Classification of orientable torus bundles over closed orientable surfaces

粕谷 直彦　(北海道大学)*

任意の非負整数 g に対し、種数 g の有向閉曲面を Σ_g で表す。本稿では、筆者が野田一成氏（北海道大学）との共著論文 [9] において行った Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの同型類の分類について概説する。尚、研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」においても同じ内容の講演を行ったため、その予稿集原稿と内容が大きく重複することをご容赦いただきたい。

1. 主定理とその背景

有向 S^1 束の同型類がオイラー類によって完全に分類されることはよく知られている。そこで、次に有向 T^2 束の同型類を分類したい、というのは自然な問題意識であろう。ところが、2023 年時点では、底空間が有向閉曲面 Σ_g の場合でさえ、以下の分類結果があるばかりであった（T^2 束のモノドロミーおよびオイラー類については 3 章を参照）。

(1) S^2 上の T^2 束の同型類はオイラー類によって完全に分類され、同型類全体は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と一対一対応がつく。

(2) T^2 上の（向き付け可能とは限らない）T^2 束の同型類は、モノドロミーとオイラー類の観点から完全に分類されている。(Sakamoto–Fukuhara [14])

そこで、$g \geq 2$ の場合の分類に取り組み、有向 T^2 束に限って解決したのが、論文 [9] の主定理（後述の定理 9）である。

一方、Σ_g 上の有向 T^2 束は、Σ_g 上の特異ファイバーをもたない種数 1 の Lefschetz fibration とみなすこともできる。実のところ、「Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの同型類分類」という問題を考え始めた元々の動機は、松本幸夫氏による種数 1 の Lefschetz fibration の分類定理である。

定理 1 (Kas [8], Moishezon [12], Matsumoto [11])**.** 特異ファイバーをもつ S^2 上の relatively minimal な種数 1 の Lefschetz fibration は、rational elliptic surface $E(1) \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ のある有限個のファイバー和

$$E(m) := m\#_f E(1) \to S^2$$

と同型である。また、特異ファイバーをもつ Σ_g 上の relatively minimal な種数 1 の Lefschetz fibration は、ある $E(m) \to S^2$ と Σ_g 上の自明 T^2 束とのファイバー和と同型である。

この定理の前半部分（底空間が S^2 の場合）は、Kas と Moishezon によって独立に得られた結果である。松本氏の寄与は、それを底空間が Σ_g の場合に拡張したことである。証明方法は、Moishezon の議論に基づいており、モノドロミー準同型の分類問題を、群

* e-mail: nkasuya@math.sci.hokudai.ac.jp

同型 $PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ を通じて、word problem に帰着させる、というものである。因みに、後に紹介するチャートという道具を用いた定理の別証明が知られている [7]。

さて、次のように考えると、定理の主張は極めて非自明な内容であることが分かる。S^2 上の任意の種数 1 の Lefschetz fibration を用意する。これと Σ_g 上の任意の有向 T^2 束 ξ とのファイバー和をとれば、Σ_g 上の種数 1 の Lefschetz fibration が得られる。同様に、Σ_g 上の自明 T^2 束とのファイバー和も Σ_g 上の種数 1 の Lefschetz fibration であるが、定理 1 によれば、これらは Lefschetz fibration として同型である。つまり、ξ がどんなに捻れていようとも、Lefschetz fibration とのファイバー和をとった瞬間に捻れの情報は消えてしまう、ということである。

しかし、よく考えてみると、Σ_g $(g \geq 2)$ 上の非自明な T^2 束の具体例を知らないことに気づく。もちろん、T^2 上の非自明 T^2 束たちのファイバー和をとることで、Σ_g 上の非自明 T^2 束は得られるが、それは実質的に $g = 1$ の場合の例である。そこで、それ以外に $g \geq 2$ に特有の例、即ち、ファイバー和分解不可能な例があるか否か、ということが気になってくる。この問いに対する以下の解答が、本講演の主定理である。

定理 2 (講演の主定理)**.** $g \geq 1$ とする。任意の Σ_g 上の有向 T^2 バンドルは g 個の T^2 上の T^2 束のファイバー和と同型である。

この定理は次の結果の系である。

定理 3 (K–Noda [9])**.** $g \geq 1$ とする。任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ に対し、

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \rangle$$

なる生成系 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \leq i \leq g}$ が存在して、すべての i について $\rho(\alpha_i) = e$ が成立する。

従って、講演では主に定理 3 の証明を行う。尚、ファイバーの種数が 2 以上の場合には、以下の結果が知られており、我々の定理 2 と好対照をなしている。

定理 4 (Baykur–Margalit [2])**.** 任意の $g \geq 1$, $h \geq 2$ に対し、非自明なファイバー和分解を許容しない Σ_g 上の有向 Σ_h 束が存在する。

これにより、有向閉曲面上の有向 Σ_h 束の分類は、$h = 1$ と $h \geq 2$ とで、様相が著しく異なることが分かる。このように定理 2 の主張は注目に値するものであるが、その一方で、g 個の T^2 上の T^2 束のファイバー和が 2 種類与えられたとき、それらが同型になるための必要十分条件については何も述べておらず、分類定理と呼ぶには相応しくない。もちろん、原論文の主定理（後述の定理 9）では、その必要十分条件を明らかにしているのであるが、講演では時間の都合上、この部分について十分に説明することはできない。そこで、講演中は分類の第 1 ステップである定理 3 に注力する一方で、そこから分類定理に至る展開を本稿最終章で解説することとする。

2. ファイバー束の同型類分類

一般に、底空間 M 上の F バンドルの同型類全体は、M から分類空間 $\mathrm{BDiff}(F)$ への連続写像のホモトピー類全体と一対一対応することが知られている。従って、ファイバー束の同型類の分類問題は、底空間から分類空間への連続写像のホモトピー分類問題に

帰着される。それでもなお、ファイバー束の同型類を分類することは、有向 S^1 束などの少数の例外を除き、大抵の場合、極めて難しい問題である。というのも、分類空間 $\mathrm{BDiff}(F)$ のホモトピー型を具体的に理解することが一般には困難だからである。

ただし、有向閉曲面上の有向曲面束の同型類の分類については、ある程度のことが知られているので、ここで簡単にまとめておこう。以下では、底空間を Σ_g, ファイバーを Σ_h と表すことによって、両者を区別する。

(1) Σ_g 上の有向 S^2 束の同型類はただ 2 つ。

(2) Σ_g 上の有向 T^2 束の同型類は、モノドロミーとオイラー類のみで決定される。

(3) Σ_g 上の有向 Σ_h 束 $(h \geq 2)$ の同型類は、モノドロミーのみで決定される。

以下、各ケースについて簡単に補足する。$h = 0$ の場合、$\mathrm{Diff}_+(S^2)$ は $SO(3)$ とホモトピー同値である (Smale [15]) から、有向 S^2 バンドルの分類はランク 3 の有向実ベクトル束の分類に帰着される。従って、$SO(3)$ の弧状連結性と $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ より、Σ_g 上の有向 S^2 バンドルの同型類はちょうど 2 つしかないことが分かる。一方、$h \geq 1$ の場合は、$\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h)$ が連結ではないため、モノドロミーと呼ばれる群準同型

$$\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{MCG}(h)$$

を考慮する必要が出てくる。ただし、$\mathrm{MCG}(h)$ は写像類群 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h))$ を表している。$h \geq 2$ の場合はさらに、$\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h)$ の各連結成分が可縮である (Earle–Eells [3]) から、

$$\pi_k(\mathrm{Diff}_+(\Sigma_h)) = 0 \ \ (k \geq 1)$$

であり、従って、有向 Σ_h 束の同型類はモノドロミーのみで決定されることが分かる。ただし、曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の非可換性と写像類群 $\mathrm{MCG}(h)$ の複雑さが障害となって、モノドロミーの具体的な分類はほぼ不可能であろうと思われる。つまり、このケースでは、同型類の分類定理と呼べるような結果を得ることはほとんど望めない。

一方、$h = 1$ の場合は、$\mathrm{Diff}_+(T^2)$ が部分群

$$\mathrm{Aff}_+(T^2) = T^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z})$$

とホモトピー同値である (Hamstrom [5]) ことが知られているため、状況は比較的良い。というのも、$\mathrm{MCG}(1) = SL(2;\mathbb{Z})$ はそこまで複雑な群ではないからである。また、$\pi_1(\mathrm{Diff}_+(T^2)) = \mathbb{Z}^2$ であることに起因して、モノドロミーに加えて、オイラー類と呼ばれる Σ_g の局所係数 2 次コホモロジー類が現れ、この 2 つによって有向 T^2 束の同型類は完全に決定されることが分かる（後述の命題 5 を参照)。ただし、これを以って同型類分類が完了する訳ではない。なぜなら、曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ から $SL(2;\mathbb{Z})$ への群準同型を分類することは、$g \geq 2$ の場合に、全く容易でないからである。そして、それを解決したということが、我々の結果の根幹部分である。

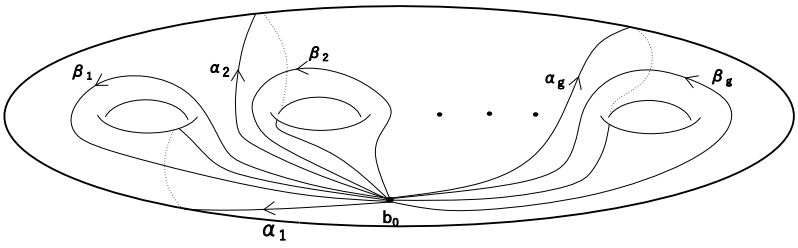


図 1: $\pi_1(\Sigma_g)$ の生成系

3. 有向 T^2 束のモノドロミーおよびオイラー類

2 次元トーラス T^2 を、$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とみなす。$\mathrm{Aff}_+(T^2)$ は $\mathbb{R}^2$ の向きと格子 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ を保つ線型変換および平行移動が誘導する微分同相によって生成される $\mathrm{Diff}_+(T^2)$ の部分群であるから、

$$\mathrm{Aff}_+(T^2) = T^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z})$$

である。$\mathrm{Diff}_+(T^2)$ は $\mathrm{Aff}_+(T^2)$ とホモトピー同値なので、$\mathrm{MCG}(1) = SL(2;\mathbb{Z})$ であり、

$$\pi_k(\mathrm{Diff}_+(T^2)) = \pi_k(T^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z})) = \pi_k(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (k=1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases}$$

であることも分かる。

さて、有向 T^2 束のモノドロミーとオイラー類について、詳しくみていこう。任意の有向 T^2 束 $\pi\colon M^4 \to \Sigma_g$ をとり、底空間 Σ_g 上の基点 b_0 を固定し、Σ_g を以下のように胞体分割する。まず、基本群 $\pi_1(\Sigma_g, b_0)$ の生成系 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ を図 1 のようにとり、b_0 を 0 胞体 e^0 とし、$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ に対応する 1 胞体をそれぞれ $e^1_1, e^1_2, \ldots, e^1_{2g-1}, e^1_{2g}$ とする。これらがなす 1 骨格に対し、2 胞体 e^2 をループ $[\alpha_1, \beta_1]\cdots[\alpha_g, \beta_g]$ に沿って貼れば、胞体分割

$$\Sigma_g = \left(e^0 \cup (e^1_1 \cup e^1_2 \cup \cdots \cup e^1_{2g-1} \cup e^1_{2g})\right) \cup e^2$$

が得られる。ここで、同一視 $F_{b_0} = \pi^{-1}(b_0) \cong T^2$ を与える微分同相を 1 つ固定すると、同型 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(F_{b_0})) \cong SL(2;\mathbb{Z})$ が定まり、各 1 胞体に沿ったモノドロミー (return map) が $SL(2;\mathbb{Z})$ の元として表される。そこで得られた $SL(2;\mathbb{Z})$ の元を、$k = 2i-1$ のとき A_i, $k = 2i$ のとき B_i とおけば、

$$\rho(\alpha_1) = A_1,\ \rho(\beta_1) = B_1,\ \cdots,\ \rho(\alpha_g) = A_g,\ \rho(\beta_g) = B_g$$

であり、$[A_1, B_1]\cdots[A_g, B_g] = E_2$ を満たす。このようにしてモノドロミー ρ を表示する $2g$ 個の行列が得られ、それらが 1 骨格上の T^2 束の同型類を定めている。

あとは、$e^2 \cong D^2$ 上の自明バンドル $D^2 \times T^2$ がどのように貼り合わされるかを記述すれば、π の同型類を復元することができる。そこで、1 骨格の小さな近傍 N をとる。すると、その境界 $\partial N = S^1$ 上では π は自明なので、貼り合わせの情報は変換関数 $N \cap \mathrm{Int}(e^2) \to \mathrm{Diff}_+(T^2)$ として表され、$N \cap \mathrm{Int}(e^2) \simeq S^1$ より、$\pi_1(\mathrm{Diff}_+(T^2)) = \mathbb{Z}^2$

の元が定まる。これを (m,n) とおけば、有向 T^2 バンドル $\pi\colon M^4 \to \Sigma_g$ の同型類は $[A_1,B_1]\cdots[A_g,B_g]=E_2$ を満たす

$$A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g \in SL(2;\mathbb{Z}) \text{ および } (m,n)\in\mathbb{Z}^2$$

というデータのみで記述できたことになる。この T^2 束を $M(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g;m,n)$ という記号で表すことにする。

次に、有向 T^2 バンドル $\xi=(M(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g;m,n),\pi,\Sigma_g,T^2)$ のオイラー類を

$$\pi\colon M(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g;m,n)\to\Sigma_g$$

が cross section を持つための障害類として定義する。まず、π を 1 骨格上に制限すると、2 次元実ベクトル束の zero section に対応する section が存在するが、これが 2 胞体 e^2 上まで延長可能であることと、$(m,n)=(0,0)$ であることは同値である。よって、$(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ は π が cross section を持つための障害を表していると考えられそうである。しかし、この考察には不十分な点がある。なぜなら、$\pi_1(T^2)\cong\mathbb{Z}^2$ という同一視の仕方は canonical ではないので、$(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ のままでは「障害類」として well-defined ではないからである。この問題は、1 つのファイバー $F_b=\pi^{-1}(b)$ に対して、同一視 $\pi_1(F_b)\cong\mathbb{Z}^2$ を固定したとしても、解決されない。というのも、$\gamma\in\pi_1(\Sigma_g,b)$ に沿ったモノドロミーの作用があるので、$\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ と $\rho(\gamma)\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ の区別はつかないからである。このような不都合を解消するものが、局所系 $\{\pi_1(T^2)\}$ である。これは一言で言えば、各点 $b\in\Sigma_g$ における茎が $\pi_1(F_b)\cong\mathbb{Z}^2$ に同型なモノドロミー ρ に付随する局所定数層である。つまり、$l(0)=l(1)=b$ なる Σ_g 上の loop l に対し、その $\{\pi_1(T^2)\}$ へのリフト $\widetilde{l}$ が始点 $\widetilde{l}(0)$ を定めれば一意的に決まり、

$$\widetilde{l}(0)=\rho([l])\,\widetilde{l}(1)$$

を満たすということである。ξ の cross section の存在に関する障害類 $e(\xi)$ はこれを係数とする 2 次コホモロジー類として定まる。障害類 $e(\xi)$ の属する加群を書き下せば

$$H^2\left(\Sigma_g;\{\pi_1(T^2)\}\right)\cong\mathbb{Z}^2/\sim$$

である。ただし、同値関係 $\sim$ は以下のように定義される。

$$(k_1,k_2)\sim(l_1,l_2)\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}l_1-k_1\\l_2-k_2\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{r}(\rho(\gamma_i)-E_2)\boldsymbol{u}_i \text{ なる } \gamma_i\in\pi_1(\Sigma_g),\boldsymbol{u}_i\in\mathbb{Z}^2 \text{ が存在。}$$

よって、$e(\xi)=[(m,n)]$ と表せる。これが有向 T^2 バンドルのオイラー類である。
一旦、オイラー類が定義されれば、次の命題を証明することはそれほど難しくない。

命題 5. $\xi=(E,\pi,\Sigma_g,T^2)$, $\xi'=(E',\pi',\Sigma_g,T^2)$ をともに有向 T^2 バンドルとし、それぞれのモノドロミーおよびオイラー類を ρ,ρ', $e(\xi),e(\xi')$ と表す。このとき、ξ と ξ' が同型であるための必要十分条件は、$\rho\circ f_*=Q\rho'Q^{-1}$ かつ $e(\xi)=f^*e(\xi')$ を満たす $f\in\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ および $Q\in SL(2;\mathbb{Z})$ が存在することである。

注意 6. [14] では、障害類 $e(\xi)$ に関する説明および命題 5 の $g = 1$ の場合の証明が詳述されており、その議論を拡張して命題 5 を得ることは容易である。一方、[14] におけるモノドロミー分類の議論は、$\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ の可換性に依存しており、$g \geq 2$ の場合を解決するためには別の方法が必要である。

4. 定理 3 の証明のアイディア

証明の基本的な考え方は次の通りである。任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ に対し、$\rho(\gamma) = e$ を満たす non-trivial separating curve γ の存在を示したい。というのも、そのような γ が存在すれば、γ に沿って Σ_g を切り開き、それぞれの境界に円板を貼り付けることで、ρ を 2 つの準同型

$$\pi_1(\Sigma_k) \to PSL(2;\mathbb{Z}),\ \ \pi_1(\Sigma_{g-k}) \to PSL(2;\mathbb{Z})$$

に分解できるからである。そして、そのような γ を見出す際に役立つのが「チャート」である。これは元々、鎌田氏 [6] によって曲面結び目の研究のために導入されたものであるが、曲面群から有限表示群への準同型を記述することができる非常に有用な道具である。有限表示群 G を固定したとき、G–チャートとは具体的には何かというと、有向曲面上の有向グラフであって、各辺は G の生成元でラベル付けされており、各頂点から出ている辺のラベルを順に読んでいくと G の関係式となっているもののことである（ただし、チャートでは、hoop と呼ばれる頂点のない loop も辺として許される）。$PSL(2;\mathbb{Z})$ は自由積 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ と同型であるから、この有限表示に関する ρ のチャートをとると、頂点は 2 価頂点と 3 価頂点の 2 種類しかない。しかも、2 価頂点から出ている辺のラベルは全て a, 3 価頂点では全て b なので、2 価頂点と 3 価頂点が辺で結ばれることはない。そのため、2 価頂点の連結成分はつねに simple closed curve であり、これを少しずらせば、チャートと交わらない simple closed curve が得られる（2 価頂点が存在しなくても、hoop があれば同じことができる）。この事実が、定理 3 の証明における非常に重要なポイントとなる。

定理 3 の証明の概略. 任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ に対し、その群表示 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ に関するチャート Γ をとる。そして、Γ の 2 価頂点の連結成分および hoop として現れる Σ_g 上の simple closed curve 全体の集合を X_Γ とおく。証明は種数 g に関する帰納法による。即ち、閉曲面 Σ_g を種数 k と種数 $g-k$ に分ける separating curve γ であって、$\rho(\gamma) = e$ となるものの存在を示す（但し、$1 \leq k \leq g$）。以下の 3 通りに場合分けして議論すると、いずれの場合も所望の separating curve γ が存在することが言える。

(1) $X_\Gamma = \emptyset$ のとき.

(2) $X_\Gamma \neq \emptyset$ かつ X_Γ の中に non-trivial separating curve が存在するとき.

(3) $X_\Gamma \neq \emptyset$ かつ X_Γ の全ての元が non-separating curve であるとき.

$g = 1$ の場合の主張は [14] において証明済みなので、これで帰納法が回る。 □

5. 有向閉曲面上の有向T^2束の分類

5.1. 曲面群から$PSL(2;\mathbb{Z})$への準同型の分類

任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ をとる。部分群 $\mathrm{Im}(\rho) \subset \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ に Kurosh's subgroup theorem ([10]) を適用すれば、$\mathrm{Im}(\rho)$ の部分群 $H_1, \dots, H_m$ が存在して、

$$\mathrm{Im}(\rho) = (H_1 * \cdots * H_k) * (H_{k+1} * \cdots * H_l) * (H_{l+1} * \cdots * H_m),$$
$$H_1 \cong \cdots \cong H_k \cong \mathbb{Z},\ \ H_{k+1} \cong \cdots \cong H_l \cong \mathbb{Z}_3,\ \ H_{l+1} \cong \cdots \cong H_m \cong \mathbb{Z}_2$$

と表せる。このとき、定理 3 を足掛かりにすると、以下を示すことができる。

定理 7. 任意の準同型 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ に対し、次を満たす写像類 $f \in \mathrm{MCG}(g)$ が存在する。

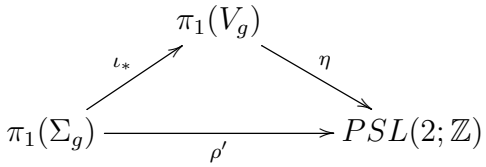
$$(\rho \circ f_*)(\alpha_i) = e\ \ (1 \le i \le g),\ \ (\rho \circ f_*)(\beta_i) = \begin{cases} 1 \in H_i \cong \mathbb{Z} & (1 \le i \le k), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_3 & (k+1 \le i \le l), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_2 & (l+1 \le i \le m), \\ e & (m+1 \le i \le g). \end{cases}$$

特に、任意の 2 つの準同型 $\rho_1, \rho_2\colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ について、以下は同値である。

(1) $\mathrm{Im}(\rho_1) = \mathrm{Im}(\rho_2)$.

(2) $\rho_2 = \rho_1 \circ f_*$ なる写像類 $f \in \mathrm{MCG}(g)$ が存在する。

定理 7 の証明の概略. V_g で種数 g のハンドル体を表す。各 i について $(\rho \circ \varphi_*)(\alpha_i) = e$ となる写像類 $\varphi \in \mathrm{MCG}(g)$ の存在は分かっていたので、$\rho' = \rho \circ \varphi_*$ とおけば、これは以下が可換図式となるように factorize する。



つまり、$\iota\colon \Sigma_g \to V_g$ を包含写像としたとき、$\rho' = \eta \circ \iota_*$ を満たす準同型

$$\eta\colon F_g \cong \pi_1(V_g) \to PSL(2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

が存在するということである。$\eta(F_g) = \mathrm{Im}(\rho') = \mathrm{Im}(\rho)$ に注意すれば、

$$\eta(F_g) = (H_1 * \cdots * H_k) * (H_{k+1} * \cdots * H_l) * (H_{l+1} * \cdots * H_m)$$

であり、Grushko's theorem ([4], [16]) を繰り返し用いれば、

$$(\eta \circ \gamma)(a_i) = \begin{cases} 1 \in H_i \cong \mathbb{Z} & (1 \le i \le k), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_3 & (k+1 \le i \le l), \\ 1 \in H_i \cong \mathbb{Z}_2 & (l+1 \le i \le m), \\ e & (m+1 \le i \le g) \end{cases}$$

を満たす $\gamma \in \mathrm{Aut}(F_g)$ の存在が分かる。ただし、a_i $(1 \leq i \leq g)$ は自由群 F_g の生成元である。$\mathrm{Aut}(F_g)$ の具体的な有限表示 ([1], [13]) を利用すれば、$\mathrm{Aut}(F_g)$ の各元は V_g の写像類によって実現されることが分かる。そこで、$\gamma \in \mathrm{Aut}(F_g)$ に対応する V_g の写像類を h としたとき、$f = \varphi \circ h|_{\Sigma_g}$ とおけばよい。 □

5.2. 曲面群から $SL(2;\mathbb{Z})$ への準同型の分類

定理 7 における $\rho \circ f_*$ のことを、$\mathrm{MCG}(g)$ 作用に関する ρ の標準型と呼ぶことにする。射影

$$p_* \colon \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SL(2;\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2;\mathbb{Z}))$$

を $p_*(\widetilde{\rho}) = p \circ \widetilde{\rho}$ によって定める。ただし、$p \colon SL(2;\mathbb{Z}) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ は商写像である。すると、任意の準同型 $\rho \colon \pi_1(\Sigma_g) \to PSL(2;\mathbb{Z})$ について、$\#p_*^{-1}(\rho) = 2^{2g}$ である。この ρ の 2^{2g} 個のリフトのうち、どのペアが $\mathrm{MCG}(g)$ 作用で移り合うかを考えると以下のような結果となる。

定理 8. $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2;\mathbb{Z}))$ は標準型であるとする。このとき、$m > l$ ならば、$p_*^{-1}(\rho)$ はちょうど 2^k 個の $\mathrm{MCG}(g)$ 軌道を持ち、$m = l$ ならば、ちょうど 2^{k+1} 個の軌道を持つ。

証明の議論のポイントは、ρ のリフト $\widetilde{\rho}$ について、$\mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$ が $-E_2$ を含むか否かに注目することである。$m > l$ の場合は、自動的に $-E_2 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$ なので、

$$\widetilde{\rho}(\alpha_1) = \pm E_2, \cdots, \widetilde{\rho}(\alpha_k) = \pm E_2$$

の符号の選択がそのまま各軌道に対応し、それ以外の $2g-k$ 個の符号選択は $\mathrm{MCG}(g)$ 作用で吸収されることが示される。一方、$m = l$ の場合は、$-E_2 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$, $-E_2 \notin \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$ どちらのケースも現れる。$-E_2 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$ の場合は、先ほどと全く同様に 2^k 個の軌道が得られ、$-E_2 \notin \mathrm{Im}(\widetilde{\rho})$ の場合は、自動的に $\widetilde{\rho}(\alpha_1) = \cdots = \widetilde{\rho}(\alpha_k) = E_2$ となるから、今度は $\widetilde{\rho}(\beta_1), \cdots, \widetilde{\rho}(\beta_k)$ の選択に対応して、2^k 個の軌道が得られ、合わせて 2^{k+1} 個となる。いずれのケースでも、写像類群 $\mathrm{MCG}(g)$ の基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ やホモロジー群 $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ への作用を見ながら慎重に議論する必要があり、なかなか骨が折れるが、ρ を標準型にとっておいたことが効いて、最終的には議論が上手くいく。([9, Propositions 5.3–5.6])

5.3. 分類定理

命題 5, 定理 7および定理 8を踏まえれば、以下の分類定理が得られる。

定理 9 (Σ_g **上の有向** T^2 **束の分類** [9, Theorem 1.5])**.** ξ_1, ξ_2 を Σ_g 上の任意の 2 つの有向 T^2 束とし、

$$\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\rho}_2 \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SL(2;\mathbb{Z}))$$

をそのモノドロミー準同型とする。2 つの準同型 $p \circ \widetilde{\rho}_1$, $p \circ \widetilde{\rho}_2$ はともに定理 7 の意味で標準型であるとし、ξ_1, ξ_2 は整数 $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ および符号 ε_i, δ_i を用いて、それぞれ

$$M(\varepsilon_1 E_2, B_1, \ldots, \varepsilon_g E_2, B_g; m, n), \quad M(\delta_1 E_2, C_1, \ldots, \delta_g E_2, C_g; k, l),$$

と表されているとする。このとき、ξ_1 と ξ_2 が同型であることと次の条件を全て満たす $Q \in SL(2;\mathbb{Z})$ が存在することは同値である。

(1) $\mathrm{Im}(\widetilde{\rho}_1) = Q\mathrm{Im}(\widetilde{\rho}_2)Q^{-1}$.

(2) $p\circ\widetilde{\rho}_1$ の2つのリフト $\widetilde{\rho}_1$, $Q\widetilde{\rho}_2Q^{-1}$ は定理 8 の意味で、同じ $\mathrm{MCG}(g)$ 軌道に属する。

(3) $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_g = 1$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{g}(B_i - E_2)\boldsymbol{x}_i$$

を満たす $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_g \in \mathbb{Z}^2$ が存在し、それ以外の場合は、

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{g}(B_i - E_2)\boldsymbol{x}_i$$

を満たす $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_g \in \mathbb{Z}^2$ が存在する。

定理 9 の系として、以下が直ちに従う。

系 10. ξ_1, ξ_2 を Σ_g 上の任意の2つの有向 T^2 束とする。これらのモノドロミー群（モノドロミー準同型の像）がともに $SL(2;\mathbb{Z})$ に一致するならば、ξ_1 と ξ_2 は同型である。

参考文献

[1] H. Armstrong, B. Forrest and K. Vogtmann, *A presentation for* $\mathrm{Aut}(F_n)$, J. Group Theory **11**-2 (2008), 267–276.

[2] R. I. Baykur and D. Margalit, *Indecomposable surface bundles over surfaces*, J. Topol. Anal. **5** (2013), no. 2, 161–181.

[3] C. J. Earle and J. Eells, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, JDG **3** (1969), 19–43.

[4] I. Grushko, *On the bases of a free product of groups*, Mat. Sbornik **8** (1940), 169–182.

[5] M. E. Hamstrom, *The space of homeomorphisms on a torus*, Illinois J. Math. **9** (1965), 59–65.

[6] S. Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topol. Appl. **154** (2007), 1430–1446.

[7] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matumoto and K. Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, JMSJ **57** (2005), 537–555.

[8] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami Shoten (1977), 107–111.

[9] N. Kasuya and I. Noda, *Classification of orientable torus bundles over closed orientable surfaces*, JMSJ Advance Publication (2026), 1–41.

[10] A. G. Kurosh, *The Theory of Groups, vol. II*, New York: Chelsea (1956).

[11] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology, **25**-4 (1986), 549–563.

[12] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag (1977).

[13] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, Math. Ann. **91** (1924), 169–209.

[14] K. Sakamoto and S. Fukuhara, *Classification of T^2-bundles over T^2*, Tokyo J. Math., Vol. 6, No. 2 (1983), 311–327.

[15] S. Smale, *Diffeomorphisms of the* 2*-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.

[16] J. R. Stallings, *A topological proof of Grushko's theorem on free products*, Math. Z. **90** (1965), 1–8.