Various Notions of Tangent Spaces in Diffeology

多賓 雅樹 (東大数理・JSPS 特別研究員 DC1)*

1 導入と diffeology の定義

本稿では，diffeological space 上の接空間のいくつかの構成を概説する．通常の可微分多様体では，接ベクトルは曲線の速度としても，関数環上の微分作用素としても定義でき，どちらも同じ接空間を与える．diffeological space の圏では，この二つの見方から得られる接空間が一般には一致しないことが，Christensen–Wu [CW16] により知られている．著者はこの現象をさらに押し進め，多様体上の接空間関手の diffeological space への拡張が非可算無限個存在することを示した [Tah25]．本稿の目的は，著者の一連の論文 [Tah26a, Tah26b, Tah26c, Tah25] に基づき，この非一意性が単なる病理ではなく，diffeological space の幾何を反映する構造であることを，具体例に沿って説明することである．

まず diffeology とは何かを説明する．多様体の圏は，商や部分集合，写像空間を取る操作について閉じていない．例えば多様体を群作用で割った軌道空間や，多様体の間の滑らかな写像全体の空間は，一般にはもはや多様体ではない．diffeological space は，Souriau [Sou80] により 1980 年頃に導入された多様体の一般化であり，こうした対象にも「滑らかさ」の構造を直接与えることができる．多様体がチャート，すなわち $\mathbb{R}^n$ の開集合との可逆な対応で記述されるのに対し，diffeology では，$\mathbb{R}^n$ の開集合から集合 X への写像のうちどれを「滑らかなパラメータ付け」と認めるかを，公理を満たすように直接指定する．チャートと異なり可逆性を要求しないため，特異性を持つ空間に対してもそのまま意味を持つ．

定義 1.1. 集合 X 上の *diffeology* とは，各 $n \geq 0$ と $\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対する写像 $p\colon U \to X$ の族 $\mathcal{D}$ であって，次を満たすものをいう．

1. 任意の定数写像 $U \to X$ は $\mathcal{D}$ に属する．
2. $p\colon U \to X$ が $\mathcal{D}$ に属し，$f\colon V \to U$ が通常の意味で滑らかならば，$p \circ f\colon V \to X$ も $\mathcal{D}$ に属する．
3. 写像 $p\colon U \to X$ が，U の開被覆 $\{U_i\}$ 上でそれぞれ $p|_{U_i} \in \mathcal{D}$ を満たすならば，$p \in \mathcal{D}$ である．

$\mathcal{D}$ の元を X の *plot* と呼ぶ．diffeology を備えた集合を *diffeological space* と呼ぶ．

三つの公理は，定数写像は滑らかであること，滑らかな写像との合成で滑らかさが保たれ

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: taho(at)ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は JSPS 科研費 JP24KJ0881 の助成を受けたものです．

ること，滑らかさは局所的に判定できる性質であることを要請している．diffeology の基本事項をまとめた標準的な教科書として [IZ13] を挙げておく．

diffeological space X, Y の間の写像 $F\colon X \to Y$ は，任意の plot $p\colon U \to X$ に対して $F \circ p$ が Y の plot になるとき滑らかであるという．これにより diffeological space の圏 Dflg が得られる．任意の可微分多様体 M は，通常の意味で滑らかな写像 $U \to M$ を plot とすることで diffeological space とみなせる．この対応のもとで写像の滑らかさは通常の意味のそれと一致し，多様体の圏は Dflg の充満部分圏になる．さらに diffeology は商集合，部分集合，写像空間などにも自然に定義されるため，多様体の枠組みを外れる対象を統一的に扱える．

本稿で繰り返し使う代表例は, irrational torus T_α と軌道空間 H_n の二つの商 diffeological space である．どちらも集合や位相空間としては単純に見えるが，diffeology は商写像に由来する滑らかさを記憶している．

例 1.2 (商 diffeology と部分 diffeology)**.** diffeological space X から集合 Y への全射 $q\colon X \to Y$ に対し，q が滑らかになる最小の diffeology（商 diffeology）が Y 上に定まる．具体的には，各点の近傍で q を通して局所的に lift できる写像 $p\colon U \to Y$ 全体が plot となる．また，部分集合 $A \subset X$ には，包含 $A \hookrightarrow X$ が滑らかになる最大の diffeology（部分 diffeology）を入れる．これらは次の普遍性を持つ：商からの写像 $f\colon Y \to Z$ が滑らかであることは $f \circ q$ が滑らかであることと同値であり，部分集合への写像 $g\colon Z \to A$ が滑らかであることは X への写像とみなして滑らかであることと同値である．このとき，例えば平面内の交差 $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid st = 0\}$ に部分 diffeology を入れたものと，二本の直線の原点を貼り合わせた商 diffeological space は，位相空間としては同相であるが，diffeological space としては同型ではない．

例 1.3 (irrational torus)**.** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し，$T_\alpha := \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ は商写像 $\pi_\alpha\colon \mathbb{R} \to T_\alpha$ による商 diffeology を持つ．$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の稠密部分群なので，T_α 上の実数値滑らかな関数はすべて定数である．

例 1.4 (軌道空間 H_n)**.** 標準的な $O(n)$ 作用による軌道空間 $H_n := \mathbb{R}^n/O(n)$ は集合としては $[0, \infty)$ と同一視できるが，diffeology は n を記憶しており，H_n と H_m は $n = m$ のときに限って diffeomorphic である．

最後に，次節以降で用いる構成を三つ準備する．diffeological space X には，すべての plot $p\colon U \to X$ が連続になる最も細かい位相が定まる．これを D-**位相**と呼び，この位相に関する開集合・近傍をそれぞれ D-開集合・D-開近傍と呼ぶ．また，直積集合 $\prod_\alpha X_\alpha$ には，各射影との合成がすべて plot になる写像を plot とする**積** *diffeology* が入る．さらに，滑らかな写像全体の集合 $C^\infty(X, Y)$ には，付随する写像 $(u, x) \mapsto p(u)(x)$ が $U \times X$ 上で滑らかになるような写像 $p\colon U \to C^\infty(X, Y)$ を plot とする *functional diffeology* が入る．

これにより，関数の空間から $\mathbb{R}$ への線形写像に対して「滑らかである」という条件が意味を持つ．この条件が次節の外部接空間の定義で本質的な役割を果たす．

2 内部接空間と外部接空間

以後，基点付き diffeological space (X, x) を考える．本節では，Christensen–Wu [CW16] により導入された二つの接空間を復習する．一つは「plot から入ってくる速度ベクトル」を集める内部接空間であり，もう一つは「実数値関数を微分する作用素」としての外部接空間である．多様体では両者は一致するが，diffeological space では十分な関数や十分な曲線が存在するとは限らないため，両者はずれる．

定義 2.1 ([CW16])**.** (X, x) に対し，$p(0) = x$ を満たす pointed plot $p\colon (U, 0) \to (X, x)$ 全体を考える．内部接空間は

$$T_x^{\mathrm{int}}(X) := \bigoplus_{p \in \mathrm{Plots}(X,x)} T_0 U_p \Big/ R$$

で定義される．ここで R は，plot の再パラメータ付け $p = q \circ f$ に対し $v \in T_0 U_p$ と $T_0 f(v) \in T_0 U_q$ を同一視する関係で生成される部分空間である．

内部接空間は plot の速度ベクトルを貼り合わせる構成であり，曲線による接ベクトルの一般化である．多様体では座標近傍から来る plot が十分に多いため，通常の接空間と一致する．一方，外部接空間は関数を微分する作用素として定義される．

定義 2.2 ([CW16])**.** $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ を，x の D-開近傍上で定義された滑らかな実数値関数の芽の代数とする．外部接空間は，$\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ から $\mathbb{R}$ への滑らかな線形写像 D で Leibniz 則 $D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g)$ を満たすもの全体である：

$$\hat{T}_x(X) := \left\{ D\colon \mathcal{C}^\infty_{X,x} \to \mathbb{R} \mid D \text{ は滑らかな線形写像で Leibniz 則を満たす} \right\}.$$

ここで芽の代数 $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ は，x の各 D-開近傍 U 上の関数空間 $C^\infty(U, \mathbb{R})$ の functional diffeology から，芽を取る商として誘導される diffeology を持つ．Christensen–Wu は，滑らかさが他の条件から自動的に従うかは不明であると述べ，外部接空間の定義では滑らかさを条件に含めている [CW16, 3.4.2].

この問題は次節に譲り，ここでは内部接空間と外部接空間の違いを見る．基本例においても，両者には大きなずれが見られる [CW16]．irrational torus では，滑らかな実数値関数が定数しかないため外部接空間は消えるが，商写像 $\mathbb{R} \to T_\alpha$ が生き残るため内部接空間は $\mathbb{R}$ になる．逆に H_n の原点では，曲線の速度は商の効果で潰れて内部接空間は消える一方，関数 $q_n\colon H_n \to \mathbb{R}$，$[v] \mapsto \|v\|^2$ を微分する作用素が外部接空間に非自明な方向を与える．このように，内部接空間と外部接空間は異なる種類の滑らかさを抽出している．

内部接空間から外部接空間には自然な写像がある．内部接ベクトル $[p, v] \in T_x^{\mathrm{int}}(X)$ に対し $\eta_x([p, v])([f]) := d_0(f \circ p)(v)$ と置けば，これは関数の芽に作用する滑らかな微分作用

素，すなわち外部接ベクトルを与える [CW16]．多様体ではこの写像は同型であるが，一般にはそうではない．

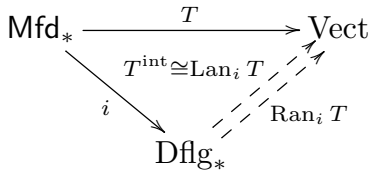
定義 2.3 ([Vin08, Tah25])**.** 自然な写像 η_x の像として定まる空間 $\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X) := \mathrm{Im}(\eta_x)$ を *Vincent* **型接空間**と呼ぶ．

これは「曲線から来て，かつ実数値関数で検出できる」方向だけを残す構成であり，Vincent [Vin08] による構成の再定式化である [Tah25]．定義から $\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X) \cong T_x^{\mathrm{int}}(X)/\ker \eta_x$ かつ $\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X) \subset \hat{T}_x(X)$ であるため，Vincent 型接空間は内部接空間と外部接空間の中間に位置するものとみなせる．

基本例での振る舞いを表にまとめる．ここで $\mathbb{R}^2$ 上の wire diffeology とは，滑らかな曲線 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 全体が生成する diffeology である．

(X, x)	$T_x^{\mathrm{int}}(X)$	$\hat{T}_x^{\mathrm{Vin}}(X)$	$\hat{T}_x(X)$
n 次元多様体	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$
irrational torus T_α	$\mathbb{R}$	0	0
軌道空間 H_n の原点	0	0	$\mathbb{R}$
wire diffeology on $\mathbb{R}^2$	無限次元	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$

圏論的には，内部接空間は古典的接空間関手の左 Kan 拡張として特徴付けられることが知られている [CW16]．



では，外部接空間は右 Kan 拡張として得られるだろうか．これが次節の出発点となる．

3 外部接空間の変種と右 Kan 拡張

本節の内容は著者の論文 [Tah26a, Tah26b] による．

前節末の問いには，実は次の形で答えることができる．外部接空間の定義を少し修正した空間 $\hat{\mathbb{T}}_x^R(X) := \mathrm{Der}_x(C^\infty(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$，すなわち大域的な関数環上の（滑らかとは限らない）微分作用素全体の空間が，通常の基点付き写像を射とする圏 Dflg_* 上の右 Kan 拡張になることが示せるのである [Tah26a]．ここで施した微修正は，二つの軸に分解できる．すなわち，微分作用素の定義域を芽の代数 $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ から functional diffeology を入れた大域的な関数環 $C^\infty(X, \mathbb{R})$ に取り替えたこと（局所か大域か）と，微分作用素から滑らかさの条件を外したこと（滑らかか代数的か）である．

定義 3.1 ([Tah26a])**.** 二軸の選択に応じて，次の四つの空間が定まる．

定義域	滑らかな微分作用素	代数的微分作用素
芽の代数 $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$	外部接空間 $\hat{T}_x(X)$	**右側接空間** $\hat{T}^R_x(X)$
関数環 $C^\infty(X,\mathbb{R})$	**大域外部接空間** $\hat{\mathbb{T}}_x(X)$	**大域右側接空間** $\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)$

Christensen–Wu の外部接空間は左上の局所・滑らか版であり，以後は右側接空間が中心的な役割を果たす．これら四つの変種がどのようなときに差を持つのかを知ることが，次の目標になる．

まず，局所か大域かの軸を考える．右 Kan 拡張として得られた $\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)$ は，接空間に期待される局所性を一般には満たさない．実際，座標軸の交差 $\{st=0\}\subset\mathbb{R}^2$ の x 軸上の原点以外を一点 x_0 につぶした商空間 X では，$\{x_0\}$ が D-開な一点集合であるにもかかわらず，大域的な関数環が商空間全体の制約を通して y 軸方向を検出するため，$\hat{\mathbb{T}}^R_{x_0}(X)\cong\mathbb{R}$ となる．bump 関数が十分に存在する空間（smoothly regular な空間）ではこの現象は起こらず $\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)\cong\hat{T}^R_x(X)$ が成り立つが [Tah26a]，一般には大域的な微分作用素は局所的なデータに落ちない．

そこで, 射を「基点近傍で定義された滑らかな写像の芽」に取り替える．$\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ を，対象は基点付き diffeological space，射は基点を保つ滑らかな写像の芽 $[f,U]_x\colon (X,x)\to(Y,y)$ である圏とする．この圏では D-開近傍の包含 $(U,x)\hookrightarrow(X,x)$ が同型射になるため，$\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ 上の関手は自動的に局所性を持つ．

定理 3.2 ([Tah26a])**.** 古典的接空間関手 $T\colon \mathrm{Mfd}^{\mathrm{loc}}_*\to\mathrm{Vect}$ を包含 $i\colon \mathrm{Mfd}^{\mathrm{loc}}_*\hookrightarrow\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ に沿って右 Kan 拡張すると，右側接空間関手が得られる：

$$\mathrm{Ran}_i\, T(X,x)\cong\hat{T}^R_x(X).$$

証明の鍵は Leibniz 則の出所である．右 Kan 拡張の元は，各滑らかな芽 $g\colon(X,x)\to(M,g(x))$ に対して古典的接ベクトル $v_g\in T_{g(x)}M$ を割り当てる，後合成と整合的な族である．実数値関数の芽 f に対して $D(f):=v_f\in T_{f(x)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ と定め，$(f,g)\colon X\to\mathbb{R}^2$ と積写像 $\mu\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に整合性を適用すると，$\mathbb{R}^2$ 上の古典的な積の微分公式から D の Leibniz 則 $v_{fg}=g(x)v_f+f(x)v_g$ が従う．逆向きには，右側接ベクトルを各芽に沿って押し出すことで整合的な族が復元される．

以上より，先の表の右の列に並ぶ二つの代数的変種は，それぞれ圏 Dflg_* と $\mathrm{Dflg}^{\mathrm{loc}}_*$ 上の右 Kan 拡張として特徴付けられたことになる．残るのは，外部接空間と右側接空間の違い，すなわち微分作用素に滑らかさを課すかどうかである．実際，滑らかさは他の条件から自動的には従わない．

定理 3.3 ([Tah26b])**.** $X=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ を可算個の直線の bouquet とし，0 をその貼り合わせ点とする．このとき

$$\hat{T}_0(X)\cong\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\qquad \hat{T}^R_0(X)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\right).$$

特に $\hat{T}_0(X) \subsetneq \hat{T}_0^R(X)$ である．

貼り合わせ点での関数の芽 f は各枝上の芽の列とみなせるので，枝ごとの一階微分の列 $\mathbf{d}f := \big(f_1'(0), f_2'(0), \ldots\big) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ が定まり，右側接ベクトルはちょうど $\mathbf{d}f$ に代数的な線形汎関数を作用させるものとして書ける．一方，積 diffeology を持つ $\prod_n \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への滑らかな線形写像は，有限個の座標にしか依存しないことが示せる．したがって滑らかな微分作用素の全体は $\bigoplus_n \mathbb{R}$ に対応する．例えば，有限支持列の上では消えるが $(1,1,1,\ldots)$ では非零になる代数的汎関数は，Leibniz 則を満たすが滑らかでない微分作用素を与える．直感的には，滑らかな微分作用素は有限個の枝にしか依存できないが，代数的な微分作用素は無限個の枝に同時に依存できるのである．

4　pencil diffeology と方向ごとの一階微分

前節の bouquet は，可算個の直線を一点で貼り合わせた空間であった．本節で扱う pencil diffeological space は，非滑らかな微分作用素の研究との関連で Iglesias-Zemmour が著者に示唆した空間であり，平面 $\mathbb{R}^2$ の原点を通る非可算個の直線が bouquet の枝の役割を果たす [Tah26c]．そこでも同じ現象が起こり，さらにその Zariski 余接空間の記述には位相的な条件が現れる．

定義 4.1 (pencil diffeology, [Tah26c])**.** *pencil diffeological space* P とは，集合 $\mathbb{R}^2$ に次の diffeology を入れたものである．写像 $p\colon U \to P$ が plot であるとは，各 $u_0 \in U$ に対しある開近傍 $V \subset U$ が存在して，次のいずれかが成り立つことをいう．

1. $p(u_0) \neq 0$ であり，$p|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ は通常の意味で滑らかである．
2. $p(u_0) = 0$ であり，原点を通るある直線 $L \subset \mathbb{R}^2$ が存在して，$p(V) \subset L$ かつ $p|_V\colon V \to L$ は通常の意味で滑らかである．

つまり，原点の外では通常の平面と同じだが，原点を通る滑らかさは，原点を通る直線族（pencil）に沿ってのみ検出される．このとき，関数 F が P 上滑らかであることは，原点の外で通常の意味で滑らかであり，かつ原点を通る各直線への制限が滑らかであることと同値になる．例えば $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$（ただし $f(0,0)=0$）は P 上滑らかであるが，通常の意味では原点で滑らかでない．

$\mathcal{C}^\infty_{P,0}$ を原点における滑らかな関数の芽の代数，$I_0(P)$ を原点で消える芽のなすイデアルとし，*Zariski* **余接空間** $E_0(P) := I_0(P)/I_0(P)^2$ を考える（商 diffeology を入れる．多様体では通常の余接空間と一致する）．右側接空間と外部接空間はそれぞれ $E_0(P)$ の代数的双対・滑らかな双対として書けるので [CW16]，以下ではこの一つの空間を調べればよい．$f \in I_0(P)$ は原点を通る各直線 $L \in \mathbb{RP}^1$ に沿って通常の微分 $d_0(f|_L) \in L^*$ を持つので，

方向ごとの一階微分をまとめた線形写像

$$\tilde{J}\colon I_0(P) \to \prod_{L\in\mathbb{RP}^1} L^*, \qquad \tilde{J}(f)_L = d_0(f|_L)$$

が定まる．

定理 4.2 ([Tah26c])**.** $\tilde{J}$ は滑らかな線形写像であり，

$$\ker \tilde{J} = I_0(P)^2$$

が成り立つ．特に $\tilde{J}$ は単射な滑らかな線形写像

$$J\colon E_0(P) \hookrightarrow \prod_{L\in\mathbb{RP}^1} L^*$$

を誘導する．

すなわち，pencil diffeology の Zariski 余接空間は方向ごとの一階微分で完全に決まる．次の問題は，どのような微分の族がここで実現されるかである．単位ベクトル $v \in S^1$ に対し $h(v) := \tilde{J}(f)_{\mathbb{R}v}(v)$ と置くと h は S^1 上の奇関数になり，この対応でベクトル空間 $\prod_L L^*$ は S^1 上の奇関数全体 $\mathrm{Odd}(S^1)$ と同一視できる．通常の $\mathbb{R}^2$ の滑らかな芽から得られる h は，一つの線形汎関数の制限 $h(v) = \langle a, v\rangle$ の形に限られ，特に連続である．可算ブーケでは各枝の一階微分は独立であり，任意の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ が実現される．pencil は両者の中間であり，実現される h は次の弱い連続性でちょうど特徴付けられる．

定義 4.3. 関数 $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$ が **σ-連続**であるとは，S^1 の閉集合の列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$S^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ かつ各 $h|_{C_n}$ が連続であることをいう．σ-連続な奇関数全体のなすベクトル空間を $\mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$ と書く．

定理 4.4 ([Tah26c])**.** 上の同一視のもとで

$$J(E_0(P)) = \mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$$

が成り立つ．

σ-連続な関数は連続とは限らないが，常に Borel 可測である．Zariski 余接空間という微分幾何的な不変量の記述に，このような位相的な条件が現れるのが pencil の特徴である．

例 4.5. $e_1 = (1,0)$ とし，$h(\pm e_1) = \pm 1$，それ以外の点で $h = 0$ となる奇関数 h を考える．h は連続ではないが，$\{\pm e_1\}$ とそれを避ける閉集合たちに分ければ σ-連続である．実際にこの h を実現するには，偶関数 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ で $\rho(0) = 1$，$|u| \geq 1$ で $\rho(u) = 0$ となるものを取り，$F(x,y) = x\,\rho\big(y/(x^2+y^2)\big)$（ただし $F(0,0) = 0$）と置けばよい．F は P 上滑らかであり，その方向ごとの一階微分はちょうど h になる．

この記述から，原点における外部接空間や右側接空間も計算できる．

定理 4.6 ([Tah26c])**.** 同一視 $E_0(P) \cong \mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$ のもとで，$E_0(P)$ 上の滑らかな線形汎関数は評価写像の有限線形結合に限る：

$$\mathrm{Hom}^\infty_{\mathbb{R}}(E_0(P), \mathbb{R}) = \mathrm{span}\{\mathrm{ev}_v \mid v \in S^1\}.$$

したがって自然な同型

$$\hat{T}_0(P) \cong \bigoplus_{L \in \mathbb{RP}^1} L, \qquad \hat{T}^R_0(P) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Odd}_\sigma(S^1), \mathbb{R}\big)$$

があり，特に $\hat{T}_0(P) \subsetneq \hat{T}^R_0(P)$ が成り立つ．

外部接空間が「方向ごとの微分」の有限和で尽くされるのに対し，右側接空間は $\mathrm{Odd}_\sigma(S^1)$ の代数的双対全体であり，はるかに大きい．bouquet では可算個の枝が滑らかさと代数の差を生んだが，pencil では平面上の非可算個の方向が同じ役割を果たしている．

5 test space による無限個の接空間関手

最後に，多様体上の古典的接空間関手を diffeological space へ拡張する方法が無限個存在するという著者の結果を説明する [Tah25]．ここで **接空間関手** とは，$\mathrm{Dfg}^{\mathrm{loc}}_*$ 上の関手 $F\colon \mathrm{Dfg}^{\mathrm{loc}}_* \to \mathrm{Vect}$ であって，$\mathrm{Mfd}^{\mathrm{loc}}_*$ への制限が古典的接空間関手と同型になるものを指す．内部接空間，外部接空間，右側接空間，Vincent 型接空間はいずれもその例であり，多様体上では一致するが，特異な空間上では互いに異なる．では，このような拡張はどのくらい存在するのだろうか．

出発点は第 2 節で定義した Vincent 型接空間 $\hat{T}^{\mathrm{Vin}}_x(X) = \mathrm{Im}(\eta_x)$ である．この構成では，$\mathbb{R}$ が「X を測る試験空間」として二重に使われている．一つは X から $\mathbb{R}$ への関数で内部接ベクトルを識別する方向，もう一つは $\mathbb{R}$ から X への曲線で右側接ベクトルを生成する方向である．この $\mathbb{R}$ の役割を，一般の基点付き diffeological space (Y, y) に置き換えるのが次の構成である．

定義 5.1 ([Tah25])**.** 基点付き diffeological space (Y, y) を固定する．

1. (Y, y)-**内部型接空間**を，$T^{\mathrm{int}}_x(X)$ の商

$$T^{(Y,y)}_x(X) := T^{\mathrm{int}}_x(X) \Big/ \sim_Y$$

として定義する．ここで $v \sim_Y w$ は，任意の芽 $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ に対して

$$T^{\mathrm{int}}(f)(v) = T^{\mathrm{int}}(f)(w)$$

が成り立つことを意味する．

2. (Y, y)-**右側型接空間**を，$\hat{T}^R_x(X)$ の部分空間

$$\hat{T}^{(Y,y)}_x(X) := \Big\langle \hat{T}^R(f)(D) \;\Big|\; f\colon (Y, y) \to (X, x),\ D \in \hat{T}^R_y(Y) \Big\rangle$$

として定義する．

$(Y, y) = (\mathbb{R}, 0)$ とすれば，どちらも Vincent 型接空間と一致する．さらに，test space が非自明な接ベクトルを一つでも持てば，多様体上では通常の接空間が復元される．

命題 5.2 ([Tah25])**.** M を滑らかな多様体，$x \in M$ とする．

1. $T_y^{\mathrm{int}}(Y) \neq 0$ ならば $T_x^{(Y,y)}(M) \cong T_x M$ である．
2. $\hat{T}_y^R(Y) \neq 0$ ならば $\hat{T}_x^{(Y,y)}(M) \cong T_x M$ である．

したがって，これらは古典的接空間関手の拡張を与える．

ここで重要なのは，test space (Y, y) の幾何をほとんど仮定していないことである．Y として商空間や強い特異性を持つ diffeological space を自由に使えるという自由度が，次の二つの無限族を生み出す．第一の族は irrational torus を用いる．

定理 5.3 ([Tah25])**.** $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とし，$x \in T_\alpha$, $y \in T_\beta$ とする．このとき

$$T_x^{(T_\beta, y)}(T_\alpha) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \alpha = \dfrac{a + b\beta}{c + d\beta} \text{ となる } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ が存在するとき,} \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

したがって (T_β, y) を動かすと，非同型な接空間関手が非可算個得られる．

背景には，irrational torus の間の滑らかな写像の剛性がある．上の条件はある非定数な滑らかな写像 $T_\alpha \to T_\beta$ の存在と同値である．実際，非定数写像 $T_\alpha \to T_\beta$ は $\mathbb{R}$ 上のアファイン写像から降りてくるため，その存在条件が一次分数変換の形で書ける．この同値関係は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上に非可算個の同値類を持つので，非同型な関手も非可算個得られる．

第二の族は，軌道空間 $H_n = \mathbb{R}^n / O(n)$ を用いる右側型の構成である．

定理 5.4 ([Tah25])**.** $m, n \geq 1$ とする．このとき

$$\hat{T}_0^{(H_m, 0)}(H_n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & m \leq n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

したがって $\{\hat{T}^{(H_m,0)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は互いに同型でない接空間関手を与える．

$m \leq n$ のときは，標準的な埋め込み $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ の誘導する $\bar{\iota}\colon H_m \to H_n$ が $q_n \circ \bar{\iota} = q_m$ を満たし，右側接ベクトルを非零のまま押し出す．一方 $m > n$ のときは，任意の滑らかな芽 $(H_m, 0) \to (H_n, 0)$ について，右側接ベクトルが検出する二次の項が階数の制約で消える．この意味で，$(H_m, 0)$-右側型接空間は軌道空間の特異性の「鋭さ」を測っている．

以上の二つの族を合わせると，diffeological space 上の接空間関手は，単に複数あるだけでなく，非可算個の非同型な例を持つことが分かる．

おわりに

diffeological space 上の接空間は一意ではなく，その分岐は次の三つの軸で整理できる．

- 曲線か関数か：内部接空間と外部接空間の違いであり，T_α と H_n が対照的な例を与える．
- 局所か大域か：右 Kan 拡張は大域的な圏では局所性を失い，芽の圏 $\mathrm{Dflg}_*^{\mathrm{loc}}$ に移ることで右側接空間が得られる．
- 滑らかか代数的か：bouquet や pencil の例が示すように，Leibniz 則だけからは滑らかさは従わない．

さらに test space の選択により，古典的接空間関手の拡張は非可算個存在する．

この非一意性は，不便さというより，対象に応じて異なる微分的不変量を設計できる柔軟性と捉えられる．実際，T_α の特異性は内部型で，H_n の特異性は右側型でよく検出され，pencil の Zariski 余接空間には σ-連続性という位相的な概念が現れた．接空間関手の分類，特異性に応じた test space の選択，接束や高階の接構造への拡張などが今後の課題である．講演では，これらの結果をできるだけ具体例に沿って説明する予定である．

参考文献

[CW16] J. Daniel Christensen and Enxin Wu, Tangent spaces and tangent bundles for diffeological spaces, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **57** (2016), no. 1, 3–50.

[IZ13] Patrick Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 185, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[Sou80] J.-M. Souriau, Groupes différentiels, in *Differential geometrical methods in mathematical physics*, Lecture Notes in Math., vol. 836, Springer, Berlin, 1980, pp. 91–128.

[Tah25] Masaki Taho, Infinitely Many Tangent Functors on Diffeological Spaces, arXiv:2511.17871, 2025.

[Tah26a] Masaki Taho, Tangent spaces of diffeological spaces and their variants, *Topology Appl.* **381** (2026), 109741.

[Tah26b] Masaki Taho, Diffeological Spaces with a Non-Smooth Derivation, *Topology Appl.* **390** (2026), 109889.

[Tah26c] Masaki Taho, The Zariski Cotangent Space at the Origin of the Pencil Diffeological Space, arXiv:2608.01687, 2026.

[Vin08] Martin Vincent, *Diffeological differential geometry*, Master's thesis, University of Copenhagen, 2008.