Large-scale geometry of electric Teichmüller spaces and k-multicurve graphs

坂井 健人　(東京大学大学院数理科学研究科)*

1 導入

Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(\Sigma)$ とは，位相曲面 Σ 上の複素構造を，アイソトピーで同一視して得られる空間である．Σ のオイラー標数が負の場合，一意化定理により，複素構造の代わりに双曲構造を用いて定義することもできる．Teichmüller 空間には，二つの複素構造を結ぶ擬等角写像の歪曲度を用いて定義される Teichmüller 距離が入る．このほかにも興味深い距離がいくつか知られているが，本稿では Teichmüller 距離に焦点を当て，それが定める距離幾何学について考える．

曲面 Σ が（1 点穴あき）トーラスの場合，$\mathcal{T}(\Sigma)$ は自然に上半平面と同一視され，Teichmüller 距離まで込めれば，双曲平面と等長になる．したがって，この場合の距離構造はよく理解されているといってよい．一方，一般の曲面に対しては，これほど単純な記述は存在しない．それでも，双曲平面に見られる性質がどの程度まで Teichmüller 空間に残っているかを問うのは自然である．とりわけ，Teichmüller 空間のさまざまな意味での “双曲性” は，古くから研究されてきた．ここでは，その研究の一端を紹介する．

Royden [Roy71] は，Teichmüller 空間の自然な複素構造から定まる小林距離が Teichmüller 距離と一致することを示した．したがって，Teichmüller 空間は複素解析的な意味で小林双曲的である．しかし，距離幾何学的な意味での非正曲率性や双曲性については，状況が異なる．Masur [Mas75] は，Teichmüller 空間が Busemann 凸性を満たさず，したがって CAT(0) 空間ではないことを示した [*1]．また，Teichmüller 空間は Gromov の意味でも双曲的でないことが知られている [MW95].

この Gromov 双曲性の破れを幾何学的に説明する結果として，Minsky の積領域定理 (product region theorem) がある [Min96]．互いに素な単純閉曲線の族 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ を固定し，α の各成分の長さが十分に短いリーマン面からなる領域を，α に付随する thin part と呼ぶ．積領域定理は，この thin part が，擬等長の意味で，より低次元の Teichmüller 空間や双曲平面のいくつかの直積として記述されることを主張する．このような非有界な直積領域により，Teichmüller 空間が Gromov 双曲的でなくなっている．

一方，Masur–Minsky [MM99] は，各単純閉曲線 γ に対し，γ の長さが十分に短くなる

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
e-mail: kento@ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:25KJ0069) の助成を受けたものである．
久野恵理香氏（芝浦工業大），倉持凜氏（東京大）との共同研究を含む．
[*1] 一方，Weil–Petersson 計量に関しては，Teichmüller 空間の完備化が CAT(0) 空間となる [Yam04].

thin part をそれぞれ “潰す” ことにより，Gromov 双曲的な距離空間が得られることを示した．ここで，部分空間を “潰す” とは，正確には electrification と呼ばれる操作を施すことである（§ 2.2 を参照）．

この現象をもう少し詳しく考えてみよう．単純閉曲線の族 α に別の曲線を加えると，そのすべての成分を短くするという条件はより強くなるため，対応する thin part は小さくなる．したがって，Masur–Minsky が扱った，1 本の単純閉曲線に付随する thin part は，この種の thin part の中で極大なものとみなせる．そこで，互いに素な単純閉曲線の本数を増やし，より小さな thin part のみを electrify した場合にも，得られる距離空間は Gromov 双曲的であるか，という問いが自然に生じる．さらに，ある段階で双曲性が失われるならば，その境目となる曲線の本数はいくつであろうか．本稿では，これらの問いに対して得られた結果を，[KKS26, Sak26] に基づいて報告する．

2 距離空間

2.1 擬等長，Gromov 双曲性

X, Y を距離空間とし，$K \geq 1, L \geq 0$ とする．写像 $f\colon X \to Y$ が **(K, L)-擬等長埋め込み (quasi-isometric embedding)** であるとは，任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$K^{-1} d_X(x_1, x_2) - L \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2) + L$$

を満たすときにいう．$C > 0$ として，写像 $f\colon X \to Y$ が **C-擬稠密 (C-quasi-dense)** であるとは，$f(X)$ の C-近傍が Y と一致するときにいう．擬稠密な擬等長埋め込みを**擬等長写像 (quasi-isometry)** といい，距離空間 X と Y の間に擬等長写像が存在するとき，それらは**擬等長 (quasi-isometric)** であるという．また，I を区間として，$\gamma\colon I \to X$ が **K-擬測地線 (K-quasi-geodesic)** であるとは，γ が (K, K)-擬等長埋め込みであるときにいう．

距離空間 X に対して，擬等長埋め込みが可能なユークリッド空間の最大次元を X の **quasi-flat rank** という．距離空間 X の**弱い quasi-flat rank** [*2]とは，

$$\max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \forall R > 0, \exists \text{ 擬等長埋め込み } B^n_R \to X\} \tag{1}$$

のことである．ここで，B^n_R は $\mathbb{R}^n$ の半径 R の閉球を表す．

定義 2.1. $\delta \geq 0$ とする．測地距離空間 X が **δ-双曲的 (δ-hyperbolic)** であるとは，X 内の任意の測地三角形において，その任意の 1 辺が，残りの 2 辺の合併の δ-近傍に含まれることである．ある $\delta > 0$ が存在して，X が δ-双曲的になるとき，X は **(Gromov) 双曲的**であるという．

測地距離空間 X の Gromov 双曲性は擬等長写像により保たれる性質である．

[*2] 一般的な用語ではなく，ここだけのものである．

2.2 Electrification，相対双曲性

X を測地的距離空間とし，$\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の閉部分集合の族とする．次のようにして得られる距離空間を X の族 $\mathcal{H}$ に沿った **electrification** (および coning off) といい，$\hat{X}^{\mathcal{H}}$ とかく [Far98] (図 1)：各添え字 $\alpha \in A$ に対して，外部の頂点 v_α を用意し，H_α の各元と v_α を長さ $1/2$ の辺で結ぶ．得られた空間にはパス距離を備えることにする．つまり，この操作は各集合 H_α が直径 1 に潰していることになる．

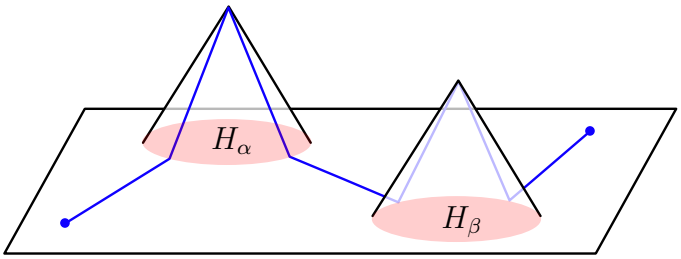


図 1　Electrification，測地線が稲妻のように見える．

次に Farb [Far98] により導入された相対双曲性の定義を紹介する．測地的距離空間 X とその閉部分集合の族 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ の組 $(X, \mathcal{H})$ が与えられているとする．パス $w \subset X$ に対して，H_α に属する部分を v_α へ至る辺に置き換えて得られるパスを $\hat{w} \subset \hat{X}^{\mathcal{H}}$ とかく．パス $w \subset X$ が**相対 K-擬測地線 (relative k-quasi-geodesic)** であるとは，$\hat{w}$ が $\hat{X}^{\mathcal{H}}$ における K-擬測地線になるときにいう．また，w（もしくは $\hat{w}$）が H_α を通過するとき，w（もしくは $\hat{w}$）は H_α に**入り込む (penetrate)** という．さらに，パス w が **backtracking しない**とは，w が入り込む H_α に対して，w が一度 H_α を離れたら二度と H_α に戻らないときにいう．

定義 2.2. 測地的距離空間 X とその閉部分集合の族 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ の組 $(X, \mathcal{H})$ が **bounded region penetration property** をもつとは，任意の $K > 0$ に対して，次の条件を満たす定数 $c = c(K) > 0$ が存在するときにいう：backtracking しない相対 K-測地線 u, v があり，これらの始点同士の距離と終点同士の距離が 1 以下であるとする．このとき，

(1) u が H_α に入り込むが，w が入り込まないとき u は H_α の中を高々 c しか移動しない．
(2) u と w がともに H_α に入り込むとき，u と w の H_α に入った最初の点の距離と H_α から出る最後の点の距離がそれぞれ高々 c である．

定義 2.3. 測地距離空間 X が閉部分集合の族 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ について **(強) 相対双曲的 ((strongly) relatively hyperbolic)** であるとは，次の 2 つを満たすときにいう：

(1) $\hat{X}^{\mathcal{H}}$ が双曲的である．
(2) $(X, \mathcal{H})$ が bounded region penetration property を満たす．

なお，(1) のみ満たす場合，弱相対双曲的 **(weakly relatively hyperbolic)** であると

いう．また，単に測地距離空間 X が相対双曲的であるとは，ある X の閉部分集合の族 $\mathcal{H}$ が存在して，X が $\mathcal{H}$ について相対双曲的になるときにいう．

双曲性と同じく，相対双曲性は擬等長写像で保たれる性質である．

3 多重曲線グラフ

以降，曲面 Σ 上の**曲線**といえば，本質的（つまり，一点や境界に homotopic でない）単純閉曲線の isotopy 類を指すことにする．

定義 3.1. Σ の**曲線グラフ (curve graph)** とは次で定義されるグラフのことである [*3]．

- 頂点集合：Σ 上の曲線全体からなる集合 $\mathcal{C}(\Sigma)$
- 辺：$\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\Sigma)$ $(\alpha \neq \beta)$ は，α と β の幾何的交点数 $i(\alpha, \beta)$ について

$$i(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2 & ((g,b) = (0,4)) \\ 1 & ((g,b) = (1,1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成り立つとき，辺で結ばれる [*4]．

$\mathcal{C}(\Sigma)$ には，各辺の長さを 1 とすることで距離が定まる．また，以降現れるグラフについては，全てこのグラフ距離を入れることで距離空間とみなすことにする．

Σ 上の**多重曲線 (multicurve)** とは，互いに交わらないような Σ 上の曲線からなる有限集合のことである．とくに，その濃度が k であるとき **k-多重曲線 (k-multicurve)** という．$3g-3+b \geq 0$ のとき，曲面のオイラー標数を考えることで $0 \leq k \leq 3g-3+b$ であることがわかる．$k = 3g-3+b$ のとき，k-多重曲線は曲面のパンツ分解を与えるため，**パンツ分解 (pants decomposition)** と呼ばれる．

定義 3.2. $1 \leq k \leq 3g-3+b$ とする．Σ 上の **k-多重曲線グラフ (k-multicurve graph)** とは次で定義されるグラフのことである（図 2）．

- 頂点集合：Σ 上の k-多重曲線全体からなる集合 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$
- 辺：$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ $(\alpha \neq \beta)$ は次の条件を満たすとき辺で結ばれる：$\nu \coloneqq \alpha \cap \beta \in \mathcal{C}^{[k-1]}(\Sigma)$ かつ $d_{\mathcal{C}(\Sigma \setminus \nu)}(\alpha \setminus \nu, \beta \setminus \nu) = 1$.

定義から，$k = 1$ のとき 1-多重曲線グラフは曲線グラフ $\mathcal{C}(\Sigma)$ に他ならない．また，$k = 3g-3+b$ のとき対応する k-多重曲線グラフは，Hatcher と Thurston により導入された**パンツグラフ (pants graph)** に一致する．これは，しばしば $\mathcal{P}(\Sigma)$ とかかれる．

[*3] 便宜的に，ここでのみ Σ は連結成分が有限個ある状況を許容する．

[*4] より正確に言えば，条件分岐は，Σ がパンツ曲面の連結成分を無視して $\Sigma_{0,4}, \Sigma_{1,1}$ それぞれと等しいとき，である．

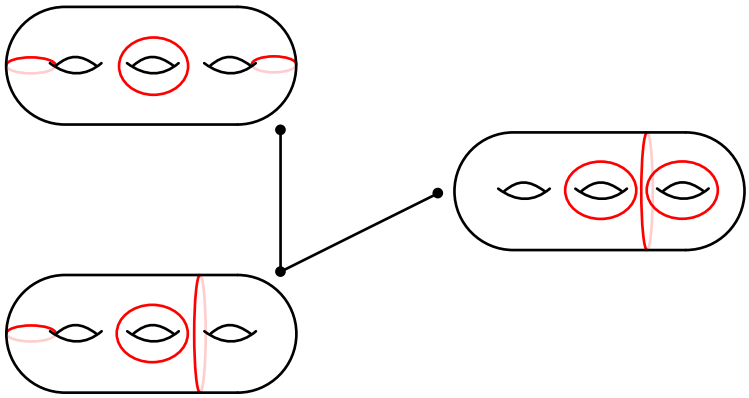


図 2　3-多重曲線グラフの一部

4　Twsit-free グラフ

（多重）曲線を頂点とするようなグラフは上述したもの以外にも色々と知られている．以降 Σ は $\chi(\Sigma) < 0$ であることを仮定する．

定義 4.1. $\mathcal{G}(\Sigma)$ を（多重）曲線を頂点とするようなグラフとする．連結な本質的部分曲面 $S \subset \Sigma$ が $\mathcal{G}(\Sigma)$ の **witness** であるとは，$\mathcal{G}(\Sigma)$ の全ての頂点が S と本質的に交わるときにいう．$\mathcal{G}(\Sigma)$ の witness 全体からなる集合を $\mathfrak{S}(\mathcal{G}(\Sigma))$ とかく．

Vokes は （多重）曲線を頂点とするようなグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ に対して，twsist-free という条件を設定した [Vok22].

定義 4.2.（多重）曲線を頂点とするようなグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ が **twist-free** であるとは，次の条件をみたすときにいう：

1. グラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ は連結である．
2. 写像類群が $\mathcal{G}(\Sigma)$ の頂点に等長に作用する．
3. 2 つの頂点 $\alpha, \beta \in \mathcal{G}(\Sigma)$ が辺で結ばれるとき，それらの幾何的交点数 $i(\alpha, \beta)$ は一様に有界である．
4. アニュラスは $\mathcal{G}(\Sigma)$ の witness にならない．

定理 4.3 ([Vok22])**.**（多重）曲線を頂点とするようなグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ が twsit-free であるする．このとき，$\mathcal{G}(\Sigma)$ は witness の曲線グラフへの subsurface projection について階層的双曲空間である．

階層的双曲空間とは Behrstock–Hagen–Sisto [BHS17, BHS19] によって導入された距離空間のクラスであり，双曲空間の一般化である．彼らの理論により，twist-free なグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ の大尺度幾何的性質に関する様々なことが系としてわかる．Twist-free なグラフ

$\mathcal{G}(\Sigma)$ に対して，

$$\nu(\mathcal{G}(\Sigma)) \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{S}(\mathcal{G}(\Sigma)) \text{ は互いに素 }\}$$

と定める．

系 4.4 ([Vok22])**.** Twist-free なグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ の弱い quasi-flat rank は $\nu(\mathcal{G}(\Sigma))$ である．

系 4.5 ([Vok22])**.** Twist-free なグラフ $\mathcal{G}(\Sigma)$ が Gromov の意味で双曲的であることの必要十分条件は $\nu(\mathcal{G}(\Sigma)) = 1$ である．

また，[RV22] では相対双曲性や thick 性についても witness から判定できることが示されている．以上のことから，$\mathcal{G}(\Sigma)$ の大尺度幾何的性質は，witness を考察することに帰着できる．

定義から k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ も twist-free である．一方で，複雑度 ξ-グラフ $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ は一般に twist-free でないことに注意する．k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ の witness は複雑度の観点で完全に決定できる．

命題 4.6 ([KKS26])**.** 連結な本質的部分曲面 $S \subset \Sigma$ が $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ の witness であるための必要十分条件は $\xi(S) \geq 3g - 2 + b - k$ を満たすことである．

したがって，$\nu(\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma))$ を求めることは，複雑度が ξ 以上の部分曲面が互いに素に最大幾つ取れるかを決定することと等価である．これを実行して，我々は次を得る．

定理 4.7 ([KKS26])**.** $\xi(\Sigma_{g,b}) = 3g - 3 + b$ とおき，$1 \leq k \leq \xi_0$ とする．k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ および複雑度-$(\xi(\Sigma_{g,b}) - k)$ グラフ $\mathcal{P}^{[\xi(\Sigma_{g,b})-k]}(\Sigma_{g,b})$ の quasi-flat rank は

$$m(g,b,k) \coloneqq \begin{cases} \min\left\{ \left\lfloor \frac{-\chi(\Sigma_{g,b})}{a(\xi(\Sigma_{g,b})-(k-1))} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\xi(\Sigma_{g,b})+1}{\xi(\Sigma_{g,b})-(k-2)} \right\rfloor \right\} & (b,k) \neq (0,1) \\ 1 & (b,k) = (0,1) \end{cases}$$

である．ここで，$a(x) = \lceil (2x+1)/3 \rceil$ である．さらに，グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ と $\mathcal{P}^{[\xi(\Sigma_{g,b})-k]}(\Sigma_{g,b})$ について，これらが双曲的になるための必要十分条件は $m(g,b,k) = 1$ である．

また，[RV22] の結果を $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ に適用して考察することで，相対双曲的な場合も特徴づけることができる．

定理 4.8 ([KKS26])**.** k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ が相対双曲的になるのは，以下のいずれかの場合である．

- g が偶数かつ b が 2 以上の偶数で $k = (3g+b)/2$,
- g が偶数かつ $b = 0$ で $k \in \{3g/2, (3g+2)/2\}$,
- g が奇数かつ $b \in \{0, 2\}$ で $k = (3g+3)/2$,
- g が奇数かつ b が 3 以上の奇数で $k = (3g+b)/2$.

5 Electric Teichmüller 空間

この節では，種数 g の閉曲面から n 点を取り除いて得られる曲面 $\Sigma_{g,n}$ を取り扱う．便宜的なもので，前節までの境界を針孔に置き換えただけと考えて差し支えない．$\Sigma_{g,n}$ の **Teichmüller 空間 (Teichmüller space)** $\mathcal{T}_{g,n}$ は

$$\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\Sigma) = \{\text{針孔付き Riemann 面} \approx \Sigma_{g,n}\}/\text{isotopy}$$

で定義される．Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,n}$ には, **Teichmüller 距離 (Teichmüller distance)** $d_{\mathcal{T}}$ という擬等角写像の観点で複素構造の差を測る自然な距離が入る．

$1 \leq k \leq 3g-3+n$ とし，十分小さい正の数 ϵ_0 を固定しておく．k-多重曲線 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,n})$ の **thin part** とは

$$\mathrm{Thin}_\alpha \coloneqq \{X \in \mathcal{T}_{g,n} \mid \text{各 } \alpha_i \in \alpha \text{ に対して } \mathrm{Ext}_X(\alpha_i) \leq \epsilon_0\}$$

により定義される Teichmüller 空間の部分集合である．ここで，単純閉曲線 γ に対して $\mathrm{Ext}_X(\gamma)$ は X に関する γ の**極値的長さ (extremal length)** を表す．つまり，α に属する各曲線の長さが十分に小さい Riemann 面からなる部分集合が Thin_α である．

この thin part により定まる Teichmüller 空間の部分集合の族 $\mathcal{H}_k \coloneqq \{\mathrm{Thin}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)}$ に沿って Teichmüller 空間に electrification を施した空間を **k-electric Teichmüller 空間**とよび,

$$\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma) = \hat{\mathcal{T}}^k_{g,n} \coloneqq \hat{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}_k}_{g,n}$$

とかく．このとき，次が成り立つ.

定理 5.1 ([MM99, Sak26])**.** k-electric Teichmüller 空間 $\hat{\mathcal{T}}^k_{g,n}$ は k-多重曲線グラフ $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ と擬等長である.

なお $k = 1$ の場合が [MM99] で示されている．つまり，k-多重曲線グラフは Teichmüller 空間の thin part 同士の距離関係を荒い意味でエンコードしているということである．したがって，前節で述べた k-多重曲線グラフの大尺度幾何的（すなわち，擬等長で不変）な性質は k-electric Teichmüller 空間に引き継がれる．導入で述べたように，Teichmüller 空間の thin part はその双曲性の邪魔をしている部分であるため [Min96], thin part を electrification により適切に潰すことで双曲性をもち，潰す量を減らすことで双曲性を失うと考えられる.

定理 5.1 の証明は，Masur–Minsky [MM99] の類似であるが，鍵となるのは曲線グラフの距離と幾何的交点数の間の不等式である．曲線グラフ（つまり $k = 1$）の場合は，これは Hempel の不等式とよばれ，曲線の手術を用いた比較的簡単な議論で示すことができる．しかし，k-多重曲線の場合，曲線の手術による議論は通らないため，別の方法を模索する必要が出てくる．比較的最近，Lackenby と Yazdi [LY26] によりパンツグラフに対する Hempel の不等式のアナロジーが得られたため，これを用いて k-多重曲線グラフにおける Hempel の不等式のアナロジーも得ることができた.

このような Teichmüller 空間や写像類群の大尺度幾何的な組み合わせモデルは様々に得られている：

- Durham により構成された augmented マーキンググラフ $\mathcal{AM}(\Sigma)$ は Teichmüller 空間と擬等長である [Dur16].
- Masur と Minsky により構成されたマーキンググラフ $\mathcal{M}(\Sigma)$ は写像類群の Cayley グラフと擬等長である [MM00].
- パンツグラフ $\mathcal{P}(\Sigma)$ と Weil-Petersson 距離を備えた Teichmüller 空間 $\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ は擬等長である [Bro03].
- 写像類群において，複雑度 ξ 以下の部分曲面に対応する部分群の左コセットによる electrification を施した距離空間 $\Gamma(\Sigma, \xi)$ は複雑度-ξ グラフ $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ と擬等長である [Mj09].

これらをまとめると，以下の表のようになる：

組み合わせモデル	写像類群	Teichmüller 空間
$\mathcal{AM}(\Sigma)$		$\mathcal{T}(\Sigma)$
$\mathcal{M}(\Sigma)$	$\mathrm{Mod}(\Sigma)$	
$\mathcal{C}^{[\xi_0]}(\Sigma) = \mathcal{P}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, -1)$, $\Gamma(\Sigma, 0)$	$\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}(\Sigma)$, $\hat{\mathcal{T}}^{\xi_0}(\Sigma)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$, $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, \xi_0 - k)$	$\hat{\mathcal{T}}^{k}(\Sigma)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{C}(\Sigma)$, $\mathcal{P}^{[\xi_0-1]}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma,\ \xi_0 - 1)$	$\hat{\mathcal{T}}^{1}(\Sigma)$

表 1　各行における距離空間は互いに擬等長である.

参考文献

[BHS17] Jason Behrstock, Mark F. Hagen, and Alessandro Sisto. Hierarchically hyperbolic spaces, I: Curve complexes for cubical groups. *Geom. Topol.*, 21(3):1731–1804, 2017.

[BHS19] Jason Behrstock, Mark Hagen, and Alessandro Sisto. Hierarchically hyperbolic spaces II: Combination theorems and the distance formula. *Pacific J. Math.*, 299(2):257–338, 2019.

[Bro03] Jeffrey F. Brock. The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3):495–535, 2003.

[Dur16] Matthew Gentry Durham. The augmented marking complex of a surface. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 94(3):933–969, 2016.

[Far98] B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.*, 8(5):810–840, 1998.

[KKS26] Erika Kuno, Rin Kuramochi, and Kento Sakai. Large-scale geometry of graphs interpolating between curve graphs and pants graphs. 2026.

[LY26] Marc Lackenby and Mehdi Yazdi. Bounds for the number of moves between pants decompositions, and between triangulations. *Journal of Topology and Analysis*, 0(0):1–68, 2026.

[Mas75] Howard Masur. On a class of geodesics in Teichmüller space. *Ann. of Math. (2)*, 102(2):205–221, 1975.

[Min96] Yair N. Minsky. Extremal length estimates and product regions in Teichmüller space. *Duke Math. J.*, 83(2):249–286, 1996.

[Mj09] Mahan Mj. Mapping class groups and interpolating complexes: rank. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 24(4):341–357, 2009.

[MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.

[MM00] H. A. Masur and Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure. *Geom. Funct. Anal.*, 10(4):902–974, 2000.

[MW95] Howard A. Masur and Michael Wolf. Teichmüller space is not Gromov hyperbolic. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 20(2):259–267, 1995.

[Roy71] H. L. Royden. Automorphisms and isometries of Teichmüller space. In *Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*, volume No. 66 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 369–383. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[RV22] Jacob Russell and Kate M. Vokes. Thickness and relative hyperbolicity for graphs of multicurves. *J. Topol.*, 15(4):2317–2351, 2022.

[Sak26] Kento Sakai. Electric teichmüller spaces and k-multicurve graphs. 2026.

[Vok22] Kate M. Vokes. Hierarchical hyperbolicity of graphs of multicurves. *Algebr. Geom. Topol.*, 22(1):113–151, 2022.

[Yam04] Sumio Yamada. On the geometry of Weil-Petersson completion of Teichmüller spaces. *Math. Res. Lett.*, 11(2-3):327–344, 2004.