仮想結び目とその周辺

鎌田　直子　(名古屋市立大学)*

1　初めに

仮想結び目 (virtual knot) は, L. Kauffman によって文献 [16] で導入された, 結び目のガウスコードダイアグラムに着目した (古典的) 結び目の拡張である. 幾何学的には向きづけられた閉曲面上の結び目ダイアグラムを表しているが, それは厚みのある閉曲面内の結び目の安定同値類に対応している ([2, 14]). Jones 多項式や結び目群など, 結び目のいくつかの不変量は仮想結び目に自然に拡張される ([16]). しかし, Goeritz 不変量など結び目の不変量には自然な形では仮想結び目に拡張できない場合もある. 一方, 仮想結び目に固有の不変量も導入されている. 例えば, Jones 多項式を細密化して得られる多項式不変量が, H. Dye と L. Kauffman, および Y. Miyazawa によってそれぞれ導入されている ([3, 19]). また, L. Kauffman によって導入された odd writhe ([17]), affine index 多項式 ([18]), A. Henrich による不変量 ([5]), および Y. H. Im, K. Lee, Y. Lee による index 多項式 ([7]), S. Satoh と K. Taniguchi の n-writhe ([22]) などがある.

仮想結び目は仮想結び目ダイアグラムの一般化 Reidemeister 変形による同値類として定義されるが, 溶接結び目 (welded knot) は仮想結び目ダイアグラムに対し, 仮想結び目の場合とは異なる変形によって生成される同値関係の同値類として定義される ([4]). R. Fenn, R. Rimányi と C. Rourke [4] によって溶接結び目として同値な仮想結び目ダイアグラムの結び目群は同型であることが示された. また, S. Satoh [21] は, 溶接結び目を用いてトーラス型リボン曲面結び目を表示する方法を導入し, 表示されたトーラス型リボン曲面結び目の結び目群が, もとの溶接結び目の結び目群と同型であることを示した.

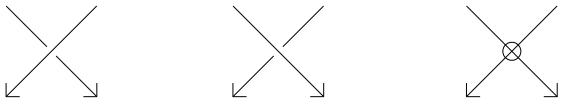
捻り仮想結び目 (twisted virtual knot) は M. Bourgoin [1] によって導入された概念である. 仮想結び目は向きづけられた閉曲面を底空間とした I バンドル内の結び目の安定同値類に対応しているのに対して, 捻り仮想結び目は (向きづけられない場合も含んだ) 閉曲面を底空間とした向きづけられた I バンドル内の結び目の安定同値類に対応している. 捻り仮想結び目に対しても Jones 多項式や結び目群などの不変量が定義されている. 捻り仮想結び目も結び目の拡張である ([1], [15]).

本講演では仮想結び目, 溶接結び目, 捻り仮想結び目など, 拡張された結び目について, それらと古典的結び目との違いに着目した研究手法と得られた結果を紹介する.

* 〒467-8501 名古屋市 瑞穂区 瑞穂町 山の畑 1　名古屋市立大学 大学院理学研究科
e-mail: kamada@nsc.nagoya-cu.ac.jp
web: https://www.nsc.nagoya-cu.ac.jp/~kamada/kamadaJ.html
本研究は科研費 (課題番号：23K03118) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: MSC-57M25, MSC-57M27
キーワード：仮想結び目, 結び目

2　仮想絡み目と溶接絡み目

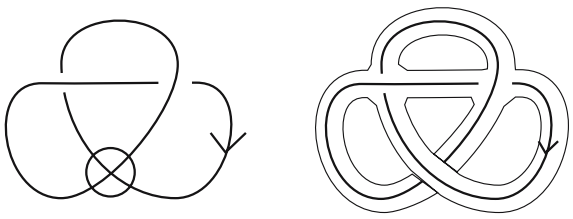
(向きづけられた) 仮想絡み目ダイアグラムは, 図 1 に示すように, 各二重点に正, 負, または仮想の情報を付した, $\mathbb{R}^2$ 内にはめ込まれた有限個の円周である. 円周の個数が n 個であるとき, これを n 成分仮想絡み目ダイアグラムという. 特に, 1 成分の場合を仮想結び目ダイアグラムという.



(a) 正の交点　　(b) 負の交点　　(c) 仮想交点

図 1　仮想絡み目ダイアグラムの交点

仮想絡み目ダイアグラムの例を図 2(a) に示す.



(a) 仮想絡み目ダイアグラム　(b) 抽象絡み目ダイアグラム

図 2　仮想絡み目ダイアグラムと抽象絡み目ダイアグラムの例

仮想絡み目は, 仮想絡み目ダイアグラムに対する図 3 に示す一般化 Reidemeister 変形によって生成される同値関係の同値類として定義される.

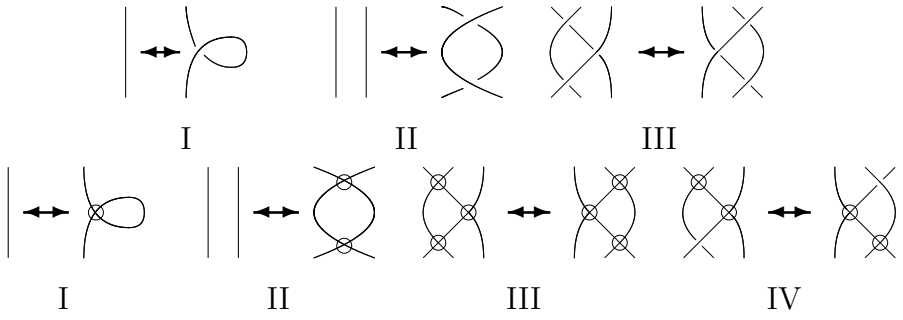


図 3　一般化 Reidemeister 変形

抽象絡み目ダイアグラム ([14]) とは, 向きづけられたコンパクト曲面 Σ と, その上の絡み目ダイアグラム D の組 (Σ, D) であって, $|D|$ が Σ の変形レトラクトとなるものをいう. ここで, $|D|$ は D の交点を頂点に置き換えて得られるグラフである. 図 2 (b) に抽象絡み目ダイアグラムの例を示す.

仮想絡み目ダイアグラムの集合から抽象絡み目ダイアグラムの集合への写像 ϕ を, 図 4

に示すように定義する. (図 4のラベル i や $i+1$ は後の議論で用いるもので, 対応 ϕ には不要である.)

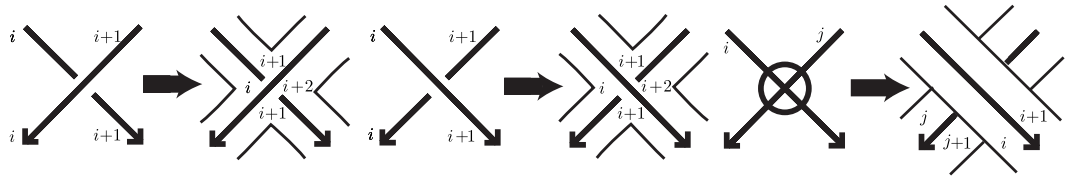


図 4　仮想絡み目ダイアグラムと抽象絡み目ダイアグラムの対応

仮想絡み目ダイアグラム D からこの写像 ϕ によって得られた抽象絡み目ダイアグラム $\phi(D)$ を, 仮想絡み目ダイアグラム D に付随する抽象絡み目ダイアグラムと呼ぶ. 図 2 において (b) は (a) の仮想絡み目ダイアグラムに付随する抽象絡み目ダイアグラムである.

図 5 に示す仮想絡み目ダイアグラムの変形を溶接変形という.

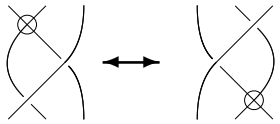


図 5　溶接変形

仮想絡み目ダイアグラムに対する一般化 Reidemeister 変形と溶接変形によって生成される同値関係の同値類を, 溶接絡み目という.

定理 1 ([4]). 溶接絡み目として同値な仮想絡み目ダイアグラムの絡み目群は同型である.

3　almost classical 仮想絡み目

仮想絡み目ダイアグラム D に付随する抽象絡み目ダイアグラムを (Σ, D_Σ) とする. $\Sigma - D_\Sigma$ の領域が checkerboard 彩色可能であるとき, 仮想絡み目ダイアグラム D は checkerboard 彩色可能であるという. 図 6 に checkerboard 彩色可能な仮想絡み目ダイアグラムとそれに付随する抽象絡み目ダイアグラムの例を示す. (古典的) 絡み目ダイアグラムは checkerboard 彩色可能である.

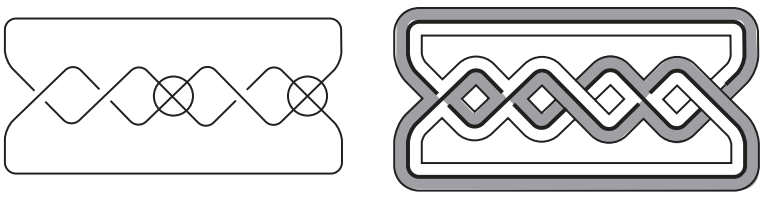


図 6　checkerboard 彩色可能な仮想絡み目ダイアグラムと抽象絡み目ダイアグラム

仮想絡み目の Jones 多項式 (f 多項式) は絡み目の Jones 多項式の拡張であり, 仮想絡

み目ダイアグラム D に対して, その Jones 多項式 $f_D(A)$ は $\mathbb{Z}[A^{\pm 2}]$ に属する. D が n 成分の古典的絡み目ダイアグラムと同値であるとき, $f_D(A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}]A^{2(n-1)}$ である.

定理 2 ([9]). D を n 成分の仮想絡み目ダイアグラムとする. D が checkerboard 彩色可能であるとき, D の Jones 多項式 $f_D(A)$ に対して次が成立する.

$$f_D(A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}]A^{2(n-1)}$$

D を n 成分の仮想絡み目ダイアグラムとし, (Σ, D_Σ) を D に付随する抽象絡み目ダイアグラムとする. 図 4 に示すように $\Sigma - D_\Sigma$ が Alexander numbering をもつとき, D を almost classical 仮想絡み目ダイアグラムという. また, D が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ で Alexander numbering をもつとき, D を m-almost classical 仮想絡み目ダイアグラムという. D が checkerboard 彩色可能であることと $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で Alexander numbering をもつことは同値である. D が almost classical 仮想絡み目ダイアグラムならば, それは checkerboard 彩色可能である.

仮想絡み目ダイアグラム D の多変数多項式不変量 R_D は $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, \dots]$ に値をもつ ([3, 19]). D が古典的絡み目ダイアグラムと同値であるとき, $R_D = f_D(A)$ が成立する.

定理 3 ([20]). D を n 成分の almost classical 仮想絡み目ダイアグラムとする. 次が成立する.

$$R_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}]A^{2(n-1)}$$

定理 4 ([11]). D を m-almost classical 仮想絡み目ダイアグラムとする. m が偶数 (または奇数) のとき, R_D は $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_{m/2}, d_{2m/2}, \dots]$ (または $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_m, d_{2m}, \dots]$) に値をもつ.

4 巡回被覆と二重化写像

本節では, 与えられた仮想絡み目ダイアグラムから almost classical 仮想絡み目ダイアグラムを構成する方法として, 巡回被覆と二重化写像を紹介する. D を仮想絡み目ダイアグラムとする. 両端点を古典的交点とする D 上の滑らかな曲線で, その内部に古典的交点は含まないものを D のセミアークと呼ぶ. (セミアークの上に仮想交点はあっても構わない.) Alexander numbering は, D に付随する抽象絡み目ダイアグラムの補領域に付けられる番号付けであるが, 図 4 に示すように, セミアークへの番号付けとして同値に記述することができる.

図 7に示すように, 仮想絡み目ダイアグラム D のセミアーク上に置かれた向き付きの点を D 上の有向カット点という. 有向カット点の向きは, ダイアグラム D の向きとは無関係である. 有向カット点で, その点の向きに沿って図 7 に示すようにセミアークの Alexander numbering を 1 ずつ変化させると約束するとき, 適切に有限個の有向カット点を D 上に置くことによって, 有向カット点を考慮することにより, D が Alexander numbering をもつようにすることができる. このような D 上の有向カット点の集合のことを, D のカットシステムと呼び, $C(D)$ と書く.

図 7　有向カット点

仮想絡み目ダイアグラムとカットシステムの例を図 8 に示す.

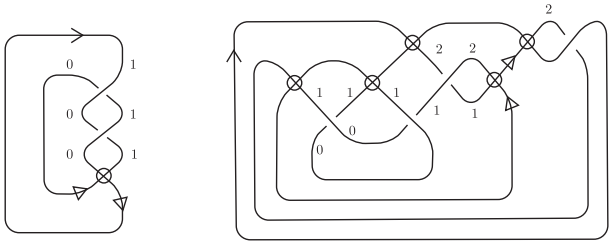


図 8　仮想絡み目ダイアグラムとカットシステムの例

仮想絡み目ダイアグラム D に対して, カットシステムは一意的ではないが, D の任意の二つのカットシステムは, 図 9 に示すカット点移動と呼ばれる基本変形を適当に繰り返せば互いに移り合うことが知られている ([10]).

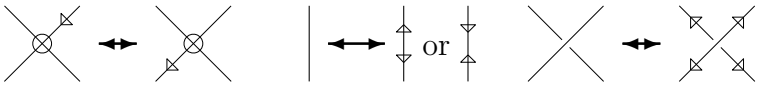


図 9　カット点移動

D を仮想絡み目ダイアグラム, $C(D) = \{c_1, \ldots, c_l\}$ を D のカットシステムとし, $c_1, \ldots, c_l$ の y 座標は全て異なり, それぞれの y 座標をもつ水平線上には D の交点がないものとする. D の m 個のコピー $D^1, \ldots, D^m$ を x 軸方向に並べる. 各 j $(j = 1, \ldots, l)$ に対して c_j に対応する $D^1, \ldots, D^m$ 上の有向カット点 $c_j^1, \ldots, c_j^m$ は同じ y 座標にある. $c_j^1, \ldots, c_j^m$ を含む直線の近傍 N_j において $D^1 \sqcup \cdots \sqcup D^m$ に図 10 のような変形を施す.

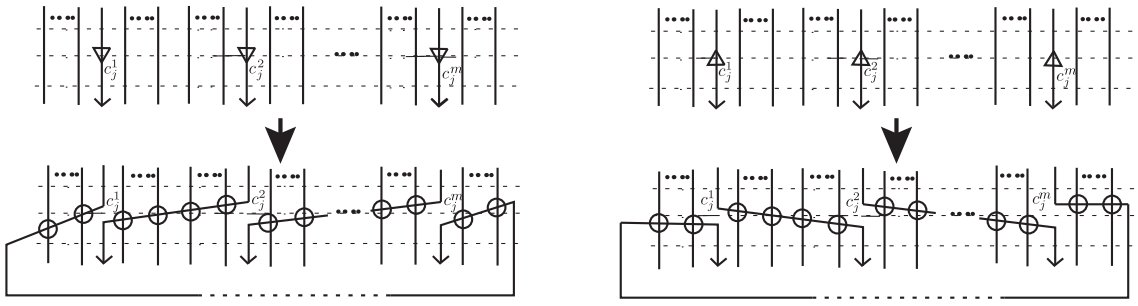


図 10　m-almost classical 仮想絡み目化

このようにして得られる, 仮想絡み目ダイアグラムの集合から仮想絡み目ダイアグラムの集合への写像を m-巡回被覆写像と呼び, φ_m とおく. 図 11 に仮想結び目ダイアグラム

D とそのカットシステムおよび φ_3 による像の例を示す.

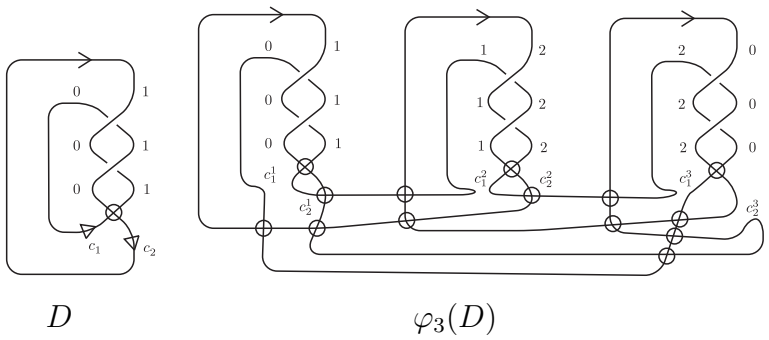


図 11　3-巡回被覆の例

定理 5([10]). D と D' を同値な仮想絡み目ダイアグラムとする. $\varphi_m(D)$ と $\varphi_m(D')$ は m-almost classical 仮想絡み目であり, 仮想絡み目として同値である.

次に, 2 種類の二重化写像を紹介する. 図 12(a) (または図 12(b)) に示す仮想絡み目ダイアグラムの集合から仮想絡み目ダイアグラムの集合への写像を ψ_1 (または ψ_2) とする.

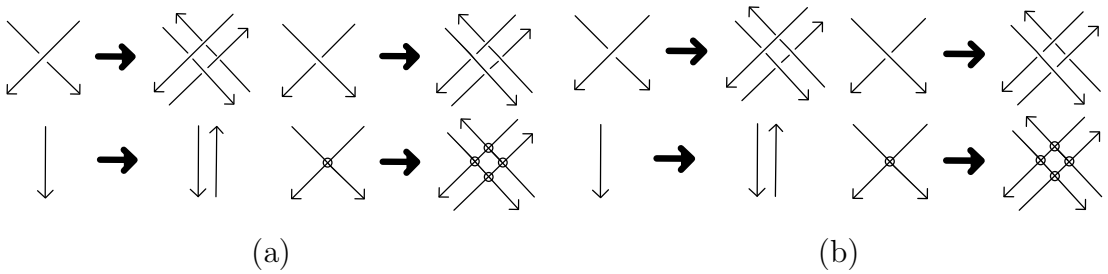


図 12　写像 ψ_1, ψ_2 の対応

図 13 に仮想結び目ダイアグラムと写像 ψ_1 によるその像の例を示す.

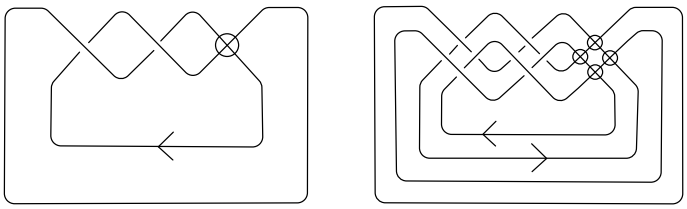


図 13　写像 ψ_1 の例

写像 ψ_2 は, K. Ishikawa と K. Tanaka の論文 [8] の図 4 に登場するダイアグラムの二重化と同じものであり, カンドル彩色とバイカンドル彩色の関係で重要な役割を果たしている ([8] では doubled diagram と呼ばれている).

定理 6 ([12]). D と D' を同値な仮想絡み目ダイアグラムとする. $\psi_\nu(D)$ と $\psi_\nu(D')$ は almost classical 仮想絡み目であり, 仮想絡み目として同値である.

5 巡回被覆と二重化写像の応用

J. H. Lee と G. T. Jin が 2001 年に次の定理を示した.

定理 7 ([6]). $L_1, \ldots, L_k$ を絡み目とし, $D_1, \ldots, D_k$ をそれぞれの絡み目ダイアグラムとする. また, L を $L_1, \ldots, L_k$ を部分絡み目として含む任意の絡み目とする. このとき, L の絡み目ダイアグラム D であって, 各 i に対して $D|_{L_i}$ と D_i が $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとなるものが存在する.

溶接絡み目に関しても類似の主張が成立する.

定理 8 ([13]). $L_1, \ldots, L_k$ を溶接絡み目とし, $D_1, \ldots, D_k$ をそれぞれの仮想絡み目ダイアグラムとする. また, L を $L_1, \ldots, L_k$ を部分溶接絡み目として含む任意の溶接絡み目とする. このとき, L の仮想絡み目ダイアグラム D であって, 各 i に対して $D|_{L_i}$ と D_i が $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとなるものが存在する.

しかし, 仮想絡み目の場合は類似の主張が成立しない.

定理 9 ([13]). ある仮想絡み目 L_1, L_2 とそれらを表す仮想絡み目ダイアグラム D_1, D_2, および, ある仮想絡み目 L で次の条件を満たすものが存在する.

(i) L は L_1, L_2 を部分仮想絡み目とする.

(ii) L の仮想絡み目ダイアグラム D であって, 各 $i = 1, 2$ に対して, D を L_i に制限した部分仮想絡み目ダイアグラム $D|_{L_i}$ と D_i が $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとなるものは存在しない.

定理 9の証明には 2-巡回被覆が用いられる. D_i $(i = 1, 2)$ を自明ループ (交点を持たない自明な結び目ダイアグラム) とし, L_i を D_i が表す自明な結び目とする. 仮想絡み目 L を図 14(a) に示すダイアグラム $D' = D'_1 \cup D'_2$ が表す 2 成分仮想絡み目とする.

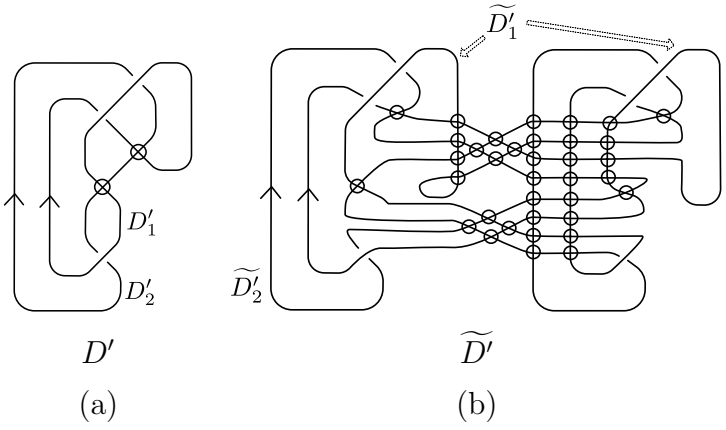


図 14　定理 9の例

D'_1 は自明ループと同値である. D'_2 は自明ループである. よって, 定理の (i) が成り立つ. (ii) については, L を表す任意のダイアグラム D に対して, それを L_1 に制限した部分仮想絡み目ダイアグラム $D|_{L_1}$ は, 自明ループ D_1 に $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックにならない. こ

のことは, 次のようにして分かる. D の 2-巡回被覆仮想絡み目ダイアグラム $\widetilde{D} = \varphi_2(D)$ と D' の 2-巡回被覆仮想絡み目ダイアグラム $\widetilde{D'} = \varphi_2(D')$ を考えると, $\widetilde{D}$ と $\widetilde{D'}$ は仮想絡み目として同値である. $\widetilde{D}$ は $D|_{L_1}$ の 2-巡回被覆となる部分ダイアグラム $\widetilde{D}\big|_{L_1}$ をもち, $\widetilde{D'}$ は D'_1 の 2-巡回被覆となる部分ダイアグラム $\widetilde{D'_1}$ をもつ. $\widetilde{D}\big|_{L_1}$ と $\widetilde{D'_1}$ は仮想絡み目として同値である. $D|_{L_1}$ が D_1 にイソトピックとなると仮定すると, $\widetilde{D}\big|_{L_1}$ は, $\mathbb{R}^2$ 内で 2 成分の自明ループとイソトピックである. 一方, $\widetilde{D'_1}$ は図 14(b) に示すように絡み数 1 の 2 成分絡み目であり, 2 成分の自明ループと同値ではない. 従って, $D|_{L_1}$ は自明ループ D_1 に $\mathbb{R}^2$ 内でイソトピックとはならない.

捻り仮想絡み目に関しても定理 9と同様の例が存在する. 図 15 に示す捻り仮想絡み目ダイアグラムはその例である.

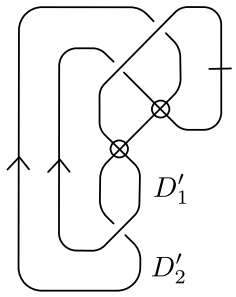
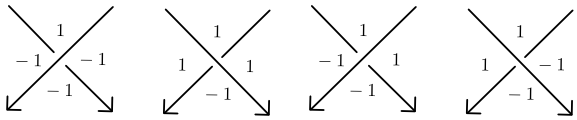


図 15　定理 9の例 (捻り仮想絡み目)

空間グラフに対しては R. Shinjo が [23] において定理 7と類似の主張を示している.

任意の仮想絡み目ダイアグラムに対して ψ_1 (または ψ_2) の像は checkerboard 彩色可能な仮想絡み目ダイアグラムとなる. それを利用して Goeritz 不変量に類似した不変量を定義することができる. 仮想絡み目ダイアグラム D の各古典的交点の近傍において, $\mathbb{R}^2 - D$ の各局所領域に, 図 16(a) または (b) に示すように局所インデックス 1 または -1 を割り当てる. 図 16(a) を第 1 インデックス, (b) を第 2 インデックスという.



第 1 インデックス　　第 2 インデックス

(a)　　(b)

図 16　古典的交点近傍のインデックス

D を仮想絡み目ダイアグラム, $a_1, \ldots, a_r$ を D のセミアークとする. $\nu = 1, 2$ に対して, 第 ν Goeritz 行列

$$G_\nu(D) = (p^\nu_{ij})_{1 \le i,j \le r}$$

を次のように定義する. $i \neq j$ のとき, p^ν_{ij} を, セミアーク a_i と a_j の両方に接する領域に

割り当てられた第 ν インデックスの総和とし, 対角成分は $p_{ii}^{\nu} = -\sum_{i \neq j} p_{ij}^{\nu}$ とする.

定理 10 ([12]). D と D' を同値な仮想絡み目ダイアグラムとする. このとき, $G_1(D)$ と $G_1(D')$ のねじれ不変量は一致する. また, $G_2(D)$ と $G_2(D')$ のねじれ不変量は一致する.

6 溶接絡み目から溶接絡み目への写像

仮想絡み目ダイアグラム D に対し, 仮想絡み目ダイアグラム $\eta(D)$ を図 17 に示す対応によって定義する. 定理 11より, この対応は溶接絡み目の集合から溶接絡み目の集合への写像を誘導する.

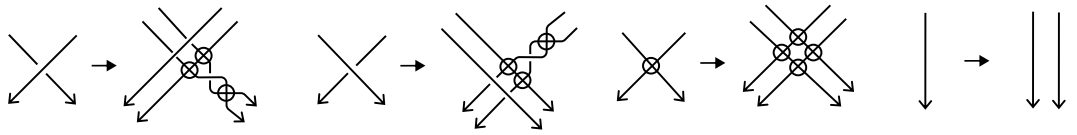


図 17　溶接絡み目から溶接絡み目への写像

図 18 に仮想結び目ダイアグラム D と結び目ダイアグラム D' の写像 η による像の例を示す. この写像 η について以下の定理が成立する.

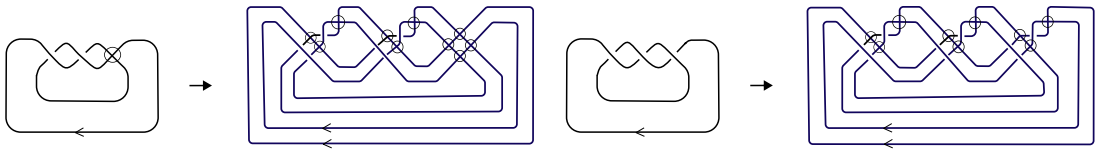


図 18　写像 η の例

定理 11. 仮想絡み目ダイアグラム D, D' が溶接絡み目として同値ならば, $\eta(D)$ と $\eta(D')$ も溶接絡み目として同値である.

定理 12. D を仮想結び目ダイアグラムとし, $\langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle_{\mathrm{qdle}}$ を D の基本カンドルとする. L を D のプリファードロンジチュードとする. $\eta(D)$ の基本カンドルは $\langle x_1, \ldots, x_m, y \mid r_1, \ldots, r_n, y^L = y \rangle_{\mathrm{qdle}}$ と表すことができる.

定理 13. 仮想絡み目ダイアグラム D に対して, L を D のプリファードロンジチュードとする. D の絡み目群において $L \neq 1$ であるならば, $\eta(D) = D_1 \cup D_2$ は D_1 と D_2 の非交和とは溶接絡み目として同値ではない.

参考文献

[1] M. O. Bourgoin, *Twisted link theory*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), no. 3, 1249–1279.

[2] J. S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, J. Knot Theory Ramifications 11 (2002), no. 3, 311–322.

[3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Virtual crossing number and the arrow polynomial*, J. Knot Theory Ramifications 18 (2009), 1335–1357.

[4] R. Fenn, R. Rimányi and C. Rourke *The braid-permutation group*, Topology 36 (1997), 123–135.

[5] A. Henrich, *A sequence of degree one Vassiliev invariants for virtual knots,* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 4, 461–487.

[6] J.H. Lee and G. T. Jin, *Link diagrams realizing prescribed subdiagram partitions*, Kobe J. Math. 18 (2001), 199–202.

[7] Y. H. Im, K. Lee and Y. Lee, *Index polynomial invariant of virtual links,* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 5, 709–725.

[8] K. Ishikawa and K. Tanaka, *Quandle colorings vs. biquandle colorings*, Topology Appl. 345 (2024), 108832 (25 pages).

[9] N. Kamada, *On the Jones polynomials of checkerboard colorable virtual knots*, Osaka J. Math. 39 (2002), 325–333.

[10] N. Kamada, *Cyclic covering of virtual link diagrams*, Internat. J. Math. 30 (2019), no. 14, 1950072 (16 pages).

[11] N. Kamada, *A multivariable polynomial invariant of virtual links and cut systems*, Topology Appl. 301 (2021), 107518 (13 pages).

[12] N. Kamada, *Conversion to almost classical virtual links and pseudo Goeritz matrices*, J. Knot Theory Ramifications 31 (2022), no. 14, 2250098 (16 pages).

[13] N. Kamada, *Diagrams realizing prescribed sublink diagrams for virtual links and welded links*, Kobe J. Math. 40 (2023), no. 1–2, 57–68.

[14] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), no. 1, 93–106.

[15] N. Kamada and S. Kamada, *Virtual links which are equivalent as twisted links*, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), no. 5, 2273–2285.

[16] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. 20 (1999), no. 7, 663–690.

[17] L. H. Kauffman, *A self-linking invariant of virtual knots*, Fund. Math. 184 (2004), 135–158.

[18] L. H. Kauffman, *An affine index polynomial invariant of virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications 22 (2013), no. 4, 1340007 (30 pages).

[19] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, J. Knot Theory Ramifications 17 (2008), no. 11, 1311–1326.

[20] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, Y. Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, J. Knot Theory Ramifications 21 (2012), no. 10, 1250095 (18 pages).

[21] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), 531–542.

[22] S. Satoh and K. Taniguchi, *The writhe of a virtual knot*, Fundamenta Mathematicae 225 (2014), no. 1, 327–341.

[23] R. Shinjo, Lee-Jin の結果の空間グラフの正則図への拡張について, 早稲田大学教育学部学術研究 (数学編) 53 (2005), 67 – 71.