マトロイドにおける多項式の圏化について

山形　颯（福岡大学）*

概　　要

Khovanov は，Jones 多項式を次数付き Euler 標数として復元するホモロジー理論を構成した．これを契機として，同様の構成によるグラフや超平面配置など様々な組合せ論的対象に対する多項式の圏化が研究されている．本稿では，マトロイドの特性多項式および符号つき Tutte 多項式の圏化について概説する．

1　マトロイドと特性多項式

この節ではマトロイドに関する基本的な定義と例，および特性多項式について述べる．主な参考文献としては [2, 7, 8, 11] を参照されたい [*1]．

1.1　マトロイドの定義と例

マトロイドを定義する前に，例を述べる．

例 1.1. $\mathbb{R}$ 上の行列

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える．$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ を列番号の集合とする．$\mathcal{I}$ を E の部分集合 I の族であって，I に添字付けられた列ベクトルが $\mathbb{R}$ 上で線形独立なもの全体とする．この時，$\mathcal{I}$ は，$E \setminus \{7\}$ の 3 元以下の部分集合のうち，$\{1, 2, 4\}$，$\{2, 3, 5\}$，$\{2, 3, 6\}$，および $\{5, 6\}$ を含むものを除いたもの全体からなる．

このような例を念頭に，より一般の集合に対し線型独立性が定義できるよう抽象化された概念がマトロイドで，1935 年に Nakasawa[6, 10], Whitney [12] らによって独立に導入された．

定義 1.2. マトロイド M とは集合 E と以下の条件 (I1)-(I3) を満たす E の部分集合族 $\mathcal{I}$ の組 $(E, \mathcal{I})$ のことをいう．

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$;

(I2) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$;

(I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies$ ある $e \in I_2 \setminus I_1$ が存在して $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

E はマトロイド M の**台集合**，$\mathcal{I}$ の元はマトロイド M の**独立集合**と呼ばれ，$I \notin \mathcal{I}$ ならば I は**従属集合**と呼ばれる．

マトロイドには多くの特徴づけが知られており，それらを定義として採用されることもしばしばある．次のものはそのうちの一つであり，ランク関数を用いた特徴づけである．

---

* e-mail: so.yamagata@fukuoka-u.ac.jp

キーワード：マトロイド，グラフ，超平面配置，彩色多項式，特性多項式，圏化

[*1] 本稿では扱わないが，有向マトロイド [1] というものがあり，こちらは超平面配置における Salvetti complex など，よりトポロジーに関連した対象として知られる．

命題 1.3. E を集合とする．また関数 $\mathrm{rank}_M : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が次の条件を満たすとする．

1. $X \subset E$ に対し，$0 \leq \mathrm{rank}_M(X) \leq |X|$;
2. $X_1 \subset X_2 \subset E \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}_M(X_1) \leq \mathrm{rank}_M(X_2)$;
3. $X_1, X_2 \subset E \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}_M(X_1) + \mathrm{rank}_M(X_2) \geq \mathrm{rank}_M(X_1 \cap X_2) + \mathrm{rank}_M(X_1 \cup X_2)$.

ここで $\mathcal{I} = \{X \subset E \mid \mathrm{rank}_M(X) = |X|\}$ は独立集合全体の集合であり，特にマトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ が得られる．rank_M をマトロイド M の**ランク関数**という．

ここでマトロイドの例をいくつか挙げる．

例 1.4 (一様マトロイド)**.** 台集合として $E = \{1, \ldots, n\}$ とし，$S \subset E$ に対し，ランク関数を $\mathrm{rank}_{U_{k,n}}(S) = \min\{k, |S|\}$ と定義する．この時ランク関数はマトロイドのランク関数の公理を満たすことが確かめられる．ここで得られるマトロイド $U_{k,n} = (E, \mathrm{rank}_{U_{k,n}})$ をランク k の一様マトロイドという．

例 1.5 (線形マトロイド)**.** $A = (v_1, \ldots, v_n)$ を体 $\mathbb{F}$ 上の $m \times n$ 行列とする．ここで v_i は A の第 i 列ベクトルである．台集合を $E = \{1, \ldots, n\}$ とし，$S \subset E$ に対し，ランク関数を $\mathrm{rank}_{M(A)}(S) = \mathrm{rank}(A_S)$ と定義する．ただし A_S は S に属する列ベクトルからなる部分行列を表す．この時ランク関数はマトロイドのランク関数の条件を満たすことが確かめられる．ここで得られるマトロイド $M(A) = (E, \mathrm{rank}_{M(A)})$ を線形マトロイドという．

例 1.6 (グラフィックマトロイド)**.** G を頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$（ループや多重辺を許す）をもつグラフとする．台集合を $E = E(G)$ とし，$S \subset E$ に対し，ランク関数を $\mathrm{rank}_{M(G)}(S) = |V(G)| - k([G; S])$ と定義する．ここで，$[G; S]$ は頂点集合として $V(G)$，辺集合として $S \subset E(G)$ をもつグラフ（スパニンググラフと呼ばれる）であり，$k([G; S])$ は $[G; S]$ の連結成分の数を表す．この時ランク関数はマトロイドのランク関数の公理を満たすことが確かめられる．ここで得られるマトロイド $M(G) = (E(G), \mathrm{rank}_{M(G)})$ をグラフィックマトロイドという．

マトロイド M が体 $\mathbb{F}$ 上の線形マトロイドで表される時，M を **$\mathbb{F}$-表現可能マトロイド**という．例えばグラフィックマトロイドは任意の体 $\mathbb{F}$ 上で表現可能であることが知られている．

定義 1.7. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとする．M の**双対マトロイド** M^* を，台集合を E とし，ランク関数を $\mathrm{rank}_{M^*}(X) = |X| + \mathrm{rank}_M(E \setminus X) - \mathrm{rank}_M(E)$ と定義することで得られるマトロイドとする．

定義 1.8.

- $S \subseteq E$ が**サーキット**であるとは，S が最小の従属集合であることをいう．
- $S \subseteq E$ が**コサイクル**であるとは，S が M^* のサーキットであることをいう．

1.2 マトロイドに付随する（特性）多項式

定義 1.9. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとし，$e, e_1, e_2 \in E$ とする．

- e が**ループ**であるとは，$\mathrm{rank}_M(e) = 0$ であることをいう．
- e が**コループ**であるとは，$\mathrm{rank}_M(E) - \mathrm{rank}_M(E \setminus e) = 1$ であることをいう．
- e_1 と e_2 が**平行**であるとは，$\mathrm{rank}_M(\{e_1, e_2\}) = 1$ であることをいう．

注意 1.10. グラフィックマトロイドにおけるループは辺としてのループ，コループはブリッジ（その辺を除くとグラフの連結成分が 1 つ増えるような辺），平行元は多重辺にそれぞれ対応する．

定義 1.11. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとし，$e \in E$ とする．

- M の e による**削除** $M \setminus e$ を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M \setminus e}(S) = \mathrm{rank}_M(S)$

により定義する．
- M の e による縮約 M/e を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M/e}(S) = \mathrm{rank}_M(S \cup e) - \mathrm{rank}_M(e)$ により定義する．

注意 1.12.
- A を行列，$M(A)$, $\mathcal{A}(A)$ をそれぞれ A から定まる線形マトロイド，中心的超平面配置とする．この時，$\chi_{M(A)}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}(A)}(\lambda)$ が成り立つ．
- グラフ G の彩色多項式を $P_G(\lambda)$，グラフ G から定まるグラフィックマトロイド $M(G)$ の特性多項式を $\chi(M(G);\lambda)$ とする．この時，$P_G(\lambda) = \lambda^{k(G)}\chi(M(G);\lambda)$ が成り立つ．ここで $k(G)$ はグラフ G の連結成分の数を表す．

定義 1.13. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとする．M の**特性多項式** $\chi(M;\lambda)$ は次のように定義される：

$$\chi(M;\lambda) = \sum_{S \in 2^E} (-1)^{|S|} \lambda^{\mathrm{rank}_M(E) - \mathrm{rank}_M(S)}.$$

命題 1.14. $M = (E, \mathrm{rank}_M)$ をマトロイドとし，$e \in E$ とする．この時，次が成り立つ：

$$\chi(M;\lambda) = \begin{cases} 0 & M \text{ がループを持つ時,} \\ (\lambda - 1)\chi(M \setminus e;\lambda) & e \text{ がコループの時,} \\ \chi(M \setminus e;\lambda) - \chi(M/e;\lambda) & e \text{ がループでもコループでもない時.} \end{cases}$$

2 マトロイドの特性ホモロジー

この節ではマトロイドに対し，次数付きオイラー標数として特性多項式を持つようなホモロジーを定義する．そのために，マトロイドに対し，特定の代数系を対応させることで構成を行う．はじめにマトロイドの（擬）表現を導入し，これを用いてチェイン複体を構成することでホモロジーを定義する．さらにいくつかの基本的な性質と，Dancso–Licata によって導入された超平面配置の特性ホモロジーとの関係を述べる．

2.1 マトロイドの擬表現

マトロイドの表現可能性については，Nelson [5] により次のような結果が示されている．

定理 2.1（[5]） n 元集合上の表現可能マトロイドの個数を $r(n)$ とすると，

$$r(n) \leq 2^{n^3/4}$$

が成り立つ．

一方，Knuth [4] は n 元集合上のマトロイド全体の個数 $m(n)$ について

$$\log\log m(n) \geq n - \frac{3}{2}\log n - O(1)$$

を示した．したがって，

$$\frac{r(n)}{m(n)} \longrightarrow 0$$

が成り立ち，ほとんどすべてのマトロイドは表現可能ではないことが分かる．このことから，表現可能マトロイドのみを対象とする構成では，一般のマトロイドを扱う理論として適用範囲が大きく制限されてしまう．そこで，[9] において，表現可能性を緩めた概念として擬表現を導入した．

定義 2.2. R を PID，N を有限生成 R-加群，$\mathcal{S}(N)$ を N の部分加群全体のなす集合とする．R-**擬表現**，あるいは単に**擬表現**とは，写像 $\rho : 2^E \to \mathcal{S}(N)$ であって，次の条件を満たすものである：

- $\mathrm{rank}_R\rho(S) = \mathrm{rank}_M(S)$, $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(E) = N$;
- $S_1 \subset S_2 \subset E$ ならば $\rho(S_1) \subset \rho(S_2)$;
- $\mathrm{rank}_M(S_1) = \mathrm{rank}_M(S_2)$ かつ $S_1 \subset S_2$ ならば $\rho(S_1) = \rho(S_2)$.

ここで注意として，任意のマトロイド M に対し，擬表現 ρ は存在する．R として体 $\mathbb{F}$ を取ると，擬表現はベクトル空間 N の部分空間の族とみなすことができる．特に，マトロイドが線形表現を持つ場合には，その表現ベクトルを法ベクトルとする中心的超平面配置を対応させることができる．以後，擬表現 ρ を持つマトロイドを $M_\rho := (E, \mathrm{rank}_M, \rho)$ と書くことにし，この節に限り擬表現つきのマトロイドを扱う．擬表現つきのマトロイドに対し，削除・縮約を以下のように定義する：

定義 2.3. $M = (E, \mathrm{rank}_M, \rho)$ を擬表現を持つマトロイドとする．

- M の e による削除 $(M \setminus e, \rho_{\setminus e})$ を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M\setminus e}(S) = \mathrm{rank}_M(S)$，$\rho_{\setminus e}(S) = \rho(S)$ により定義する．
- M の e による縮約 $(M/e, \rho_{/e})$ を，台集合 $E \setminus e$ 上のマトロイドで，$\mathrm{rank}_{M/e}(S) = \mathrm{rank}_M(S \cup e) - \mathrm{rank}_M(e)$，$\rho_{/e}(S) = \rho(S \cup e)/\rho(e)$ により定義する．

2.2 マトロイドの特性ホモロジーと基本的な性質

ここでマトロイドの特性ホモロジーを定義する．E の部分集合 S に対し擬表現 (M, ρ) をもつマトロイド対し

$$C^{S,j}(M, \rho) = \bigwedge^j N/\rho(S)$$

と定める．この時 (i, j)-次のチェイン群を $C^{i,j}(M, \rho) = \bigoplus_{S \in \binom{E}{i}} C^{S,j}(M, \rho)$ と定義する．ここで $\binom{E}{i} = \{S \subset E \mid |S| = i\}$ である．j について和をとることで i 次のチェイン群 $C^i(M, \rho) = \bigoplus_{j \geq 0} C^{i,j}(M, \rho)$ が定義される．

次に境界作用素を定義する．$S \subset E$ かつ $e \notin S$ のとき，加群準同型 $N/\rho(S) \to N/\rho(S \cup e)$ によって誘導される準同型 $d^{S,e}_{(M,\rho)} : \bigwedge^j N/\rho(S) \to \bigwedge^j N/\rho(S \cup e)$ を考える．(i, j) 次の境界作用素を

$$d^{i,j}_{(M,\rho)} = \bigoplus_{\substack{S \in \binom{E}{i} \\ e \notin S}} \epsilon^{S,e} d^{S,e}_{(M,\rho)}$$

と定義する．ここで $\epsilon^{S,e}$ を

$$\epsilon^{S,e} = \begin{cases} -1 & |\{e' \in S \mid e' < e\}| \text{ が奇数の時} \\ 1 & \text{他の場合} \end{cases}$$

と定める．j について和をとることで i 次の境界作用素 $d^i_{(M,\rho)} = \bigoplus_{j \geq 0} d^{i,j}_{(M,\rho)}$ が得られる．特に $d^{i+1}_{(M,\rho)} \circ d^i_{(M,\rho)} = 0$ が成り立ち，チェイン複体 $\mathcal{C}(M, \rho) = (C^\bullet(M, \rho), d^\bullet_{(M,\rho)})$ が得られる．

定義 2.4. $\mathcal{C}(M, \rho)$ のコホモロジーを**マトロイド (M, ρ) の特性コホモロジー**と呼び $H^\bullet(M, \rho)$ と表す．

定理 2.5（[9]） 次数つきオイラー標数を取ると $\chi_q(\mathcal{C}(M, \rho)) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \mathrm{rank}_R H^{i,j}(M, \rho) = \chi(M; 1 + q)$ が成り立つ．

基本的な性質をいくつか述べる．削除・縮約性に関する等式は長完全系列として得られる．

定理 2.6（[9]）　擬表現つきのマトロイド $(M,\rho)=(E,\mathrm{rank}_M,\rho)$ およびコループではない $e\in E$ を考える．この時，次の長完全列がある：

$$\begin{aligned}0\to H^0(M,\rho)&\xrightarrow{\beta^*}H^0(M\setminus e,\rho_{\setminus e})\xrightarrow{\gamma^*}H^0(M/e,\rho_{/e})\xrightarrow{\alpha^*}H^1(M,\rho)\\&\xrightarrow{\beta^*}H^1(M\setminus e,\rho_{\setminus e})\xrightarrow{\gamma^*}H^1(M/e,\rho_{/e})\xrightarrow{\alpha^*}\cdots\\&\xrightarrow{\beta^*}H^i(M\setminus e,\rho_{\setminus e})\xrightarrow{\gamma^*}H^i(M/e,\rho_{/e})\xrightarrow{\alpha^*}H^{i+1}(M,\rho)\\&\to\cdots.\end{aligned}$$

命題 2.7 ([9])**.** 擬表現つきのマトロイド $(M,\rho)=(E,\mathrm{rank}_M,\rho)$ がループを持つ時，全ての i に対し $H^i(M,\rho)=0$ が成り立つ．

命題 2.8 ([9])**.** 擬表現つきのマトロイド $(M,\rho)=(E,\mathrm{rank}_M,\rho)$ に対し，e が平行元である時，全ての i に対し $H^i(M,\rho)\simeq H^i(M\setminus e,\rho_{\setminus e})$ が成り立つ．

2.3　超平面配置の特性ホモロジーとの関係

Dancso–Licata [3] は超平面配置に対する特性ホモロジーを構成した．ここではマトロイドの特性ホモロジーが，その自然な一般化となることを説明する．$\mathcal{A}=\{H_1,\dots,H_n\}$ を複素ベクトル空間 V 内の中心的超平面配置とする．各超平面を $H_i=\nu_i^{\perp}$ と表す．ここで $\nu_i\in V^*$ は H_i の法ベクトルである．

各部分集合 $S\subset[n]$ に対し，$H_S=\bigcap_{i\in S}H_i$ とおく．Dancso–Licata の特性ホモロジーでは，(i,j)-次のチェイン群は

$$C^{i,j}_{arr}(\mathcal{A})=\bigoplus_{|S|=i}\bigwedge^{j}H_S$$

で与えられる．微分は，$e\notin S$ に対する自然な射 $H_S\longrightarrow H_{S\cup e}$ から誘導される写像の交代和として定義される．この複体の次数つき Euler 標数は，超平面配置 $\mathcal{A}$ の特性多項式を与える．一方，法ベクトル $\nu_1,\dots,\nu_n$ から線形マトロイド $M(\mathcal{A})$ が定まる．すなわち，台集合を $[n]$ とし，

$$\mathrm{rank}_{M(\mathcal{A})}(S)=\dim\langle\nu_i\mid i\in S\rangle$$

このとき $\rho(S)=\langle\nu_i\mid i\in S\rangle$ とおけば，$M(\mathcal{A})$ の擬表現が得られる．したがって，前節の構成からマトロイドの特性ホモロジー複体 $C^{i,j}(M(\mathcal{A}),\rho)=\bigoplus_{|S|=i}\bigwedge^j V^*/\rho(S)$ が得られる．ここで，H_S は $\rho(S)$ の直交補空間であるから，内積を用いて自然に $H_S\cong V^*/\rho(S)$ と同一視できる．この同一視の下で，Dancso–Licata 側の射 $H_S\longrightarrow H_{S\cup e}$ は，マトロイド側の商写像 $V^*/\rho(S)\longrightarrow V^*/\rho(S\cup e)$ に対応する．従って，各 S および j について $\bigwedge^j H_S\cong\bigwedge^j V^*/\rho(S)$ が成り立ち，これらを $|S|=i$ について直和することで $C^{i,j}_{arr}(\mathcal{A})\cong C^{i,j}(M(\mathcal{A}),\rho)$ を得る．さらに，この同型は微分と可換であるため，チェイン複体の同型を与える．

以上より，次が従う．

定理 2.9（[9]）　超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し，

$$H^{\bullet}_{arr}(\mathcal{A},\Bbbk)\cong H^{\bullet}(M(\mathcal{A}),\rho)\otimes\Bbbk$$

が成り立つ．

3 符号つきマトロイドと符号つき Tutte 多項式への拡張

3.1 符号つきマトロイドにおける Reidemeister 変形

ここで一旦，グラフを用いた結び目の記述について復習を行う．結び目が与えられた時，そのダイアグラムを考えることができる．さらに結び目図式から面グラフ（face graph）が定義できる．これは結び目図式を 2-彩色し，領域ごとに頂点を置き，交点で向かい合う領域同士の間に辺を引いて構成される．結び目の各交点でクロスの仕方に応じて，それぞれ対応する辺に $+/-$ の符号を付けると符号つきグラフが得られる（図 1 参照）．

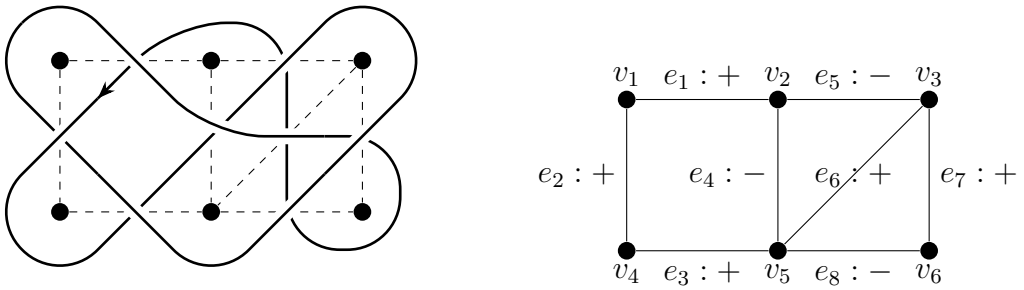


図 1　左：結び目図式，右：対応する符号つきグラフ

対応するグラフィックマトロイドの表現行列は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ここで列は辺 $e_1, \ldots, e_8$ の順に，行は頂点 $v_1, \ldots, v_6$ の順に対応している．

さて結び目図式の Reidemeister 変形は，符号つきグラフの局所変形として記述できた．Reidemeister move I は符号が正のループを追加・削除する操作に，Reidemeister move II は符号が互いに逆の多重辺ペアを追加・削除する操作に，Reidemeister move III は $Y\Delta$ 交換（図 2 参照）にそれぞれ対応する．

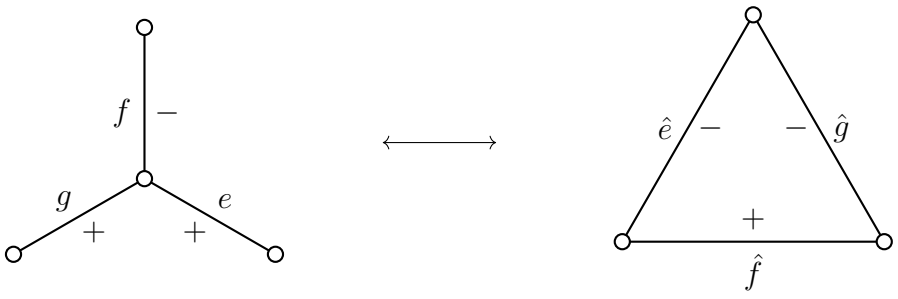


図 2　$Y\Delta$ 交換：Y 字形のグラフを三角形グラフに置き換える

この概念をマトロイドに一般化しよう．

定義 3.1. 符号つきマトロイド (M, sgn) とは，マトロイド M に対し，符号関数 $\mathrm{sgn} : E \to \{+, -\}$ を付加したものである．sgn は E の各元に $+$ または $-$ の符号を割り当てる．

このとき，符号つきマトロイドに対する（weak）Reidemeister move を次のように定義する．

(wRI) 符号が反対の 2 つのループを追加または削除する．

(RII) 符号が反対の 2 つの平行元を追加または削除する．

(RIII) ΔY 交換 [*2]を行う．このとき，交換に関わる 3 元集合 T 上の符号を反転する．

図 3 はダイアグラム，および対応するグラフィックマトロイドにおける Reidemeister move の例を示している．

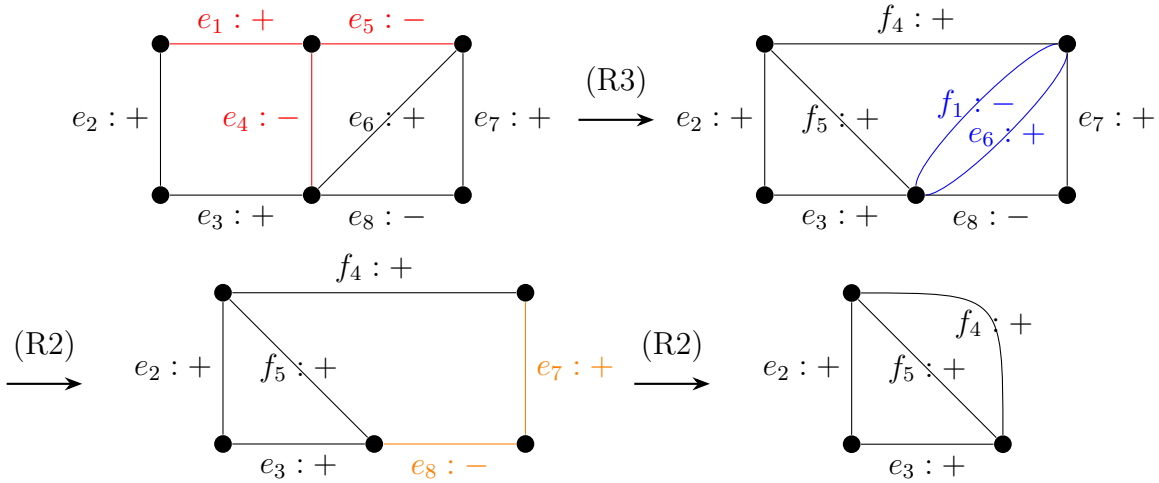


図 3　符号つきグラフ上の Reidemeister 変形

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_6 & e_7 & e_8 & e_4 & e_5 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
\xrightarrow{(R3)}
\begin{array}{c|cccccccc}
 & e_2 & e_3 & e_6 & e_7 & e_8 & e_4 & e_5 & e_1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(R2)\ \&\\ 行基本変形}}
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_2 & e_3 & e_7 & e_8 & f_4 & f_5 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\xrightarrow{(R2)}
\begin{array}{c|cccc}
 & e_2 & e_3 & f_4 & f_5 \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{array}
$$

3.2　符号つきランク母関数と Reidemeister 不変性

定義 3.2. (M, sgn) を台集合 E 上の符号つきマトロイドとする．M の**符号つきランク母関数**を

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = \sum_{S \subset E} \alpha^{|S|_- + |E \setminus S|_+} \beta^{|E \setminus S|_- + |S|_+} x^{\mathrm{corank}_M(S)} y^{\mathrm{null}(S)}$$

により定義する．ここで $S \subset E$ に対し，$\mathrm{null}(S) = |S| - \mathrm{rank}_M(S)$, $S_+ = \{e \in S \mid \mathrm{sgn}(e) = +\}$, $S_- = \{e \in S \mid \mathrm{sgn}(e) = -\}$ とする．

[*2] マトロイドにおける ΔY 交換については誌面の都合上割愛するが，マトロイドの表現行列の局所的な置き換えで与えられるものである．

符号つきランク母関数は，結び目理論における Jones 多項式を包含する．実際，符号つきマトロイド (M, sgn) に対し，

$$J_M(q) = R(M, \mathrm{sgn}; (-q)^{-1/2}, (-q)^{1/2}, q + q^{-1}, q + q^{-1})$$

と定めると，結び目図式から得られる符号つきグラフィックマトロイドの場合には，これは通常の framed Jones 多項式と一致する．次の性質は符号つきグラフ上で成り立つ事実をマトロイドに一般化したものである．

補題 3.3 (Saito–Y.)**.** 符号つきマトロイド (M, sgn) の符号つきランク母関数 $R(M, \mathrm{sgn}, \alpha, \beta, x, y)$ は，適切な代入のもとで Reidemeister move (wRI)，(RII)，(RIII) に関して不変である．すなわち，次が成り立つ．

(wRI) e, f を符号が反対のコループとする．$\alpha\beta = 1$ かつ $x = -(\alpha^2 + \beta^2)$ ならば，

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = R(M \setminus \{e, f\}, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y).$$

(RII) e, f を符号が反対の平行元とする．$\alpha\beta = 1$ かつ $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta y = 0$ ならば，

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = R(M \setminus \{e, f\}, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y).$$

(RIII) $T \subset E$ を三角形とする．すなわち，$|T| = 3$ であり，任意の $t \in T$ に対して $\mathrm{rank}_M(T \setminus \{t\}) = \mathrm{rank}_M(T) = 2$ が成り立つとする．さらに，T は二つの正符号の元と一つの負符号の元からなるとする．このとき，

$$R(M, \mathrm{sgn}; \alpha, \beta, x, y) = R(\Delta_T(M), \mathrm{sgn}_T; \alpha, \beta, x, y)$$

ここで $\Delta_T(M)$ は T に関する $Y\Delta$ 交換を表す．

定義 3.4. 符号つきマトロイド (M, sgn) の（正規化された）**符号つき Tutte 多項式** $\bar{T}(M, \mathrm{sgn}; \alpha, x, y)$ を

$$\bar{T}(M, \mathrm{sgn}; \alpha, x, y) = R(M, \mathrm{sgn}; \alpha + 1, 1, x - 1, y - 1)$$

で定義する．

3.3 符号つきマトロイドの Tutte ホモロジー

ここでは正規化された符号つき Tutte 多項式を圏化するホモロジーを概説する．本節の構成では，表現行列から核と余核を用いてチェイン複体を構成する．この構成は体上の表現可能マトロイドに対して定義できるが，体ごとに別々に扱うよりも，それらを統一的に記述できる枠組みとして partial field を用いる方が自然である．partial field はグラフィックマトロイド，正則マトロイドなど，多くの重要なクラスを統一的に扱うことができ，さらに今後関手性を考える際の自然な舞台となる．

定義 3.5. $\mathbb{P} = (R, G)$ が **partial field** であるとは，R が可換環，$G \subset R^\times$ が部分群であり，$-1 \in G$ かつ G が環として R を生成することをいう．また，

$$\mathbb{P}^\times = G, \quad \mathbb{P} = G \cup \{0\}$$

と書く．

M を partial field $\mathbb{P}=(R,G)$ 上のランク r のマトロイドとし，A を M を表す $\mathbb{P}$-行列とする．行基本変形，列の入れ替え，各列への $\mathbb{P}^\times$ 倍を施すことで，A は

$$A=(I_r\ D)$$

の形に取ることができる．ここで I_r は r 次単位行列である．この行列は準同型 $A:R^E\longrightarrow R^r$ を定める．各部分集合 $S\subset E$ に対して，A_S を S に属する列からなる部分行列とし，短完全系列

$$0\longrightarrow \ker A_S\longrightarrow R^S\xrightarrow{A_S} R^r\longrightarrow \operatorname{coker} A_S\longrightarrow 0$$

を考える．符号つきマトロイドの Tutte ホモロジーのチェイン群は，$\ker A_S$ と $\operatorname{coker} A_S$ の両方を用いて定義される．$S\subset E$ に対し，$\widetilde{S}\coloneqq (E\setminus S)_-\sqcup S_+$ とおく．この時，チェイン群を

$$C_{sT}^{S,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})=\bigwedge^k R^S\otimes\bigwedge^{j_1}\operatorname{coker} A_{\widetilde{S}}\otimes\bigwedge^{j_2}\ker A_{\widetilde{S}}$$

とおき，

$$C_{sT}^{i,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})=\bigoplus_{S\in\binom{E}{i}} C_{sT}^{S,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})$$

と定義する．

次に微分を定義する．$S\subset E$, $l\notin S$ に対し，自然な写像 $\iota:R^S\longrightarrow R^{S\cup l}$ がある．また $S\subset E$, $e\notin S$ に対して，S から $S\cup e$ へ移るとき，A_S と $A_{S\cup e}$ の間には自然な写像があり，これらにより誘導される写像から微分 $\delta_{sT}^{S,l}:C_{sT}^{S,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})\longrightarrow C_{sT}^{S\cup l,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})$ が定まり，従って $\delta^i:C_{sT}^{i,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})\longrightarrow C_{sT}^{i+1,k,j_1,j_2}(M,\mathrm{sgn})$ が定まる．

この写像は特に $\delta^{i+1}\circ\delta^i=0$ が成り立ち，従ってチェイン複体 $\mathcal{C}_{sT}(M,\mathrm{sgn})=(C_{sT}^\bullet(M,\mathrm{sgn}),\delta^\bullet)$ が得られる．そのホモロジーを M の**符号つき Tutte ホモロジー**と呼び，$H_{sT}^\bullet(M,\mathrm{sgn})$ と書く．

この構成は，前節で定義した正規化された符号つき Tutte 多項式

$$\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)=R(M,\mathrm{sgn};\alpha+1,1,x-1,y-1)$$

と対応している．

実際，

$$\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)=\sum_{S\subset E}(\alpha+1)^{|S|}(x-1)^{\operatorname{corank}_M(\widetilde{S})}(y-1)^{\operatorname{null}_M(\widetilde{S})}$$

と書ける．

ここで，$\bigwedge^\bullet R^S$ の次数付き階数は $(\alpha+1)^{|S|}$ を与え，$\operatorname{coker} A_{\widetilde{S}}$ および $\ker A_{\widetilde{S}}$ の次数付き階数はそれぞれ $\operatorname{corank}_M(\widetilde{S})$，$\operatorname{null}_M(\widetilde{S})$ を与える．

したがって，これらの外積代数の次数付き階数を取ることで，$\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)$ の各項が復元され，次が成り立つ．

定理 3.6（Saito–Y.）　符号つき Tutte ホモロジー $H_{sT}^\bullet(M,\mathrm{sgn})$ の次数つき Euler 標数は，M の正規化された符号つき Tutte 多項式を復元する．すなわち，

$$\chi_q(\mathcal{C}_{sT}(M,\mathrm{sgn}))=(-1)^{\operatorname{rank}(E)+|E_-|}\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,-x,-y)$$

が成り立つ．

なお，双対マトロイドを表す行列 $A^\perp$ を用いることで，$\operatorname{coker} A_S$ と $\ker A_S$ は双対的に記述できる．この双対性は，符号つき Tutte 多項式の対称性

$$\bar{T}(M^*,\mathrm{sgn};\alpha,x,y)=\bar{T}(M,\mathrm{sgn};\alpha,y,x)$$

のホモロジー的な反映とみなすことができる．

今回得られた構成は，グラフや超平面配置に対する既存の圏化を（符号つき）マトロイドの枠組みへ拡張するものであり，今後はその関手性や Reidemeister 不変性との関係を明らかにすることが課題である．

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招きくださった先生方に感謝申し上げます．また，本稿について貴重なコメントをいただいた齋藤琢弥氏（北海道大学）に感謝申し上げます．本研究は JSPS 科研費若手研究（課題番号 24K16926）および日本学術振興会二国間交流事業（課題番号 JPJSBP120256504）の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Günter M. Ziegler. *Oriented matroids*, volume 46 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[2] Thomas Brylawski and James Oxley. The Tutte polynomial and its applications. In *Matroid applications*, volume 40 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 123–225. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[3] Zsuzsanna Dancso and Anthony Licata. Odd Khovanov homology for hyperplane arrangements. *J. Algebra*, 436:102–144, 2015.

[4] Donald E. Knuth. The asymptotic number of geometries. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 16:398–400, 1974.

[5] Peter Nelson. Almost all matroids are nonrepresentable. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(2):245–248, 2018.

[6] Hirokazu Nishimura and Susumu Kuroda, editors. *A lost mathematician, Takeo Nakasawa*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. The forgotten father of matroid theory.

[7] James Oxley. What is a matroid.

[8] James Oxley. *Matroid theory*, volume 21 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, second edition, 2011.

[9] Radmila Sazdanovic and Martha Yip. A categorification of the chromatic symmetric function. *J. Combin. Theory Ser. A*, 154:218–246, 2018.

[10] Dai Tamaki. Matroid. `http://pantodon.jp/index.rb?body=matroid`. 最終閲覧日: 2026 年 8 月 1 日.

[11] K. Truemper. *Matroid decomposition*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[12] Hassler Whitney. On the Abstract Properties of Linear Dependence. *Amer. J. Math.*, 57(3):509–533, 1935.