\mathrm{D}(Z)$ the subspace of doubletons of Z. For each $\{x,y\} \in \mathrm{Fin}_2(Z)$ and each $d \in \mathrm{PM}(Z)$, set

$$\mathcal{P}(Z, \{x,y\}) = \{\rho \in \mathrm{PM}(Z) \mid \rho(x,y) = \|\rho\|\},$$

$$\mathcal{F}(Z,d) = \{\{z,w\} \in \mathrm{Fin}_2(Z) \mid d(z,w) = \|d\|\}.$$

We can prove the following, which is a key lemma in this section.

Lemma 4.5. *Let Z be a non-degenerate metrizable space. For each $d \in \mathrm{PM}(Z)$ and each $\{x,y\} \in \mathrm{D}(Z)$, there exists $\rho \in \mathcal{P}(Z,\{x,y\})$ such that*

$$d + \rho \in \mathcal{P}(Z,\{x,y\}) \cap \mathrm{Pp}(Z).$$

Proof. Adding an admissible metric $e \in \mathcal{P}(Z,\{x,y\})$ with $\|e\| = 1$, we get that $d' = d + e \in \mathrm{AM}(Z)$ according to Lemma 3.6. Let $a = d'(x,y) > 0$ and

$$b = \min\Big\{ \sup_{z \in Z} d'(x,z), \sup_{z \in Z} d'(y,z) \Big\}.$$

Using Theorem 2.6, we can obtain $\rho_n \in \mathrm{PM}(Z)$ for each natural number n such that

(i) $\rho_n(z,w) = 4b$ if $z \in \overline{B}_{d'}(x, a/2^{n+1})$ and $w \in \overline{B}_{d'}(y, a/2^{n+1})$;
(ii) $\rho_n(z,w) = 2b$ if $z \in Z \setminus (B_{d'}(x, a/2^n) \cup B_{d'}(y, a/2^n))$ and $w \in \overline{B}_{d'}(x, a/2^{n+1}) \cup \overline{B}_{d'}(y, a/2^{n+1})$;
(iii) $\rho_n(z,w) = 0$ if $z, w \in Z \setminus (B_{d'}(x, a/2^n) \cup B_{d'}(y, a/2^n))$, if $z, w \in \overline{B}_{d'}(x, a/2^{n+1})$, or if $z, w \in \overline{B}_{d'}(y, a/2^{n+1})$;
(iv) $\rho_n(z,w) \leq 4b$ if otherwise.

Here for every $z \in Z$ and every $r > 0$, we write

$$B_{d'}(z,r) = \{w \in Z \mid d'(z,w) < r\},\ \overline{B}_{d'}(z,r) = \{w \in Z \mid d'(z,w) \leq r\}.$$

Then $\rho = e + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n / 2^n$ is the desired admissible metric. □

Using the finite intersection property in compact spaces (refer to [16, Theorem 3.1.1]), we can get the following:

Lemma 4.6. *Suppose that* $T(\mathrm{P}(X)) \subset \mathrm{P}(Y)$*. For every doubleton* $\{x, y\} \in \mathrm{D}(X)$*,*

$$\bigcap_{d \in \mathcal{P}(X,\{x,y\}) \cap \mathrm{P}(X)} \mathcal{F}(Y, T(d)) \neq \emptyset.$$

Proof. Remark that $\mathcal{P}(X, \{x, y\}) \cap \mathrm{P}(X) \neq \emptyset$ by virtue of Lemma 4.5. According to the assumption, fix any $d_0 \in \mathcal{P}(X, \{x, y\}) \cap \mathrm{P}(X)$, so $T(d_0) \in \mathrm{P}(Y)$ and there exists a non-empty compact set $K \subset Y$ such that for all $z, w \in Y$ with $T(d_0)(z, w) = \|T(d_0)\|$, $z, w \in K$. Since K is compact, the natural surjective image $\mathrm{Fin}_2(K)$ of K^2 is also compact (cf. [58, Lemma 5.3.4]). Observe that $\mathcal{F}(Y, T(d))$ is closed in $\mathrm{Fin}_2(Y)$ for every $d \in \mathcal{P}(X, \{x, y\})$. Then the family

$$\{\mathcal{F}(Y, T(d)) \cap \mathcal{F}(Y, T(d_0)) \mid d \in \mathcal{P}(X, \{x, y\})\}$$

has the finite intersection property.

In fact, for all $d_i \in \mathcal{P}(X, \{x, y\}) \cap \mathrm{P}(X)$, $1 \leq i \leq n$, observe that

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i \in \mathcal{P}(X, \{x, y\}).$$

By the assumption, we can find $\{z, w\} \in \mathrm{Fin}_2(Y)$ such that $T(d)(z, w) = d(x, y)$. For each $i \in \{1, \ldots, n\}$, since T is isometric,

$$T(d)(z, w) - T(d_i)(z, w) \leq \|T(d) - T(d_i)\| = \|d - d_i\| = d(x, y) - d_i(x, y),$$

and hence according to Proposition 4.4,

$$\|T(d_i)\| = \|d_i\| = d_i(x, y) \leq T(d_i)(z, w) \leq \|T(d_i)\|.$$

This means that $\{z, w\} \in \mathcal{F}(Y, T(d_i))$. □

We can construct the following corresponding between $\mathrm{D}(X)$ and $\mathrm{D}(Y)$.

Proposition 4.7. *Assume that* $T(\mathrm{P}(X)) = \mathrm{P}(Y)$*. There is a bijection* $\Phi : \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X)$ *such that for every* $\{x, y\} \in \mathrm{D}(X)$ *and every* $\{z, w\} \in \mathrm{D}(Y)$*,*

$$T(\mathcal{P}(X, \{x, y\}) \cap \mathrm{P}(X)) = \mathcal{P}(Y, \Phi^{-1}(\{x, y\})) \cap \mathrm{P}(Y),$$

$$T^{-1}(\mathcal{P}(Y, \{z, w\}) \cap \mathrm{P}(Y)) = \mathcal{P}(X, \Phi(\{z, w\})) \cap \mathrm{P}(X).$$

Proof. We can define Φ by

$$\{\Phi(\{z, w\})\} = \bigcap_{\rho \in \mathcal{P}(Y,\{z,w\}) \cap \mathrm{P}(Y)} \mathcal{F}(X, T^{-1}(\rho))$$

for each $\{z, w\} \in \mathrm{D}(Y)$, since the intersection is not empty by Lemma 4.6, and it is a singleton by virtue of Lemma 4.5. □

4.2. **Composition operators.** Show that the isometry T is a composition operator by some homeomorphism $\phi : Y \to X$. From now on, assume that $T(\mathrm{P}(X)) = \mathrm{P}(Y)$, and let $\Phi : \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X)$ be a bijection as in Proposition 4.7.

Proposition 4.8. *The equality* $T(d)(x, y) = d(\Phi(\{x, y\}))$ *holds for every* $d \in \mathrm{PM}(X)$ *and every* $\{x, y\} \in \mathrm{D}(Y)$*, where define* $d(\Phi\{x, y\}) = d(z, w)$ *with* $\Phi(\{x, y\}) = \{z, w\} \in \mathrm{D}(X)$*.*

Proof. We only prove that $T(d)(x,y) \leq d(\Phi(\{x,y\}))$. Using Lemma 4.5, we can take $\rho \in \mathcal{P}(Y,\{x,y\})$ so that $T(d)+\rho \in \mathcal{P}(Y,\{x,y\}) \cap \mathrm{P}(Y)$. By Propositions 4.7 and 4.4, since T is an isometry,

$$\begin{aligned} T(d)(x,y)+\rho(x,y)-d(\Phi(\{x,y\})) &= T^{-1}(T(d)+\rho)(\Phi(\{x,y\}))-d(\Phi(\{x,y\})) \\ &\leq \|T^{-1}(T(d)+\rho)-d\| = \|\rho\| = \rho(x,y), \end{aligned}$$

which implies that $T(d)(x,y) \leq d(\Phi(\{x,y\}))$. □

We shall construct a homeomorphism from Y to X which is compatible with the bijection Φ.

Proposition 4.9. *Suppose that the cardinality of X or Y is greater than 2. There exists a homeomorphism $\phi : Y \to X$ such that for any $\{x,y\} \in \mathrm{D}(Y)$ and any $\{z,w\} \in \mathrm{D}(X)$,*

$$\Phi(\{x,y\}) = \{\phi(x),\phi(y)\},\ \Phi^{-1}(\{z,w\}) = \{\phi^{-1}(z),\phi^{-1}(w)\}.$$

Proof. We can define a bijection $\phi : Y \to X$ by

$$\{\phi(y)\} = \bigcap_{z \in Y\setminus\{y\}} \Phi(\{y,z\})$$

for every $y \in Y$. To verify that ϕ is continuous, fix any point $y \in Y$ and any open neighborhood U of $\phi(y)$ in X. According to Theorem 2.6, we can find $d \in \mathrm{PM}(X)$ so that $d(\phi(y),x) = 2$ if $x \in X\setminus U$, and $d(x,x') = 0$ if $x,x' \in X \setminus U$. Then by Proposition 4.8, for every $z \in B_{T(d)}(y,1) \setminus \{y\}$,

$$d(\phi(y),\phi(z)) = d(\Phi(\{y,z\})) = T(d)(y,z) < 1,$$

which implies that $\phi(z) \in U$. □

The subspace $\mathrm{AM}(Z)$ is dense in $\mathrm{PM}(Z)$, see Proposition 2.12. Furthermore, we can obtain the denseness of $\mathrm{P}(Z) \subset \mathrm{PM}(Z)$ by the similar argument as Lemma 4.5.

Proposition 4.10. *For every metrizable space Z, the subset $\mathrm{P}(Z)$ is dense in $\mathrm{PM}(Z)$.*

Now we shall prove Theorem 4.3.

Proof of Theorem 4.3. The implications (1) ⇒ (2), (1) ⇒ (3) and (1) ⇒ (4) follow from Lemma 3.8. Indeed, take any homeomorphism $\psi : Y \to X$ and define the isometry $S : \mathrm{PM}(X) \to \mathrm{PM}(Y)$ by $S(d)(x,y) = d(\psi(x),\psi(y))$ for any $d \in \mathrm{PM}(X)$ and for any $x,y \in Y$, namely S is the composition operator by ψ. Observe that $S(\mathrm{AM}(X)) = \mathrm{AM}(Y)$ and $S(\mathrm{P}(X)) = \mathrm{P}(Y)$. By Propositions 2.12 and 4.10, $\mathrm{AM}(X)$ and $\mathrm{P}(X)$ are dense in $\mathrm{PM}(X)$, and hence each isometry in (3) and (4) can be extended to the one in (2), which means that (3) ⇒ (2) and (4) ⇒ (2) hold.

The implication (2) ⇒ (1) and the canonical formula (∗) hold from Propositions 4.8 and 4.9. To show the uniqueness of ϕ, let $\psi : Y \to X$ be a homeomorphism such that for all $d \in \mathrm{PM}(X)$ and for all $x,y \in Y$, $T(d)(x,y) = d(\psi(x),\psi(y))$, and suppose that $\phi(x) \neq \psi(x)$ for some point $x \in Y$. Fixing any $y \in Y \setminus \{x,\phi^{-1}(\psi(x))\}$, we can choose $\rho \in \mathrm{PM}(X)$ so that $\rho(\phi(x),\phi(y)) = 0$ and $\rho(\psi(x),\psi(y)) = 1$ by Theorem 2.6. Then

$$0 = \rho(\phi(x),\phi(y)) = T(\rho)(x,y) = \rho(\psi(x),\psi(y)) = 1,$$

which is a contradiction. □

4.3. **Problems.** There are many variants of the Banach-Stone theorem for subspaces of $\mathrm{C}(Z)$ on topological spaces Z, so it is interesting to consider this issue for subspaces of $\mathrm{PM}(Z)$. The author [38] showed a Banach-Stone type theorem on the subspaces consisting of uniformly continuous metrics on uniform spaces, which is an analogue of [2, 20]. Furthermore, given a metric space $Z = (Z, d_Z)$, let

$$\mathrm{LPM}(Z, d_Z) = \{d \in \mathrm{PM}(Z) \mid \mathrm{lip}(d) < \infty\},$$

where for any $d \in \mathrm{PM}(Z)$, put

$$\mathrm{lip}(d) = \sup_{x,y \in Z \text{ with } x \neq y} \frac{d(x,y)}{d_Z(x,y)}.$$

The author also established Banach-Stone type theorems for $\mathrm{LPM}(Z)$ and its subspaces. A variant of the Banach-Stone theorem for spaces of Lipschitz continuous functions with the Lipschitz norm was shown by N. Weaver [59].

Problem 4.11. *Solve a Banach-Stone type theorem for* $\mathrm{LPM}(Z)$ *equipped with the other norm:*

$$\|d\|_{lip} = \max\{\|d\|, \mathrm{lip}(d)\}.$$

Tingley's problem [51] is one of the most significant questions in functional analysis, that asks whether an isometry between the unit spheres of two Banach spaces can be extended to a real-linear isometry over the whole spaces (cf. [42] and [22, Introduction] for the recent developments). T. Banakh [6] solved the problem for 2-dimensional Banach spaces affirmatively. Although this question remains open in general case, it has been solved for specific function spaces since the study due to R. Wang [57]. The author [39] solved a variant of Tingley's problem on function spaces consisting of metrics on compact metrizable spaces.

Problem 4.12. *Solve Tingley type problem of function spaces consisting of metrics in the non-compact case.*

Acknowledgments. The author would like to express his deepest gratitude to Yoshito Ishiki, who initiated the study of spaces of metrics as moduli spaces of geometries of their underlying spaces, for providing intellectual inspiration and valuable advice.

References

[1] R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 515–519.
[2] J. Araujo and J.J, Font, *Linear isometries on subalgebras of uniformly continuous functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **43** (2000), no. 1, 139–147.
[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea, Warsaw, (1932).
[4] S. Banach, Theory of linear operations, Translated from the French by F. Jellett, with comments by A. Pełczyński and C. Bessaga, North-Holland Math. Library, **38**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.
[5] T. Banakh, *$AE(0)$-spaces and regular operators extending (averaging) pseudometrics*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **42** (1994), 197–206.
[6] T. Banakh, *Every 2-dimensional Banach space has the Mazur-Ulam property*, Linear Algebra Appl. **632** (2022), 268–280.
[7] T. Banakh and C. Bessaga, *On linear operators extending [pseudo]metrics*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **48** (2000), no. 1, 35–49.
[8] T. Banakh and R. Cauty, *Topological classification of closed convex sets in Fréchet spaces* Studia Math. **205** (2011), no. 1, 1–11.
[9] T. Banakh, I. Stasyuk, E.D. Tymchatyn and M. Zarichnyi, *Extension of functions and metrics with variable domains*, Topology Appl. **231** (2017), 353–372.

[10] A. Barbati and C. Costantini, *On the density of the hyperspace of a metric space*, Comment. Math. Univ. Carolin. **38** (1997), no. 2, 349–360.
[11] C. Bessaga, *On linear operators and functors extending pseudometrics*, (English summary) Fund. Math. **142** (1993), no. 2, 101–122.
[12] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
[13] T.A. Chapman, *Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 399–426.
[14] C. Costantini, *On the density of the space of continuous and uniformly continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), no. 7, 1056–1078.
[15] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *Separable complete ANR's admitting a group structure are Hilbert manifolds*, Topology Appl. **12** (1981), 229–235.
[16] R. Engelking, General Topology, Revised and Complete Edition, Sigma Ser. in Pure Math., **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
[17] R.J. Fleming and J.E. Jamison, Isometries on Banach spaces: function spaces, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **129**, Boca Raton, FL, (2003).
[18] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math. **16** (1930), 353–360.
[19] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam and J. Tyson, Sobolev spaces on metric measure spaces, An approach based on upper gradients, New Math. Monogr., **27** Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
[20] S. Hernández, *Uniformly continuous mappings defined by isometries of spaces of bounded uniformly continuous functions*, Houston J. Math. **29** (2003), no. 1, 149–155.
[21] D. Hirota, I. Matsuzaki and T. Miura, *Phase-isometries between the positive cones of the Banach spaces of continuous real-valued functions*, Ann. Funct. Anal. **15** (2024), no. 4, Paper No. 77, 11pp.
[22] O. Hatori, *The Mazur-Ulam property for a Banach space which satisfies a separation condition*, Research on preserver problems on Banach algebras and related topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B93**, 29–82, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2023.
[23] Y. Ishiki, *On dense subsets in spaces of metrics*, Colloq. Math. **170** (2022), no. 1, 27–39.
[24] Y. Ishiki, *Constructions of Urysohn universal ultrametric spaces*, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. **15** (2023), No. 4, 266–283.
[25] Y. Ishiki, *Uniqueness and homogeneity of non-separable Urysohn universal ultrametric spaces*, Topology Appl. **342** (2024), Paper No. 108762, 11 pp.
[26] Y. Ishiki, *An isometric extensor of metrics*, arXiv: 2407.03030 [math.MG].
[27] Y. Ishiki, *Spaces of metrics are Baire*, Topology Appl. **369** (2025), Paper No. 109408, 17 pp.
[28] Y. Ishiki, *Characterizations of Urysohn universal ultrametric spaces*, Anal. Geom. Metr. Spaces (2025), No. 1, Paper No. 20250024, 20 pp.
[29] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, Topology Appl. 388 (2026), Paper No. 109856, 20 pp.
[30] Y. Ishiki and K. Koshino, *On isometric universality of spaces of metrics*, Topology Appl. **369** (2025), Paper No. 109394, 15 pp.
[31] M.I. Kadec, *A proof the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces* (Russian), Funkcional Anal. i Priložen, **1** (1967), 61–70.
[32] A.S. Kechris, Classical descriptive set theory, Grad. Texts in Math. **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.
[33] K. Koshino, *Characterizing non-separable sigma-locally compact infinite-dimensional manifolds and its applications*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), 1155–1189.
[34] K. Koshino, *Characterizations of manifolds modeled on absorbing sets in non-separable Hilbert spaces and the discrete cells property*, Colloq. Math. **167** (2022), 127–147.
[35] K. Koshino, *Recognizing the topologies of spaces of metrics with the topology of uniform convergence*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **70** (2022), 165–171.
[36] K. Koshino, *On the Borel complexity and the complete metrizability of spaces of metrics*, Anal. Geom. Metr. Spaces (2024), Paper No. 20240014, 5 pp.
[37] K. Koshino, *Isometries between spaces of metrics*, Adv. Oper. Theory **10** (2025), 83, 16pp.
[38] K. Koshino, *Banach-Stone type theorems on uniformly continuous and Lipschitz continuous pseudometrics*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **120**, article number 129 (2026), 25 pp.
[39] K. Koshino, *Isometries between the unit spheres of spaces of metrics*, arXiv: 2606.25558 [math.FA].
[40] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes*, Tsukuba J. Math. **30** (2006), 137–148.

[41] J.R. Munkres, Topology, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.
[42] A.M. Peralta, *A survey on Tingley's problem for operator algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged) **84** (2018), no. 1–2, 81–123.
[43] O. Pikhurko, *Extending metrics in compact pairs*, (English, Russian summary) Mat. Stud. **3** (1994), 103–106.
[44] K. Sakai, Geometric Aspects of General Topology, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Tokyo, 2013.
[45] K. Sakai, Topology of Infinite-Dimensional Manifolds, Springer, SMM, Springer, Tokyo, 2020.
[46] M.E. Shanks, *The space of metrics on a compact metrizable space*, Amer. J. Math. **66** (1944), 461–469.
[47] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 143–159.
[48] A.H. Stone, *Absolute F_σ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 495–499.
[49] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), no. 3, 375–481.
[50] L. Sun, Y. Sun and D. Dai, *On phase-isometries between the positive cones of continuous function spaces*, Ann. Funct. Anal. **14**, (2023), No. 1, Paper No. 17, 12 pp.
[51] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geom. Dedicata **22** (1987), no. 3, 371–378.
[52] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.
[53] H. Toruńczyk, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 89–93.
[54] P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, C. R. Acad. Sci. Paris **180** (1925), 803–906.
[55] P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. **51** (1927), 43–64 and 74–90.
[56] V. Uspenskij, *The Urysohn universal metric space is homeomorphic to a Hilbert space*, Topology Appl. **139** (2004), 145–149.
[57] R. Wang, *Isometries between the unit spheres of $C_0(\Omega)$ type spaces*, Acta Math. Sci. **14** (1994), no. 1, 82–89.
[58] J. van Mill, Infinite-Dimensional Topology, Prerequisites and Introduction, North-Holland Math. Library **43**, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam, 1989.
[59] N. Weaver, *Isometries of noncompact Lipschitz spaces*, Canad. Math. Bull. **38** (1995), no. 2, 242–249.
[60] J.E. West, *The ambient homeomorphy of incomplete subspaces of infinite-dimensional Hilbert spaces*, Pacific J. Math. **34** (1970), 257–267.
[61] S. Willard, General topology, Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading], Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
[62] M. Zarichnyi, *Regular linear operators extending metrics: a short proof*, (English summary) Bull. Polish Acad. Sci. Math. **44** (1996), no. 3, 267–269.

(Katsuhisa Koshino) Faculty of Engineering, Kanagawa University, 3-27-1 Rokkakubashi, Kanagawa-ku, Yokohama-shi, 221-8686, Japan

Email address: ft160229no@kanagawa-u.ac.jp

分子がつくる構造のトポロジー

下川航也 *（お茶の水女子大学）

概要

本稿では，分子がつくる構造を，結び目理論と 3 次元多様体論の観点から考察する．一つは，ブロック共重合体のミクロ相分離等に現れる bicontinuous / tricontinuous / polycontinuous pattern であり，これは 3 次元トーラス $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ のハンドル体分解として定式化される [7, 15]．もう一つは，金属ペプチド環の自己集合体に現れるカテナン構造であり，これは多面体絡み目の構成と分類の問題として定式化される [17, 24].

1 序

環状分子のトポロジー構造は絡み目として記述される．多環状高分子の構造 [20]，DNA 絡み目のトポロジーを用いた DNA 組み換え酵素の働き [19, 21]，自己集合体で得られる絡まり構造 [17, 18, 6] 等が議論されてきた．また，相分離構造が 3 重周期的に空間を満たすとき，その構造は周期ネットワーク，あるいは T^3 の分解として記述される [15]．本稿では，自己集合体で得られる構造を多面体絡み目へ，相分離構造を T^3 のハンドル体分解へ翻訳し，考察を行う．

第 2 章では，polycontinuous pattern をハンドル体分解として定式化し，一意性および安定同値定理を述べる [7, 15]．第 3 章では，多面体絡み目の構成と，交代絡み目の分類理論に基づくその分類 [24] を述べ，多面体絡み目の多重被覆への一般化 [9] を述べる．

2 polycontinuous pattern と T^3 のハンドル体分解

周期的な相分離構造を，3 次元トーラス T^3 の分解と見ることにより考察する．

2.1 3 次元ネットと polycontinuous pattern

定義 2.1. $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれたグラフ G が，格子 $\Lambda \cong \mathbb{Z}^3$ の平行移動作用で不変であるとき，G を **3 次元ネット**という．商空間 $T^3 = \mathbb{R}^3/\Lambda$ において，G は T^3 内の空間グラフを定める．3 次元ネット G の正則近傍を**ラビリンス**と呼ぶ.

定義 2.2. 3 重周期曲面が $\mathbb{R}^3$ を二つの 3 重周期的ラビリンスに分割するとき，その分割を

* 〒112-8610 東京都文京区大塚 2-1-1 お茶の水女子大学基幹研究院自然科学系

bicontinuous pattern という．同様に，3 重周期分岐曲面が三つのラビリンスに分割するとき **tricontinuous pattern**，3 重周期的な 2 次元多面体が n 個のラビリンスに分割するとき **polycontinuous pattern** という（図 1）．

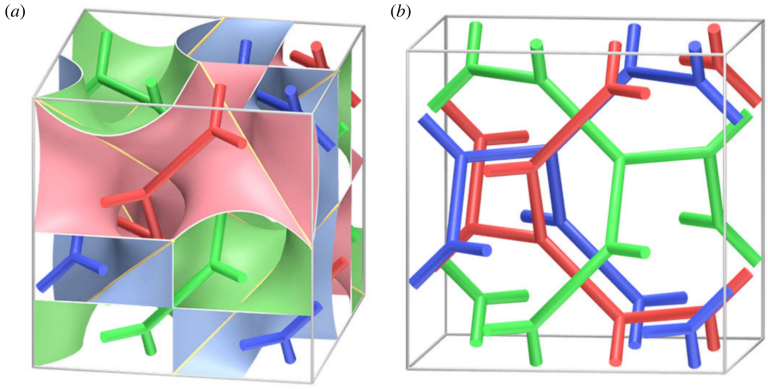


図 1　tricontinuous pattern と対応する 3 成分ネット（[15] より）．

二成分ネットと bicontinuous pattern は，ネットの骨格化に由来する IX–XI move を法として互いを一意に定める [7]．三成分の場合は次が成り立つ．

定理 2.3 (Ishihara–Koda–Ozawa–Shimokawa [7])**.** 三成分からなる 3 次元ネットは，IH–HI 変形と同位変形を除いて tricontinuous pattern を一意に定める．逆に，tricontinuous pattern は，IX–XI 変形と同位変形を除いて三成分 3 次元ネットを一意に定める．

この対応により，今回扱う相分離構造の分類は T^3 内の空間グラフおよび分解の分類に帰着する．

2.2　Heegaard 分解とハンドル体分解

定義 2.4. M を閉向き付け可能 3 次元多様体とする．ハンドル体 H_1, H_2 と閉曲面 S が

$$M = H_1 \cup_S H_2, \qquad H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2 = S$$

を満たすとき，$M = H_1 \cup_S H_2$ を **Heegaard 分解**という．

定理 2.5 (Frohman–Hass [2], Boileau–Otal [1])**.** 各 $g \geq 3$ に対して，T^3 の種数 g の Heegaard 分解は同相を除いて一意的である．

系 2.6. 単純 3 重周期的 bicontinuous pattern は，[15] の意味の同値を除き一意的である．

bicontinuous pattern は，トポロジーの範疇では区別されず，幾何的量などの考察が有効になる．三つ以上の領域の定式化のため，Heegaard 分解を一般化したハンドル体分解を導入する [15].

定義 2.7. 2 次元多面体 P の各点の近傍が図 2 のいずれかのモデル（円板，三重点，頂点）に同相

であるとき，P を**単純多面体**という．

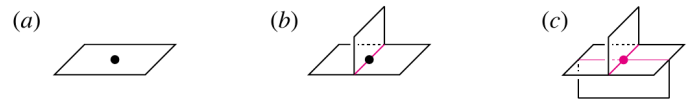


図 2　単純多面体の局所モデル（[15] より）．(a) 非特異点，(b) 三重点，(c) 頂点．

定義 2.8 ([15])**.** M を閉連結向き付け可能 3 次元多様体，$P \subset M$ を連結コンパクトな 2 次元多面体とし，

$$M \setminus P = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}(H_i)$$

かつ各 H_i が種数 g_i のハンドル体であるとき，$(H_1, \ldots, H_n; P)$ を型 $(g_1, \ldots, g_n)$ の**ハンドル体分解**といい，P をその **partition** と呼ぶ．P の特異グラフを B とするとき，$M \setminus B$ 内の単純閉曲線で P のセクターと横断的に 1 点で交わるものが存在しないとき **proper**，P が単純多面体であるとき **simple** という．

$n = 2$ のとき単純 proper ハンドル体分解は Heegaard 分解に他ならない．$n = 3$ で各 $H_i \cap H_j$ が連結なものは Koenig [10] の意味での trisection である．相分離構造では非連結な交わりが自然に現れるため，この広い意味の分解が必要となる．

T^3 のハンドル体分解については次が成り立つ．

定理 2.9 ([15])**.** T^3 の単純 proper な型 $(1,1,1)$ ハンドル体分解は，T^3 の自己同相を除いて六角ハニカム分解（図 3）に限る．したがって，型 $(1,1,1)$ の tricontinuous pattern は同位を除いて一意的である．

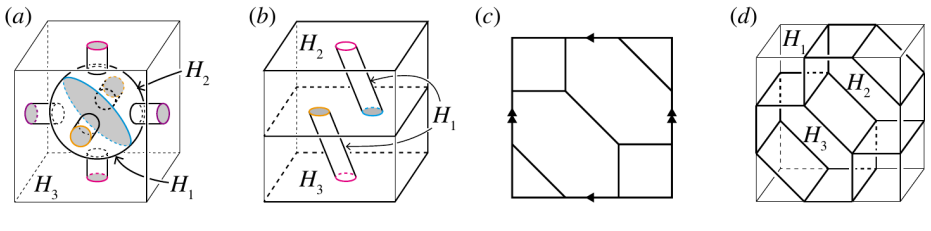


図 3　(a) T^3 の型 $(0,0,3)$ ハンドル体分解．(b) 型 $(0,2,2)$ ハンドル体分解．(c) T^2 の三つの六角形への分割．(d) T^3 の六角ハニカム分解（[15] より）．

例 2.10 ([15])**.** 型 $(2,2,2)$ では一意性は成り立たない．六角ハニカム分解に三回の type-1 安定化を施すことにより，図 4 の二つの型 $(2,2,2)$ ハンドル体分解が得られる．図 4(b) の分解では各

$F_{ij} = H_i \cap H_j$ は 2 穴トーラスと円板の非交和であり，(d) の分解では F_{23} は 1 穴トーラスとアニュラスの非交和，各 F_{1j} は 3 穴球面である．よって両者は異なる分解である．

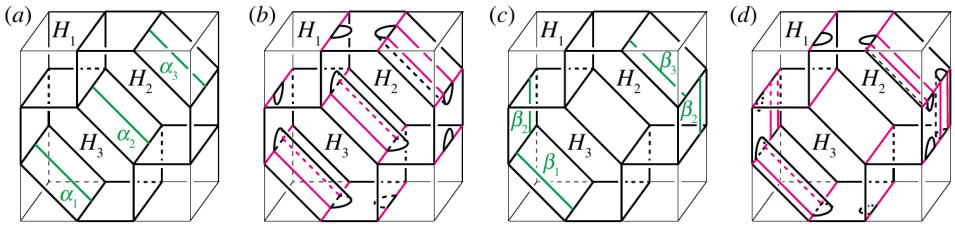


図 4　T^3 の互いに異なる型 $(2,2,2)$ ハンドル体分解（(b) と (d)）（[15] より）．

2.3　安定同値

ハンドル体分解に対し，図 5 の type-0, type-1, type-2 安定化が定義される．また，partition の頂点数を変える局所変形として 0-2, 2-0, 2-3, 3-2 move が定義される [15].

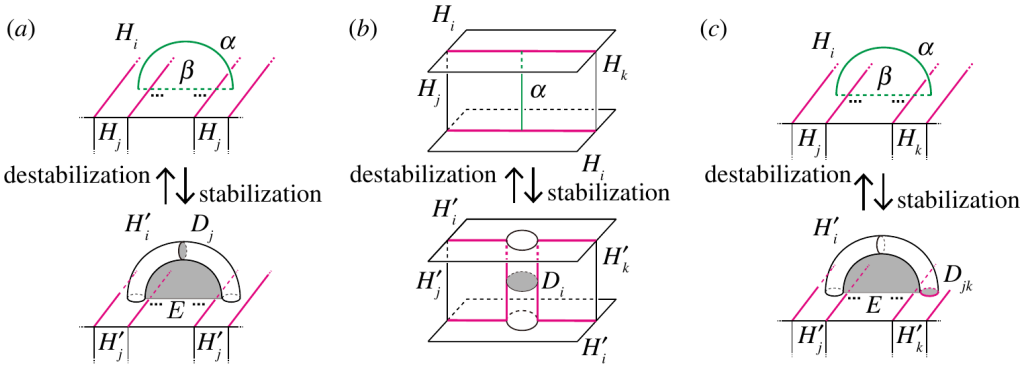


図 5　安定化と非安定化．(a) type-0，(b) type-1，(c) type-2（[15] より）．

次は Reidemeister–Singer の定理のハンドル体分解への拡張である．trisection の場合は Koenig [10] による．

定理 2.11 (Sakata–Mishina–Ogawa–Ishihara–Koda–Ozawa–Shimokawa [15])**.** 閉向き付け可能 3 次元多様体 M の任意の二つの simple proper ハンドル体分解は，0-2, 2-0, 2-3 move と type-0, type-1 安定化を有限回施すと同値となる．

系 2.12 ([15])**.** 二つの単純な彩色付き net-like pattern は，0-2, 2-0, 2-3 move と type-0, type-1 安定化の有限列で移り合う．

この定理により，異なる polycontinuous pattern が安定化を通じて比較可能になる．例えば，3

成分の srs ネット（gyroid 型ネット）から定まる 3srs パターンについて次が成り立つ．

定理 2.13 ([15])**.** 3srs パターン（図 6）や 3etc（図 7）は六角ハニカムパターンから有限回の安定化によって得られる．

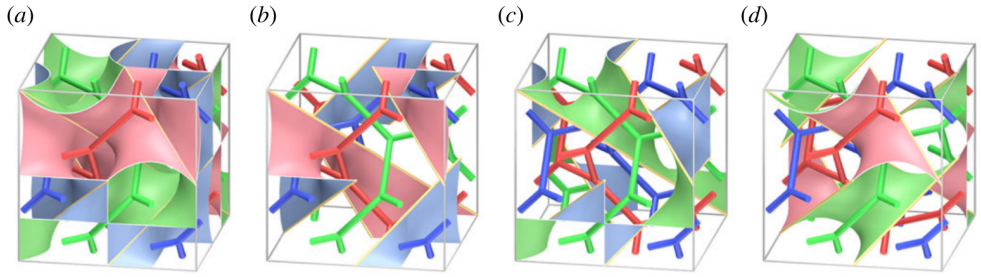


図 6　(a) 3srs ネットに対応する tricontinuous pattern．(b)–(d) ちょうど二つのラビリンスに接する境界付き曲面（[15] より）．

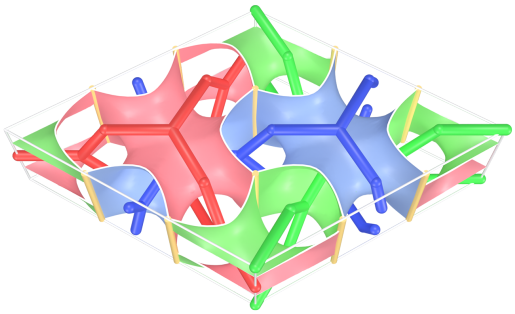


図 7　3etc．3srs とは格子が異なる．

3　多面体絡み目

3.1　金属ペプチド環の自己集合体

金属イオンとペプチド配位子の自己集合により，複雑なトポロジーをもつカテナン構造が合成されている [17, 18, 6]．文献 [17] では，ピリジン置換トリペプチドと銀イオン Ag^+ から 4 成分 12 交点のペプチドカテナンが得られた．ペプチド配列を変えることにより二つの異なるトポロジーが実現される．PGP 配列（P: L-プロリン，G: グリシン）は type-A 四面体絡み目を，TPP 配列（T: L-スレオニン）は type-B 四面体絡み目を与える．両者は成分数と交点数が等しいが異なるトポロジーをもつ．また，文献 [18] では 6 成分 24 交点の type-A 立方体絡み目型カプセルが，文献 [6] では 60 交点の織り込みネットワークをもつ $M_{60}L_{60}$ キャプシドが報告されている．

3.2　多面体絡み目の構成

多面体絡み目は，多面体の辺と頂点を一定の局所規則で絡み目図式に置き換えて得られる絡み目である [14, 5, 11]．本稿では S^2 と同相な多面体のみを扱う．

定義 3.1 ([24, 14, 5, 11])**.** 多面体 P に対し，図 8 のように得られる交代絡み目を，それぞれ **type-A**（branched curve and n-twisted double line），**type-B**（cross curve and double line），**type-C**（single line，各頂点の次数は 4）**多面体絡み目**という．この構成が定める交代図式を**標準交代図式**と呼ぶ．

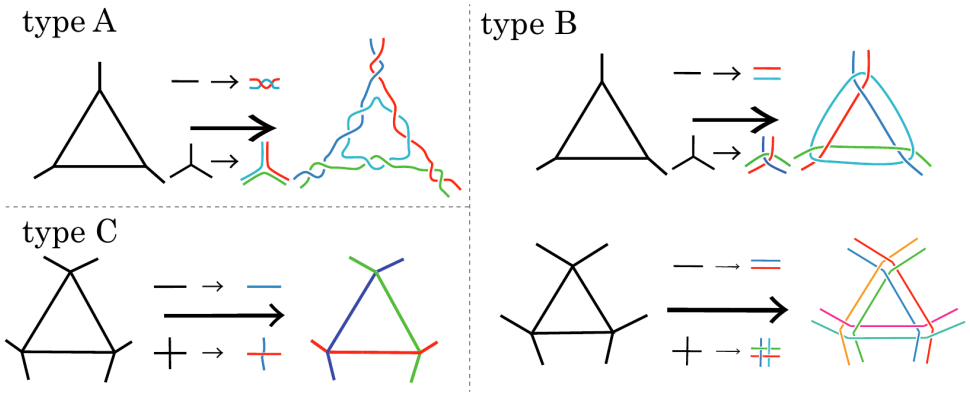


図 8　多面体からの多面体絡み目の構成（[24] より）．黒が多面体の一部，色付きが得られる絡み目の一部を表す．

ここで交点数の最小性は次の定理から従う．

定理 3.2 (Kauffman [8], Murasugi [13], Thistlethwaite [22])**.** 既約交代図式は最小交点図式である．

系 3.3. 交代多面体絡み目の標準交代図式は最小交点図式である．

正多面体から得られる多面体絡み目の成分数と交点数を表 1 に示す．同じ数値データをもつ組が複数現れることが分かる．実際，次の組は互いに同値であることが知られている．

命題 3.4 (Lu–Hu–Qiu–Qiu [11])**.** 次の各組の多面体絡み目は互いに同値である：(1) type-B 四面体絡み目と type-C 立方八面体絡み目；(2) type-B 立方体絡み目，type-B 八面体絡み目，type-C 斜方立方八面体絡み目；(3) type-B 十二面体絡み目，type-B 二十面体絡み目，type-C 斜方二十・十二面体絡み目．

[6] で得られた構造は空間グラフであるが，成分絡み目として type-A 正十二面体絡み目を含み，

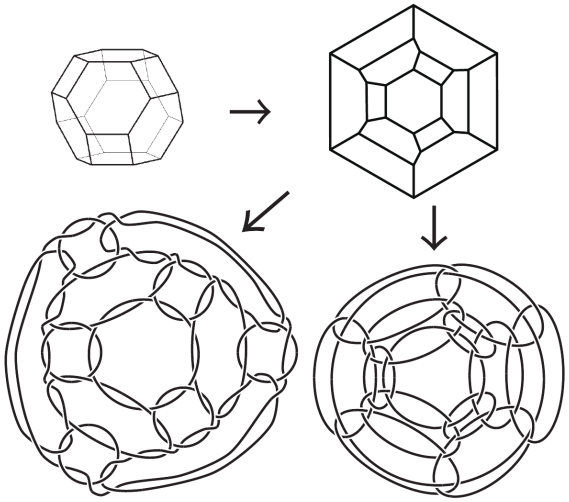


図 9　切頂八面体から得られる type-A（左）と type-B（右）の多面体絡み目の交代図式．いずれも 14 成分 72 交点をもつ（[24] より）．

表 1　正多面体から得られる多面体絡み目の（成分数, 交点数） [24].

多面体	d	v	e	f	type A	type B	type C
正四面体	3	4	6	4	$(4,12)$	$(4,12)$	–
立方体	3	8	12	6	$(6,24)$	$(6,24)$	–
正八面体	4	6	12	8	$(8,24)$	$(6,24)$	$(3,6)$
正十二面体	3	20	30	12	$(12,60)$	$(12,60)$	–
正二十面体	5	12	30	20	$(20,60)$	$(12,60)$	–

交点数が 60 であることがわかる．

3.3　フライプ剛性による分類

成分数と交点数が一致する多面体絡み目の区別には，交代絡み目の分類定理を用いる．**フライプ**とは，図式の一部のタングルを水平軸のまわりに 180 度回転させる図式の変形である．得られる図式が元と異なるとき，フライプは非自明であるという．

定理 3.5 (Menasco–Thistlethwaite [12])**.** 同じ素な交代絡み目を表す二つの既約交代図式は，S^2 の同位と有限回のフライプによって移り合う．

非自明なフライプを許さない交代図式は **rigid** であるという．rigid な図式をもつ交代絡み目どうしは，図式を比較するだけで区別できる．非自明なフライプが存在するならば，図式の双対グラフには nested 4-cycle が存在する [4]．したがって，双対グラフが nested 4-cycle を含まなけれ

ば，その交代図式は rigid である．P を多面体とするとき，type-A 多面体絡み目の標準交代図式の双対グラフは，P の重心細分から P の 1-skeleton 上の辺を削除して得られる．type-B 多面体絡み目の標準交代図式の双対グラフは，P の重心細分から，P の頂点と面の中心を結ぶ辺を削除して得られる．このことから次の命題を得る．

命題 3.6 ([24])**.** type-A および type-B 多面体絡み目の標準交代図式は rigid である．

定理 3.7 (Wakayama–Shimokawa [24])**.** P を多面体とする．P の type-A と type-B の交代多面体絡み目は，同じ交点数をもつが異なる絡み目である．さらに P の頂点が全て 3 価なら，両者は同じ成分数と交点数をもつが異なる絡み目である．

これは，PGP 配列と TPP 配列から得られる二つのペプチドカテナン [17] のトポロジーが異なることを示している．

定理 3.8 ([24])**.** 次の各組の多面体絡み目は，同じ成分数と交点数をもつが互いに異なる：(1) type-A 立方体絡み目と type-B 八面体絡み目；(2) type-A 十二面体絡み目と type-B 二十面体絡み目；(3) type-A 切頂八面体絡み目と type-A 切頂立方体絡み目；(4) type-A 切頂八面体絡み目と type-B 切頂立方体絡み目；(5) type-A 切頂立方体絡み目と type-B 切頂八面体絡み目；(6) type-A 切頂二十面体絡み目と type-B 切頂十二面体絡み目；(7) type-A 切頂十二面体絡み目と type-B 切頂二十面体絡み目．

3.4 多重被覆多面体絡み目

100 を超える交点数をもつ自己集合体の合成は、現在重要な課題の一つとなっている．その候補となる絡み目の系統的な構成として，菊屋 [9] は多面体絡み目を辺の被覆度により整理し，3 重被覆多面体絡み目を考察した．この議論は，[16, 23] による多面体の多重被覆の議論に基づくものである．本節ではその結果を述べる．

定義 3.9 ([16, 23, 9])**.** $P = (V, E)$ を多面体グラフ，$N(P)$ をその正則近傍，$p \in \mathbb{N}$ とする．絡み目 L が P の p **重被覆**であるとは，埋め込み $f\colon L \hookrightarrow N(P)$ であって，$N(P)$ の P への変位レトラクト r に対し $r \circ f(L) = P$ となり，かつ各辺 e の内点 x に対し $|(r \circ f)^{-1}(x)| = p$ となるものが存在することをいう．

$p = p_1 + p_2$ $(p_1 \geq p_2 > 0)$ と分割し，辺の片側を p_1 本，他方を p_2 本の紐が通り，辺に沿ってひねりを加える構成を type-A の p 重被覆という．第 3 章の type-A 多面体絡み目は，2 重被覆 A_2 に対応する（添字は辺上の半ひねりの回数を表す）．

命題 3.10. P を各頂点の次数が d の多面体とする．d が偶数なら，任意の p_1, p_2 に対して P の p 重被覆絡み目が存在する．d が奇数なら，P の p 重被覆絡み目が存在するのは $p_1 = p_2$ のときに限る．とくに $p = 3$ のとき，3 重被覆絡み目が存在するのは d が偶数のときに限る．

3.5　3 重被覆多面体絡み目

$p=3$，$(p_1,p_2)=(2,1)$ の場合を考える．辺の片側に 2 本の紐 X_1, X_2，他方に 1 本の紐 Y_1 を配置し，辺上に m 回の半ひねりを加えることにより，**3 重被覆 A_m 多面体絡み目**が定義される（図 10）．以下 $m=2$ とする．

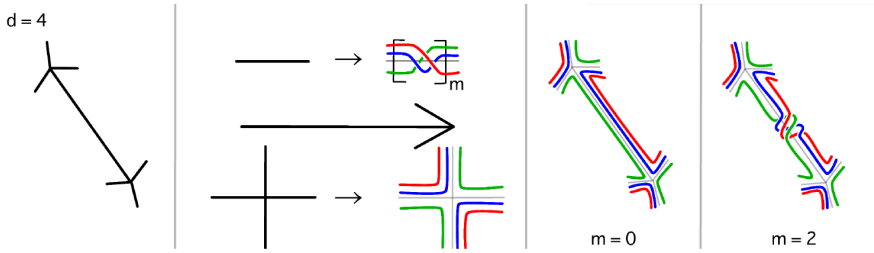


図 10　3 重被覆 A_m 多面体絡み目の構成（[9] より）．

系 3.11 ([9])．正多面体のうち 3 重被覆絡み目を許すのは正八面体のみである．半正多面体のうち 3 重被覆絡み目を許すのは，立方八面体，斜方立方八面体，二十・十二面体，斜方二十・十二面体の四つである．

定理 3.12 ([9])．3 重被覆 A_2 正八面体絡み目 L の成分数は 12，交点数は 72 である（図 11）．L の対称性は向きを保つ四面体群 T となる．

最近，東京科学大学澤田研究室で得られた構造は，正八面体の 3 重被覆絡み目と考えることができ，その交点数は 72 となる．

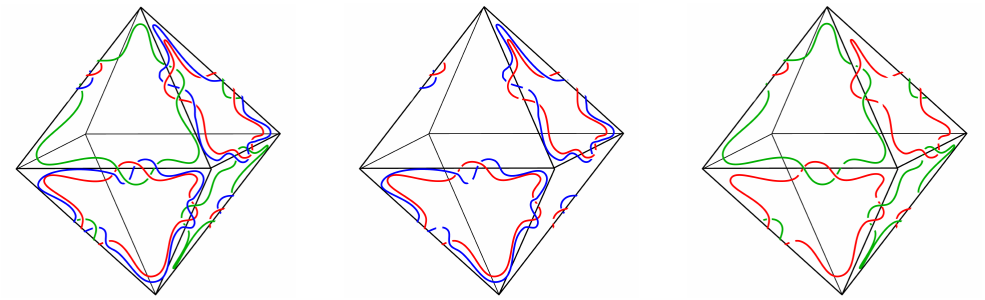


図 11　3 重被覆 A_2 正八面体絡み目 L（左）と，その部分絡み目 $L_1 \cup L_2$（中央），$L_2 \cup L_3$（右）（[9] より）．

交点数の下からの評価は，$X_1 \cup X_2$ がなすトーラス絡み目 $T(2,6)$ と，2 重被覆 A_2 絡み目として現れる部分絡み目 $L_i \cup L_3$ の交点数の和により得られ，標準図式の交点数と一致する．同様の方

法により，3 重被覆を許す半正多面体，反角柱，および 4 価 Goldberg 多面体 [3] に対して次が示される．

定理 3.13 (菊屋 [9])**.** 3 重被覆 A_2 多面体絡み目の成分数と交点数は表 2 の通りである．立方八面体，斜方立方八面体，二十・十二面体，斜方二十・十二面体については，面の被覆の仕方に応じて 2 種類の絡み目が存在する．また，4 価 Goldberg 多面体 tet-$GP(h,k)$（$Q = h^2 + k^2$）については，Q が偶数のとき 2 種類，奇数のとき 1 種類の絡み目が存在する．

表 2　3 重被覆 A_2 多面体絡み目の交点数 $c(L)$ と成分数 $\mu(L)$ [9].

多面体	頂点形状	v	$c(L)$	$\mu(L)$
正八面体	$[3,3,3,3]$	6	72	12
立方八面体	$[3,4,3,4]$	12	144	20 または 22
斜方立方八面体	$[3,4,4,4]$	24	288	38 または 40
二十・十二面体	$[3,5,3,5]$	30	360	44 または 52
斜方二十・十二面体	$[3,4,5,4]$	60	720	92 または 94
n 角反角柱（$n \geq 4$）	$[n,3,3,3]$	$2n$	$24n$	$3n+3$
tet-$GP(h,k)$（Q：偶数）	–	$6Q$	$72Q$	$9Q+2$ または $9Q+4$
tet-$GP(h,k)$（Q：奇数）	–	$6Q$	$72Q$	$9Q+3$

$M_{60}L_{60}$ キャプシド [6] に含まれる十二面体絡み目の交点数は 60 である．表 2 の絡み目は，これを大きく超える交点数をもつ自己集合体のトポロジーの候補を与える．

謝辞

今回，講演の機会を頂きました世話人の山本稔先生，逆井卓也先生，鳥居猛先生に御礼申し上げます．共同研究に携わって頂きました研究者の方々に感謝致します．この研究は JST CREST JPMJCR25Q3 の支援を受けたものです．東北大学の阪田直樹さんとお茶の水女子大学の菊屋美月さんに図を提供して頂きました．謹んで御礼申し上げます．

参考文献

[1] M. Boileau and J.-P. Otal, Sur les scindements de Heegaard du tore T^3, J. Differential Geom. **32** (1990), 209–233.

[2] C. Frohman and J. Hass, Unstable minimal surfaces and Heegaard splittings, Invent. Math. **95** (1989), 529–540.

[3] D. Fujita, Y. Ueda, S. Sato, N. Mizuno, T. Kumasaka and M. Fujita, Self-assembly of tetravalent Goldberg polyhedra from 144 small components, Nature **540** (2016), 563–566.

[4] H. Howards, J. Li, X. Liu and A. Paulec, An infinite family of knots whose hexagonal mosaic number is only realized in non-reduced projections, arXiv:1912.03697v2, 2026.

[5] G. Hu, X.-D. Zhai, D. Lu and W.-Y. Qiu, The architecture of Platonic polyhedral links, J. Math. Chem. **46** (2009), 592–603.
[6] Y. Inomata, S. Oguma, N. Sagara, A. Nishijima, Y. Saburomaru, S. Yoshida, T. Kajitani, K. Shimokawa, S. Sato, M. Yoshizawa, M. Fujita and T. Sawada, An $M_{60}L_{60}$ metal-peptide capsid with a 60-crossing woven network, Chem **11** (2025), 102555.
[7] K. Ishihara, Y. Koda, M. Ozawa and K. Shimokawa, Neighborhood equivalence for multibranched surfaces in 3-manifolds, Topology Appl. **257** (2019), 11–21.
[8] L. H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, Topology **26** (1987), 395–407.
[9] 菊屋美月, 多面体絡み目の構成と特徴づけ, お茶の水女子大学修士論文（令和 7 年度）, 2026.
[10] D. Koenig, Trisections of 3-manifolds, arXiv:1805.11276.
[11] D. Lu, G. Hu, Y.-Y. Qiu and W.-Y. Qiu, Topological transformation of dual polyhedral links, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **63** (2010), 67–78.
[12] W. Menasco and M. Thistlethwaite, The classification of alternating links, Ann. of Math. (2) **138** (1993), 113–171.
[13] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory, Topology **26** (1987), 187–194.
[14] W.-Y. Qiu, X.-D. Zhai and Y.-Y. Qiu, Architecture of Platonic and Archimedean polyhedral links, Sci. China Ser. B: Chem. **51** (2008), 13–18.
[15] N. Sakata, R. Mishina, M. Ogawa, K. Ishihara, Y. Koda, M. Ozawa and K. Shimokawa, Handlebody decompositions of three-manifolds and polycontinuous patterns, Proc. R. Soc. A **478** (2022), 20220073.
[16] 佐藤衡, 多面体空間グラフによる多面体の n 重 covering, 埼玉大学修士論文（令和 5 年度）, 2024.
[17] T. Sawada, A. Saito, K. Tamiya, K. Shimokawa, Y. Hisada and M. Fujita, Metal-peptide rings form highly entangled topologically inequivalent frameworks with the same ring- and crossing-numbers, Nat. Commun. **10** (2019), 921.
[18] T. Sawada, Y. Inomata, K. Shimokawa and M. Fujita, A metal-peptide capsule by multiple ring threading, Nat. Commun. **10** (2019), 5687.
[19] K. Shimokawa, K. Ishihara, I. Grainge, D.J. Sherratt, and M. Vazquez, FtsK-dependent XerCD-*dif* recombination unlinks replication catenanes in a stepwise manner, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110** (2013), 20906-20911.
[20] K. Shimokawa, K. Ishihara, and Y. Tezuka, “Topology of polymers”, SpringerBriefs in the Mathematics of Materials vol.4 (2019).
[21] R. Stolz, M. Yoshida, R. Brasher, M. Flanner, K. Ishihara, D.J. Sherratt, K. Shimokawa, and M. Vazquez, Pathways of DNA unlinking: a story of stepwise simplification, Scientific Reports **7**, 12420 (2017).
[22] M. B. Thistlethwaite, A spanning tree expansion of the Jones polynomial, Topology **26** (1987), 297–309.
[23] 山田寛之, グラフの被覆を保つ変形と被覆の性質, 埼玉大学修士論文（令和 5 年度）, 2024.
[24] N. Wakayama and K. Shimokawa, On the classification of polyhedral links, Symmetry **14** (2022), 1712.

Large-scale geometry of electric Teichmüller spaces and k-multicurve graphs

坂井 健人　(東京大学大学院数理科学研究科)*

1 導入

Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(\Sigma)$ とは，位相曲面 Σ 上の複素構造を，アイソトピーで同一視して得られる空間である．Σ のオイラー標数が負の場合，一意化定理により，複素構造の代わりに双曲構造を用いて定義することもできる．Teichmüller 空間には，二つの複素構造を結ぶ擬等角写像の歪曲度を用いて定義される Teichmüller 距離が入る．このほかにも興味深い距離がいくつか知られているが，本稿では Teichmüller 距離に焦点を当て，それが定める距離幾何学について考える．

曲面 Σ が（1 点穴あき）トーラスの場合，$\mathcal{T}(\Sigma)$ は自然に上半平面と同一視され，Teichmüller 距離まで込めれば，双曲平面と等長になる．したがって，この場合の距離構造はよく理解されているといってよい．一方，一般の曲面に対しては，これほど単純な記述は存在しない．それでも，双曲平面に見られる性質がどの程度まで Teichmüller 空間に残っているかを問うのは自然である．とりわけ，Teichmüller 空間のさまざまな意味での “双曲性” は，古くから研究されてきた．ここでは，その研究の一端を紹介する．

Royden [Roy71] は，Teichmüller 空間の自然な複素構造から定まる小林距離が Teichmüller 距離と一致することを示した．したがって，Teichmüller 空間は複素解析的な意味で小林双曲的である．しかし，距離幾何学的な意味での非正曲率性や双曲性については，状況が異なる．Masur [Mas75] は，Teichmüller 空間が Busemann 凸性を満たさず，したがって CAT(0) 空間ではないことを示した [*1]．また，Teichmüller 空間は Gromov の意味でも双曲的でないことが知られている [MW95].

この Gromov 双曲性の破れを幾何学的に説明する結果として，Minsky の積領域定理 (product region theorem) がある [Min96]．互いに素な単純閉曲線の族 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ を固定し，α の各成分の長さが十分に短いリーマン面からなる領域を，α に付随する thin part と呼ぶ．積領域定理は，この thin part が，擬等長の意味で，より低次元の Teichmüller 空間や双曲平面のいくつかの直積として記述されることを主張する．このような非有界な直積領域により，Teichmüller 空間が Gromov 双曲的でなくなっている．

一方，Masur–Minsky [MM99] は，各単純閉曲線 γ に対し，γ の長さが十分に短くなる

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
e-mail: kento@ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:25KJ0069) の助成を受けたものである．
久野恵理香氏（芝浦工業大），倉持凛氏（東京大）との共同研究を含む．
[*1] 一方，Weil–Petersson 計量に関しては，Teichmüller 空間の完備化が CAT(0) 空間となる [Yam04].

thin part をそれぞれ “潰す” ことにより，Gromov 双曲的な距離空間が得られることを示した．ここで，部分空間を “潰す” とは，正確には electrification と呼ばれる操作を施すことである（§ 2.2 を参照）．

この現象をもう少し詳しく考えてみよう．単純閉曲線の族 α に別の曲線を加えると，そのすべての成分を短くするという条件はより強くなるため，対応する thin part は小さくなる．したがって，Masur–Minsky が扱った，1 本の単純閉曲線に付随する thin part は，この種の thin part の中で極大なものとみなせる．そこで，互いに素な単純閉曲線の本数を増やし，より小さな thin part のみを electrify した場合にも，得られる距離空間は Gromov 双曲的であるか，という問いが自然に生じる．さらに，ある段階で双曲性が失われるならば，その境目となる曲線の本数はいくつであろうか．本稿では，これらの問いに対して得られた結果を，[KKS26, Sak26] に基づいて報告する．

2 距離空間

2.1 擬等長，Gromov 双曲性

X, Y を距離空間とし，$K \geq 1, L \geq 0$ とする．写像 $f\colon X \to Y$ が **(K, L)-擬等長埋め込み (quasi-isometric embedding)** であるとは，任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$K^{-1} d_X(x_1, x_2) - L \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2) + L$$

を満たすときにいう．$C > 0$ として，写像 $f\colon X \to Y$ が **C-擬稠密 (C-quasi-dense)** であるとは，$f(X)$ の C-近傍が Y と一致するときにいう．擬稠密な擬等長埋め込みを**擬等長写像 (quasi-isometry)** といい，距離空間 X と Y の間に擬等長写像が存在するとき，それらは**擬等長 (quasi-isometric)** であるという．また，I を区間として，$\gamma\colon I \to X$ が **K-擬測地線 (K-quasi-geodesic)** であるとは，γ が (K, K)-擬等長埋め込みであるときにいう．

距離空間 X に対して，擬等長埋め込みが可能なユークリッド空間の最大次元を X の **quasi-flat rank** という．距離空間 X の**弱い quasi-flat rank** [*2]とは，

$$\max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \forall R > 0, \exists \text{ 擬等長埋め込み } B^n_R \to X\} \tag{1}$$

のことである．ここで，B^n_R は $\mathbb{R}^n$ の半径 R の閉球を表す．

定義 2.1. $\delta \geq 0$ とする．測地距離空間 X が **δ-双曲的 (δ-hyperbolic)** であるとは，X 内の任意の測地三角形において，その任意の 1 辺が，残りの 2 辺の合併の δ-近傍に含まれることである．ある $\delta > 0$ が存在して，X が δ-双曲的になるとき，X は **(Gromov) 双曲的**であるという．

測地距離空間 X の Gromov 双曲性は擬等長写像により保たれる性質である．

[*2] 一般的な用語ではなく，ここだけのものである．

2.2 Electrification，相対双曲性

X を測地的距離空間とし，$\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の閉部分集合の族とする．次のようにして得られる距離空間を X の族 $\mathcal{H}$ に沿った **electrification** (および coning off) といい，$\hat{X}^{\mathcal{H}}$ とかく [Far98] (図 1)：各添え字 $\alpha \in A$ に対して，外部の頂点 v_α を用意し，H_α の各元と v_α を長さ $1/2$ の辺で結ぶ．得られた空間にはパス距離を備えることにする．つまり，この操作は各集合 H_α が直径 1 に潰していることになる．

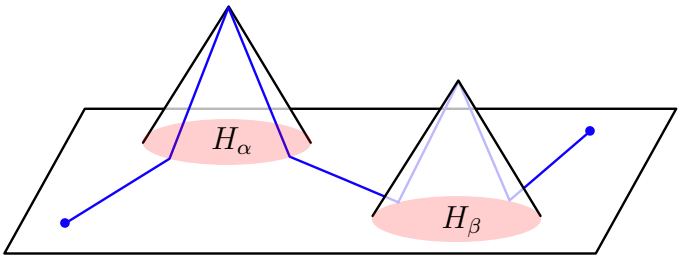


図 1　Electrification，測地線が稲妻のように見える．

次に Farb [Far98] により導入された相対双曲性の定義を紹介する．測地的距離空間 X とその閉部分集合の族 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ の組 $(X, \mathcal{H})$ が与えられているとする．パス $w \subset X$ に対して，H_α に属する部分を v_α へ至る辺に置き換えて得られるパスを $\hat{w} \subset \hat{X}^{\mathcal{H}}$ とかく．パス $w \subset X$ が**相対 K-擬測地線 (relative k-quasi-geodesic)** であるとは，$\hat{w}$ が $\hat{X}^{\mathcal{H}}$ における K-擬測地線になるときにいう．また，w（もしくは $\hat{w}$）が H_α を通過するとき，w（もしくは $\hat{w}$）は H_α に**入り込む (penetrate)** という．さらに，パス w が **backtracking しない**とは，w が入り込む H_α に対して，w が一度 H_α を離れたら二度と H_α に戻らないときにいう．

定義 2.2. 測地的距離空間 X とその閉部分集合の族 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ の組 $(X, \mathcal{H})$ が **bounded region penetration property** をもつとは，任意の $K > 0$ に対して，次の条件を満たす定数 $c = c(K) > 0$ が存在するときにいう：backtracking しない相対 K-測地線 u, v があり，これらの始点同士の距離と終点同士の距離が 1 以下であるとする．このとき，

(1) u が H_α に入り込むが，w が入り込まないとき u は H_α の中を高々 c しか移動しない．
(2) u と w がともに H_α に入り込むとき，u と w の H_α に入った最初の点の距離と H_α から出る最後の点の距離がそれぞれ高々 c である．

定義 2.3. 測地距離空間 X が閉部分集合の族 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ について **(強) 相対双曲的 ((strongly) relatively hyperbolic)** であるとは，次の 2 つを満たすときにいう：

(1) $\hat{X}^{\mathcal{H}}$ が双曲的である．
(2) $(X, \mathcal{H})$ が bounded region penetration property を満たす．

なお，(1) のみ満たす場合，弱相対双曲的 **(weakly relatively hyperbolic)** であると

いう．また，単に測地距離空間 X が相対双曲的であるとは，ある X の閉部分集合の族 $\mathcal{H}$ が存在して，X が $\mathcal{H}$ について相対双曲的になるときにいう．

双曲性と同じく，相対双曲性は擬等長写像で保たれる性質である．

3 多重曲線グラフ

以降，曲面 Σ 上の**曲線**といえば，本質的（つまり，一点や境界に homotopic でない）単純閉曲線の isotopy 類を指すことにする．

定義 3.1. Σ の**曲線グラフ (curve graph)** とは次で定義されるグラフのことである [*3]．

- 頂点集合：Σ 上の曲線全体からなる集合 $\mathcal{C}(\Sigma)$
- 辺：$\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\Sigma)$ $(\alpha \neq \beta)$ は，α と β の幾何的交点数 $i(\alpha, \beta)$ について

$$i(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 & ((g,b) = (0,4)) \\ 1 & ((g,b) = (1,1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成り立つとき，辺で結ばれる [*4]．

$\mathcal{C}(\Sigma)$ には，各辺の長さを 1 とすることで距離が定まる．また，以降現れるグラフについては，全てこのグラフ距離を入れることで距離空間とみなすことにする．

Σ 上の**多重曲線 (multicurve)** とは，互いに交わらないような Σ 上の曲線からなる有限集合のことである．とくに，その濃度が k であるとき **k-多重曲線 (k-multicurve)** という．$3g-3+b \geq 0$ のとき，曲面のオイラー標数を考えることで $0 \leq k \leq 3g-3+b$ であることがわかる．$k = 3g-3+b$ のとき，k-多重曲線は曲面のパンツ分解を与えるため，**パンツ分解 (pants decomposition)** と呼ばれる．

定義 3.2. $1 \leq k \leq 3g-3+b$ とする．Σ 上の **k-多重曲線グラフ (k-multicurve graph)** とは次で定義されるグラフのことである（図 2）．

- 頂点集合：Σ 上の k-多重曲線全体からなる集合 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$
- 辺：$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ $(\alpha \neq \beta)$ は次の条件を満たすとき辺で結ばれる：$\nu \coloneqq \alpha \cap \beta \in \mathcal{C}^{[k-1]}(\Sigma)$ かつ $d_{\mathcal{C}(\Sigma \setminus \nu)}(\alpha \setminus \nu, \beta \setminus \nu) = 1$.

定義から，$k = 1$ のとき 1-多重曲線グラフは曲線グラフ $\mathcal{C}(\Sigma)$ に他ならない．また，$k = 3g-3+b$ のとき対応する k-多重曲線グラフは，Hatcher と Thurston により導入された**パンツグラフ (pants graph)** に一致する．これは，しばしば $\mathcal{P}(\Sigma)$ とかかれる．

[*3] 便宜的に，ここでのみ Σ は連結成分が有限個ある状況を許容する．

[*4] より正確に言えば，条件分岐は，Σ がパンツ曲面の連結成分を無視して $\Sigma_{0,4}, \Sigma_{1,1}$ それぞれと等しいとき，である．

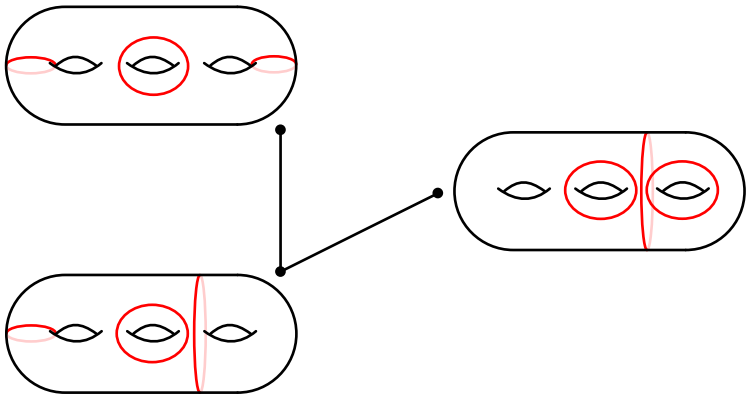


図 2　3-多重曲線グラフの一部

4　Twsit-free グラフ

（多重）曲線を頂点とするようなグラフは上述したもの以外にも色々と知られている．以降 Σ は $\chi(\Sigma) < 0$ であることを仮定する．

定義 4.1. $\mathcal{G}(\Sigma)$ を（多重）曲線を頂点とするようなグラフとする．連結な本質的部分曲面 $S \subset \Sigma$ が $\mathcal{G}(\Sigma)$ の **witness** であるとは，$\mathcal{G}(\Sigma)$ の全ての頂点が S と本質的に交わるときにいう．$\mathcal{G}(\Sigma)$ の witness 全体からなる集合を $\mathfrak{S}(\mathcal{G}(\Sigma))$ とかく．

Vokes は （多重）曲線を頂点とするようなグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ に対して，twsist-free という条件を設定した [Vok22].

定義 4.2.（多重）曲線を頂点とするようなグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ が **twist-free** であるとは，次の条件をみたすときにいう：

1. グラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ は連結である．
2. 写像類群が $\mathcal{G}(\Sigma)$ の頂点に等長に作用する．
3. 2 つの頂点 $\alpha, \beta \in \mathcal{G}(\Sigma)$ が辺で結ばれるとき，それらの幾何的交点数 $i(\alpha, \beta)$ は一様に有界である．
4. アニュラスは $\mathcal{G}(\Sigma)$ の witness にならない．

定理 4.3 ([Vok22])**.**（多重）曲線を頂点とするようなグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ が twsit-free であるする．このとき，$\mathcal{G}(\Sigma)$ は witness の曲線グラフへの subsurface projection について階層的双曲空間である．

階層的双曲空間とは Behrstock–Hagen–Sisto [BHS17, BHS19] によって導入された距離空間のクラスであり，双曲空間の一般化である．彼らの理論により，twist-free なグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ の大尺度幾何的性質に関する様々なことが系としてわかる．Twist-free なグラフ

$\mathcal{G}(\Sigma)$ に対して，

$$\nu(\mathcal{G}(\Sigma)) \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{S}(\mathcal{G}(\Sigma)) \text{ は互いに素 }\}$$

と定める．

系 4.4 ([Vok22])**.** Twist-free なグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ の弱い quasi-flat rank は $\nu(\mathcal{G}(\Sigma))$ である．

系 4.5 ([Vok22])**.** Twist-free なグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ が Gromov の意味で双曲的であることの必要十分条件は $\nu(\mathcal{G}(\Sigma)) = 1$ である．

また，[RV22] では相対双曲性や thick 性についても witness から判定できることが示されている．以上のことから，$\mathcal{G}(\Sigma)$ の大尺度幾何的性質は，witness を考察することに帰着できる．

定義から k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ も twist-free である．一方で，複雑度 ξ-グラフ $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ は一般に twist-free でないことに注意する．k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ の witness は複雑度の観点で完全に決定できる．

命題 4.6 ([KKS26])**.** 連結な本質的部分曲面 $S \subset \Sigma$ が $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ の witness であるための必要十分条件は $\xi(S) \geq 3g - 2 + b - k$ を満たすことである．

したがって，$\nu(\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma))$ を求めることは，複雑度が ξ 以上の部分曲面が互いに素に最大幾つ取れるかを決定することと等価である．これを実行して，我々は次を得る．

定理 4.7 ([KKS26])**.** $\xi(\Sigma_{g,b}) = 3g - 3 + b$ とおき，$1 \leq k \leq \xi_0$ とする．k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ および複雑度-$(\xi(\Sigma_{g,b}) - k)$ グラフ $\mathcal{P}^{[\xi(\Sigma_{g,b})-k]}(\Sigma_{g,b})$ の quasi-flat rank は

$$m(g,b,k) \coloneqq \begin{cases} \min\left\{ \left\lfloor \frac{-\chi(\Sigma_{g,b})}{a(\xi(\Sigma_{g,b})-(k-1))} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\xi(\Sigma_{g,b})+1}{\xi(\Sigma_{g,b})-(k-2)} \right\rfloor \right\} & (b,k) \neq (0,1) \\ 1 & (b,k) = (0,1) \end{cases}$$

である．ここで，$a(x) = \lceil (2x+1)/3 \rceil$ である．さらに，グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ と $\mathcal{P}^{[\xi(\Sigma_{g,b})-k]}(\Sigma_{g,b})$ について，これらが双曲的になるための必要十分条件は $m(g,b,k) = 1$ である．

また，[RV22] の結果を $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ に適用して考察することで，相対双曲的な場合も特徴づけることができる．

定理 4.8 ([KKS26])**.** k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ が相対双曲的になるのは，以下のいずれかの場合である．

- g が偶数かつ b が 2 以上の偶数で $k = (3g+b)/2$,
- g が偶数かつ $b = 0$ で $k \in \{3g/2, (3g+2)/2\}$,
- g が奇数かつ $b \in \{0, 2\}$ で $k = (3g+3)/2$,
- g が奇数かつ b が 3 以上の奇数で $k = (3g+b)/2$.

5 Electric Teichmüller 空間

この節では，種数 g の閉曲面から n 点を取り除いて得られる曲面 $\Sigma_{g,n}$ を取り扱う．便宜的なもので，前節までの境界を針孔に置き換えただけと考えて差し支えない．$\Sigma_{g,n}$ の **Teichmüller 空間 (Teichmüller space)** $\mathcal{T}_{g,n}$ は

$$\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\Sigma) = \{\text{針孔付き Riemann 面} \approx \Sigma_{g,n}\}/\text{isotopy}$$

で定義される．Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,n}$ には, **Teichmüller 距離 (Teichmüller distance)** $d_{\mathcal{T}}$ という擬等角写像の観点で複素構造の差を測る自然な距離が入る．

$1 \leq k \leq 3g-3+n$ とし，十分小さい正の数 ϵ_0 を固定しておく．k-多重曲線 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,n})$ の **thin part** とは

$$\mathrm{Thin}_\alpha \coloneqq \{X \in \mathcal{T}_{g,n} \mid \text{各 } \alpha_i \in \alpha \text{ に対して } \mathrm{Ext}_X(\alpha_i) \leq \epsilon_0\}$$

により定義される Teichmüller 空間の部分集合である．ここで，単純閉曲線 γ に対して $\mathrm{Ext}_X(\gamma)$ は X に関する γ の**極値的長さ (extremal length)** を表す．つまり，α に属する各曲線の長さが十分に小さい Riemann 面からなる部分集合が Thin_α である．

この thin part により定まる Teichmüller 空間の部分集合の族 $\mathcal{H}_k \coloneqq \{\mathrm{Thin}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)}$ に沿って Teichmüller 空間に electrification を施した空間を **k-electric Teichmüller 空間**とよび,

$$\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma) = \hat{\mathcal{T}}^k_{g,n} \coloneqq \hat{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}_k}_{g,n}$$

とかく．このとき，次が成り立つ.

定理 5.1 ([MM99, Sak26])**.** k-electric Teichmüller 空間 $\hat{\mathcal{T}}^k_{g,n}$ は k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ と擬等長である.

なお $k = 1$ の場合が [MM99] で示されている．つまり，k-多重曲線グラフは Teichmüller 空間の thin part 同士の距離関係を荒い意味でエンコードしているということである．したがって，前節で述べた k-多重曲線グラフの大尺度幾何的（すなわち，擬等長で不変）な性質は k-electric Teichmüller 空間に引き継がれる．導入で述べたように，Teichmüller 空間の thin part はその双曲性の邪魔をしている部分であるため [Min96], thin part を electrification により適切に潰すことで双曲性をもち，潰す量を減らすことで双曲性を失うと考えられる.

定理 5.1 の証明は，Masur–Minsky [MM99] の類似であるが，鍵となるのは曲線グラフの距離と幾何的交点数の間の不等式である．曲線グラフ（つまり $k = 1$）の場合は，これは Hempel の不等式とよばれ，曲線の手術を用いた比較的簡単な議論で示すことができる．しかし，k-多重曲線の場合，曲線の手術による議論は通らないため，別の方法を模索する必要が出てくる．比較的最近，Lackenby と Yazdi [LY26] によりパンツグラフに対する Hempel の不等式のアナロジーが得られたため，これを用いて k-多重曲線グラフにおける Hempel の不等式のアナロジーも得ることができた.

このような Teichmüller 空間や写像類群の大尺度幾何的な組み合わせモデルは様々に得られている：

- Durham により構成された augmented マーキンググラフ $\mathcal{AM}(\Sigma)$ は Teichmüller 空間と擬等長である [Dur16].
- Masur と Minsky により構成されたマーキンググラフ $\mathcal{M}(\Sigma)$ は写像類群の Cayley グラフと擬等長である [MM00].
- パンツグラフ $\mathcal{P}(\Sigma)$ と Weil-Petersson 距離を備えた Teichmüller 空間 $\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ は擬等長である [Bro03].
- 写像類群において，複雑度 ξ 以下の部分曲面に対応する部分群の左コセットによる electrification を施した距離空間 $\Gamma(\Sigma, \xi)$ は複雑度-ξ グラフ $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ と擬等長である [Mj09].

これらをまとめると，以下の表のようになる：

組み合わせモデル	写像類群	Teichmüller 空間
$\mathcal{AM}(\Sigma)$		$\mathcal{T}(\Sigma)$
$\mathcal{M}(\Sigma)$	$\mathrm{Mod}(\Sigma)$	
$\mathcal{C}^{[\xi_0]}(\Sigma) = \mathcal{P}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, -1)$, $\Gamma(\Sigma, 0)$	$\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}(\Sigma)$, $\hat{\mathcal{T}}^{\xi_0}(\Sigma)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$, $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, \xi_0 - k)$	$\hat{\mathcal{T}}^{k}(\Sigma)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{C}(\Sigma)$, $\mathcal{P}^{[\xi_0-1]}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma,\ \xi_0 - 1)$	$\hat{\mathcal{T}}^{1}(\Sigma)$

表 1　各行における距離空間は互いに擬等長である.

参考文献

[BHS17] Jason Behrstock, Mark F. Hagen, and Alessandro Sisto. Hierarchically hyperbolic spaces, I: Curve complexes for cubical groups. *Geom. Topol.*, 21(3):1731–1804, 2017.

[BHS19] Jason Behrstock, Mark Hagen, and Alessandro Sisto. Hierarchically hyperbolic spaces II: Combination theorems and the distance formula. *Pacific J. Math.*, 299(2):257–338, 2019.

[Bro03] Jeffrey F. Brock. The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3):495–535, 2003.

[Dur16] Matthew Gentry Durham. The augmented marking complex of a surface. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 94(3):933–969, 2016.

[Far98] B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.*, 8(5):810–840, 1998.

[KKS26] Erika Kuno, Rin Kuramochi, and Kento Sakai. Large-scale geometry of graphs interpolating between curve graphs and pants graphs. 2026.

[LY26] Marc Lackenby and Mehdi Yazdi. Bounds for the number of moves between pants decompositions, and between triangulations. *Journal of Topology and Analysis*, 0(0):1–68, 2026.

[Mas75] Howard Masur. On a class of geodesics in Teichmüller space. *Ann. of Math. (2)*, 102(2):205–221, 1975.

[Min96] Yair N. Minsky. Extremal length estimates and product regions in Teichmüller space. *Duke Math. J.*, 83(2):249–286, 1996.

[Mj09] Mahan Mj. Mapping class groups and interpolating complexes: rank. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 24(4):341–357, 2009.

[MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.

[MM00] H. A. Masur and Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure. *Geom. Funct. Anal.*, 10(4):902–974, 2000.

[MW95] Howard A. Masur and Michael Wolf. Teichmüller space is not Gromov hyperbolic. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 20(2):259–267, 1995.

[Roy71] H. L. Royden. Automorphisms and isometries of Teichmüller space. In *Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*, volume No. 66 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 369–383. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[RV22] Jacob Russell and Kate M. Vokes. Thickness and relative hyperbolicity for graphs of multicurves. *J. Topol.*, 15(4):2317–2351, 2022.

[Sak26] Kento Sakai. Electric teichmüller spaces and k-multicurve graphs. 2026.

[Vok22] Kate M. Vokes. Hierarchical hyperbolicity of graphs of multicurves. *Algebr. Geom. Topol.*, 22(1):113–151, 2022.

[Yam04] Sumio Yamada. On the geometry of Weil-Petersson completion of Teichmüller spaces. *Math. Res. Lett.*, 11(2-3):327–344, 2004.

最適化に現れる制約関数芽の $\mathcal{K}[G]$-分類・認識と制約想定

早野　健太（慶應義塾大学）

本稿で述べる一連の研究は，濱田直希氏（株式会社サイバーエージェント）および寺本央氏（関西大学）との共同研究 [15, 16, 17, 18] に基づく．

本稿では，最適化問題に現れる制約を，可微分写像の特異点論の観点から調べる一連の研究 [15, 16, 17, 18] を概説する．まず,「一般的な」最適化問題の諸性質を理解するという動機のもとで，Mather [23] により定義された群 $\mathcal{K}$ の部分群 $\mathcal{K}[G]$ を用いて，一般的な助変数族に現れる制約関数芽を分類する（[15]）．次にこの分類をもとに，一般的な制約関数芽に対する，最適化の基本的な一次必要条件（KKT 条件）が解において常に成立することを保証する**制約想定（constraint qualification）**の成否を決定する（[16, 17]）．紙面の都合上，結果の理解に必要な用語の定義と結果の主張に重点を置き，証明には立ち入らない．また，認識問題に関する結果 [18] については，軽く触れるに留める．

1. はじめに

制約付き多目的最適化問題とは，制約関数値に関する（不）等式で定まる領域（実行可能領域）の中で，複数の目的関数の値を最小化する，より厳密には **Pareto 解**と呼ばれる解を求める問題である．(Pareto 解の定義は後述する.）これは計画，設計，運用など，理論と応用の双方で広く現れる基本的な問題である [2]．線型計画問題 [5, 6] や凸計画問題 [3, 24] など限られた状況に対しては強力な理論があるが，一般の場合に Pareto 解を求める保証がある解法は知られていない．そのため，一般の問題に対する解法（Bayes 最適化 [26]，進化計算 [8] など）は，**ベンチマーク問題**，すなわち，アルゴリズムの性能を比較するための共通の試験問題としてあらかじめ整備された最適化問題に対して，どれだけ優れた解を発見できるかによって評価されてきた．制約付き多目的最適化では，C-DTLZ [21] と呼ばれるベンチマークが広く用いられている．これは，無制約多目的最適化のためのベンチマーク DTLZ [7] に人工的な制約を付加したものである．しかし，このように人工的に設計されたベンチマーク問題が，実応用で生じる問題の性質をどこまで反映しているのかについては，疑問も提起されている（たとえば [19] を参照）．このことは，C-DTLZ のようなベンチマーク上で得られた性能比較が，実際の応用におけるアルゴリズムの相対的な性能をどの程度まで信頼できる形で反映しているのか，という問題にもつながる．よいベンチマークを設計し，また既存のベンチマークを適切に評価するためには，まず実応用で典型的に生じる問題の構造を理解する必要がある．

本研究では，実応用に典型的に現れる最適化問題の構造を理解するための第一歩として，実行可能領域を規定する制約関数に着目する．実問題の制約は，観測やモデル化の過程で生じる誤差の影響を受けうるほか，求めた解を設計や運用の現場で利用する際にもまた誤差が生じるため，摂動によって変化しない安定な構造に注目することが重要である．さらに，実問題に現れる制約には多様なものがあるため，個々の制約関数を個別に解析することは現実的ではない．そこで本研究では，有限個の助変数をもつ制約関数の族の中で典型的に現れる，つまり「一般的な」制約関数の局所構造を調べる．本研究の主な目的は，可微分写像の特異点論を援用して，このような局所構造を把握することである．

我々はまず，4 個以下の助変数をもつ一般的な制約関数の族に現れうる制約関数芽を，**簡約化**と **$\mathcal{K}[G]$-同値**の差を除いて分類した（定理 4.1，[15]）．ここで簡約化とは，有効でない不等号制約を除き，正則な等号制約が定める部分多様体へ制限することにより，実行可能領域芽の微分同相類などを変えずに余分な制約を取り除く操作である（詳しくは第 3 節で説明する）．またこの分類で用いる $\mathcal{K}[G]$-同値は，Mather [23] により導入された接触同値群 $\mathcal{K}$ の部分群から定まる同値関係である．一般線型 Lie 群 G に対するこの種の部分群 $\mathcal{K}[G]$ は Tougeron [27] により導入され，その基本的性質は Gervais [9, 10, 11] により研究され，Izumiya，Takahashi，Teramoto [20] によりさらに研究されている．本稿では，不等号制約と等号制約の役割を保つように G を選ぶ．このとき $\mathcal{K}[G]$ による作用は実行可能領域芽の微分同相類を保つ，ということもあり，最適化の制約を分類する同値関係として自然であるといえる．

$\mathcal{K}[G]$-同値に付随して，制約関数芽の $\mathcal{K}[G]_e$-余次元という数値的な指標を考えることができる．これは，その芽が一般の制約族の中でどの程度特殊なものか，を測る量である．実際上述の分類定理は，(stratum) $\mathcal{K}[G]_e$-余次元の小さい写像芽を分類し，$\mathcal{K}[G]_e$-余次元の大きい写像芽を横断性定理により避けることで示される．C-DTLZ には $\mathcal{K}[G]_e$-余次元が ∞ となる制約関数芽が現れるが [15]，このことは，C-DTLZ に含まれる問題の一部が，一般の有限助変数族に現れうる局所構造から大きく外れた特殊な制約を含むことを示唆している．

上記の分類を踏まえて，本研究のもう一つの主題である**制約想定**を論ずる．最適化では，（局所）解が満たすと期待される一次の必要条件として，Lagrange 乗数の存在で表される **Karush–Kuhn–Tucker（KKT）条件**がしばしば用いられる．制約のない問題では任意の局所解が KKT 条件を満たすが，制約のある問題ではそうとは限らない．この不足を補い，「任意の目的関数に対し KKT 条件が解において成立する」ことを保証する，制約のみへの十分条件が制約想定である．古典的には，LICQ，MFCQ，ACQ，GCQ という四つの制約想定が広く用いられ，これらは

$$\text{LICQ} \implies \text{MFCQ} \implies \text{ACQ} \implies \text{GCQ}$$

という階層をなす，つまりたとえば，LICQ が成立すれば MFCQ も成立する，などが知られている．逆向きの含意はいずれも一般には成立せず，これを示す具体例は先行研究でいくつか与えられてきた [25] が，一般の制約に対して四つの制約想定がどの程度異なり得るのか，その全体像は明らかでなかった．本研究では，前述の分類を通じて，一般的な制約に対しこれらの制約想定の成否を網羅的に決定し，この問いに答える．

ここで多目的の場合に対する注意を与える．最も弱い GCQ については，**単目的**（目的関数が一つ）の場合，これが任意の目的関数の局所解において KKT 条件が成立するための必要十分条件であることが知られている [12]．一方，**多目的**の場合には GCQ では十分でなく[1]，これを一般化した制約想定が近年 Haeser–Ramos [14] により導入された．本稿ではこれを**弱 p-Guignard 制約想定**（p-WGCQ）と呼ぶ．ここで p は目的関数の個数であり，$p = 1$ のとき p-WGCQ は GCQ に一致する（定義は第 5 節）．GCQ が単目的の場合に必要十分条件であったのと同様に，p-WGCQ は，任意の p 目的問題の局所弱 Pareto 解が KKT 条件を満たすための必要十分条件である．p-WGCQ には単調性（p-WGCQ が成立すれば $(p-1)$-WGCQ

[1] 多目的（$p \geq 2$）の場合，GCQ が成立しても，局所弱 Pareto 解において KKT 条件が成立するとは限らない（具体例は [14]）．これが p-WGCQ を導入する動機である．なお [16]（arXiv:2510.02381v1）には，GCQ のこの必要十分性が多目的の場合にも成立すると記載されているが，これは誤りである．

も成立する）があるため，p-WGCQ が成立する p の範囲の情報は制約関数芽ごとに定まるただ一つの**閾値**

$$p_* = \min\{p \geq 1 \mid p\text{-WGCQ が成立しない}\} \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

に集約され，p-WGCQ はちょうど $p < p_*$ のときに成立する．

本研究では，一般的な制約関数芽に対し，四つの古典的制約想定の成否と閾値 p_* を決定することを目的とする．まず初めに，本稿で考える制約想定の成否は $\mathcal{K}[G]$ の作用および簡約化で不変である（定理 5.2）．よって先述の分類結果より，4 個以下の助変数を持つ一般的な制約関数の族に現れうる制約関数芽に対して制約想定の成否を調べるには，分類表内の写像芽にそれを行えば十分である．四つの古典的制約想定のうち，LICQ と MFCQ は制約の一次の情報から容易に判定できる（定理 5.3）．残る ACQ と GCQ は閾値 p_* から読み取れる：$p_* = \infty$ が ACQ の成立に，$p_* = 1$ が GCQ の不成立に対応する（命題 5.4）．したがって p_* を決定すれば ACQ および GCQ の成否も同時にわかり，四つの古典的制約想定の決定（[16]）と p-WGCQ の決定（[17]）が統一的に述べられる（定理 5.5）．

得られる結果の一つの含意として,「GCQ は満たすがより強い制約想定はすべて満たさない」芽が一般的に多数現れることがわかる．これは，上で述べた制約想定間の「隔たり」が，例外的な現象ではなく一般的な制約に普遍的に現れることを意味し，本研究の枠組みがこの種の問いに有効であることを示している．さらに，分類に現れる各芽の**認識問題**（与えられた制約がどの標準形に当たるかを計算可能な不変量で判定する問題）とその応用についても，進行中の研究 [18] として第 6 節で簡単に触れる．

2. 最適化問題と Pareto 解

本節では，本稿で扱う多目的最適化問題と，Pareto 解・弱 Pareto 解，および KKT 条件を導入する．N を可微分多様体とし，可微分写像 $f = (f_1, \ldots, f_p) : N \to \mathbb{R}^p$，$g = (g_1, \ldots, g_q) : N \to \mathbb{R}^q$，$h = (h_1, \ldots, h_r) : N \to \mathbb{R}^r$ を考える．$f_1, \ldots, f_p$ を**目的関数**，$g_1, \ldots, g_q$ を**不等号制約関数**，$h_1, \ldots, h_r$ を**等号制約関数**と呼ぶ．**本稿を通じて，N の次元 $n = \dim N$ は q, r に比べて十分大きい（$n \gg q, r$）と仮定する.**（この仮定は多目的最適化においては標準的であるといえるものである.）以上の設定のもと，**実行可能領域** $M(g, h) \subset N$ を以下のように定義する．

$$M(g, h) = \{x \in N \mid g_1(x), \ldots, g_q(x) \leq 0,\ h_1(x) = \cdots = h_r(x) = 0\}\,.$$

多目的最適化問題とは，**Pareto 解**，すなわち $f_i(y) \leq f_i(x)$ $(\forall i)$ かつ $f_{i_0}(y) < f_{i_0}(x)$ $(\exists i_0)$ となる $y \in M(g, h)$ が存在しないような $x \in M(g, h)$ を求める問題である．これを少し弱めた概念として，**弱 Pareto 解**を次のように定義する：$f_i(y) < f_i(x)$ $(\forall i)$ となる $y \in M(g, h)$ が存在しないような $x \in M(g, h)$ を弱 Pareto 解という．定義より Pareto 解は弱 Pareto 解である．目的関数 f を実行可能領域内の x のある近傍 U に制限して上の条件が成立するとき（すなわち $M(g, h) \cap U$ 内に上の y が存在しないとき），x をそれぞれ**局所 Pareto 解**，**局所弱 Pareto 解**という．目的関数が一つ（$p = 1$）のときは，これらはいずれも通常の（局所）最小解に一致する．

Pareto 解を直接特徴づけるのは一般に困難なため，次の一次必要条件がしばしば用いられる．

KKT 条件（$x \in M(g,h)$ について）：以下を満たす $\alpha_i \geq 0$，$\lambda_j \geq 0$，$\mu_k \in \mathbb{R}$ が存在する．

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \operatorname{grad} f_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(x) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \operatorname{grad} h_k(x) = 0$.
- 任意の j に対し $\lambda_j g_j(x) = 0$（相補性条件）.

KKT 条件を満たす点を **KKT 点**（または弱 KKT 点）という．さらに，すべての目的関数の乗数として正（$\alpha_i > 0$）のものをとれるとき，**強 KKT 点**という．単目的（$p = 1$）の場合，両者は一致し，通常の KKT 条件に帰着する．制約がない場合には KKT 条件は局所弱 Pareto 解であることの必要条件となるが，一般にはそうとは限らない．任意の目的関数芽の局所弱 Pareto 解において KKT 条件が成立することを保証する，制約関数芽への十分条件が制約想定であるが，これについては分類を述べた後の第 5 節でまとめて扱う．

3. $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化

本節では，分類の記述に必要となる $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化を導入する．いずれも，制約関数芽を「実行可能領域の構造を保ったまま」標準形へ変形するための道具である．

3.A. $\mathcal{K}[G]$-同値

$\mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$ の部分群 G_{gp} を，各列にただ一つの非零成分を持ち，その成分が正であるような正則行列（各成分が正の対角行列と置換行列の積）全体とする．$\mathrm{GL}(q+r,\mathbb{R})$ の部分群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ O & \Psi_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; \Psi_{11} \in G_{gp},\ \Psi_{12} \in M_{q,r}(\mathbb{R}),\ \Psi_{22} \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \right\}$$

とする．二つの制約関数芽 $(g,h), (g',h') : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ に対し，

$$(g'(x), h'(x)) = \big(\Psi_{11}(x)\, g(\Phi^{-1}(x)) + \Psi_{12}(x)\, h(\Phi^{-1}(x)),\ \Psi_{22}(x)\, h(\Phi^{-1}(x))\big) \qquad (1)$$

となる微分同相写像芽 Φ と可微分写像芽 $\Psi : (\mathbb{R}^n, 0) \to G$ が存在するとき，(g,h) と (g',h') は **$\mathcal{K}[G]$-同値**であるという．G_{gp} が不等号制約を正の係数で置換・スケールするのみであることから，(1) を満たす Φ, Ψ があれば $\Phi(M(g,h)) = M(g',h')$ となる，すなわち $\mathcal{K}[G]$-同値は実行可能領域芽の微分同相類を保つ．また，群 $\mathcal{K}[G]$ は Damon [4] の意味で幾何学的な部分群である．

3.B. 簡約化

制約関数芽 $(g,h) : (N,x) \to (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r, (z,0))$ に対し，不等号制約芽 g_i が x で値 0 をとるとき，すなわち $z_i = g_i(x) = 0$ をみたすとき**有効**（active）であるといい，そうでない（x での値が 0 でない）ものを**有効でない**という．有効でない不等号制約芽は実行可能領域芽に影響しないため取り除いてよく，また沈めこみとなる等号制約芽は，それが定める部分多様体芽への制限に置き換えてから取り除いても，実行可能領域芽の微分同相類は変化しない．この操作を**簡約化**と呼ぶ．正確には次のように定義する（[15]）．制約関数芽 $(g,h) : (N,x) \to (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r, (z,0))$（$z_i \leq 0$）に対し，

- 有効でない不等号制約の添字 $(k) = (k_1, \ldots, k_{q-s}) \subset \{1, \ldots, q\}$（$z_{k_i} = g_{k_i}(x) < 0$），

- 微分が一次独立な等号制約の添字 $(i) = (i_1, \ldots, i_{r-\ell}) \subset \{1, \ldots, r\}$（$dh_{i_1,x}, \ldots, dh_{i_{r-\ell},x}$ が一次独立），
- 部分多様体 $(h_{i_1}, \ldots, h_{i_{r-\ell}})^{-1}(0)$ へのはめ込み芽 $\iota_{(i)} : (\mathbb{R}^{n-r+\ell}, 0) \to (N, x)$

を選ぶ．このとき (k)，(i) に関する (g, h) の**簡約化**を，添字 (k)，(i) の成分を除いて $\iota_{(i)}$ と合成した芽

$$(g, h)_{\iota_{(i)},(k)} = \big((g_j \circ \iota_{(i)})_{j \notin (k)},\ (h_m \circ \iota_{(i)})_{m \notin (i)}\big)$$

で定める．この操作で実行可能領域芽は（微分同相を除いて）保たれる．残ったすべての不等号制約が有効で（$g_{\iota_{(i)},(k)}(0) = 0$），かつ残った等号制約の微分が零（$dh_{\iota_{(i)},0} = 0$）となるところまで簡約したものを**完全簡約化**という．本研究の分類は，この完全簡約化のレベルで行われる．

4. 一般的な制約関数芽の分類

本節では分類定理 [15] を述べる．第 1 節で述べた通り，注目すべきは小さな摂動で保たれる**一般的**な性質である．横断性定理の変種を用いると，次の意味で，一般的な制約族に現れる制約関数芽を分類することができる．

定理 4.1 ([15, Theorem 5.2])**.** 境界のない多様体 N と開集合 $U \subset \mathbb{R}^b$（$b \leq 4$）に対し，制約関数 $(g, h) \in C^\infty(N \times U, \mathbb{R}^{q+r})$ で次を満たすものの全体は，$C^\infty(N \times U, \mathbb{R}^{q+r})$ の中で残留集合（特に稠密な部分集合）をなす：任意の $u \in U$ と $\overline{x} \in M(g_u, h_u)$ に対し，写像芽 $(g_u, h_u) : (N, \overline{x}) \to \mathbb{R}^{q+r}$ の完全簡約化の微分の余階数は高々1 であり，かつそれは沈め込み芽，または表 1，2，3 のいずれかの写像芽と $\mathcal{K}[G]$-同値である．ここで $g_u(x) = g(x, u)$，$h_u(x) = h(x, u)$ である．

分類は，等号制約のみ（$q = 0, r = 1$，表 1），不等号制約のみ（$r = 0$，表 2），両者を持つ場合（$q > 0, r = 1$，表 3）に分かれる．（ここでの q, r は完全簡約化後の（不）等号制約の個数であり，もとの (g, h) の値域の次元の q, r とは異なることに注意する．）

5. 制約想定とその判定

本節では，一般的な制約関数芽について，四つの古典的制約想定の成否（[16]）と多目的のための p-WGCQ の閾値 p_*（[17]）を決定する．まず制約想定の定義を与え，それらが $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化で不変であること（このため分類表の標準形だけを調べれば十分であること）を述べる．

5.A. 制約想定の定義と不変性

$\overline{x} \in M(g, h)$ のまわりの N のチャートを一つとり，制約関数芽を $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上の写像芽 $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, z)$（$z_j \leq 0$），$h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$ とみなす．$I = \{j \mid z_j = 0\}$（$\overline{x}$ において有効な不等号制約の添字集合）とし，$g_I = (g_j)_{j \in I}$ とおく．制約想定とは，「任意の目的関数芽 f に対し，$\overline{x}$ が局所（弱）Pareto 解ならば KKT 条件が成立する」ことを保証する，(g, h) への十分条件である．

- $d(g_I, h)_0$ が全射のとき，(g, h) は **LICQ** を満たすという．

型	写像芽 $h(x)$
$(1,k)$	$x_1^k+\sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 5)$
(2)	$x_1^3+\epsilon_2 x_1x_2^2+x_3^2+\sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$

表 1: 等号制約のみ（$q=0, r=1$）の場合に現れる完全簡約化の標準形．$\epsilon_j\in\{1,-1\}$.

型	$\tilde{g}(x_{l+1},\dots,x_n)$	l
$(1,k)$	$\epsilon_q x_q^k+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 5)$	$q-1$
(2)	$x_q^3+\epsilon_{q+1}x_qx_{q+1}^2+\sum_{j=q+2}^n \epsilon_j x_j^2$	
$(3,k)$	$\epsilon_{q-1}x_{q-1}^k+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 4)$	$q-2$
$(4,k)$	$\epsilon_q x_q^k+x_{q-1}x_q+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (k=3,4)$	
(5)	$\epsilon_{q-1}x_{q-1}^2+x_q^3+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$	
(6)	$\delta_1 x_{q-2}^2+\delta_2 x_{q-1}^2+\alpha x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-3$
(7)	$\epsilon_{q-2}(x_{q-2}+\epsilon'_{q-1}x_{q-1})^2+\epsilon_{q-1}x_{q-1}^3+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	
(8)	$\epsilon_{q-2}x_{q-2}^3+\epsilon_{q-1}x_{q-1}^2+\epsilon'_{q-1}x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	
(9)	$x_q^3+\epsilon_{01}x_{q-1}x_q+\epsilon_{02}x_{q-2}x_q+\epsilon_{12}x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$	
(10)	$\sum_{j=1}^3 \delta_j x_{q-4+j}^2+\sum_{1\le i<j\le 3}\alpha_{ij}x_{q-4+i}x_{q-4+j}+\epsilon_0 x_{q-3}x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-4$

表 2: 不等号制約のみ（$r=0$）の場合の標準形．$\mathcal{K}[G]$-同値類は次で代表される：

$$\left(x_1,\dots,x_{q-1},\ \sum_{j=1}^{l_1}x_j-\sum_{j=l_1+1}^{l}x_j+\tilde{g}(x_{l+1},\dots,x_n)\right)$$

ただし $0\le l_1\le\lceil l/2\rceil$．表には $\tilde{g}$ のみを示す．$\epsilon_j,\delta_j\in\{1,-1\}$，$\alpha,\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$．(6)，(10) のパラメーターは次の条件をみたす：(6) では $4\delta_1\delta_2-\alpha^2\neq 0$，(10) では二次形式 $\sum_{j=1}^3\delta_j x_j^2+\sum_{1\le i<j\le 3}\alpha_{ij}x_ix_j$ に対応する 3×3 対称行列の主小行列式がすべて 0 でないこと，すなわち $4\delta_i\delta_j-\alpha_{ij}^2\neq 0$ $(1\le i<j\le 3)$ かつこの 3×3 行列の行列式が 0 でないこと（[15] の条件 $(*),(**)$）.

型	写像芽 $h(x)$	q
$(1,k)$	$x_1^k+\sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 4)$	1
(2)	$x_2^3+x_1^2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	
$(3,k)$	$x_2^k+\epsilon_1x_1x_2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (3\le k\le 4)$	
(4)	$\delta_1 x_1^2+\delta_2 x_2^2+\alpha x_1x_2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	2
(5)	$x_1^3+\epsilon_1x_2^2+\epsilon_2x_1x_2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	
(6)	$(x_1+\epsilon_1x_2)^2+\epsilon_2x_2^3+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	
(7)	$x_3^3+\epsilon_1x_2x_3+\epsilon_2x_3x_1+\epsilon_3x_1x_2+\sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$	
(8)	$\sum_{j=1}^3 \delta_j x_j^2+\sum_{1\le i<j\le 3}\alpha_{ij}x_ix_j+\epsilon_1x_1x_2x_3+\sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$	3

表 3: 等号制約と不等号制約を両方持つ（$q>0, r=1$）場合の標準形．$\mathcal{K}[G]$-同値類は $(x_1,\dots,x_q,h(x))$ で代表され，表には h のみを示す．$\epsilon_j,\delta_j\in\{1,-1\}$，$\alpha,\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$．(4)，(8) のパラメーターは，それぞれ表 2 の型 (6)，(10) と同じ条件をみたす.

- （Mangasarian–Fromovitz [22]）dh_0 が全射で，任意の $j \in I$ に対し $d(g_j)_0(d) < 0$ となる $d \in \operatorname{Ker} dh_0$ が存在するとき，(g,h) は **MFCQ** を満たすという．

ACQ と GCQ は，実行可能領域の接錐を用いて定義される．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $C^+(g,h)$，$L^+(g,h)$ を次で定める．

$$C^+(g,h) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} M(g,h) \text{ 内の点列 } \{x_l\} \text{ と正実数列 } \{t_l\} \text{ で} \\ x_l \to 0,\ t_l x_l \to d \text{ となるものが存在} \end{array} \right\},$$
$$L^+(g,h) = \{ d \in \operatorname{Ker} dh_0 \mid \text{任意の } j \in I \text{ に対し } d(g_j)_0(d) \le 0 \}.$$

$C^+(g,h)$ を $M(g,h)$ の**接錐**（Bouligand 接錐），$L^+(g,h)$ を**線型化錐**という．つねに $C^+(g,h) \subset L^+(g,h)$ が成立する．また $X \subset \mathbb{R}^n$ に対し，その**極錐**を $X^\circ = \{ v \mid \langle d, v \rangle \le 0 \ (\forall d \in X) \}$ とする．

- （Abadie [1]）$C^+(g,h) = L^+(g,h)$ が成立するとき，(g,h) は **ACQ** を満たすという．
- （Guignard [13]）$C^+(g,h)^\circ = L^+(g,h)^\circ$ が成立するとき，(g,h) は **GCQ** を満たすという．

これら四つの間には第 1 節で述べた含意，つまり

$$\text{LICQ} \implies \text{MFCQ} \implies \text{ACQ} \implies \text{GCQ}$$

が成立し，GCQ が最も弱い．単目的（$p = 1$）の場合，GCQ は局所最小解において KKT 条件が任意の目的関数に対し成立するための必要十分条件である（Gould–Tolle [12]）．含意が逆向きには一般に成立しないことを示す具体例は，先行研究においていくつか与えられてきた [25]．後で述べる判定結果（定理 5.5 とそれに続く考察）から，そのような例は分類表の中に系統的に現れることがわかる．

多目的のための p-WGCQ． 多目的（$p \ge 2$）の場合，第 1 節で述べた通り，GCQ では「局所弱 Pareto 解ならば KKT 点」を保証できない．Haeser–Ramos [14] は，これを保証する制約想定を，ある錐の包含関係として特徴づけた．$\bar{x} = 0$，$\Omega = M(g,h)$ とする．彼らはまず Ω の**正則 p-多目的法錐** $\widehat{N}(\Omega; p)$ を，次のように定義した（[14, Definition 3.1]）：

$$\widehat{N}(\Omega;p) = \left\{ V = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^{n \times p} \;\middle|\; \limsup_{x \to 0,\, x \in \Omega} \frac{\min_{1 \le \ell \le p} \langle v_\ell, x \rangle}{\|x\|} \le 0 \right\}.$$

$p = 1$ のときこれは古典的な（Fréchet）正則法錐に一致する．これは接錐を用いて次のように書き換えられる（[14, Theorem 3.1]）：

$$\widehat{N}(\Omega;p) = \left\{ V \;\middle|\; \min_{1 \le \ell \le p} \langle v_\ell, d \rangle \le 0 \ \ \forall d \in C^+(g,h) \right\}.$$

さらにこれから定まる錐

$$C(\Omega;p) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \min_{1 \le \ell \le p} \langle v_\ell, d \rangle \le 0 \ \ \forall V \in \widehat{N}(\Omega;p) \right\}$$

を考える．

定義 5.1 (Haeser–Ramos [14])**.** 包含 $L^+(g,h) \subset C(\Omega;p)$ が成立するとき，(g,h) は**弱 p-Guignard 制約想定**（p-WGCQ）を満たすという．

p-WGCQ は,「$\bar{x}$ が（p 個の目的関数 f の）局所弱 Pareto 解ならば弱 KKT 点である」が任意の C^1 級目的関数 f について成立することと同値である（[14, Theorem 4.1]）．$p=1$ では $C(\Omega;1) = C^+(g,h)^{\circ\circ}$ となり，包含条件は極錐をとると GCQ に一致する．すなわち p-WGCQ は GCQ の一般化であると言える．また，p-WGCQ は第 1 節で述べた単調性を満たす，つまり，制約関数芽 (g,h) は p-WGCQ を満たせば，$(p-1)$-WGCQ も満たす．特に，**閾値**

$$p_* = p_*(g,h) = \min\{p \geq 1 \mid (g,h) \text{ に対して } p\text{-WGCQ が成立しない }\} \in \{1,2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$$

を求めることが重要となる．弱 KKT に対するこの p-WGCQ と並行して，強 KKT 条件に対応する**強 p-Guignard 制約想定**（p-SGCQ）も同様に定義される（第 5.C 節で扱う）．

ここで説明した制約想定はいずれも $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化で不変である．

定理 5.2 ([16, Theorems 3.1, 3.2]，[17])**.** 制約関数芽 (g,h) が LICQ，MFCQ，ACQ，GCQ，p-WGCQ，および p-SGCQ のいずれかを満たすことと，(g,h) と $\mathcal{K}[G]$-同値な制約関数芽が同じ制約想定を満たすことは同値である．また (g,h) がこれらのいずれかを満たすことと，その簡約化が同じ制約想定を満たすことも同値である．

定理 5.2 と定理 4.1 より，一般的な制約族に現れる芽の制約想定を決定するには，表 1–3 の標準形について同じ問題を解けば十分である．

5.B. 古典的制約想定の成否と閾値 p_* の決定

四つの古典的制約想定のうち，LICQ と MFCQ は一次の情報のみで判定できる．まず LICQ については，定義より，表 1–3 の芽はいずれも LICQ を満たさない（制約関数芽が LICQ を満たすのは，完全簡約化が沈め込み芽となるときに限る）．MFCQ については次が成立する．

定理 5.3 ([16, Theorem 4.1])**.** 表 1，3 の芽はいずれも MFCQ を満たさない．表 2 の芽が MFCQ を満たすための必要十分条件は,（表 2 の注釈内の）標準形に現れるパラメーター l_1 が 0 でないことである．

以下の命題が示す通り，p-WGCQ（定義 5.1）に関する閾値 p_* を決定すれば，ACQ，GCQ の成否も決定できる．

命題 5.4 ([17])**.** 任意の制約関数芽 (g,h) に対し，

$$p_* = \infty \iff \text{ACQ が成立}, \qquad p_* = 1 \iff \text{GCQ が成立しない}.$$

前者についてはより強く，ACQ が成立しないことと $p_* \leq n$ は同値である．

命題 5.4 より，p_* を決定すれば ACQ，GCQ の成否も決まる．そこで p_* そのものを分類表のすべての芽に対して決定するのが，本研究の主結果の一つである．

定理 5.5 ([16, 17])**.** 表 1–3 の各標準形に対し，p-WGCQ の閾値 p_* は表 4–6 の通りである．

この定理から特に，**GCQ は満たすが，より強い制約想定（ACQ，MFCQ，LICQ）はいずれも満たさない**制約関数芽が，分類表の（つまり一般的な制約関数の）中に多数存在することになる（表 5 で $1 < p_* < \infty$ となる芽）．すなわち，GCQ と他の古典的制約想定との間の「隔たり」は，人為的，例外的な現象ではなく，一般的に現れるものであるといえる．

閾値 p_* の幾何的記述．閾値 p_* の値は主に二次形式の性質をみることにより決定される．その仕組みを述べる．まず [16] の結果より，表 1–3 の関数芽のうち GCQ を満たすものの接錐は，線型化錐を二次形式で制限した形

$$C^+(g,h) = L^+(g,h) \cap \{Q = 0\} \quad \text{または} \quad L^+(g,h) \cap \{Q \le 0\}$$

をしている．ここで Q は関係する成分の二次部分である．目的関数行列 $V = (v_1, \dots, v_p)$ に対し開錐 $\mathcal{P}(V) = \{d \mid \langle v_\ell, d\rangle > 0 \ \forall \ell\}$ を考えると，$\widehat{N}(\Omega; p)$ の特徴づけ（[14, Theorem 3.1]）より，p-WGCQ が成立しないことは，

$$\emptyset \neq L^+(g,h) \cap \mathcal{P}(V) \subset \{Q > 0\} \quad \text{または} \quad \subset \{Q < 0\}$$

となる p 列の V が存在することと同値である（$\cap\{Q \le 0\}$ 型のときは $\{Q > 0\}$ 側のみ）．そこで

$$p_+ = \min\{p \mid \exists V,\ \emptyset \neq L^+(g,h) \cap \mathcal{P}(V) \subset \{Q > 0\}\},$$
$$p_- = \min\{p \mid \exists V,\ \emptyset \neq L^+(g,h) \cap \mathcal{P}(V) \subset \{Q < 0\}\}$$

とおくと，上の同値性から直ちに，$\cap\{Q = 0\}$ 型のとき $p_* = \min(p_+, p_-)$，$\cap\{Q \le 0\}$ 型のとき $p_* = p_+$ が従う．すなわち p_* は，線型化錐の中から Q の符号を一定に保つ非空な部分を切り出すのに必要な半空間（目的関数）の最小個数である．この $p_\pm$ を（たとえば）Q の符号数で評価することで，Q が不定値であるとき以下の評価が得られる：$C^+(g,h) = L^+(g,h) \cap \{Q = 0\}$ のときは

$$\min(s_E, t_E) + 1 \le p_* \le \min(s,t) + 1$$

一方 $C^+(g,h) = L^+(g,h) \cap \{Q \le 0\}$ のときは

$$t_E + 1 \le p_* (= p_+) \le t + 1$$

となる．ここで $(s,t) = \mathrm{sig}(Q)$，$(s_E, t_E) = \mathrm{sig}(Q|_E)$，$E$ は線型化錐の線型部分，つまり $E = L^+(g,h) \cap (-L^+(g,h))$ である．この不等式の両側が一致しないときや，Q が定値であるときは別の議論が必要となるが，紙面の都合上，これ以上の詳細は省略する．

型	p_*
$(1,k)$	$k = 2$ のとき $\min(a_+ + 1, a_-) + 1$，　$k \ge 3$ のとき $\min(a_+, a_-) + 1$
(2)	$\min(a_+ + 1, a_-) + 1$

表 4: 表 1（等号制約のみ）の各芽の閾値 p_*．a_+, a_- は，標準形における自由な二乗項 $\sum_j \epsilon_j x_j^2$ に現れる ϵ_j のうち $+1$，-1 の個数.

5.C. 強 KKT のための制約想定

型	条件	p_*
$(1,k)$	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，または（$k \geq 3$ かつ $\epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = -1$）	∞
	その他	$t_E + 1$
(2)	$\epsilon_{q+2} = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	その他	$t_E + 1$
$(3,k)$	$\epsilon_{q-1} = \cdots = \epsilon_n = -1$，または（$k \geq 3$ かつ $\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$）	∞
	その他	$t_E + 1$
$(4,k)$	$\epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = +1$ かつ $\epsilon_q = (-1)^k$	1
	その他	$t_E + 2$
(5)	$\epsilon_{q-1} = \epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	その他	$t_E + 1$
(6)	$\delta_1 = \delta_2 = -1$，$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\alpha < 2$	∞
	$\delta_1 = \delta_2 = -1$，$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\alpha > 2$	$t_E + 2$
	その他	$t_E + 1$
(7)	$\epsilon_{q-2} = \epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	その他	$t_E + 1$
(8)	$\epsilon_{q-1} = \epsilon'_{q-1} = \epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\epsilon_{q-1} = -1$，$\epsilon'_{q-1} = +1$	$t_E + 2$
	その他	$t_E + 1$
(9)	$\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = -1$ かつ $\epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = +1$	1
	その他	$t_E + 2$
(10)	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$，$(\star)$	∞
	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$，$\max_{i<j} \alpha_{ij} \leq 2$，$(\star)$ を満たさない．	$t_E + 3$
	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$，$\max_{i<j} \alpha_{ij} > 2$	$t_E + 2$
	その他	$t_E + 1$

表 5: 表 2（不等号制約のみ）の各芽の閾値 p_*．MFCQ を満たさない場合（$l_1 = 0$）のみを考えていることに注意する（$l_1 \geq 1$ のときは MFCQ が成立し $p_* = \infty$）．Q は $\tilde{g}$ の二次部分，$E = \mathrm{span}(e_q, \ldots, e_n)$，$(s_E, t_E) = \mathrm{sig}(Q|_E)$ である．型 (10) の（$p_* = \infty$ となる）条件 $(\star)$ は，$B = \sum_{j=1}^{3} -a_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_{ij} a_i a_j$ に対し $a \geq 0$ なる任意の $a \in \mathbb{R}^3$ で $-B(a) \geq 0$ となること（$-B$ の $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 上での共正値性，copositivity）である．これと等価な α_{ij} に関する明示的な不等式条件，および両者の同値性は [16, Proposition 4.37] で与えられている．

型	条件	p_*
$(1,k)$，(2)，(4)，(5)，(6)，(8)	（無条件）	$\min(a_+, a_-) + 1$
$(3,k)$	k が偶数で $a_- \geq 1$，または k が奇数で（$\epsilon_1 = +1$ または $\min(a_+, a_-) \geq 1$）	$\min(a_+, a_-) + 2$
	その他	1
(7)	$\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ かつ $\min(a_+, a_-) = 0$	1
	その他	$\min(a_+, a_-) + 2$

表 6: 表 3（混合型）の各芽の閾値 p_*．a_+, a_- は，標準形における自由な二乗項 $\sum_j \epsilon_j x_j^2$ に現れる ϵ_j のうち $+1$，-1 の個数．

第 5.A 節で触れた p-SGCQ（強 KKT 条件に対応する強 p-Guignard 制約想定）について述べる．これは，p-WGCQ の定義（定義 5.1）における錐 $C(\Omega;p)$ を，以下の**強錐** $C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)$ に置き換えて得られる．$V=(v_1,\dots,v_p)\in\widehat{N}(\Omega;p)$ と $d\in\mathbb{R}^n$ に対し，

$$\min_{1\le\ell\le p}\langle v_\ell,d\rangle<0,\quad \text{または}\quad \langle v_\ell,d\rangle=0\ (\forall\ell)$$

が成り立つとき，d は ***V*-許容的**であるという．これを用いて

$$C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)=\left\{d\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;\text{任意の } V\in\widehat{N}(\Omega;p)\text{ に対し } d\text{ は } V\text{-許容的}\right\}$$

とおく．p-WGCQ が $\min_\ell\langle v_\ell,d\rangle\le 0$ のみを要求するのに対し，強錐では，この最小値が 0 となってかつある $\langle v_\ell,d\rangle$ が正となる境界の場合を除いており，つねに $C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)\subset C(\Omega;p)$ である．

定義 5.6 (Haeser–Ramos [14])**.** 包含 $L^+(g,h)\subset C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)$ が成立するとき，(g,h) は**強 *p*-Guignard 制約想定**（p-SGCQ）を満たすという．

p-SGCQ は,「$\overline{x}$ が局所弱 Pareto 解ならば**強** KKT 点である」が任意の C^1 級 p 目的関数 f について成立することと同値である（[14, Theorem 4.2]）．$p=1$ では $C^{\mathrm{S}}(\Omega;1)=C(\Omega;1)$ となり 1-SGCQ は GCQ に一致するが，$p\ge 2$ では p-WGCQ より著しく強い．

定理 5.7 ([17])**.** $p\ge 2$ のとき，$(\overline{x},\Omega)$ が p-SGCQ を満たすための必要十分条件は $L^+(g,h)=\{0\}$ となることである．特に分類表 1–3 のすべての芽は，$p\ge 2$ において p-SGCQ を満たさない（これらの芽ではつねに $L^+(g,h)\neq\{0\}$ である）．

6. 認識問題と分岐

最後に，認識問題に関する現在進行中の研究 [18] に簡単に触れる．第 5 節で述べた制約想定の判定を，与えられた具体的な制約に適用するには，その芽が分類表のどの標準形と $\mathcal{K}[G]$-同値かを，計算可能な不変量によって判定する必要がある．これを**認識問題**と呼ぶ．

認識問題の完全な解決に向けて，一次の不変量の導入，それによる余核の自然な向きの定義，および高余次元の型を扱うためのベクトル場の芽に関する条件の導入を行っている．これらはいずれも $\mathcal{K}[G]$-同値および簡約化で不変である．さらに，$\mathcal{K}[G]$-不変となるよう拡張した内在的微分（[15] 参照）とその符号数を用いる．ここで内在的微分は，制約芽の余核に値をとる対称双線形形式であり，余核の向きを定めれば実二次形式とみなせる．一次の不変量から定まる自然な向きのもと，その符号数も $\mathcal{K}[G]$-同値および簡約化で不変となる．

これらの不変量と条件を組み合わせることにより，分類表に現れる制約関数芽のうち，表 2 の (10) 型，および表 3 の (8) 型以外については，制約関数から認識するための判定条件を具体的に導くことができている．この研究は，本稿で述べた分類と制約想定の判定を，具体的な最適化問題の解析へ応用するための基盤を与えると期待される．

参考文献

[1] J. M. Abadie, *On the Kuhn–Tucker theorem*, in: Nonlinear Programming, John Wiley, 1967, 21–36.

[2] R. K. Arora, *Optimization: Algorithms and Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2015.

[3] S. P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2014.

[4] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$*, Mem. Amer. Math. Soc. **50** (1984), no. 306.

[5] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming 1: Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 1997.

[6] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming 2: Theory and Extensions*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2003.

[7] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, E. Zitzler, *Scalable multi-objective optimization test problems*, in: Proc. 2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC 2002), vol. 1, IEEE, 2002, 825–830.

[8] A. E. Eiben, J. E. Smith, *Introduction to Evolutionary Computing*, 2nd ed., Springer, 2015.

[9] J.-J. Gervais, *Sufficiency of jets*, Pacific J. Math. **72** (1977), 419–422.

[10] J.-J. Gervais, *G-stability of mappings and stability of bifurcation diagrams*, J. London Math. Soc. (2) **25** (1982), 551–563.

[11] J.-J. Gervais, *Déformations G-verselles et G-stables*, Canad. J. Math. **36** (1984), 9–21.

[12] F. J. Gould, J. W. Tolle, *A necessary and sufficient qualification for constrained optimization*, SIAM J. Appl. Math. **20** (1971), 164–172.

[13] M. Guignard, *Generalized Kuhn–Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space*, SIAM J. Control **7** (1969), 232–241.

[14] G. Haeser, A. Ramos, *Constraint qualifications for Karush–Kuhn–Tucker conditions in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl. **187** (2020), 469–487.

[15] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Characterization of generic parameter families of constraint mappings in optimization*, J. Singul. **28** (2025), 104–147.

[16] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Constraint qualification for generic parameter families of constraints in optimization*, preprint, arXiv:2510.02381v1.

[17] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Multiobjective constraint qualifications for generic constraint map-germs*, in preparation.

[18] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Recognition and bifurcation of constraints in optimization*, in preparation.

[19] H. Ishibuchi, L. He, K. Shang, *Regular Pareto front shape is not realistic*, in: 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2019.

[20] S. Izumiya, M. Takahashi and H. Teramoto, *Geometric equivalence among smooth section germs of vector bundles with respect to structure groups*, in preparation.

[21] H. Jain, K. Deb, *An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, Part II*, IEEE Trans. Evol. Comput. **18** (2014), 602–622.

[22] O. L. Mangasarian, S. Fromovitz, *The Fritz John necessary optimality condition in the presence of equality and inequality constraints*, J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 37–47.

[23] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined map-germs*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 279–308.

[24] Y. Nesterov. *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 edition, 2014.

[25] D. W. Peterson, *A review of constraint qualifications in finite-dimensional spaces*, SIAM Review **15** (1973), 639–654.

[26] B. Shahriari, K. Swersky, Z. Wang, R. P. Adams, N. de Freitas, *Taking the human out of the loop: a review of Bayesian optimization*, Proc. IEEE **104** (2016), 148–175.

[27] J.-C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer, 1972.

Quasi-cellular categories and the structure of the Brauer category

片田　舞　(東京大学)*

1 導入

Brauer algebra は，Brauer diagram を用いて定義される diagram algebra（図式代数）の一種である．歴史的には，Brauer [1] による直交群やシンプレクティック群の不変式論の研究において導入された．一般線形群と対称群の有限次元表現の間には，Schur–Weyl 双対性という関係性が広く知られているが，直交群やシンプレクティック群と Brauer algebra との間にもこれと類似する双対関係が成り立つ．より詳しく述べると，非退化対称双線型形式をもつ有限次元ベクトル空間 V のテンソル冪 $V^{\otimes p}$ に対し，V の等長変換群 $\mathrm{O}(V)$ と Brauer algebra $B^{\delta}(p)$（ただし，$\delta = \dim V$）の標準的な作用が定義される．これら 2 つの作用は互いに可換であり，Brauer algebra $B^{\delta}(p)$ から中心化環 $\mathrm{End}_{\mathrm{O}(V)}(V^{\otimes p})$ への全射準同型が存在する．一方，非退化歪対称双線型形式をもつベクトル空間の場合には，等長変換群は $\mathrm{Sp}(V)$ となり，Brauer algebra のパラメータとしては，$\delta = -\dim V$ が対応する．

Brauer algebra の表現論はこれまで広く研究されてきた．特に，標数 0 の体上では，Brown [3, 2], Hanlon–Wales [7], Wenzl [12], Doran–Wales–Hanlon [6], Rui [10], Rui–Si [11] らの研究により，Brauer algebra が半単純になるためのパラメータ δ の条件が完全に決定されている．さらに，König–Xi [8] は，一般の単位可換環上でパラメータが非特異な場合に，Brauer algebra が対称群の群環の直和と森田同値になることを示した．

本講演の目的は，これらの現象に対して圏論的な解釈を与えることである．Brauer algebra を endomorphism algebra（自己準同型代数）にもつ，非負整数を対象とする「Brauer category」と呼ばれる圏がある．Brauer category は，Lehrer–Zhang [9] によって導入され詳しく調べられたが, その本質的な概念はすでに Deligne [4, 5] の研究にも現れている．本講演では, cellular algebra の圏論的類似として「quasi-cellular category」を導入する．Brauer category をはじめとする partition category や walled Brauer category などの diagram category は，quasi-cellular category の構造を持つ．我々は，Brauer category を quasi-cellular category の観点から考察し，得られた結果について報告する．本講演は，東京大学の葉廣和夫氏との共同研究に基づくものである．

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学　大学院数理科学研究科
e-mail: mkatada@ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:24K16916) の助成を受けたものである。

2 Brauer algebra と Brauer category

以下，$\mathbf{k}$ を単位的可換環とし，$\delta \in \mathbf{k}$ をパラメータとする．

2.1 Brauer algebra

非負整数 p に対し，(p,p)**-Brauer diagram** とは，集合 $\{1^+,\dots,p^+\} \sqcup \{1^-,\dots,p^-\}$ の p 個の非順序対への分割のことである．これは図式的には，上部に配置された p 個の点 $1^+,\dots,p^+$ と下部に配置された p 個の点 $1^-,\dots,p^-$ を，p 本の弧で交差を許して結んで得られる図形として描写される．図 1 に，$(5,5)$-Brauer diagram の例を描いた．

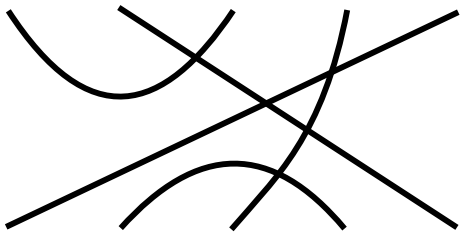


図 1　$(5,5)$-Brauer diagram.

$\mathbb{B}(p,p)$ で (p,p)-Brauer diagram 全体のなす集合を表すこととする．**Brauer algebra** $B^{\mathbf{k},\delta}(p)$ とは，$\mathbb{B}(p,p)$ を基底とする自由 $\mathbf{k}$-加群であって，図式の連結で定義される合成を積としてもつ代数のことを言う．すなわち，$f,g \in \mathbb{B}(p,p)$ に対し，$f \circ g \in B^{\mathbf{k},\delta}(p)$ は，g の図式を f の図式の上にのせ，g の下部の点と f の上部の点を同一視してできる図形からループを取り除いて得られる (p,p)-Brauer diagram $f \hat{\circ} g$ と，取り除いたループの個数 $l(f,g)$ を用いて，

$$f \circ g = \delta^{l(f,g)}\, f \hat{\circ} g$$

で定義される．図 2 に，$(5,5)$-Brauer diagram の合成の例を描いた．

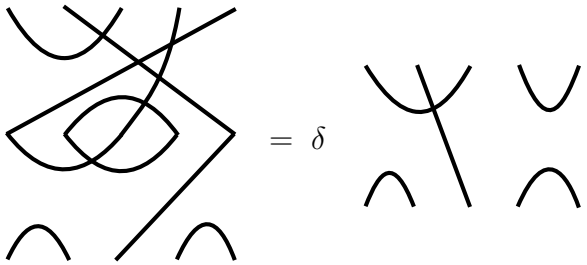


図 2　Brauer diagram の合成

2.2 Brauer category

より一般に，$p+q$ が偶数であるような非負整数の組 (p,q) に対し，(p,q)-Brauer diagram が定義される．$\mathbb{B}(p,q)$ で (p,q)-Brauer diagram 全体のなす集合を表すことにする．

Brauer category $B = B^{\mathbf{k},\delta}$ とは, 非負整数を対象とし, $\mathbb{B}(p,q)$ を基底とする自由 $\mathbf{k}$-加群を射集合 $B(p,q)$ としてもつ圏である．$f \in \mathbb{B}(q,r)$ と $g \in \mathbb{B}(p,q)$ の合成 $f \circ g \in B(p,r)$ は，Brauer algebra の積と同様に定義され，恒等射は $\mathrm{id}_p = 1_p = \{\{i^+, i^-\} \mid 1 \le i \le p\}$ である．Brauer algebra $B^{\mathbf{k},\delta}(p)$ は，Brauer category $B^{\mathbf{k},\delta}$ の対象 p に対する自己準同型代数 $B^{\mathbf{k},\delta}(p,p)$ として復元される．

Brauer category は，対象の和と diagram を横に並べる操作で定まるテンソル積に関して $\mathbf{k}$-linear PROP の構造を持つ．Symmetry $P_{p,q} : p+q \to q+p$ は,

$$P_{p,q} = \{\{1^+, (q+1)^-\}, \dots, \{p^+, (q+p)^-\}, \{(p+1)^+, 1^-\}, \dots, \{(p+q)^+, q^-\}\}$$

で与えられる．Brauer category の $\mathbf{k}$-linear PROP としての以下の表示が知られている．

$$\text{生成元：} \quad c = \{\{1^+, 2^+\}\} : 2 \to 0, \quad \bar{c} = \{\{1^-, 2^-\}\} : 0 \to 2$$

$$\text{関係式：} \quad (\mathrm{id}_1 \otimes c)(\bar{c} \otimes \mathrm{id}_1) = \mathrm{id}_1 = (c \otimes \mathrm{id}_1)(\mathrm{id}_1 \otimes \bar{c}), \quad cP_{1,1} = c, \quad P_{1,1}\bar{c} = \bar{c}, \quad c\bar{c} = \delta\,\mathrm{id}_0\,.$$

2.3 Brauer diagram の分解

Brauer diagram が上部の点同士を結ぶ弧を持たないとき，**upward** であるといい，下部の点同士を結ぶ弧を持たないとき, **downward** であるという．upward かつ downward な Brauer diagram のことを **level** という．$\mathbb{B}^+(p,q)$ (resp. $\mathbb{B}^-(p,q), \mathbb{B}^0(p,q)$) で, upward (resp. downward, level) Brauer diagram たちからなる $\mathbb{B}(p,q)$ の部分集合を表すことにする．非負整数に対し，半順序 $\preceq$ を,

$$p \preceq q \quad \Leftrightarrow \quad p \le q \text{ かつ } p+q \text{ は偶数}$$

で定め，$p \prec q$ で $p \preceq q$ かつ $p \neq q$ を表すこととする．すると，$\mathbb{B}^+(p,q) \neq \emptyset$ となるのは，$p \preceq q$ のときに限る．鏡映変換 $\overline{(\ )} : \mathbb{B}(p,q) \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}(q,p)$ は，upward diagram と downward diagram を入れ替え，level diagram を保つ．

Brauer diagram f の上部の点と下部の点を結ぶ任意の弧のペアが交点をもたないとき, f は **monotone** であるという．$\mathbb{B}^m(p,q)$ で monotone Brauer diagram からなる $\mathbb{B}(p,q)$ の部分集合を表し，$\mathbb{B}^{\pm,m}(p,q) = \mathbb{B}^{\pm}(p,q) \cap \mathbb{B}^m(p,q)$ とする．

このとき，(p,q)-Brauer diagram は，以下のように分解される．

$$\coprod_{r \preceq p,q} \mathbb{B}^{+,m}(r,q) \times \mathbb{B}^0(r,r) \times \mathbb{B}^{-,m}(p,r) \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}(p,q), \quad (f^+, f^0, f^-) \mapsto f^+ \circ f^0 \circ f^-. \quad (1)$$

3 Matrix Brauer category

ここでは，Brauer category の変種である matrix Brauer category $mB = mB^{\mathbf{k}}$ を定義する．mB の対象と射集合は，Brauer category のものと同じであるが，射の合成は以下に記述する **matrix composition** で定義される．

Brauer diagram の分解 (1) から，$f \in \mathbb{B}(q,r), g \in \mathbb{B}(p,q)$ に対し，

$$f = f^+ \circ f^0 \circ f^-, \quad g = g^+ \circ g^0 \circ g^-$$

なる $f^+ \in \mathbb{B}^{+,m}(t,r)$, $f^0 \in \mathbb{B}^0(t,t)$, $f^- \in \mathbb{B}^{-,m}(q,t)$, $g^+ \in \mathbb{B}^{+,m}(s,q)$, $g^0 \in \mathbb{B}^0(s,s)$, $g^- \in \mathbb{B}^{-,m}(p,s)$ が一意的に存在し，f と g の matrix composition は，

$$f \circ g = \begin{cases} \delta_{\overline{f^-},\, g^+}\ f^+ \circ (f^0 \circ g^0) \circ g^- & (t = s) \\ 0 & (t \neq s) \end{cases}$$

で定義される．恒等射は，$\mathrm{id}_p^{mB} := \displaystyle\sum_{r \preceq p} \sum_{f \in \mathbb{B}^{+,m}(r,p)} f \circ \bar{f}$ である．

mB の対象 p に対する自己準同型代数 $mB(p,p)$ は，以下のように，対称群の群環の行列環の直和と同型になる．

命題 3.1. 非負整数 p に対し，$d_{p,r} = |\mathbb{B}^{+,m}(r,p)| = \operatorname{rank} B^+(r,p)/r!$ とすると，標準的な代数の同型

$$mB(p,p) \cong \bigoplus_{r \preceq p} M_{d_{p,r}}(\mathbf{k}[\mathfrak{S}_r])$$

がある．特に，$\mathbf{k}$ が標数 0 の体であれば，$mB(p,p)$ は半単純である．

4 Brauer category に対する主定理

$\mathbf{k}$ を単位的可換環，$\delta \in \mathbf{k}$ とする．ここでは，Brauer category $B = B^{\mathbf{k},\delta}$ に関する主結果について述べる．

非負整数 r に対し，δ が r に依存する “ある条件” を満たすとき，δ は **rank $\preceq r$ で非特異**であるという．また，任意の $r \geq 0$ に対し，δ が $\operatorname{rank} \preceq r$ で非特異であるとき，単に δ は**非特異**であるという．（δ の特異性については，Section 7 で触れる．）

非負整数 r に対し，対象が $\{q \geq 0 \mid q \preceq r\}$ である B の充満部分圏を $B_{\preceq r}$ で表し，mB の充満部分圏を $mB_{\preceq r}$ で表す．

定理 4.1. $\mathbf{k}$-線形関手

$$L : B \to mB$$

が存在し，L の制限 $L_{\preceq r} : B_{\preceq r} \to mB_{\preceq r}$ が同型となることと，δ が *rank* $\preceq r$ で非特異であることは同値である．

$\mathbb{S}$ で，対象が非負整数，射集合が $\mathbb{S}(p,q) = \mathbf{k}[\mathfrak{S}_p]$ $(p = q)$, $\mathbb{S}(p,q) = 0$ $(p \neq q)$ の線形圏を表すこととする．

定理 4.2. δ が非特異ならば，B は $\mathbb{S}$ と森田同値であり，B の中心は $\mathbb{S}$ の中心と $\mathbf{k}$-代数として同型である．

5 Quasi-cellular category

ここでは，quasi-cellular category を導入する．quasi-cellular category は，stratified linear category であって，かつ，pairing と copairing の組をもつものとして定義される．

5.1 Base category

$\mathbf{k}$-線形圏 $\mathcal{A}$ が *base category* であるとは，以下の 2 つの条件を満たすときをいう．

1. 対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が降鎖条件をみたす半順序 $\leq$ を持つ．
2. 相異なる対象 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し，$\mathcal{A}(x,y) = 0$ が成り立つ．

$\mathcal{A}$ 上の線形圏とは，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ であるような線形圏 $\mathcal{C}$ であって，対象上で恒等写像となるような線形関手 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ をもつもののことを言う．$\mathcal{A}$ 上の線形圏 $\mathcal{C}$ に対し，射集合 $\mathcal{C}(x,y)$ は，$(\mathcal{A}(y,y), \mathcal{A}(x,x))$-両側加群の構造を持つ．

5.2 Stratified linear category

以下，$\mathcal{A}$ を base category とする．

$\mathcal{A}$ 上の *stratified linear category* とは，$\mathcal{A}$ 上の線形圏 $(\mathcal{C}, i)$ であって，以下の条件を満たす線形部分圏 $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$ をもつもののことを言う．

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^+) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^-) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
2. - $\mathcal{C}^+$ は upward．つまり，任意の対象 x, y に対し，$x > y$ ならば，$\mathcal{C}^+(x,y) = 0$.
   - $\mathcal{C}^-$ は downward．つまり，任意の対象 x, y に対し，$x < y$ ならば，$\mathcal{C}^-(x,y) = 0$.
3. 各対象 x に対して，$\mathcal{C}^+(x,x) = \mathcal{C}^-(x,x)$. (このとき，$\mathcal{C}^\pm$ の線形部分圏 $\mathcal{C}^0$ が，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を対象の集合とし，各対象 x に対し，$\mathcal{C}^0(x,x) = \mathcal{C}^\pm(x,x)$，相異なる対象 x, y に対し，$\mathcal{C}^0(x,y) = 0$ を射集合とする圏として定まる．)
4. 線形関手 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ は，線形圏の同型 $i : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^0$ を誘導する．(以降，同型 i を通して $\mathcal{A}$ と $\mathcal{C}^0$ を同一視する．)
5. 各対象 x, z に対し，合成写像
$$\circ : \bigoplus_{y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{C}^+(y,z) \otimes_{\mathcal{C}^0(y,y)} \mathcal{C}^-(x,y) \to \mathcal{C}(x,z), \quad g \otimes f \mapsto g \circ f$$
は $(\mathcal{A}(z,z), \mathcal{A}(x,x))$-両側加群の同型．

Stratified linear category $\mathcal{C}$ に対し，対象上では恒等写像である線形関手（射影）
$$\varepsilon^\pm : \mathcal{C}^\pm \to \mathcal{C}^0$$

が，各対象 x に対し，$\varepsilon^{\pm} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\pm}(x,x)}$，相異なる対象 x, y に対し，$\varepsilon^{\pm} = 0$ で定義される．

5.3 Quasi-cellular category

$\mathcal{A}$ 上の *quasi-cellular category* とは，$\mathcal{A}$ 上の stratified linear category $\mathcal{C}$ であって，以下の条件を満たす pairing b' と copairing d' をもつもののことをいう．ただし，pairing b' とは，各対象 x に対する $\mathcal{A}(x,x)$-両側加群の準同型

$$b'_x : \bigoplus_{y \geq x} \mathcal{C}^-(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^+(x,y) \to \mathcal{A}(x,x)$$

の族であり，copairing d' とは，各対象 x に対する $\mathcal{A}(x,x)$ の $\mathcal{C}(x,x)$ における中心化環 $Z_{\mathcal{C}(x,x)}(\mathcal{A}(x,x)) \subset \bigoplus_{y \leq x} \mathcal{C}^+(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^-(x,y)$ の元

$$d'(1_x) = \sum_{y \leq x} (d')^+_{x,y} \otimes (d')^-_{x,y} \in \bigoplus_{y \leq x} \mathcal{C}^+(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^-(x,y)$$

の族のことである．

1. 任意の $f \in \mathcal{C}^+(z,x)$ に対し，
$$\sum_{y \leq x} (d')^+_{x,y} b'((d')^-_{x,y} \otimes f) = f. \tag{2}$$
2. 任意の $g \in \mathcal{C}^-(x,z)$ に対し，
$$\sum_{y \leq x} b'(g \otimes (d')^+_{x,y})(d')^-_{x,y} = g. \tag{3}$$
3. 任意の $f \in \mathcal{C}^+(z,x)$ に対し，$b'(1_x \otimes f) = \begin{cases} f & (x = z) \\ 0 & (x \neq z). \end{cases}$
4. 任意の $g \in \mathcal{C}^-(x,z)$ に対し，$b'(g \otimes 1_x) = \begin{cases} g & (x = z) \\ 0 & (x \neq z). \end{cases}$

5.4 Brauer category の quasi-cellular structure

ここでは，Brauer category に quasi-cellular category の構造を与える．まず，Brauer category が base category $\mathbb{S}$ 上の stratified linear category であることを確認する．線形関手 $i : \mathbb{S} \to B$ を，対象上で恒等写像であって，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ を，σ を実現する (p,p)-Brauer diagram に移すものとする．$B^{\pm}$ (resp. B^0) で, $\mathrm{Ob}(B^{\pm}) = \mathrm{Ob}(B^0) = \mathrm{Ob}(B)$, 射集合 $B^{\pm}(p,q)$ (resp. $B^0(p,q)$) が $\mathbb{B}^{\pm}(p,q)$ (resp. $\mathbb{B}^0(p,q)$) を基底とする自由 $\mathbf{k}$-加群であるような B の線形部分圏を表すことにする．upward, downward, level Brauer diagram の定義と，Brauer diagram の分解 (1) から，(B, i, B^+, B^-) が $\mathbb{S}$ 上の stratified linear category であることが確かめられる．

Brauer category に対し，pairing

$$b'_p : \bigoplus_{p \preceq q} B^-(q,p) \otimes_{\mathbb{S}(q,q)} B^+(p,q) \to \mathbb{S}(p,p)$$

を，$f \in \mathbb{B}^{-,m}(q,p), g \in \mathbb{B}^{+,m}(p,q)$ に対し，

$$b'(f \otimes g) = \delta_{\overline{f},g} 1_p$$

で定義し，copairing d' を

$$d'(1_p) = \sum_{r \preceq p} \sum_{f \in \mathbb{B}^{+,m}(r,p)} f \otimes \overline{f} \in \bigoplus_{r \preceq p} B^+(r,p) \otimes_{\mathbb{S}(r,r)} B^-(p,r)$$

で定めると，(B, i, B^+, B^-, b', d') は $\mathbb{S}$ 上の quasi-cellular category となる．

6 Quasi-cellular category に対する主定理

ここでは，quasi-cellular category に対する主結果を述べる．

$\mathcal{A}$ 上の quasi-cellular category $(\mathcal{C}, b', d')$ に対し，線形圏 $\mathcal{C}_{b'}$ が以下のように定義される．$\mathcal{C}_{b'}$ の対象と射集合は，$\mathcal{C}$ のものと同じであるが，射の合成

$$\mathcal{C}_{b'}(y,z) \otimes \mathcal{C}_{b'}(x,y) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}_{b'}(x,z)$$

は，$f \otimes g \in \mathcal{C}^+(v,z) \otimes_{\mathcal{A}(v,v)} \mathcal{C}^-(y,v) \subset \mathcal{C}(y,z), f' \otimes g' \in \mathcal{C}^+(u,y) \otimes_{\mathcal{A}(u,u)} \mathcal{C}^-(x,u) \subset \mathcal{C}(x,y)$ に対し，

$$(f \otimes g) \circ (f' \otimes g') = f \otimes b'(g \otimes f') g'$$

で定義される．前節で与えた Brauer category の quasi-cellular 構造 (B, b', d') に付随する線形圏 $B_{b'}$ は，matrix Brauer category mB に他ならない．

$\mathcal{A}$ 上の quasi-cellular category $(\mathcal{C}, b', d')$ に対し，線形関手

$$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{b'}$$

を，対象上では恒等写像，射 $f^+ \otimes f^- \in \mathcal{C}^+(z,y) \otimes_{\mathcal{A}(z,z)} \mathcal{C}^-(x,z) \subset \mathcal{C}(x,y)$ に対して，

$$L(f^+ \otimes f^-) = \sum_{w \leq y} (d')^+_{y,w} \otimes ((\varepsilon^+ \otimes \mathcal{C}^-)\tau((d')^-_{y,w} \otimes f^+)) f^- \in \mathcal{C}_{b'}(x,y)$$

で定める．ただし，$\tau : \mathcal{C}^- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}^+ \xrightarrow{\circ} \mathcal{C} \xrightarrow[\cong]{\circ^{-1}} \mathcal{C}^+ \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}^-$ とする．定理 4.1 の線形関手 $L : B \to mB$ とは，この関手のことである．

$\mathcal{A}$ 上の quasi-cellular category $(\mathcal{C}, b', d')$ が *perfect* であるとは，pairing

$$b = (\varepsilon^+ \otimes \varepsilon^-)\tau : \bigoplus_{y \geq x} \mathcal{C}^-(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^+(x,y) \to \mathcal{A}(x,x)$$

と対応する copairing d が存在する（すなわち，b と d が (2) と (3) を満たす）ことをいう．Brauer category に対しては，perfect であることと，パラメータ δ が非特異であることは同値である．(δ の特異性については次節で述べる．)

Perfect quasi-cellular category に対して, 定理 4.1 と 4.2 は以下のように一般化される．

定理 6.1. $\mathcal{A}$ 上の *quasi-cellular category* $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C}$ が *perfect* ならば，$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{b'}$ は線形圏の同型である．

定理 6.2. $\mathcal{A}$ 上の *quasi-cellular category* $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C}$ が *perfect* ならば，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ と森田同値であり，$\mathcal{C}$ の中心は $\mathcal{A}$ の中心と $\mathbf{k}$-代数として同型である．

7 パラメータ δ の特異性

最後に，Brauer category のパラメータ δ の特異性について述べる．

x をパラメータとする $\mathbb{Z}[x]$ 上の Brauer category $B = B^{\mathbb{Z}[x],x}$ を考える．$p \preceq q$ に対し，$n = |\mathbb{B}^{+,m}(p,q)|$ とおき，行列 $A_{p,q} \in M_n(\mathbb{Z}[x][\mathfrak{S}_p])$ を，

$$A_{p,q} = (a_{f,g})_{f,g \in \mathbb{B}^{+,m}(p,q)}, \quad a_{f,g} = b(\bar{f} \otimes g)$$

で定める．

左正則表現 $L : \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_p] \hookrightarrow M_{p!}(\mathbb{Z})$ が誘導する単射環準同型 $\iota : M_n(\mathbb{Z}[x][\mathfrak{S}_p]) \hookrightarrow M_{np!}(\mathbb{Z}[x])$ を用いて，多項式 $f_{p,q}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を，

$$f_{p,q}(x) = \det \iota(A_{p,q}) \in \mathbb{Z}[x]$$

で定義する．

単位的可換環 $\mathbf{k}$ と，パラメータ $\delta \in \mathbf{k}$，$r \geq 0$ に対して，δ が $\mathrm{rank} \preceq r$ で**非特異**であるとは，任意の $p \preceq q \preceq r$ を満たす (p,q) に対し，$f_{p,q}(\delta) \in \mathbf{k}$ が可逆であることを言う．(ここで定義されたパラメータ δ の特異性は，König–Xi [8] で定義された特異性と同値なものである．)

Rui–Si [11] の結果から，Brauer category のパラメータ δ が非特異であるための必要十分条件は，以下の通りである．$r \geq 0$ に対し，$X_r \subset \mathbb{Z}$ を

$$X_r = X_r^0 \cup \{i, -2i \mid 1 \leq i \leq r-2, i \in \mathbb{Z}\} \cup \{j \in \mathbb{Z} \mid 4 - r \leq j \leq -1\}$$

$$X_r^0 = \begin{cases} \{0\} & (r \neq 0,1,3,5) \\ \emptyset & (r = 0,1,3,5) \end{cases}$$

で定める．

命題 7.1. *Brauer category* $B^{\mathbf{k},\delta}$ に対して，δ が *rank* $\preceq r$ で非特異であることと，任意の $m \in X_r$ に対して，$\delta - i(m) \in \mathbf{k}$ が可逆であることは同値である．(ただし，$i : \mathbb{Z} \to \mathbf{k}$ は唯一存在する環準同型である．)

参考文献

[1] Richard Brauer. On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. *Ann. of Math. (2)*, 38(4):857–872, 1937.

[2] William P. Brown. The semisimplicity of ω_f^n. *Ann. of Math. (2)*, 63:324–335, 1956.

[3] Wm. P. Brown. An algebra related to the orthogonal group. *Michigan Math. J.*, 3:1–22, 1955.

[4] P. Deligne. La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t, lorsque t n'est pas un entier naturel. In *Algebraic groups and homogeneous spaces*, volume 19 of *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, pages 209–273. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.

[5] Pierre Deligne. La série exceptionnelle de groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(4):321–326, 1996.

[6] William F. Doran, IV, David B. Wales, and Philip J. Hanlon. On the semisimplicity of the Brauer centralizer algebras. *J. Algebra*, 211(2):647–685, 1999.

[7] Phil Hanlon and David Wales. Computing the discriminants of Brauer's centralizer algebras. *Math. Comp.*, 54(190):771–796, 1990.

[8] Steffen König and Changchang Xi. A characteristic free approach to Brauer algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1489–1505, 2001.

[9] G. I. Lehrer and R. B. Zhang. The Brauer category and invariant theory. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(9):2311–2351, 2015.

[10] Hebing Rui. A criterion on the semisimple Brauer algebras. *J. Combin. Theory Ser. A*, 111(1):78–88, 2005.

[11] Hebing Rui and Mei Si. A criterion on the semisimple Brauer algebras. II. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113(6):1199–1203, 2006.

[12] Hans Wenzl. On the structure of Brauer's centralizer algebras. *Ann. of Math. (2)*, 128(1):173–193, 1988.

Alexander polynomials of knots and links, arithmetic progressions and persistently Salem polynomials

平澤 美可三　(名古屋工業大学)[*1]
村杉 邦男　　(トロント大学)

1. はじめに

1.1. 結び目，絡み目の Alexander 多項式

1928 年に J. Alexander が絡み目不変量として Alexander 多項式を導入して以来，J. Conway による漸化式を用いた再定式化や，その後の再解釈・一般化を通じて，重要な研究が進展してきた．それでもなお，与えられた Alexander 多項式がある交代結び目の Alexander 多項式として実現されるかという基本問題をはじめ，重要な問題が未解決のまま残されている．古典的には Alexander 多項式の係数に関する研究が主流であったが，コンピュータの発展に伴い，根の分布に関しても実験が容易になり，新たな研究が展開されている．転換点となったのは，2002 年の交代結び目に関する Hoste 予想であった [13, 11, 3]．著者らは Hoste 予想の提唱以降，根の配置に関する研究を継続している [5, 6, 7, 8, 9, 10]．根の配置に関して，特に重要なのは次の 3 種類の安定性である．**c-stable**（根がすべて単位円周上にある），**r-stable**（根がすべて実根），**bi-stable**（根がすべて実軸上か単位円周上にある）．

本講演では，bi-stable な多項式のうち，絶対値が 1 でない実根をちょうど 2 つもつものを **Salem 型** と定義し，その組織的な構成法について述べる．その等差数列部分の延長によって得られる多項式列に対し，Salem 型であることを統一的に証明する手法を導入する．

1.2. Salem 型多項式

Salem 多項式とは，モニックな既約整数多項式であって，重複度も込めて実根がちょうど 2 つ（$\alpha > 1$ と α^{-1}）であり，残りの根がすべて単位円周上にあるものをいう．Salem 多項式は相反的（reciprocal）な多項式になる．McMullen によって展開された Salem 多項式を通して K3 曲面の自己同型を研究する視点，およびその超 Kähler 多様体の自己双有理変換への発展については，論説 [14] に詳しい．

本講演では多項式の既約性を仮定せず，さらに変数 t を $-t$ に置き換えることも許して，**Salem 型多項式** として定式化する．Salem 型多項式からは，必要に応じて t を $-t$ に置き換え，円分多項式因子を取り除けば，Salem 多項式が得られる．Salem 型多項式 $f(t)$ に対して，$\max\{|\alpha|, |\alpha^{-1}|\}$ は $f(t)$ のマーラー測度と呼ばれる．特にプレツェル結び目 $P(-2,3,7)$ の Alexander 多項式 $t^{10}-t^9+t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t+1$ のマーラー測度（1.17628…）はレーマー数と呼ばれる．レーマー予想は，「これが Salem 多項式のマーラー測度の最小値であるか」を問うものである．一方，レーマー問題を否定的に解決するためには，測度が 1 に収束する Salem 型多項式の列を構成すればよい．この問題については，本稿の最後で再び取り上げる．

[*1] 466-8555 名古屋市 昭和区 御器所町 名古屋工業大学
e-mail: hirasawa.mikami@nitech.ac.jp
2026 年 第 73 回トポロジーシンポジウム講演集

2. 動機となった具体例

結び目の場合には Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ が，絡み目の場合には Alexander 多項式を $(t-1)^{\mu-1}$ で割って得られる簡約 Alexander 多項式が Salem 型多項式になるとき，その結び目または絡み目を **Salem 型** と呼ぶ．その際 t を $-t$ に変えたものが便利であることが多く，根の安定性を考察する際には，必要に応じてこの置き換えを行う．

Salem 型の結び目の探索にあたり，まず 2 橋絡み目に注目した．2 橋絡み目 L は，平坦アニュラスに $2a_k$ 個のフルツイストを入れたものを一列にプラミングした形の最小種数ザイフェルト曲面をもち，それを $[2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n]$ で表す．n が偶数のときは結び目，奇数のときは 2 成分絡み目になる．また Alexander 多項式がモニックになることが L がファイバー結び目・絡み目になることと同値であり，その条件はすべての a_k が $|a_k| = 1$ をみたすことである．L は有理数 $\frac{q}{p}$ で表されるが，これは $\frac{q}{p}$ の連分数展開の各項が $(-1)^{k+1}2a_k,\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ であることに対応する．

2 橋結び目の場合，$[\underbrace{2, \ldots, 2}_{a\text{ 個}}, -2, \underbrace{2, \ldots, 2}_{b\text{ 個}}]$ という形のものは Salem 型になることが符号数の理論からわかる [12]．これを $[2^a, -2, 2^b]$ と略す．この系列以外には，次の 5 つの散発例しか見つかっていない．

$$[(2)^5, (-2)^3], [(2)^9, (-2)^5], [(2)^6, -2, 2, -2, -2], [(2)^4, (-2)^3, 2], [(2)^6, (-2)^5, (2)^3]$$

それとは対照的に，2 橋絡み目については Salem 型になる多くの散発例と 6 つの系列を発見した．特に，次の 2 つの系列が本講演における Salem 型多項式の構成につながった．

$$K_1(m) = [(2)^m, -2, 2, (-2)^{m+1}],\ K_2(m) = [2, -2, (2)^m, (-2)^{m+1}], m \geq 1$$

例 1 および例 2 が示すように，$K_1(m)$ と $K_2(m)$ では，$\frac{\Delta(-t)}{t+1}$ の係数列は回文的となり，その一部に等差数列 (arithmetic progression) が現れている．

3. 第 1 種および第 2 種の AP 多項式（Arithmetic Progression polynomials）

定義 3.1. モニックな相反整数多項式 $f(t)$ が，次の係数列をもつとする．

$$\{1, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_2, a_1, 1\}.$$

係数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$a_1 = 1 + p, \qquad a_j = a_{j-1} + p \quad (2 \leq j \leq n-1), \qquad a_n = a_{n-1} + p - k$$

をみたすとき，$f(t)$ を $\lambda_n(\{p\}, k)$ と表し，**第 1 種 AP 多項式**と呼ぶ．ただし，$n \geq 2$ とする．

係数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$a_1 = 1 + p, \qquad a_j = a_{j-1} + q \quad (2 \leq j \leq n-1), \qquad a_n = a_{n-1} + q - k$$

をみたすとき，$f(t)$ を $\lambda_n(\{p, q\}, k)$ と書き，**第 2 種 AP 多項式**と呼ぶ．ただし，$n \geq 3$ とする．

第 2 種 AP 多項式 $\lambda_n(\{p, q\}, k)$ において $q = p$ のとき，これは第 1 種 AP 多項式 $\lambda_n(\{p\}, k)$ に一致する．第 5 節では一般の AP 多項式を定義する．

例 1. $K_1(5) = [(2)^5, -2, 2, (-2)^6]$ は Salem 型で，$f(t) := \dfrac{\Delta_{K_1(5)}(-t)}{t+1}$ の係数列は

$$\{1, 6, 11, 16, 21, 26, (31-2), 26, 21, 16, 11, 6, 1\}$$

従って $f(t) = \lambda_6(\{5\}, 2)$ である．

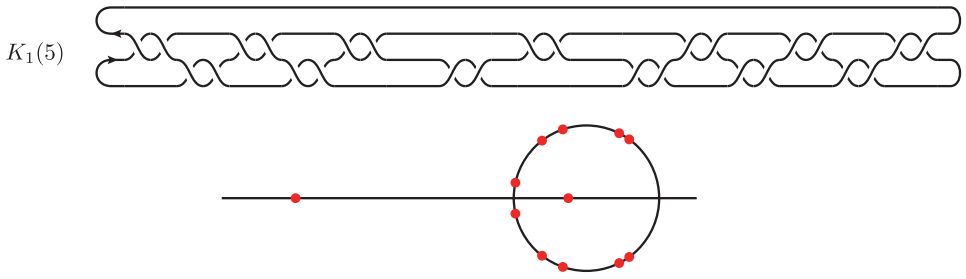


図 1: 2 橋絡み目 $K_1(5)$ と $\frac{\Delta_{K_1(5)}(-t)}{t+1} = \lambda_6(\{5\}, 2)$ の根

例 2. $K_2(4) = [2, -2, (2)^4, (-2)^5]$ は Salem 型で，$f(t) := \dfrac{\Delta_{K_2(4)}(-t)}{t+1}$ の係数列は

$$\{1, 6, 13, 20, 27, (34-4), 27, 20, 13, 6, 1\}$$

従って $f(t) = \lambda_5(\{5, 7\}, 4)$ である．

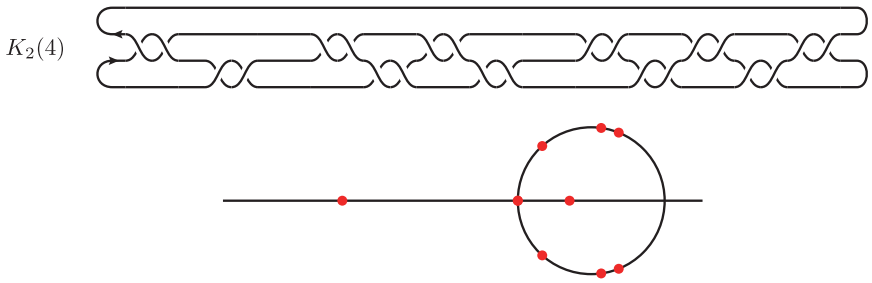


図 2: 2 橋絡み目 $K_2(4)$ と $\frac{\Delta_{K_2(4)}(-t)}{t+1} = \lambda_5(\{5, 7\}, 4)$ の根

計算機実験により，AP 多項式はしばしば次数 $2n$ を上げても Salem 型であることが保たれ，また中央の係数をずらすパラメータ k についても，Salem 型になる範囲が n に依存せず存在することが見出された．この持続性を次のように定式化する．

定義 3.2. *AP* 多項式 $\lambda_n(\{p, q\}, k)$ が**持続的 Salem 型** (*persistently Salem-type*) であるとは，ある整数 n_0 以上のすべての n について *Salem* 型になることをいう．このような n_0 の最小値を n-閾値という．

次節では，第 1 種および第 2 種の AP 多項式が持続的 Salem 型になるための必要十分条件を与える．上の例 1,2 の $\lambda_n(\{5\}, 2), \lambda_n(\{5, 7\}, 4)$ は $n \geq 4$ ならば Salem 型になる．第 5 節では一般の AP 多項式を定式化し，持続的 Salem 型になる十分条件を与える．

4. 第2種 AP多項式が持続的Salem型になる必要十分条件

定理 4.1. *AP*多項式 $\lambda_n(\{p,q\},k)$ を考える．

(I) (p,q) が $(-1,0),\ (0,0),\ (1,0),\ (2,2),\ (3,4)$ の5つの例外的なパターンのいずれかのとき，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ は任意の k に対して持続的*Salem*型にならない．

(II) (p,q) が *(I)* の5つの例外パターンに属さないとする．このとき，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ が持続的*Salem*型になるための必要十分条件は，次の2条件をみたすことである．

(a) $q(q-2p+2)\le 0$,

(b) $\min\{q-p+1,\ p-1\}\le k\le \max\{q-p+1,\ p-1\}$.

さらに，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ が持続的*Salem*型であるとき，その n-閾値は $(p,q)=(2,1)$ または $(0,-1)$ の場合には 5，それ以外の場合には 4 である．

一方，固定した (p,q,k) に対して $\lambda_n(\{p,q\},k)$ が持続的 *Salem*型でないならば，ある自然数 n_0 が存在して，すべての $n\ge n_0$ に対し，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ は*Salem*型にならない．

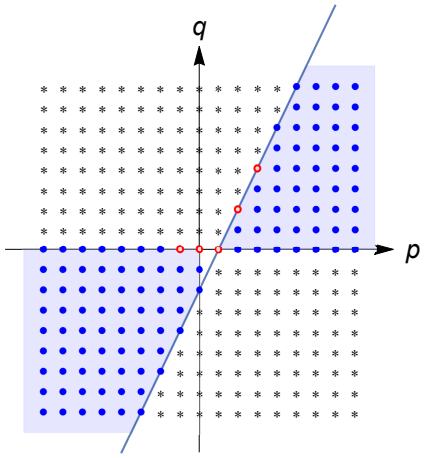


図 3: 定理を表す (p,q) の図．● にあたる (p,q) において持続的Salem型になる．

系 4.2. 特に $p=q$ とする．このとき，$\lambda_n(\{p\},k)$ が持続的*Salem*型になるための必要十分条件は，次の条件が成り立つことである．

$$p\le -1 \quad \text{または} \quad p\ge 3$$

$$\min\{1,p-1\}\le k\le \max\{1,p-1\}$$

この場合の n-閾値は 4 である．

例 3. $\lambda_n(\{-1,0\},k)$ は持続的サーレム型ではない．このケースについては下図の様に根の配置が対称的になる．

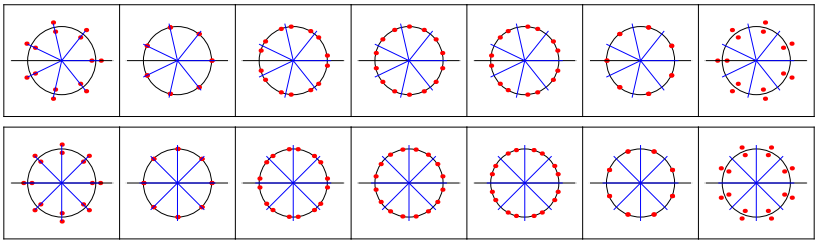


図 4: $\lambda_n(\{-1,0\},k)$, $k=-3,\ldots,3$, $n=7,8$ の根

5. 一般の AP 多項式

第 2 種 AP 多項式 $\lambda_n(\{p,q\},k)$ は，係数列において最初の階差 p のみが例外であり，それ以降は公差 q の等差数列が中央の係数まで続いた．例外部分が複数項にわたり，それ以降が等差数列になるものを一般の AP 多項式と呼ぶ．

定義 5.1. *AP* 多項式 $\lambda_n(\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},k)$ とは，次数 $2n$ $(>2m)$ の相反的な整数係数多項式で，係数が次をみたすものをいう．

$$\begin{aligned} a_0 =& 1 \\ a_j =& a_{j-1}+p_j, (1\le j\le m-1) \\ a_j =& a_{j-1}+p_m, (m\le j\le n-1) \\ a_n =& a_{n-1}+p_m-k \end{aligned}$$

$m=1, m=2$ が，第 1 種および第 2 種 AP 多項式に対応する．AP 多項式が**持続的 Salem 型**であるとは，ある n_0 以上のすべての n について Salem 型になることをいう．

例 4. $\lambda_4(\{3,2,1\},k)=1+4t+6t^2+7t^3+(8-k)t^4+7t^5+6t^6+4t^7+t^8$
$\lambda_5(\{1,2,3\},k)=1+2t+4t^2+7t^3+10t^4+(13-k)t^5+10t^6+7t^7+4t^8+2t^9+t^{10}$
$\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ の最後の p_m だけが繰り返されることに注意．p_m を公差とする反復部分が確実に現れるように，定義において $n>m$ を仮定している．

定理 5.2. $\lambda=\lambda_n(\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},k)$ とし，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_{m-1}>p_m>0$ とする．

(1) $p_m\ge 3$ のとき，$1\le k\le p_m-1$ をみたす k に対して，λ は持続的 *Salem* 型である．

(2-i) $p_1\ne p_2$ とする．このとき $1-p_1+p_2\le k\le p_m-1$ をみたす k に対して λ は持続的 *Salem* 型である．

(2-ii) さらに，$2(1-p_1+p_2)\le p_m$ であれば，$1-p_1+p_2\le k\le -(1-p_1+p_2)+p_m$ をみたす k に対して λ は持続的 *Salem* 型である．

定理 5.3. $\lambda=\lambda_n(\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},k)$ について，$p_1<p_2\ge p_3\ge\cdots\ge p_{m-1}>p_m$ とする．$2p_1+p_m>2p_2+2$ ならば，$1+p_2-p_1\le k\le -(1+p_2-p_1)+p_m$ をみたす k に対して λ は持続的 *Salem* 型である．

上記の 2 つの定理は，AP 多項式が持続的 Salem 型になる十分条件を与えているが，その条件をみたさなくても持続的 Salem 型になる例が見つかっている．

6. 証明の技法

次数 $2n$ の相反的な多項式 $f(t)$ に対して，$\dfrac{f(t)}{t^n}$ を $x = t + \frac{1}{t}$ の多項式として表したものを $m(x)$ とする．$f(t)$ が bi-stable になる必要十分条件は $m(x)$ が r-stable になることである．開区間 $(-2, 2)$ にある $m(x)$ の各根は単位円周上にある $f(t)$ の 2 つの根に対応し，区間 $[-2, 2]$ の外にある $m(x)$ の各根は単位円周上にない $f(t)$ の 2 つの実根に対応する．また，$m(2) = 0$ と $f(1) = 0$ は同値であり，$m(-2) = 0$ と $f(-1) = 0$ も同値である．

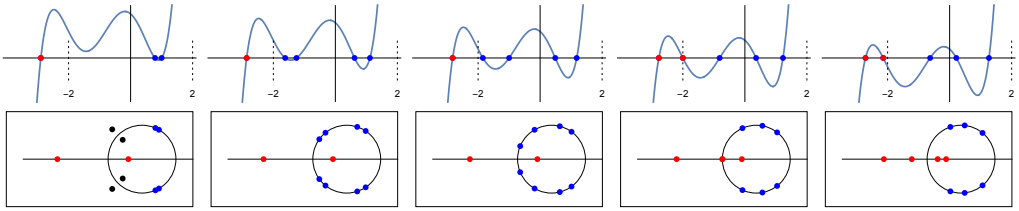


図 5: $m(x)$ の根と $f(t)$ の根の対応

AP 多項式は直接 $x = t + \frac{1}{t}$ の多項式に変換しても扱い難い．そこで，$t^n + \dfrac{1}{t^n}$ を $x = t + \dfrac{1}{t}$ の多項式として書き下したものを $y_n(x)$ と書く．$\dfrac{y_n(2x)}{2}$ は第 1 種チェビシェフ多項式になる（$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表したもの）．

中間項を除去するため，$(t-1)^2$ をかけてから変換することで，AP 多項式を $y_n(x)$ の一次結合 $F_n(x)$ と一次式 $-G_k(x)$ の和にできる．それにより，Salem 型であるか否かが $[-2, 2]$ とその外側における $y = F_n(x)$ と直線 $y = G_k(x)$ の交点の個数によって解析できる．AP 多項式 $\lambda_n(\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, k)$ においては，$F_n(x)$ と $G_k(x)$ は次の形になる．

$$\begin{cases} F_n(x) = y_{n+1} + (p_1 - 1)y_n + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{m-1} (p_{\ell+1} - p_\ell) y_{n-\ell}, \\ G_k(x) = kx + 2(p_m - k) \end{cases}$$

交点の解析は困難であるため，$F_n(x)$ を様々な方法で折れ線近似することにより，持続的 Salem 型になることを証明する．逆を考えるにあたっては，Salem 型であっても，この折れ線近似法では証明できない場合がある．持続的 Salem 型にならないことを証明するためには，$y_n(x)$ の一次結合がつくる曲線族のエンベロープを考える．その解析には，Stankov によるチェビシェフ多項式の一次結合に対するエンベロープの手法を用いる．例えば，y_{n+1}, y_n, y_{n-1} の一次結合 $ay_{n+1} + by_n + cy_{n-1}$ に対して $(-2, 2)$ におけるエンベロープは次式で与えられる．

$$y^2 = 4\left((a-c)^2 + b^2 + b(a+c)x + acx^2\right)$$

エンベロープと上記の直線 $y = G_k(x)$ が $(-2, 2)$ で交わるときには，n を十分大きくすると $(-2, 2)$ における $F_n(x)$ と $G_k(x)$ の交点数が不足することを用いて，持続的 Salem 型にならないことが証明できる．この解析は第 2 種 AP 多項式では有効であったが一般の AP 多項式についてはかなり複雑になる．

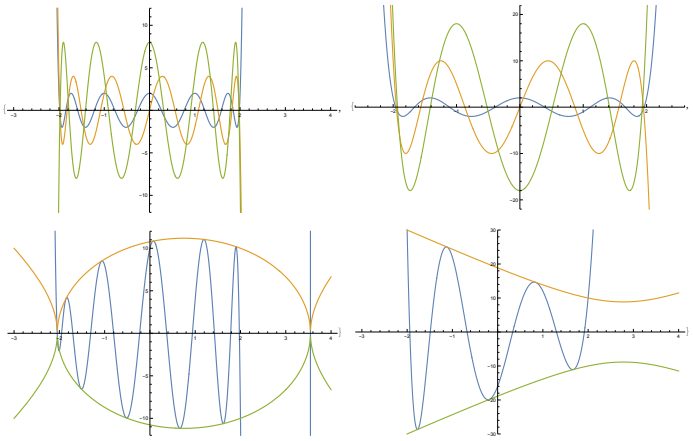


図 6: y_n の一次結合と，そのエンベロープ

7. divide 結び目が Salem 型になる例とならない例

divide 絡み目とは，N. A'Campo [1] によって導入された概念で，複素平面曲線の特異点絡み目を含む，ファイバー絡み目のクラスをなす．divide とは円板に一般の位置ではめ込まれたアークとループの集合である．divide が 1 本のアークからなるとき，その divide は結び目を表す．与えられた divide からそれが表す絡み目を，ファイバー曲面ごと表示するアルゴリズム [2] が知られており，下図では二重点が 2 点のアークが表す結び目 10_{145} の構造と，divide に沿ったファイバー曲面を表している．

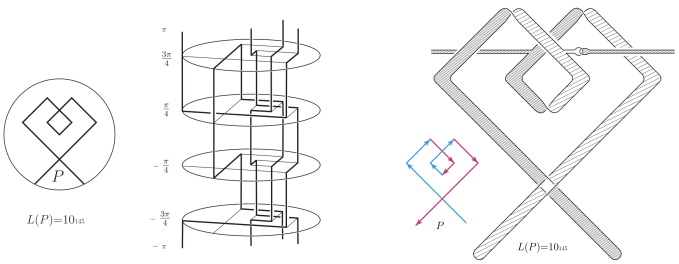


図 7: divide 結び目 10_{145} とそのファイバー曲面

7.1. 内枝 divide

図 8(左) で表される divide のクラスを**内枝 divide** D_d と呼ぶ．d は並んだキンクの個数である．それが表す結び目 K_d は $K_0 = 3_1$, $K_1 = 10_{145}$, $K_2 = 12n_{276}$ になる．$K_d, d \geq 2$ は Salem 型になる．特に $d \geq 4$ において $\Delta_{K_d}(-t) = \lambda_d(\{-2, -6, -8\}, -4)$ となり，これは持続的 Salem 型になる．ただし，その証明は定理 5.2, 5.3 の証明より複雑になる．

7.2. フィラメント型 divide

自然数 d に対し，図 8(右) のフィラメント型の divide の表す結び目 K_d は次の形の Alexander 多項式を持つ．この型が Salem 型になることは AP 多項式は使わず証明する．

$$\Delta_{K_d}(t) = \left(1 - t + t^2\right)^{d-1} \left(1 + (3d-2)t + (-6d+3)t^2 + (3d-2)t^3 + t^4\right)$$

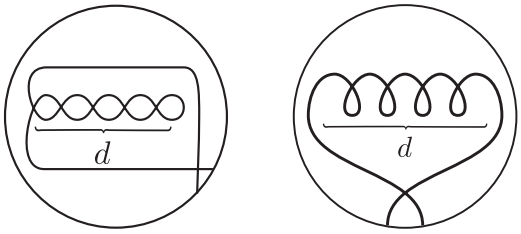


図 8: 左：内枝 divide D_d，右：フィラメント型 divide

7.3. 渦巻き型 divide

次に示す渦巻き型 divide は Salem 型結び目を与えない．Alexander 多項式は次のように，鋭い単峰型になり，根も特徴的な配置になる．ファイバー曲面は [4] で与えている torti-rational 結び目（2 橋絡み目の一方の成分を他方の成分で捻って得られる結び目）のファイバー曲面になっている．

$$\{1,-1,1\},\{1,1,-3,1,1\},\{1,1,1,-5,1,1,1\},\{1,1,1,1,-7,1,1,1,1\}$$

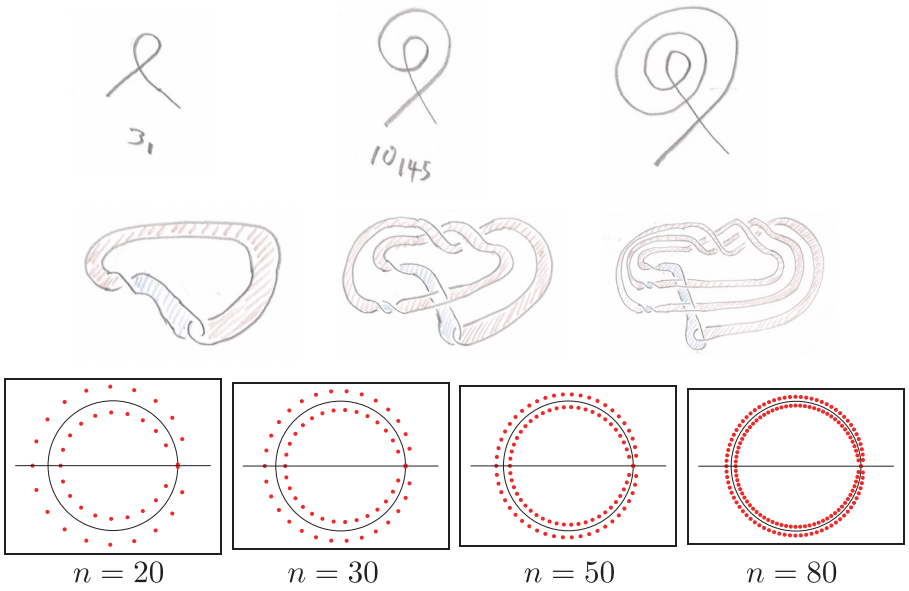


図 9: 渦巻き型 divide は Salem 型結び目を与えない

8. 今後の課題と展望

AP 多項式を導入したことで，Salem 型多項式を次数方向に拡張した多項式列として研究できるようになった．次の課題は $n\to\infty$ にしたときの根の分布の漸近挙動である．

8.1. AP 多項式の根の分布の漸近挙動

第 2 種 AP 多項式 $f(t)=\lambda_n(\{p,q\},k)$ を考える．$H(z)=z^2+(p-1)z+(q-p)$ について，$H(z)$ の大きさが最大の根の 1 つを α とおく．計算機実験により次のような状況が観察されている．

(1) k を固定して n を大きくすると，$f(t)$ は α の小近傍にちょうど1つの根 $a \neq 0$ をもつ．また，$f(t)$ の根のうち

$$a,\ \overline{a},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{\overline{a}}$$

以外の根をすべて含む最小の原点中心の円環領域を

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{\rho} \leq |z| \leq \rho \right\}, \qquad \rho \geq 1,$$

とする．n が増大すると，ρ は減少する．

(2) 十分大きな n を固定すると，k の増大に伴って ρ も増大する．

この ρ を n, p, q, k の具体的な関数として書き下すことが課題である．

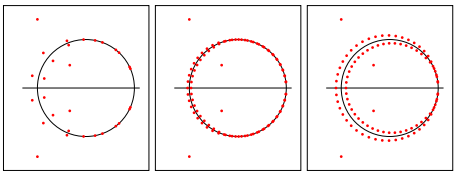


図 10: $\lambda_{15}(\{3,6\},6)$, $\lambda_{50}(\{3,6\},6)$, $\lambda_{50}(\{3,6\},80)$ の根

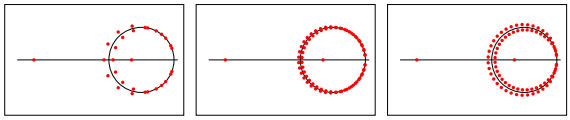


図 11: $\lambda_{15}(\{4,3\},7)$, $\lambda_{40}(\{4,3\},7)$, $\lambda_{40}(\{4,3\},50)$ の根

8.2. AP 多項式の持続的 Salem 型による Lehmer 問題への挑戦

1 より大きい既知のマーラー測度の最小値 (1.17628...) は，プレツェル結び目 $P(-2,3,7)$ の Alexander 多項式 $\Delta_{K_{P(-2,3,7)}}(t)$ によって実現されている．

$$\Delta_{K_{P(-2,3,7)}}(-t) = 1 + t - t^3 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 + t^9 + t^{10}$$

であり，これは AP 多項式として，$\lambda_{n=5}(\{0,-1,-1,0\},0)$ であるので，これを次数に関して拡張し AP 多項式 $\lambda_n(\{0,-1,-1,0\},0)$ に拡張することを考える．それに対応する結び目として，$P(-2,3,2n-3), n \geq 5$ が見つかった．

AP 多項式 $\lambda_n = \lambda_n(\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, k)$ が持続的 Salem 型であり，

$$H(x) = x^m + (p_1 - 1)x^{m-1} + \sum_{\ell=1}^{m-1} (p_{\ell+1} - p_\ell) x^{m-1-\ell}$$

が実根をもつとする．λ_n のマーラー測度は $n \to \infty$ のとき，$H(x)$ のある実根に収束すると考えている．レーマー数より小さいマーラー測度をもつ多項式の探索に加えて，マーラー測度が 1 に収束する Salem 型多項式の列を構成することも重要な課題である．

参考文献

[1] Norbert A'Campo, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 88 (1998), 151–169.

[2] Mikami Hirasawa, *Visualization of A'Campo's fibered links and unknotting operation*, Topology Appl. 121 (2002), 287–304.

[3] Mikami Hirasawa, Katsumi Ishikawa and Masaaki Suzuki, *Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros*, Topology Appl. 253 (2019), 48–56.

[4] Mikami Hirasawa and Kunio Murasugi, *Fibred torti-rational knots*, J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), 1291–1353.

[5] Mikami Hirasawa and Kunio Murasugi, *Various stabilities of the Alexander polynomials of knots and links*, arXiv:1307.1578 (2013), 92 pp.

[6] ———, 絡み目のアレクサンダー多項式の零点の配置について，第 61 回トポロジーシンポジウム講演集（2014 年 7 月），27–36.

[7] ———, *Stable Alexander polynomials of arborescent links*, J. Knot Theory Ramifications 28 (2019), 1940017, 21 pp.

[8] ———, *Alexander polynomials of knots and links and detection of sequential Salem-type polynomials*, draft.

[9] ———, *A uniform construction of Salem-type polynomials from arithmetic progressions*, draft.

[10] ———, *Some basic classes of divide knots and the distribution of zeros of their Alexander polynomials*, in preparation.

[11] Katsumi Ishikawa, *Hoste's conjecture for the 2-bridge knots*, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), 2245–2254.

[12] Livio Liechti, *Signature, positive Hopf plumbing and the Coxeter transformation*, Osaka J. Math. 53 (2016), 251–266.

[13] Lilya Lyubich and Kunio Murasugi, *On zeros of the Alexander polynomial of an alternating knot*, Topology Appl. 159 (2012), 290–303.

[14] 小木曽啓示，Salem 多項式と超 Kähler 多様体の双有理型変換群,『数学』59 (2007), 1–23.

[15] Dragan Stankov, *On linear combinations of Chebyshev polynomials*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 97 (111) (2015), 57–67.