第 73 回トポロジーシンポジウム講演予稿
2026 年 8 月 19 日

曲面のループ演算、フレーミングそして写像類群

河澄 響矢 (東大数理)

はじめに

今回は詳細を省略しますが、写像類群の重要なコホモロジー類である森田 Mumford 類 (Mumford-Morita-Miller 類, MMM 類) [48, 43, 41] およびそのねじれ係数版 [20] の「素 (もと)」として第一 Johnson 準同型 [16] というものがあります [46, 31, 32]。Johnson 準同型の背景に曲面の基本群の Magnus 展開があるとの北野晃朗さんの指摘 [35] を受けて、私は Magnus 展開を一般化した自由群の expansion を考え始めました [21]。expansion にはもっと重要な意味があるはずだという信念はありましたが、それが何なのかわかりませんでした。量子不変量と私の研究も踏まえて G. Massuyeau さんが symplectic expansion の概念を提案しました [38] が、依然として余りわかりません。久野雄介さんが symplectic expansion にともなう拡大第一 Johnson 準同型 [45] の Dehn ツイストでの値について具体的な公式を与えたことが大きな転機になりました。そこでは $(\log x)^2/2$ という函数が現れます [28]。ここからが今日の講演の内容になります。結論だけ先に述べれば、Lie 理論での柏原-Vergne 問題 [19, 5] は、実は、種数 0 曲面の基本群の expansion であって Goldman-Turaev 双代数の形式性を与えるものを求める問題だったのです [2]。ここから正種数の柏原-Vergne 問題なるものが expansion の問題として定式化されます [1, 4]。以上の議論では曲面の framing が現れます。これは古田幹雄さんの指摘 [47, p.569] に由来します。本講演の後半では、曲面の framing について、最近の自分の仕事 [24, 26, 33, 34] を含めて簡単に整理します。企画講演なのに自分の仕事の話ばかりになってしまい恐縮です。

目 次

1 曲面の写像類群と Dehn ツイスト **2**

2 Goldman Lie 代数とその基本群の群環への作用 **3**

3 Turaev 余括弧積と Johnson 準同型 **6**

4 Goldman-Turaev 形式性としての柏原 Vergne 問題 **7**

5 曲面の $\mathbb{K}$-framing と $\mathbb{K}$-二次形式 **10**

1 曲面の写像類群と Dehn ツイスト

Σ を**空でない境界をもつ**向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面とする。曲面の分類定理により、Σ は種数と境界成分数によって完全に分類される。種数 g 境界成分数 $n+1$ の向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面を $\Sigma_{g,n+1}$ と表す。$g, n \geq 0$ である。境界成分に 0 から n までの番号をつけ $\partial_j\Sigma$, $0 \leq j \leq n$, とする $\partial\Sigma = \coprod_{j=0}^{n} \partial_j\Sigma$. 基点を $* \in \partial_0\Sigma$ ととる。基本群 $\pi := \pi_1(\Sigma, *)$ は階数 $2g+n$ の自由群である。

曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$ の写像類群を $\Gamma = \Gamma_{g,n+1}$ とする。つまり、境界 $\partial\Sigma$ を点毎に固定する Σ の C^∞ 微分同相全体の群 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma \operatorname{rel} \partial\Sigma)$ を、単位元とイソトピックな C^∞ 微分同相のなす正規部分群で商をとったものが Γ である。群 Γ の生成元として、単純閉曲線 $C \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ に沿う右手 Dehn ツイスト $t_C \in \Gamma$ がとれる。右手 Dehn ツイスト $t_C \in \Gamma$ は、C の管状近傍 $N(C)$ においては図 1 で与えられ、その外側では恒等写像である C^∞ 微分同相の同値類である。曲面の向き Σ に関して、C に向かっていく路が右に曲がるのが右手 Dehn ツイストである。そこで Dehn ツイスト t_C は C の向きのとり方によらない。また、左に曲がる左手 Dehn ツイストは右手 Dehn ツイストの逆元である。Dehn-Lickorish の定理に

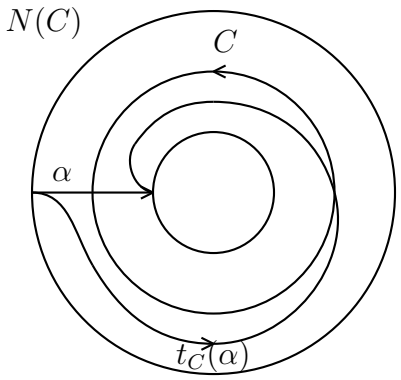


図 1: 単純閉曲線 C の管状近傍 $N(C)$ における右手 Dehn ツイスト t_C

より、写像類群は右手 Dehn ツイストたちで生成される。より詳しい結果については門田直之氏の第 69 回トポロジーシンポジウム予稿 [42] を参照。たとえば、$g \geq 1$ のとき $\Gamma_{g,1}$ (resp. $\Gamma_{g,n+1}$) は非分離的単純閉曲線と境界成分に並行な単純閉曲線の右手 Dehn ツイストたちで生成される [17] (resp. [36])。ここで単純閉曲線 C が**非分離的**（non-separting）であるとは、補集合 $\Sigma \setminus C$ が連結であることをいう。

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。右手 Dehn ツイスト t_C の第一ホモロジー群 $H := H_1(\Sigma; \mathbb{K})$ への作用を表すのが Picard-Lefschetz の公式

$$\forall X \in H,\ (t_C)_* X = X - (X \cdot [C])[C] \in H \tag{1.1}$$

である。ここで $\cdot$ は (代数的) 交叉数、$[C] \in H$ は単純閉曲線（に向きを入れたもの）の定めるホモロジー類である。

我々は Picard-Lefschetz の公式 (1.1) の高次化を考えたい。基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ の群環 $\mathbb{K}\pi := \{\sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma \gamma;\ \text{有限個の } \gamma \text{ を除き } a_\gamma = 0\}$ および添加イデアル $I\pi := \mathrm{Ker}(\mathrm{aug} : \mathbb{K}\pi \to$

$\mathbb{K}$, $\sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma\gamma \mapsto \sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma$) を考える。これらには写像類群 Γ が自然に作用しており、添加写像 aug による同型 $\mathbb{K}\pi/I\pi \cong \mathbb{K}$ および $\mathbb{K}\Gamma$-加群としての次の同型がなりたつ

$$H \cong (I\pi)/(I\pi)^2, \quad [\gamma] \mapsto (\gamma - 1) \bmod (I\pi)^2,$$

そこで次の問題は $\mathbb{K}\pi/(I\pi)^3$ における右手 Dehn ツイスト t_C の作用の記述であるが、久野 [28, 定理 6.5.3] は

$$(t_C)_* = \exp\left(\text{"}\tfrac{1}{2}\left(\log C\right)^2\text{"}\right) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}\pi/(I\pi)^3)$$

という記述を得た。これを完備群環 $\widehat{\mathbb{K}\pi} := \varprojlim_{m\to\infty} \mathbb{K}\pi/(I\pi)^m$ に拡張したのが次の定理である。

定理 1.1 ($\Sigma_{g,1}$ については久野-河澄 [28], 一般の境界つき曲面については Massuyeau-Turaev [40], 久野-河澄 [30])**.**

$$(t_C)_* = \exp\left(\text{"}\tfrac{1}{2}\left(\log C\right)^2\text{"}\right) \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{K}\pi}).$$

定理の主張についていくつか補足する。まず、[28] では $\Sigma_{g,1}$ の基本群の symplectic expansion [38] についての定理として述べている。つぎに、一般に $\mathbb{K}$-結合代数 A について導分 Lie 代数 $\mathrm{Der}(A) := \{D : A \to A;\ \mathbb{K}\text{-線型写像}, \forall a_1, \forall a_2 \in A, D(a_1a_2) = (Da_1)a_2 + a_1(Da_2)\}$ を考える。A に位相が入っているときは $\mathrm{Der}(A)$ も連続なものだけを考える。このとき、適当な位相のもとで、指数函数 $\exp : \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Aut}(A)$, $D \mapsto \exp(D) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m$, を考えることができる場合がある。それが定理右辺の exp である。そうすると $\text{"}\frac{1}{2}\left(\log C\right)^2\text{"}$ は $\mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ の元であるが、それを正当化するのが曲面 Σ の（完備化された） Goldman-Lie 代数である。

2 Goldman Lie 代数とその基本群の群環への作用

一般に $\mathbb{K}$-単位結合代数 A について、集合 $\{ab - ba;\ a, b \in A\} \subset A$ の生成する $\mathbb{K}$-線型部分空間を $[A, A]$ と表し、それによる商ベクトル空間を

$$|A| := A/[A, A]$$

と表す。交換子によって A を Lie 代数とみたときの可換化であり、一般には単なる $\mathbb{K}$-ベクトル空間である。単位元 $1 \in A$ の定める元を $\mathbf{1} \in |A|$ と表す。群環 $\mathbb{K}\pi$ について $|\mathbb{K}\pi|$ は π の共役類全体の集合

$$\hat{\pi} := \pi/\mathrm{conj} = [S^1, \Sigma] = \{\Sigma \text{ の自由ループの自由ホモトピー類 }\}$$

の生成する自由 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ である。その意味で $\gamma \in \pi$ の自由ホモトピー類を $|\gamma| \in \hat{\pi} \subset |\mathbb{K}\pi|$ と表すことにする。自由ループ α と $\beta \in \hat{\pi}$ の Goldman bracket $[\alpha, \beta] \in \mathbb{Z}\hat{\pi} \subset \mathbb{K}\hat{\pi}$ は、α と β を generic immersions (特異点として横断的二重点のみを許すはめ込み) で代表させて

$$[\alpha, \beta] := \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \varepsilon_p(\alpha, \beta)|\alpha_p\beta_p| \in \mathbb{Z}\hat{\pi} \subset \mathbb{K}\hat{\pi} = |\mathbb{K}\pi|$$

とおくことで定義される。ここで代表元 α と β の交点の集合 $\alpha \cap \beta$ は横断的二重点のみからなるから有限集合であり、各交点 $p \in \alpha \cap \beta$ の接空間 $T_p\Sigma$ において α と β の定める向きが Σ の向きに一致するかどうかで、局所交叉数 $\varepsilon_p(\alpha, \beta) \in \{\pm 1\}$ が定まる。また、α_p と β_p は交点 p を基点とした $\pi_1(\Sigma, p)$ の元を表し、積 $\alpha_p\beta_p \in \pi_1(\Sigma, p)$ の定める自由ループを $|\alpha_p\beta_p| \in \hat{\pi}$ と表している。このとき、Goldman は次を示している。

定理 (Goldman [13])**.** (1) bracket $[\cdot, \cdot] : \hat{\pi} \times \hat{\pi} \to \mathbb{Z}\hat{\pi}$ は well-defined である。
(2) 組 $(|\mathbb{K}\pi|, [\cdot, \cdot])$ は $\mathbb{K}$-Lie 代数である。

これによって $[\cdot, \cdot]$ は Goldman bracket と呼ばれ、組 $(|\mathbb{K}\pi|, [\cdot, \cdot])$ は曲面 Σ の Goldman Lie 代数と呼ばれる。(1) の証明は図 2 の 3 種類の局所変形で不変なことを証明する。$(\omega 1)$ は monogon (=fishtail) の生成消滅、$(\omega 2)$ は bigon の生成消滅、そして $(\omega 3)$ は二重点の乗り越えである。Goldman bracket は曲面上の平坦束のモジュライ空間上の函数たちの

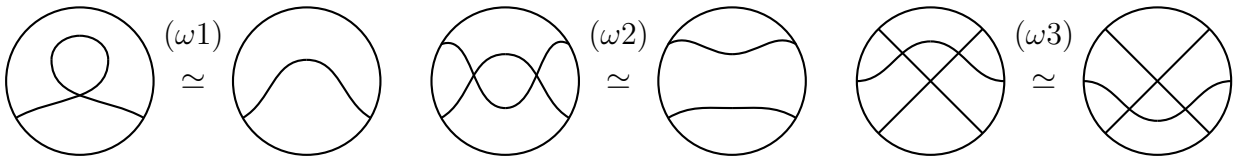


図 2: 3 種類の局所変形

Poisson 括弧積に由来するので、Lie 括弧積でなければならないが、とりあえず (2) は定義から直接計算して証明する。

なお、Goldman Lie 代数の中心を求めることは重要な問題であった。中心が、線型空間として、自明ループないし境界ループの冪で生成されることが Etingof [12] (閉曲面), Kabiraj [18] (パンツ曲面以外) および和久田 [55] (パンツ曲面) によって証明されている。

定理 1.1 に現れる "$\frac{1}{2}(\log C)^2$" は、添加イデアル $I\pi$ に関する Goldman Lie 代数の完備化 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}| = \widehat{\mathbb{K}\hat{\pi}} = \varprojlim_{m\to\infty} |\mathbb{K}\pi|/|(I\pi)^m|$ の元として定義される。つまり、$|\alpha| = C \in \hat{\pi}$ をみたす based loop $\alpha \in \pi$ をとると、完備群環 $\widehat{\mathbb{K}\pi}$ の元として $\log\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}(\alpha - 1)^m$ および $\frac{1}{2}(\log\alpha)^2$ が定義でき、対応する元として $\frac{1}{2}(\log C)^2 := |\frac{1}{2}(\log\alpha)^2| \in |\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ が定義できる。これは C の自由ホモトピー類だけで決まり、α のとり方によらない。完備化された Goldman Lie 代数 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ には Goldman bracket $[\cdot, \cdot] : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \times |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to |\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ が well-defined に拡張する。

さて、定理 1.1 の証明の鍵の一つは、次のように定義される based Goldman bracket [28]

$$\sigma : |\mathbb{K}\pi| \to \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi), \quad \alpha \mapsto \sigma(\alpha),$$

であった。$\alpha \in \hat{\pi}$ と $\gamma \in \pi$ を generic immersions にとり

$$\sigma(\alpha)(\gamma) := \sum_{p \in \alpha \cap \gamma} \varepsilon_p(\alpha, \gamma)\gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*} \in \mathbb{Z}\pi \subset \mathbb{K}\pi$$

と定義する。ここで γ_{*p} および γ_{p*} は、それぞれ基点 $*$ から交点 p まで、および交点 p から基点 $*$ までの γ の segments を表す。α_p で寄り道するわけである。

定理 2.1 (久野-河澄 [28])**.** (1) σ は well-defined である。
(2) $\sigma : |\mathbb{K}\pi| \to \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi)$ は Lie 代数準同型である。
(3) (2) の σ は (連続な) Lie 代数準同型 $\sigma : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ を誘導する。

証明は Goldman Lie 代数の場合と全く同じである。

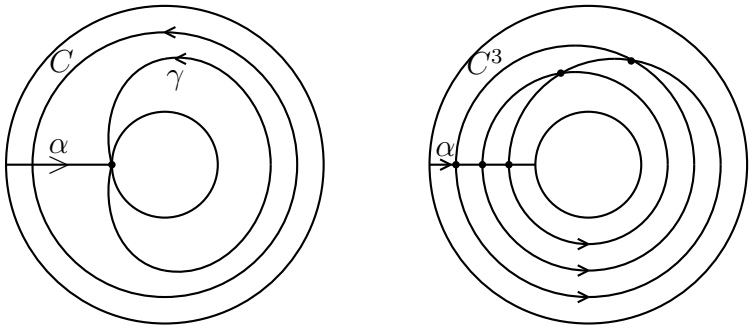


図 3: $\sigma(C^n)(\gamma)$ の計算

定理 *1.1* の証明. Seifert-van Kampen の定理から、単純閉曲線 C の管状近傍 $N(C)$ において証明すれば充分である [30]。そこで図 3 の状況を考えると、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\sigma(C^n)(\alpha) = n\alpha\gamma^n$ である。これは、任意の $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ について $\sigma(f(C))(\alpha) = \alpha\gamma f'(\gamma)$ であることを意味する。一方、$t_C(\alpha)\gamma = \alpha\gamma$ だから対数をとって $(\log t_C)(\alpha) = \alpha(\log\gamma)$ となる。両者を比較すると微分方程式 $xf'(x) = \log x$ が得られる。不定積分して

$$f(x) = \int_1 \frac{1}{x}\log x dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$$

となる。つまり $\log t_C = \sigma(\frac{1}{2}(\log x)^2) \in \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ がわかる。定理が示された。 □

ここでは [30] で与えた証明を紹介した[1]。
さて、Lie 代数準同型 σ について次がなりたつ。

定理 2.2 (久野-河澄 [30])**.** $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ のとき σ は次の同型を与える

$$\sigma : |\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{K}\pi}) := \{D \in \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi});\ \text{連続}, D(\partial_0\Sigma) = 0\}.$$

ここで $\mathbf{1} = |1| \in |\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ は中心に属するから商 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1}$ には Lie 代数の構造が遺伝する。一般の Σ でも、基本亜群を考えて $\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ の定義を修正すれば同様の同型がなりたつ。Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma) := \mathrm{Ker}(\Gamma \to \mathrm{Aut}(H))$ の上では対数 $\log : \mathcal{I}(\Sigma) \to \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{K}\pi})$ がとれるから、Lie 代数準同型

$$\sigma^{-1} \circ \log : \mathcal{I}(\Sigma) \to |\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1}$$

が定義できる。これは Johnson 準同型に他ならず、Johnson 準同型を幾何的に再構成したことになる。すると Johnson 像の制約条件を求める問題はループ演算の問題として捉えることもできる。

[1]日本語の解説文として [27] も参照していただけると幸いです。

3 Turaev 余括弧積と Johnson 準同型

Turaev [53] の先駆的な仕事として 2 種類のループ演算

$$\lambda : \mathbb{Z}\pi \times \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}\pi \quad \text{および} \quad \mu : \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}\pi/\mathbb{Z}\mathbf{1}$$

の発見がある。Goldman bracket および based Goldman bracket は λ から誘導され、Turaev cobracket および based Turaev cobracket は μ から誘導される。これから述べるように framing の問題があるため、Turaev cobracket δ の完備化は、とりあえず $\delta : |\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1} \to (|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1})^{\hat{\otimes}2}$ として定義される。次がなりたつ。

定理 3.1 (久野-河澄 [29])**.**

$$(\sigma^{-1} \circ \log)(\mathcal{I}(\Sigma)) \subset \mathrm{Ker}\left(|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1} \xrightarrow{\delta} (|\widehat{\mathbb{K}\pi}|/\mathbb{K}\mathbf{1})^{\hat{\otimes}2}\right)$$

したがって、Turaev cobracket を考えることは、写像類群の観点からも意味がある。そこで以下 Turaev cobracket の定義を思い出す。

単位区間 $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ の端点を $\partial I := \{0,1\} \subset I$ と表し、$I^\circ := I \setminus \partial I$ とおく。境界成分 $\partial_0\Sigma$ には Σ から決まる向きが入っているが、基点 $* \in \partial_0\Sigma$ における境界成分 $\partial_0\Sigma$ に沿う負の方向の接ベクトル v_* を一つとる。generic immersion $\gamma : (I, \partial I) \to (\Sigma, *)$ であって $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(1) = v_* \in T_*\Sigma$ をみたすものを考える[2]。$t', t'' \in I$, $t' < t''$, について γ の $[t', t'']$ への制限を $\gamma_{t't''}$ と表す。また、γ の I° への制限 $\gamma|_{I^\circ}$ の自己交叉点全体の集合を Γ_γ と表す。γ は generic immersion だから、任意の $p \in \Gamma_\gamma$ について $0 < t_1^p < t_2^p < 1$ が唯一つ存在して $\gamma(t_1^p) = \gamma(t_2^p) = p$ をみたす。

$$\Gamma_\gamma^\pm := \{p \in \Gamma_\gamma;\ \varepsilon(\dot\gamma(t_1^p), \dot\gamma(t_2^p)) = \pm 1\}$$

とおくと、$\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma^+ \amalg \Gamma_\gamma^-$ となる。based Turaev cobracket $\mu(\gamma)$ は

$$\mu(\gamma) := \sum_{p \in \Gamma_\gamma} \varepsilon(\dot\gamma(t_1^p), \dot\gamma(t_2^p)) |\gamma_{t_1^p t_2^p}| \otimes \gamma_{0 t_1^p} \gamma_{t_2^p 1} \in |\mathbb{Z}\pi| \otimes \mathbb{Z}\pi \tag{3.1}$$

によって定義される。図 1 の 3 種類の局所変形のうち、$(\omega 2)$ と $(\omega 3)$ で $\mu(\gamma)$ は不変であるが、$(\omega 1)$ では不変ではない。図 4 のように向きがついている場合、monogon の頂点の寄与は $-\mathbf{1} \otimes \gamma$ となるからである。そこでオリジナルな based Turaev cobracket は $\mu \bmod \mathbb{Z}\mathbf{1} \otimes \mathbb{Z}\pi$ として定義される。この ambiguity を消すために曲面 Σ の framing、つまり接束 $T\Sigma$ の向きを保つ大域的自明化 $\xi : T\Sigma \cong \Sigma \times \mathbb{R}^2$ を考える[3]。Σ は空でない境界をもつから接束 $T\Sigma$ は自明である。§5 で説明するように framing ξ は immersion γ の回転数 $\mathrm{rot}_\xi(\gamma)$ を定める。図 4 について左辺の局所交叉数は -1 で右辺の左側の閉路の回転数は $+1$ である。これらを打ち消すように

$$\mu^\xi(\gamma) := \mu(\gamma) + (\mathrm{rot}_\xi(\gamma) + 1)(\mathbf{1} \otimes \gamma) \in |\mathbb{Z}\pi| \otimes \mathbb{Z}\pi$$

[2][29, 4] などでは γ の始ベクトルおよび終ベクトルは $\partial_0\Sigma$ に「直交」している。それは、[22] での広義積分を収束させるために、v_* が $\partial_0\Sigma$ と横断的でなければならないことに由来する。そこで回転数 $\mathrm{rot}_\xi \gamma$ の補正に違いが出てくる。

[3]framing を考えることになった背景には、後述する Earle 類についての古田幹雄さんの指摘 [47, p.569] もありました。framing なしの定理 3.1 で損なわれるのは Earle 類だったからです。

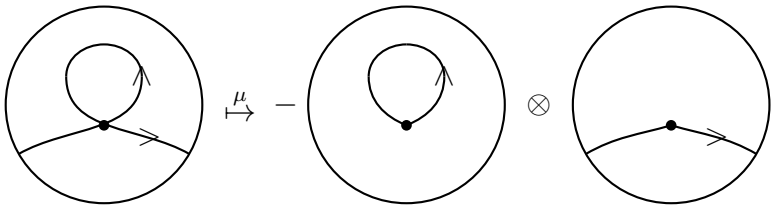


図 4: monogon の寄与

と補正すると、well-defined な写像

$$\mu^\xi : \mathbb{Z}\pi \to |\mathbb{Z}\pi| \otimes \mathbb{Z}\pi$$

がえられる。これが framed based Turaev cobracket [4] である。なお μ^ξ の定義式で $(\mathrm{rot}_\xi(\gamma)+1)$ と $+1$ がついているのは積公式のためである。μ^ξ の定数項の積公式については §5 で説明する。一般の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V について交代化作用素を $\mathrm{alt} : V \otimes V \to V \otimes V$, $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_1 \wedge v_2 := v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$, とする。framed Turaev cobracket

$$\delta^\xi : |\mathbb{Z}\pi| \to |\mathbb{Z}\pi| \otimes |\mathbb{Z}\pi|, \quad |\gamma| \mapsto \mathrm{alt}(1 \otimes |\cdot|)(\mu^\xi(\gamma) - \mathbf{1} \otimes \gamma),$$

が定義できる。たとえば $\mathrm{rot}_\xi(C) = 0$ をみたす単純閉曲線 C と任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $\delta^\xi(C^n) = 0$ である。回転数の仮定がない場合は $\delta(C^n) = 0 \in (|\mathbb{Z}\pi|/\mathbb{Z}\mathbf{1})^{\otimes 2}$ となっている。(図 3 の右側を参照。) δ^ξ は完備化に移行して $\delta^\xi : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to |\widehat{\mathbb{K}\pi}|^{\hat{\otimes} 2}$ となり、Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma)$ を Chillingworth 群に縮小することで定理 3.1 と同じことがなりたつ [4]. expansion を通して、ここから榎本佐藤 trace [10] が導かれる。

Turaev [54] は Turaev cobracket δ を導入することにより Goldman bracket $[\cdot,\cdot]$ との三つ組 $(|\mathbb{Z}\pi|/\mathbb{Z}\mathbf{1}, [\cdot,\cdot], \delta)$ が Lie 双代数になることを示した。framed version でも同じく三つ組 $(|\mathbb{Z}\pi|, [\cdot,\cdot], \delta^\xi)$ は Lie 双代数になる。

4 Goldman-Turaev 形式性としての柏原 Vergne 問題

ここまでに散見された自由群の expansion について述べておく。曲面 Σ は空でない境界をもつから、基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ は自由群である。すでに使っている記号だが、$\gamma \in \pi$ のホモロジー類を $[\gamma] \in H = H_1(\Sigma; \mathbb{K})$ と表す。添加イデアル $I\pi \subset \mathbb{K}\pi$ の冪が定める群環 $\mathbb{K}\pi$ の filtration $\{(I\pi)^m\}_{m=0}^\infty$ を考える。これは π の降中心列に対応する[4]。このとき完備次数商の同型

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(\mathbb{K}\pi) := \prod_{m=0}^\infty (I\pi)^m/(I\pi)^{m+1} &\overset{\cong}{\to} \widehat{T}(H) := \prod_{m=0}^\infty H^{\otimes m} \\ (\gamma_1 - 1)\cdots(\gamma_m - 1) &\mapsto [\gamma_1]\cdots[\gamma_m] := [\gamma_1] \otimes \cdots \otimes [\gamma_m], \end{aligned} \tag{4.1}$$

[4] $n \geq 1$ の場合、基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,n+1}, *)$ の降中心列の代わりに、境界をまわる閉路に重み 2 を付与する weight filtration を考えるべきで、群環 $\mathbb{K}$ の filtration も expansion の定義も修正する必要がある。ただし、種数 0 の場合は番号付けが変わるだけでここの議論はそのままなりたつ。

がなりたち、完備 Hopf 代数の構造を保つ。この同型により両者を同一視する。$|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ は Lie 双代数だから、同型 (4.1) を通して $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $|\widehat{T}(H)|$ にも Lie 双代数の構造が入る。ここで余積 Δ は、任意の $\gamma \in \pi$ について $\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$ および任意の $X \in H$ について $\Delta(X) = X\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}X$ をみたす代数準同型として定まっている。

写像 $\theta_m : \pi \to H^{\otimes m}$, $m \geq 0$, の集まり、ないし写像

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m : \widehat{\mathbb{K}\pi} \to \mathrm{gr}(\mathbb{K}\pi) = \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$$

が (group-like) expansion であるとは、θ が完備 Hopf 代数の同型であって、$\mathrm{gr}(\theta)$ が恒等写像であることをいう。後者の条件は、任意の $\gamma \in \pi$ について $\theta_0(\gamma) = 1$ かつ $\theta_1(\gamma) = [\gamma]$ と言い換えられる。とくに第 2 項 θ_2 について、写像類群 Γ 上の写像 $\tau_1^{\theta} : \Gamma \to H^* \otimes H^{\otimes 2}$ を任意の $\varphi \in \Gamma$ について

$$\tau_1^{\theta}(\varphi) : \gamma \in \pi \mapsto \theta_2(\gamma) - \varphi_* \theta_2(\varphi^{-1}(\gamma)),$$

によって定義すると、これは 1-コサイクルであって、そのコホモロジー類 $[\tau_1^{\theta}] \in H^1(\Gamma; H^* \otimes H^{\otimes 2})$ は森田 [45] による拡大第一 Johnson 準同型である。

さて、柏原 Vergne 問題 [19, 5] は種数 0 曲面で適切な expansion を求める問題であった [2]。以下、状況が簡単な曲面 $\Sigma_{g,1}$ に限って説明する。この場合、$H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{K})$ 上の代数的交叉数 $\cdot : H \otimes H \to \mathbb{K}$ は非退化である。同型 (4.1) を通して $|\widehat{T}(H)|$ に入った Lie 双代数の構造は次で与えられる[5]

$$\begin{aligned}
&[|X_1 \cdots X_m|, |Y_1 \cdots X_m|] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_i \cdot Y_j) |X_{i+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1} Y_{j+1} \cdots Y_n Y_1 \cdots Y_{j-1}, \\
&\delta |X_1 \cdots X_m| = \sum_{i<j} (X_i \cdot X_j) |X_{i+1} \cdots X_{j-1}| \wedge |X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}|.
\end{aligned}$$

ここで $X_i, Y_j \in H$ としている。これは necklace Lie 双代数と呼ばれる構造である。

さて、Massuyeau [38] は $\Sigma_{g,1}$ の基本群の group-like expansion について条件

$$\theta\left(\prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i {\alpha_i}^{-1} {\beta_i}^{-1}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{g} [\alpha_i] \wedge [\beta_i]\right)$$

をみたすものを symplectic と呼んだ。ここで $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{g} \subset \pi$ は symplectic 生成系であるが、この条件は symplectic 生成系の取り方によらない。左辺の中身は $\partial_0 \Sigma_{g,1}$ を一周するループで、右辺の中身は交叉形式から決まるからである。まず $\Sigma_{g,1}$ については定理 1.1 の副産物として次の定理がわかった。

定理 4.1 (久野-河澄 [28])**.** θ が symplectic expansion ならば、同型 $|\theta| : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \cong |\widehat{T}(H)|$ は bracket を保つ。

[5] $\Sigma_{g,1}$ に限っては framed Turaev cobracket の framing の情報は次数商をとると隠れるが、条件 (KV2) には framing の情報が含まれている。

一般の曲面についても Massuyeau-Turaev [40], 久野-河澄 [30] によって symplectic expansion の代わりに special expansion[6] を考えると同様のことがなりたつことがわかっている。

それでは cobracket はどうなのか？最初に得られたのは Massuyeau の次の結果である。

定理 (Massuyeau [39])**.** Kontsevich 積分から誘導される種数 0 曲面 $\Sigma_{0,n+1}$ の expansion θ について $|\theta| : |\widehat{\mathbb{K}\pi}| \to |\widehat{T}(H)|$ は、bracket と cobracket を保つ。つまり Lie 双代数の同型である。

そこで柏原 Vergne 問題である。Alekseev-Torossian [5] による自由 Lie 代数での定式化では、柏原 Vergne 問題は 2 つの条件 (KV1) と (KV2) からなる。expansion の条件に読み直すと、(KV1) は種数 0 曲面 $\Sigma_{0,n+1}$ の special expansion の条件そのものである。つまり、(KV1) とは、Goldman bracket を保つことに他ならない[7]。(KV2) が Turaev cobracket に対応してほしいのだが、次がわかる。

定理 4.2 (Alekseev-Kawazumi-Kuno-Naef [2])**.** 種数 0 曲面 $\Sigma_{0,n+1}$ の special expansion θ つまり (KV1) をみたす expansion について、条件 (KV2) をみたすことと、$|\theta|$ が cobracket を保つこと、つまり $|\theta|$ が Lie 双代数同型であることとは同値である。

この定理は、柏原 Vergne 問題を、$|\theta|$ が Lie 双代数同型である expansion θ を求める問題、つまり Goldman-Turaev Lie 双代数の形式化問題として、正種数の曲面に拡張することを示唆している。

定理 4.3 (Alekseev-Kawazumi-Kuno-Naef [1, 4])**.** (1) 曲面 $\Sigma_{g,n+1}$ とその framing ξ について柏原 Vergne 問題が定式化される。

(2) 種数 1 の以下の framing ξ を除き、柏原 Vergne 問題は解をもつ: すべての境界成分 $\partial_j\Sigma, 0 \leq j \leq n$, について $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma) = -1$ であって $\mathrm{rot}_\xi(\alpha_1)$ と $\mathrm{rot}_\xi(\beta_1)$ のいずれかは 0 でない。

(3) 任意の (KV1) の解 θ について、(KV2) をみたすことと、$|\theta|$ が対応する framing つき曲面の Goldman-Turaev Lie 双代数についての同型を与えることとは同値である。

解の構成には、Alekseev-Torossian [5] が Drinfeld 結合子から構成したものと、Enriquez [11] の楕円結合子を貼り合わせる。後者は種数 1 の Drinfeld 結合子となる。

なお、この定理の混合 Hodge 構造を用いた別証明が Hain [14] により与えられている。この別証明では、種数 1 の例外について代数幾何的な意味付けが明らかになっている。

ごく最近、谷口東曜は次の定理を証明している。

定理 (谷口 [51, 52])**.** (1) 任意の g について種数 g Gonzalez-Drinfeld 結合子が存在する。

(2) 任意の g について種数 g Gonzalez-Drinfeld 結合子は Goldman-Turaev Lie 双代数の形式化を与える。

ただし、種数 1 の Gonzalez-Drinfeld 結合子にともなう framing ξ は $\mathrm{rot}_\xi(\alpha_1) = \mathrm{rot}_\xi(\beta_1) = 0$ をみたす。

[6] この special という用語は伊原康隆先生の研究に由来する。

[7] 本当は少しだけずれがある。それについては [3] で明らかにした。

5 曲面の $\mathbb{K}$-framing と $\mathbb{K}$-二次形式

ここまでの話は framing から expansion がみたすべき条件 (KV2) を誘導する話であった。逆に、expansion θ から framing を回復することを考える。framing は拡大第一 Johnson 準同型 τ_1^θ のあたりに住んでいるので $\Sigma_{g,1}$ ならば symplectic expansion の最初の方の項から導かれるはずである。10 年ほど前に F. Naef 氏からこの問題を質問されたが、そのときには答えられなかった。通常の自明化ではだめで、framing を $\mathbb{K}$-係数に拡張する必要があった。今回の講演とは別の文脈の仕事 [25] で、スピン構造についても気になることがある。スピン構造とは $\mathbb{Z}/2$-framing である。そこで、この §5 では $\mathbb{K}$ **は単位可換環とする。**

そもそも、多様体のスピン構造とは接枠束の二重被覆のことである。曲面の場合に、スピン構造を theta 指標と明確に対応づけたのが Johnson [15] である。ちなみに Johnson は theta 指標を二次形式と呼んでいる。theta 指標とは、函数 $q : H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ であって、任意の $X_1, X_2 \in H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2)$ について $q(X_1+X_2) = q(X_1)+q(X_2)+X_1\cdot X_2$ をみたすものだからである。spin 構造 ξ は mod2 回転数 rot_ξ を定めるが、Johnson は、対応する二次形式 q_ξ の値として、単純閉曲線 C について $q_\xi(C) = \mathrm{rot}_\xi(C)+1$ であることしか本質的に言っていない。そこで、少なくとも 3 つの疑問が出てくる。

(1) generic immersion での q_ξ の値はどうなるか？

(2) $+1$ はなぜなのか？

(3) spin 構造に限らず framing や r-spin 構造には一般化できるか？

この 3 つの疑問は framed Turaev cobracket μ^ξ の定数項をとることで回答があたえられる。

$\mathbb{K}$-framing ξ やその回転数 rot_ξ を定義するために、一般に Σ を空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面とする。曲面 Σ の接束 $T\Sigma$ から 0 切断を除いた空間 $T\Sigma\backslash(0\text{-section})$ の正の実数 $\mathbb{R}_{>0}$ のスカラー倍作用による商を $U\Sigma := (T\Sigma\backslash(0\text{-section}))/\mathbb{R}_{>0}$ とする。これは単位接束であり、Σ の向きから誘導される向きをもつ主 S^1 束である。$\varpi : U\Sigma \to \Sigma$ を主 S^1 束の射影とし、$\iota : S^1 \hookrightarrow U\Sigma$ を向きを保つファイバーの包含とする。Σ は空でない境界をもつので主 S^1 束 $U\Sigma$ は自明であり、短完全列

$$0 \to H^1(\Sigma;\mathbb{K}) \xrightarrow{\varpi^*} H^1(U\Sigma;\mathbb{K}) \xrightarrow{\iota^*} H^1(S^1;\mathbb{K}) \to 0 \tag{5.1}$$

がなりたつ。条件 $\langle \iota^*\xi, [S^1]\rangle = 1$ をみたす元 $\xi \in H^1(U\Sigma;\mathbb{K})$ を、Σ の $\mathbb{K}$-framing とよび、その全体を $F(\Sigma;\mathbb{K})$ と表すことにする。ここには写像類群 Γ が自然なやり方で作用している。$F(\Sigma;\mathbb{Z})$ は主 S^1 束 $U\Sigma$ の自明化のホモトピー類全体の集合であり、$F(\Sigma;\mathbb{Z}/2)$ は Σ の spin 構造全体の集合である。$\mathbb{K}$-framing $\xi \in F(\Sigma;\mathbb{K})$ とはめ込み $\alpha : S^1 \to \Sigma$ について

$$\mathrm{rot}_\xi(\alpha) := \langle \xi, \dot\alpha_*[S^1]\rangle \in \mathbb{K}$$

と定め、ξ に関する α の ξ-回転数とよぶ。ここで $\dot\alpha : S^1 \to U\Sigma$ は速度ベクトルとする。境界 $\partial\Sigma = \coprod_{j=0}^n \partial_j\Sigma$ について、Poincaré-Hopf の定理により

$$\sum_{j=0}^n \mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma) = \chi(\Sigma) \in \mathbb{K} \tag{5.2}$$

がなりたつ[8]。

[8]公式 (5.2) は常識だと思いますが [24, 26] に証明を書きました。

ここで $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2$ つまり spin 構造について注意しておくと、$\chi(\Sigma)<0$ のとき Fuchs 表現についてリフト $\rho:\pi_1(\Sigma)\to SL_2(\mathbb{R})$ をとることは spin 構造 ξ を指定することに対応する。このとき、$\mathrm{trace}(\partial_j\Sigma)$ の符号が $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)$ に他ならない[9]。とくに、超 Riemann 面での Ramon punctures の個数がつねに偶数であることは公式 (5.2) に他ならない。写像類群による商集合 $F(\Sigma;\mathbb{Z}/2)/\Gamma$ についてであるが、$F(\Sigma_{g,0};\mathbb{Z}/2)/\Gamma_{g,0}=F(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}/2)/\Gamma_{g,1}$ が Arf 不変量によって偶奇二つに分かれることは古典的である[10]。一般の場合も $F(\Sigma_{g,n+1};\mathbb{Z}/2)/\Gamma_{g,n+1}$ は Arf 不変量と $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)\in\mathbb{Z}/2$, $0\le j\le n$, によって分類される。

つぎに $\mathbb{K}=\mathbb{Z}$ つまり Σ の本来の framing であるが、$g\neq 1$ のときは、境界の情報 $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)\in\mathbb{Z}$, $0\le j\le n$, と誘導する spin 構造の Arf 不変量によって分類される。 相対 $\mathbb{Z}$-framing や相対 spin 構造、さらに相対 r-spin 構造について Randal-Williams [49] は相対 Arf 不変量を導入し、$g\neq 1$ のとき、その写像類群による軌道が境界の情報と相対 Arf 不変量で分類されることを示している。残る種数 1 の場合、つまり商集合 $F(\Sigma_{1,n+1};\mathbb{Z})/\Gamma_{1,n+1}$ については [24] で記述した。境界の情報 $\mathrm{rot}_\xi(\partial_j\Sigma)\in\mathbb{Z}$, $0\le j\le n$, に加えて、整数環 $\mathbb{Z}$ において集合 $\{\mathrm{rot}_\xi(C);\ C\subset\Sigma\setminus\partial\Sigma$ 非分離的単純閉曲線 $\}$ が生成するイデアル $\mathfrak{a}(\xi)$ によって分類されるというものである。これは定理 4.3 (2) と辻褄があっている。

さて、一般の単位可換環 Σ と一般の空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面 Σ にもどって $\xi\in F(\Sigma;\mathbb{K})$ とする。$\gamma\in\pi=\pi_1(\Sigma,*)$ について based framed Turaev cobracket $\mu\xi(\gamma)$ の定数項を $q_\xi(\gamma):=(\mathrm{aug}\otimes\mathrm{aug})\mu^\xi(\gamma)$ とする。つまり、γ を $\dot\gamma(0)=\dot\gamma(1)=v_*$ をみたす generic immersion であらわしたとき

$$q_\xi(\gamma)=\sharp\Gamma^+_\gamma-\sharp\Gamma^-_\gamma+\mathrm{rot}_\xi(\gamma)+1\in\mathbb{K} \tag{5.3}$$

となる。次の補題は μ^ξ の積公式 [29, 4] からわかるが、図 5 からわかる公式

$$\sharp\Gamma^+_{\gamma_1\gamma_2}-\sharp\Gamma^-_{\gamma_1\gamma_2}=\Gamma^+_{\gamma_1}-\Gamma^-_{\gamma_1}+\Gamma^+_{\gamma_2}-\Gamma^-_{\gamma_2}+\gamma_1\cdot\gamma_2+1$$

から直ちに得られる。図 5 の基点の上の自己交叉が $+1$ となっている。

補題 5.1. 任意の $\gamma_1,\gamma_2\in\pi$ について次がなりたつ

$$q_\xi(\gamma_1\gamma_2)=q_\xi(\gamma_1)+q_\xi(\gamma_2)+\gamma_1\cdot\gamma_2\in\mathbb{K}.$$

ここから逆算すると積公式がなりたつように q_ξ を定義するために $+1$ が必要になる。これが先ほどの疑問 (2) の答えである。もちろん初期ベクトル v_* を正の向きにとれば $+1$ は -1 に置き換わる。積構造をみたすということは $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2$ の場合、Johnson の意味での二次形式になっている。γ が単純閉曲線の場合に、同じ値をとるから、これが Johnson の二次形式そのものである。(5.3) は generic immersion で定義されているから疑問 (1) の答えにもなっている。さらに (3) もわかったことになる。

集合 $Q(\Sigma;\mathbb{K}):=\{q:\pi\to\mathbb{K};\ \text{写像},\ \forall\gamma_1,\forall\gamma_2\in\pi,\ q(\gamma_1\gamma_2)=q(\gamma_1)+q(\gamma_2)+\gamma_1\cdot\gamma_2\}$ を考える。この集合の元を曲面 Σ の $\mathbb{K}$-二次形式とよぶことにすると、q_ξ も曲面 Σ の $\mathbb{K}$-二次形式である。一対一対応

$$F(\Sigma;\mathbb{K})\cong Q(\Sigma;\mathbb{K}),\quad \xi\mapsto q_\xi, \tag{5.4}$$

[9] これも常識だと思いますが [25] に証明を書きました。

[10] 超楕円的写像類群で考える場合は [56] およびその文献を参照。

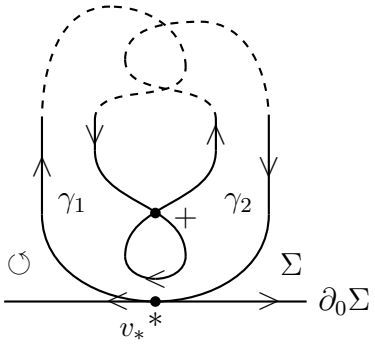


図 5: q_ξ の積公式の証明

がなりたつ。これも Johnson [15] の一般化である。

さて、短完全列 (5.1) は写像類群 Γ 加群の拡大とみることができるから、拡大類 $k_{\mathbb{K}} \in H^1(\Gamma; H^1(\Sigma;\mathbb{K}))$ を考えることができる。これが古田 [47, p.569] のやり方での Earle 類 [9] の構成を $\mathbb{K}$ に一般化したものである[11]。$\xi \in F(\Sigma;\mathbb{K})$ についてコサイクル $k_\xi : \Gamma \to H^1(\Sigma;\mathbb{K})$ を $\varphi \in \Gamma$ について $\varphi\cdot\xi - \xi = \varpi^*(k_\xi(\varphi))$ をみたすものとして定義する。コホモロジー類 $k_{\mathbb{K}}$ は、定義により、k_ξ のコホモロジー類である。コホモロジー類 $k_{\mathbb{K}}$ をコサイクルの集合とみると、種数 g が 1 以上ならば、$H^1(\Sigma;\mathbb{K})^\Gamma = 0$ だから、写像

$$F(\Sigma;\mathbb{K}) \to k_{\mathbb{K}}, \quad \xi \mapsto k_\xi, \tag{5.5}$$

は全単射である。

ここから $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし[12]、曲面 $\Sigma_{g,1}$, $g \geq 1$, を考える。任意の expansion θ の第2項 θ_2 は、任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ について $\theta_2(\gamma_1\gamma_2) = \theta_2(\gamma_1) + \theta_2(\gamma_2) + [\gamma_1][\gamma_2] \in H^{\otimes 2} = H_1(\Sigma;\mathbb{K})^{\otimes 2}$ をみたす。両辺の代数的交点数 $\cdot$ をとってえられる $\cdot \circ \theta_2 : \pi \to \mathbb{K}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ の二次形式である。一対一対応 (5.4) によって対応する $\mathbb{K}$-framing を $\xi_\theta \in F(\Sigma;\mathbb{K})$ とする。一方、θ は拡大第一 Johnson 準同型 $\tau_1^\theta : \Gamma \to H^* \otimes H^{\otimes 2}$ を定める。縮約写像 $\mathfrak{c} : H^* \otimes H^{\otimes 2} \to H$, $f \otimes X_1X_2 \mapsto f(X_1)X_2$, による $\mathfrak{c}_*[\tau_1^\theta] \in H^1(\Gamma; H)$ が Earle 類であることは Johnson [16], 森田 [45] によってわかっている[13]。コサイクルのレベルで次が得られた。

定理 5.2 (河澄 [26])**.** θ が symplectic expansion であるとき、コサイクルとしての一致 $\mathfrak{c} \circ \tau_1^\theta = -k_{\xi_\theta}$ がなりたつ。

これによって symplectic expansion θ の定める $\mathbb{K}$-framing が ξ_θ であることがわかる。定理の証明では、Johnson [17] の形での Dehn-Lickorish の定理を使って、非分離的単純閉曲線の右手 Dehn ツイストの場合に帰着させる。曲面 $\Sigma_{g,n+1}$, $n \geq 1$, についても、基本群の降中心列の代わりに weight filtration を考え、基本亜群を考えれば同様にできる。

最後に、別の仕事の宣伝をする。写像類群 $\Gamma_{g,1}$ の自明係数安定コホモロジー代数は Madsen-Weiss [37] で決定された。とくに有理自明係数安定コホモロジー代数は MMM

[11] Torelli 群では Chillingworth [7, 8] の観察が先行するが、古田の指摘は写像類群全体に関わる。
[12] 適切に修正すれば以下の結果は任意の単位可換環でなりたつ。
[13] この話題については Apisa-Salter [6] の最近の発展もある。

類の多項式環である。一方、有理ねじれ係数安定コホモロジー群は有理自明係数安定コホモロジー代数上の加群であるが、まだわからないことが残っている。安定コホモロジーを考えるので、そのねじれ係数は、曲面とその間の埋め込みのなす圏から $\mathbb{Q}$-ベクトル空間への函手であるべきである。Soulié [50] によって、その函手が「多項式的」かつ反変函手であるとき、ねじれ係数安定コホモロジー群は有理自明係数安定コホモロジー代数上自由である。しかし、共変函手のときねじれ係数安定コホモロジー群が有理自明係数安定コホモロジー代数上自由でない例を最初にみつけたのが Soulié-河澄 [33] である。答えは簡単で $H_1(U\Sigma;\mathbb{Q})$ がそれであった。どれくらい自由 (平坦) でないか？を測定するのが Tor 群である。 Soulié-河澄 [34] では、外積 $\Lambda^d H_1(U\Sigma;\mathbb{Q})$ を調べた。$d=2$ の場合は自由だが、$d=1,\geq 3$ では Tor 群は消えず、自由ではない。$d=3,4,5$ について Tor 群を具体的に計算したが、爆発的に複雑になる。一方、反変函手についても自由基底の与え方は未解決である。写像類群の有理ねじれ係数安定コホモロジー群について、やるべきこと/できることは残っている。

参考文献

[1] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. **355**, 123–127 (2017)

[2] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, Adv. Math. **326**, 1–53 (2018)

[3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne, Quantum Topology, **11**, 657–689 (2020)

[4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, preprint, arXiv: 1804.09566v3, to appear in: Mem. Amer. Math. Soc.

[5] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[6] P. Apisa and N. Salter, Invariant measures on moduli spaces of twisted holomorphic 1-forms and strata of dilation surfaces, preprint, arXiv: 2507.10685 (2025)

[7] D. Chillingworth, Winding numbers on surfaces, I, Math. Ann. **196**, 218–249 (1972)

[8] D. Chillingworth, Winding numbers on surfaces, II, Math. Ann. **199**, 131–153 (1972)

[9] C. Earle, Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties, Ann. of Math. **107**, 255–286 (1978)

[10] N. Enomoto and T. Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, Algebr. Geom. Topol.,**14** 627–669 (2014)

[11] B. Enriquez, Elliptic associators, Selecta Math. (N.S.) **20** (2014), no. 2, 491–584.

[12] P. Etingof, Casimirs of the Goldman Lie algebra of a closed surface, Int. Math. Res. Not. **2006** (2006), 1–5.

[13] W. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, Invent. math. **85**, 263–302, (1986)

[14] R. Hain, Hodge theory of the Turaev cobracket and the Kashiwara-Vergne problem, J. Eur. Math. Soc. **23**, 3889–3933 (2021)

[15] D. Johnson, Spin structures and quadratic forms on surfaces, J. London Math. Soc. **(2)22**, 365–373 (1980)

[16] D. Johnson, An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$, Math. Ann. **249**, 225–242 (1980)

[17] D. Johnson, The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for $\mathcal{J}$, Ann. Math. **118**, 423–442 (1983)

[18] A. Kabiraj, Center of the Goldman Lie algebra, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), no. 5, 2839–2849.

[19] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. **47** (1978), no. 3, 249–272.

[20] N. Kawazumi, A generalization of the Morita-Mumford classes of extended mapping class groups for surfaces, Invent. math. **131** 137–149 (1998)

[21] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, arXiv: 0505497 (2005)

[22] N. Kawazumi, Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces, preprint, math.GT/0603158 (2006)

[23] N. Kawazumi, On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces, Advanced Studies in Pure Mathematics (Groups of Diffeomorphisms), **52** 383–400 (2008)

[24] N. Kawazumi, The mapping class group orbits in the framings of compact surfaces, Quarterly J. Math., **69**, 1287–1302 (2018)

[25] N. Kawazumi, A topological proof of Wolpert's formula for the Weil-Petersson symplectic form in terms of the Fenchel-Nielsen coordinates, Geometriae Dedicata **219**, article number 56, (2025)

[26] N. Kawazumi, $\mathbb{K}$-framings and $\mathbb{K}$-quadratic forms on surfaces, preprint, arXiv: 2604.2753 (2026)

[27] 河澄響矢, トポロジーとリー代数 — 曲線を曲線で微分する, 数学の現在 π, 斎藤, 河東, 小林編, 東京大学出版会, 86–106, (2016)

[28] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum Topology **5** 347–423 (2014)

[29] N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersection of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), no. 6, 2711–2762.

[30] N. Kawazumi and Y. Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, 'Handbook of Teichmueller theory', edited by A. Papadopoulos, Volume V, EMS Publishing House, Zurich, 2015, pp. 98–165.

[31] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable characteristic classes, Math. Res. Lett. **3** (1996), 629–641.

[32] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the Mumford-Morita-Miller classes, preprint, available at https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/preprint/pdf/2001-13.pdf, 2001.

[33] N. Kawazumi and A. Soulié, Stable twisted cohomology of the mapping class groups in the unit tangent bundle homology, Bull. Lond. Math, Soc., **56** 3358–3381 (2024)

[34] N. Kawazumi and A. Soulié, Stable twisted cohomology of the mapping class groups in the exterior powers of the unit tangent bundle homology, arXiv: 2311.01791 (2023)

[35] T. Kitano, Johnson's homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori, Topology Appl. **69** 165–172 (1996)

[36] C. Labruere and L. Paris, Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups, Algebr. Geom. Topol., **1** 73–114 (2001)

[37] I. Madsen and M. Weiss, The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford ' s conjecture, Ann. of Math., **165**, 843–941 (2007)

[38] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, Bull. Soc. Math. France **140** (2008), 101–161.

[39] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev's loop operations, Quantum Topol. **9** (2018), no. 1, 39–117.

[40] G. Massuyeau and V. G. Turaev, Fox pairngs and generalized Dehn twists, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 6, 2403–2456.

[41] E. Y. Miller, The homology of the mapping class group, J. Differemtial Geom. **24** (1986), 1–14.

[42] 門田直之, 写像類群の生成系に関する研究の変遷, 第 69 回トポロジーシンポジウム講演集, https://www.mathsoc.jp/~topology/topsymp/2022/ts2022Monden.pdf (2022)

[43] S. Morita, Characteristic classes of surface bundles, Invent. math. **90** (1987) 551–577.

[44] S. Morita, Families of jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, I, Ann. Inst. Fourier, **39** 777–810 (1989)

[45] S. Morita, The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, Invent. Math. **111**, 197-224 (1993)

[46] S. Morita, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 159–186.

[47] S. Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles, J. Diff. Geom. **47** 560–599 (1997)

[48] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry*, Progr. Math. **36**, Birkhäuser, Boston, 1983, 271–328.

[49] O. Randal-Williams, Homology of the moduli spaces and mapping class groups of framed, r-Spin and Pin surfaces, J. Topology **7** 155–186 (2014)

[50] A. Soulié, Some computations of stable twisted homology for mapping class groups, Comm. Algebra **48** 2467–2491 (2020)

[51] T. Taniguchi, Drinfeld associators and Kashiwara-Vergne associators in higher genera, preprint, arXiv:2511.00473v3 (2026)

[52] T. Taniguchi, The framed version of the universal KZB connection in higher genera, preprint, arXiv:2607.04342 (2026)

[53] V. G. Turaev, Intersections of loops in two-dimensional manifolds, Math. USSR Sbornik **35** 229–250 (1979)

[54] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup., **24**. 635–704 (1991)

[55] A. Wakuda, Separability Criteria for loops via the Goldman bracket, preprint, arXiv: 2511.18503 (2025)

[56] Gefei Wang, The Artin braid group actions on the set of spin structures on a surface, Hokkaido Math. J., **52** 427–462 (2023)

以上。