Quasi-cellular categories and the structure of the Brauer category

片田　舞　(東京大学)*

1 導入

Brauer algebra は，Brauer diagram を用いて定義される diagram algebra（図式代数）の一種である．歴史的には，Brauer [1] による直交群やシンプレクティック群の不変式論の研究において導入された．一般線形群と対称群の有限次元表現の間には，Schur–Weyl 双対性という関係性が広く知られているが，直交群やシンプレクティック群と Brauer algebra との間にもこれと類似する双対関係が成り立つ．より詳しく述べると，非退化対称双線型形式をもつ有限次元ベクトル空間 V のテンソル冪 $V^{\otimes p}$ に対し，V の等長変換群 $\mathrm{O}(V)$ と Brauer algebra $B^{\delta}(p)$（ただし，$\delta = \dim V$）の標準的な作用が定義される．これら 2 つの作用は互いに可換であり，Brauer algebra $B^{\delta}(p)$ から中心化環 $\mathrm{End}_{\mathrm{O}(V)}(V^{\otimes p})$ への全射準同型が存在する．一方，非退化歪対称双線型形式をもつベクトル空間の場合には，等長変換群は $\mathrm{Sp}(V)$ となり，Brauer algebra のパラメータとしては，$\delta = -\dim V$ が対応する．

Brauer algebra の表現論はこれまで広く研究されてきた．特に，標数 0 の体上では，Brown [3, 2], Hanlon–Wales [7], Wenzl [12], Doran–Wales–Hanlon [6], Rui [10], Rui–Si [11] らの研究により，Brauer algebra が半単純になるためのパラメータ δ の条件が完全に決定されている．さらに，König–Xi [8] は，一般の単位可換環上でパラメータが非特異な場合に，Brauer algebra が対称群の群環の直和と森田同値になることを示した．

本講演の目的は，これらの現象に対して圏論的な解釈を与えることである．Brauer algebra を endomorphism algebra（自己準同型代数）にもつ，非負整数を対象とする「Brauer category」と呼ばれる圏がある．Brauer category は，Lehrer–Zhang [9] によって導入され詳しく調べられたが, その本質的な概念はすでに Deligne [4, 5] の研究にも現れている．本講演では, cellular algebra の圏論的類似として「quasi-cellular category」を導入する．Brauer category をはじめとする partition category や walled Brauer category などの diagram category は，quasi-cellular category の構造を持つ．我々は，Brauer category を quasi-cellular category の観点から考察し，得られた結果について報告する．本講演は，東京大学の葉廣和夫氏との共同研究に基づくものである．

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学　大学院数理科学研究科
e-mail: mkatada@ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:24K16916) の助成を受けたものである。

2 Brauer algebra と Brauer category

以下，$\mathbf{k}$ を単位的可換環とし，$\delta \in \mathbf{k}$ をパラメータとする．

2.1 Brauer algebra

非負整数 p に対し，(p,p)**-Brauer diagram** とは，集合 $\{1^+,\dots,p^+\} \sqcup \{1^-,\dots,p^-\}$ の p 個の非順序対への分割のことである．これは図式的には，上部に配置された p 個の点 $1^+,\dots,p^+$ と下部に配置された p 個の点 $1^-,\dots,p^-$ を，p 本の弧で交差を許して結んで得られる図形として描写される．図 1 に，$(5,5)$-Brauer diagram の例を描いた．

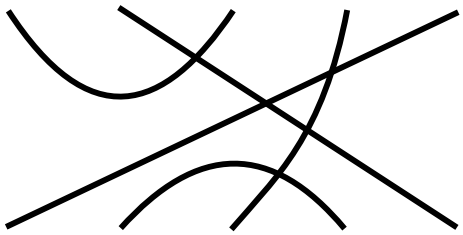


図 1　$(5,5)$-Brauer diagram.

$\mathbb{B}(p,p)$ で (p,p)-Brauer diagram 全体のなす集合を表すこととする．**Brauer algebra** $B^{\mathbf{k},\delta}(p)$ とは，$\mathbb{B}(p,p)$ を基底とする自由 $\mathbf{k}$-加群であって，図式の連結で定義される合成を積としてもつ代数のことを言う．すなわち，$f,g \in \mathbb{B}(p,p)$ に対し，$f \circ g \in B^{\mathbf{k},\delta}(p)$ は，g の図式を f の図式の上にのせ，g の下部の点と f の上部の点を同一視してできる図形からループを取り除いて得られる (p,p)-Brauer diagram $f \hat{\circ} g$ と，取り除いたループの個数 $l(f,g)$ を用いて，

$$f \circ g = \delta^{l(f,g)}\, f \hat{\circ} g$$

で定義される．図 2 に，$(5,5)$-Brauer diagram の合成の例を描いた．

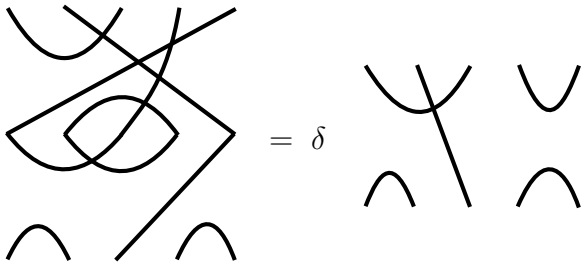


図 2　Brauer diagram の合成

2.2 Brauer category

より一般に，$p+q$ が偶数であるような非負整数の組 (p,q) に対し，(p,q)-Brauer diagram が定義される．$\mathbb{B}(p,q)$ で (p,q)-Brauer diagram 全体のなす集合を表すことにする．

Brauer category $B = B^{\mathbf{k},\delta}$ とは, 非負整数を対象とし, $\mathbb{B}(p,q)$ を基底とする自由 $\mathbf{k}$-加群を射集合 $B(p,q)$ としてもつ圏である．$f \in \mathbb{B}(q,r)$ と $g \in \mathbb{B}(p,q)$ の合成 $f \circ g \in B(p,r)$ は，Brauer algebra の積と同様に定義され，恒等射は $\mathrm{id}_p = 1_p = \{\{i^+, i^-\} \mid 1 \le i \le p\}$ である．Brauer algebra $B^{\mathbf{k},\delta}(p)$ は，Brauer category $B^{\mathbf{k},\delta}$ の対象 p に対する自己準同型代数 $B^{\mathbf{k},\delta}(p,p)$ として復元される．

Brauer category は，対象の和と diagram を横に並べる操作で定まるテンソル積に関して $\mathbf{k}$-linear PROP の構造を持つ．Symmetry $P_{p,q} : p+q \to q+p$ は,

$$P_{p,q} = \{\{1^+, (q+1)^-\}, \dots, \{p^+, (q+p)^-\}, \{(p+1)^+, 1^-\}, \dots, \{(p+q)^+, q^-\}\}$$

で与えられる．Brauer category の $\mathbf{k}$-linear PROP としての以下の表示が知られている．

$$\text{生成元：} \quad c = \{\{1^+, 2^+\}\} : 2 \to 0, \quad \bar{c} = \{\{1^-, 2^-\}\} : 0 \to 2$$

$$\text{関係式：} \quad (\mathrm{id}_1 \otimes c)(\bar{c} \otimes \mathrm{id}_1) = \mathrm{id}_1 = (c \otimes \mathrm{id}_1)(\mathrm{id}_1 \otimes \bar{c}), \quad cP_{1,1} = c, \quad P_{1,1}\bar{c} = \bar{c}, \quad c\bar{c} = \delta\, \mathrm{id}_0\,.$$

2.3 Brauer diagram の分解

Brauer diagram が上部の点同士を結ぶ弧を持たないとき，**upward** であるといい，下部の点同士を結ぶ弧を持たないとき, **downward** であるという．upward かつ downward な Brauer diagram のことを **level** という．$\mathbb{B}^+(p,q)$ (resp. $\mathbb{B}^-(p,q), \mathbb{B}^0(p,q)$) で, upward (resp. downward, level) Brauer diagram たちからなる $\mathbb{B}(p,q)$ の部分集合を表すことにする．非負整数に対し，半順序 $\preceq$ を,

$$p \preceq q \quad \Leftrightarrow \quad p \le q \text{ かつ } p+q \text{ は偶数}$$

で定め，$p \prec q$ で $p \preceq q$ かつ $p \neq q$ を表すこととする．すると，$\mathbb{B}^+(p,q) \neq \emptyset$ となるのは，$p \preceq q$ のときに限る．鏡映変換 $\overline{(\ )} : \mathbb{B}(p,q) \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}(q,p)$ は，upward diagram と downward diagram を入れ替え，level diagram を保つ．

Brauer diagram f の上部の点と下部の点を結ぶ任意の弧のペアが交点をもたないとき, f は **monotone** であるという．$\mathbb{B}^m(p,q)$ で monotone Brauer diagram からなる $\mathbb{B}(p,q)$ の部分集合を表し，$\mathbb{B}^{\pm,m}(p,q) = \mathbb{B}^{\pm}(p,q) \cap \mathbb{B}^m(p,q)$ とする．

このとき，(p,q)-Brauer diagram は，以下のように分解される．

$$\coprod_{r \preceq p,q} \mathbb{B}^{+,m}(r,q) \times \mathbb{B}^0(r,r) \times \mathbb{B}^{-,m}(p,r) \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}(p,q), \quad (f^+, f^0, f^-) \mapsto f^+ \circ f^0 \circ f^-. \quad (1)$$

3 Matrix Brauer category

ここでは，Brauer category の変種である matrix Brauer category $mB = mB^{\mathbf{k}}$ を定義する．mB の対象と射集合は，Brauer category のものと同じであるが，射の合成は以下に記述する **matrix composition** で定義される．

Brauer diagram の分解 (1) から，$f \in \mathbb{B}(q,r), g \in \mathbb{B}(p,q)$ に対し，

$$f = f^+ \circ f^0 \circ f^-, \quad g = g^+ \circ g^0 \circ g^-$$

なる $f^+ \in \mathbb{B}^{+,m}(t,r)$, $f^0 \in \mathbb{B}^0(t,t)$, $f^- \in \mathbb{B}^{-,m}(q,t)$, $g^+ \in \mathbb{B}^{+,m}(s,q)$, $g^0 \in \mathbb{B}^0(s,s)$, $g^- \in \mathbb{B}^{-,m}(p,s)$ が一意的に存在し，f と g の matrix composition は，

$$f \circ g = \begin{cases} \delta_{\overline{f^-},\, g^+}\ f^+ \circ (f^0 \circ g^0) \circ g^- & (t = s) \\ 0 & (t \neq s) \end{cases}$$

で定義される．恒等射は，$\mathrm{id}_p^{mB} := \displaystyle\sum_{r \preceq p} \sum_{f \in \mathbb{B}^{+,m}(r,p)} f \circ \bar{f}$ である．

mB の対象 p に対する自己準同型代数 $mB(p,p)$ は，以下のように，対称群の群環の行列環の直和と同型になる．

命題 3.1. 非負整数 p に対し，$d_{p,r} = |\mathbb{B}^{+,m}(r,p)| = \operatorname{rank} B^+(r,p)/r!$ とすると，標準的な代数の同型

$$mB(p,p) \cong \bigoplus_{r \preceq p} M_{d_{p,r}}(\mathbf{k}[\mathfrak{S}_r])$$

がある．特に，$\mathbf{k}$ が標数 0 の体であれば，$mB(p,p)$ は半単純である．

4 Brauer category に対する主定理

$\mathbf{k}$ を単位的可換環，$\delta \in \mathbf{k}$ とする．ここでは，Brauer category $B = B^{\mathbf{k},\delta}$ に関する主結果について述べる．

非負整数 r に対し，δ が r に依存する “ある条件” を満たすとき，δ は **rank $\preceq r$ で非特異**であるという．また，任意の $r \geq 0$ に対し，δ が $\operatorname{rank} \preceq r$ で非特異であるとき，単に δ は**非特異**であるという．（δ の特異性については，Section 7 で触れる．）

非負整数 r に対し，対象が $\{q \geq 0 \mid q \preceq r\}$ である B の充満部分圏を $B_{\preceq r}$ で表し，mB の充満部分圏を $mB_{\preceq r}$ で表す．

定理 4.1. $\mathbf{k}$-線形関手

$$L : B \to mB$$

が存在し，L の制限 $L_{\preceq r} : B_{\preceq r} \to mB_{\preceq r}$ が同型となることと，δ が *rank* $\preceq r$ で非特異であることは同値である．

$\mathbb{S}$ で，対象が非負整数，射集合が $\mathbb{S}(p,q) = \mathbf{k}[\mathfrak{S}_p]$ $(p = q)$, $\mathbb{S}(p,q) = 0$ $(p \neq q)$ の線形圏を表すこととする．

定理 4.2. δ が非特異ならば，B は $\mathbb{S}$ と森田同値であり，B の中心は $\mathbb{S}$ の中心と $\mathbf{k}$-代数として同型である．

5 Quasi-cellular category

ここでは，quasi-cellular category を導入する．quasi-cellular category は，stratified linear category であって，かつ，pairing と copairing の組をもつものとして定義される．

5.1 Base category

$\mathbf{k}$-線形圏 $\mathcal{A}$ が *base category* であるとは，以下の 2 つの条件を満たすときをいう．

1. 対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が降鎖条件をみたす半順序 $\leq$ を持つ．
2. 相異なる対象 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し，$\mathcal{A}(x,y) = 0$ が成り立つ．

$\mathcal{A}$ 上の線形圏とは，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ であるような線形圏 $\mathcal{C}$ であって，対象上で恒等写像となるような線形関手 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ をもつもののことを言う．$\mathcal{A}$ 上の線形圏 $\mathcal{C}$ に対し，射集合 $\mathcal{C}(x,y)$ は，$(\mathcal{A}(y,y), \mathcal{A}(x,x))$-両側加群の構造を持つ．

5.2 Stratified linear category

以下，$\mathcal{A}$ を base category とする．

$\mathcal{A}$ 上の *stratified linear category* とは，$\mathcal{A}$ 上の線形圏 $(\mathcal{C}, i)$ であって，以下の条件を満たす線形部分圏 $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$ をもつもののことを言う．

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^+) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^-) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
2. - $\mathcal{C}^+$ は upward．つまり，任意の対象 x, y に対し，$x > y$ ならば，$\mathcal{C}^+(x,y) = 0$.
   - $\mathcal{C}^-$ は downward．つまり，任意の対象 x, y に対し，$x < y$ ならば，$\mathcal{C}^-(x,y) = 0$.
3. 各対象 x に対して，$\mathcal{C}^+(x,x) = \mathcal{C}^-(x,x)$. (このとき，$\mathcal{C}^\pm$ の線形部分圏 $\mathcal{C}^0$ が，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を対象の集合とし，各対象 x に対し，$\mathcal{C}^0(x,x) = \mathcal{C}^\pm(x,x)$，相異なる対象 x, y に対し，$\mathcal{C}^0(x,y) = 0$ を射集合とする圏として定まる．)
4. 線形関手 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ は，線形圏の同型 $i : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^0$ を誘導する．(以降，同型 i を通して $\mathcal{A}$ と $\mathcal{C}^0$ を同一視する．)
5. 各対象 x, z に対し，合成写像
$$\circ : \bigoplus_{y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{C}^+(y,z) \otimes_{\mathcal{C}^0(y,y)} \mathcal{C}^-(x,y) \to \mathcal{C}(x,z), \quad g \otimes f \mapsto g \circ f$$
は $(\mathcal{A}(z,z), \mathcal{A}(x,x))$-両側加群の同型．

Stratified linear category $\mathcal{C}$ に対し，対象上では恒等写像である線形関手（射影）
$$\varepsilon^\pm : \mathcal{C}^\pm \to \mathcal{C}^0$$

が，各対象 x に対し，$\varepsilon^{\pm} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\pm}(x,x)}$，相異なる対象 x, y に対し，$\varepsilon^{\pm} = 0$ で定義される．

5.3 Quasi-cellular category

$\mathcal{A}$ 上の *quasi-cellular category* とは，$\mathcal{A}$ 上の stratified linear category $\mathcal{C}$ であって，以下の条件を満たす pairing b' と copairing d' をもつもののことをいう．ただし，pairing b' とは，各対象 x に対する $\mathcal{A}(x,x)$-両側加群の準同型

$$b'_x : \bigoplus_{y \geq x} \mathcal{C}^-(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^+(x,y) \to \mathcal{A}(x,x)$$

の族であり，copairing d' とは，各対象 x に対する $\mathcal{A}(x,x)$ の $\mathcal{C}(x,x)$ における中心化環 $Z_{\mathcal{C}(x,x)}(\mathcal{A}(x,x)) \subset \bigoplus_{y \leq x} \mathcal{C}^+(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^-(x,y)$ の元

$$d'(1_x) = \sum_{y \leq x} (d')^+_{x,y} \otimes (d')^-_{x,y} \in \bigoplus_{y \leq x} \mathcal{C}^+(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^-(x,y)$$

の族のことである．

1. 任意の $f \in \mathcal{C}^+(z,x)$ に対し，
$$\sum_{y \leq x} (d')^+_{x,y} b'((d')^-_{x,y} \otimes f) = f. \tag{2}$$
2. 任意の $g \in \mathcal{C}^-(x,z)$ に対し，
$$\sum_{y \leq x} b'(g \otimes (d')^+_{x,y})(d')^-_{x,y} = g. \tag{3}$$
3. 任意の $f \in \mathcal{C}^+(z,x)$ に対し，$b'(1_x \otimes f) = \begin{cases} f & (x = z) \\ 0 & (x \neq z). \end{cases}$
4. 任意の $g \in \mathcal{C}^-(x,z)$ に対し，$b'(g \otimes 1_x) = \begin{cases} g & (x = z) \\ 0 & (x \neq z). \end{cases}$

5.4 Brauer category の quasi-cellular structure

ここでは，Brauer category に quasi-cellular category の構造を与える．まず，Brauer category が base category $\mathbb{S}$ 上の stratified linear category であることを確認する．線形関手 $i : \mathbb{S} \to B$ を，対象上で恒等写像であって，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ を，σ を実現する (p,p)-Brauer diagram に移すものとする．$B^{\pm}$ (resp. B^0) で，$\mathrm{Ob}(B^{\pm}) = \mathrm{Ob}(B^0) = \mathrm{Ob}(B)$, 射集合 $B^{\pm}(p,q)$ (resp. $B^0(p,q)$) が $\mathbb{B}^{\pm}(p,q)$ (resp. $\mathbb{B}^0(p,q)$) を基底とする自由 $\mathbf{k}$-加群であるような B の線形部分圏を表すことにする．upward, downward, level Brauer diagram の定義と，Brauer diagram の分解 (1) から，(B, i, B^+, B^-) が $\mathbb{S}$ 上の stratified linear category であることが確かめられる．

Brauer category に対し，pairing

$$b'_p : \bigoplus_{p \preceq q} B^-(q,p) \otimes_{\mathbb{S}(q,q)} B^+(p,q) \to \mathbb{S}(p,p)$$

を，$f \in \mathbb{B}^{-,m}(q,p), g \in \mathbb{B}^{+,m}(p,q)$ に対し，

$$b'(f \otimes g) = \delta^-_{\overline{f},g} 1_p$$

で定義し，copairing d' を

$$d'(1_p) = \sum_{r \preceq p} \sum_{f \in \mathbb{B}^{+,m}(r,p)} f \otimes \overline{f} \in \bigoplus_{r \preceq p} B^+(r,p) \otimes_{\mathbb{S}(r,r)} B^-(p,r)$$

で定めると，(B, i, B^+, B^-, b', d') は $\mathbb{S}$ 上の quasi-cellular category となる．

6 Quasi-cellular category に対する主定理

ここでは，quasi-cellular category に対する主結果を述べる．

$\mathcal{A}$ 上の quasi-cellular category $(\mathcal{C}, b', d')$ に対し，線形圏 $\mathcal{C}_{b'}$ が以下のように定義される．$\mathcal{C}_{b'}$ の対象と射集合は，$\mathcal{C}$ のものと同じであるが，射の合成

$$\mathcal{C}_{b'}(y,z) \otimes \mathcal{C}_{b'}(x,y) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}_{b'}(x,z)$$

は，$f \otimes g \in \mathcal{C}^+(v,z) \otimes_{\mathcal{A}(v,v)} \mathcal{C}^-(y,v) \subset \mathcal{C}(y,z), f' \otimes g' \in \mathcal{C}^+(u,y) \otimes_{\mathcal{A}(u,u)} \mathcal{C}^-(x,u) \subset \mathcal{C}(x,y)$ に対し，

$$(f \otimes g) \circ (f' \otimes g') = f \otimes b'(g \otimes f') g'$$

で定義される．前節で与えた Brauer category の quasi-cellular 構造 (B, b', d') に付随する線形圏 $B_{b'}$ は，matrix Brauer category mB に他ならない．

$\mathcal{A}$ 上の quasi-cellular category $(\mathcal{C}, b', d')$ に対し，線形関手

$$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{b'}$$

を，対象上では恒等写像，射 $f^+ \otimes f^- \in \mathcal{C}^+(z,y) \otimes_{\mathcal{A}(z,z)} \mathcal{C}^-(x,z) \subset \mathcal{C}(x,y)$ に対して，

$$L(f^+ \otimes f^-) = \sum_{w \leq y} (d')^+_{y,w} \otimes ((\varepsilon^+ \otimes \mathcal{C}^-)\tau((d')^-_{y,w} \otimes f^+)) f^- \in \mathcal{C}_{b'}(x,y)$$

で定める．ただし，$\tau : \mathcal{C}^- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}^+ \xrightarrow{\circ} \mathcal{C} \xrightarrow[\cong]{\circ^{-1}} \mathcal{C}^+ \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}^-$ とする．定理 4.1 の線形関手 $L : B \to mB$ とは，この関手のことである．

$\mathcal{A}$ 上の quasi-cellular category $(\mathcal{C}, b', d')$ が *perfect* であるとは，pairing

$$b = (\varepsilon^+ \otimes \varepsilon^-)\tau : \bigoplus_{y \geq x} \mathcal{C}^-(y,x) \otimes_{\mathcal{A}(y,y)} \mathcal{C}^+(x,y) \to \mathcal{A}(x,x)$$

と対応する copairing d が存在する（すなわち，b と d が (2) と (3) を満たす）ことをいう．Brauer category に対しては，perfect であることと，パラメータ δ が非特異であることは同値である．（δ の特異性については次節で述べる．）

Perfect quasi-cellular category に対して, 定理 4.1 と 4.2 は以下のように一般化される．

定理 6.1. $\mathcal{A}$ 上の *quasi-cellular category* $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C}$ が *perfect* ならば，$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{b'}$ は線形圏の同型である．

定理 6.2. $\mathcal{A}$ 上の *quasi-cellular category* $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C}$ が *perfect* ならば，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ と森田同値であり，$\mathcal{C}$ の中心は $\mathcal{A}$ の中心と $\mathbf{k}$-代数として同型である．

7 パラメータ δ の特異性

最後に，Brauer category のパラメータ δ の特異性について述べる．

x をパラメータとする $\mathbb{Z}[x]$ 上の Brauer category $B = B^{\mathbb{Z}[x],x}$ を考える．$p \preceq q$ に対し，$n = |\mathbb{B}^{+,m}(p,q)|$ とおき，行列 $A_{p,q} \in M_n(\mathbb{Z}[x][\mathfrak{S}_p])$ を，

$$A_{p,q} = (a_{f,g})_{f,g \in \mathbb{B}^{+,m}(p,q)}, \quad a_{f,g} = b(\bar{f} \otimes g)$$

で定める．

左正則表現 $L : \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_p] \hookrightarrow M_{p!}(\mathbb{Z})$ が誘導する単射環準同型 $\iota : M_n(\mathbb{Z}[x][\mathfrak{S}_p]) \hookrightarrow M_{np!}(\mathbb{Z}[x])$ を用いて，多項式 $f_{p,q}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を，

$$f_{p,q}(x) = \det \iota(A_{p,q}) \in \mathbb{Z}[x]$$

で定義する．

単位的可換環 $\mathbf{k}$ と，パラメータ $\delta \in \mathbf{k}$，$r \geq 0$ に対して，δ が $\mathrm{rank} \preceq r$ で**非特異**であるとは，任意の $p \preceq q \preceq r$ を満たす (p,q) に対し，$f_{p,q}(\delta) \in \mathbf{k}$ が可逆であることを言う．（ここで定義されたパラメータ δ の特異性は，König–Xi [8] で定義された特異性と同値なものである．）

Rui–Si [11] の結果から，Brauer category のパラメータ δ が非特異であるための必要十分条件は，以下の通りである．$r \geq 0$ に対し，$X_r \subset \mathbb{Z}$ を

$$X_r = X_r^0 \cup \{i, -2i \mid 1 \leq i \leq r-2, i \in \mathbb{Z}\} \cup \{j \in \mathbb{Z} \mid 4 - r \leq j \leq -1\}$$

$$X_r^0 = \begin{cases} \{0\} & (r \neq 0,1,3,5) \\ \emptyset & (r = 0,1,3,5) \end{cases}$$

で定める．

命題 7.1. *Brauer category* $B^{\mathbf{k},\delta}$ に対して，δ が *rank* $\preceq r$ で非特異であることと，任意の $m \in X_r$ に対して，$\delta - i(m) \in \mathbf{k}$ が可逆であることは同値である．（ただし，$i : \mathbb{Z} \to \mathbf{k}$ は唯一存在する環準同型である．）

参考文献

[1] Richard Brauer. On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. *Ann. of Math. (2)*, 38(4):857–872, 1937.

[2] William P. Brown. The semisimplicity of ω_f^n. *Ann. of Math. (2)*, 63:324–335, 1956.

[3] Wm. P. Brown. An algebra related to the orthogonal group. *Michigan Math. J.*, 3:1–22, 1955.

[4] P. Deligne. La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t, lorsque t n'est pas un entier naturel. In *Algebraic groups and homogeneous spaces*, volume 19 of *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, pages 209–273. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.

[5] Pierre Deligne. La série exceptionnelle de groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(4):321–326, 1996.

[6] William F. Doran, IV, David B. Wales, and Philip J. Hanlon. On the semisimplicity of the Brauer centralizer algebras. *J. Algebra*, 211(2):647–685, 1999.

[7] Phil Hanlon and David Wales. Computing the discriminants of Brauer's centralizer algebras. *Math. Comp.*, 54(190):771–796, 1990.

[8] Steffen König and Changchang Xi. A characteristic free approach to Brauer algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1489–1505, 2001.

[9] G. I. Lehrer and R. B. Zhang. The Brauer category and invariant theory. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(9):2311–2351, 2015.

[10] Hebing Rui. A criterion on the semisimple Brauer algebras. *J. Combin. Theory Ser. A*, 111(1):78–88, 2005.

[11] Hebing Rui and Mei Si. A criterion on the semisimple Brauer algebras. II. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113(6):1199–1203, 2006.

[12] Hans Wenzl. On the structure of Brauer's centralizer algebras. *Ann. of Math. (2)*, 128(1):173–193, 1988.