カンドルの幾何学的不変量について

甲斐 涼哉[*1] (奈良教育大学)

1 はじめに

カンドルは群の共役演算の一般化とみなされる代数系である．その公理は，結び目図式の基本変形 (詳しくは [Kam17] を参照)，もしくは対称空間の点対称が満たす性質 (詳しくは [Loo69] を参照) に対応する．本稿では，2 種類のカンドルの幾何学的不変量として，対称空間論の観点から導入した Euler 標数，粗幾何学の観点から導入した距離を紹介する．それぞれ，大阪公立大学の田丸博士氏との共同研究 [KT25]，及び立命館大学の岩本光平氏，鹿児島大学の児玉悠弥氏との共同研究 [IKK26] に基づく．

2 カンドル

この節では，カンドルの基本事項について概観する．

定義 2.1 ([Joy82])**.** 空でない集合 X 上の二項演算 $\triangleleft$ が以下の条件を満たすとき，$(X, \triangleleft)$ を**カンドル**という：

1. 任意の $x \in X$ に対して，$x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in X$ に対して，右からの演算 $s_y \colon X \to X$, $s_y(x) \coloneqq x \triangleleft y$ は全単射.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

右からの演算 $s_y \colon X \to X$ を y での**点対称**という．また, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $x \triangleleft^n y := s_y^n(x)$ とかく．文脈から明らかな場合は，$(X, \triangleleft)$ を単に X とかく．

X, Y をカンドルとする．写像 $f \colon X \to Y$ がカンドル演算を保つとき**カンドル準同型**であるという．また，全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい，カンドル同型が存在するとき，二つのカンドルは**同型**であるという．部分集合 $A \subset X$ が，任意の $a \in A$ に対して $s_a^{\pm 1}(A) \subset A$ を満たすとき，A を**部分カンドル**という．

例 2.2 ([Loo69])**.** (M, s) を対称空間とする．つまり，M は多様体で，$s : M \to \mathrm{Diff}(M)$ は各点 $x \in M$ に対して点対称写像 s_x を定める写像である．このとき，M 上の二項演算 $\triangleleft$ を $x \triangleleft y := s_y(x)$ と定めると，$(M, \triangleleft)$ はカンドルとなる．

[*1] kai.ryoya.d8@cc.nara-edu.ac.jp

したがって，カンドルは対称空間の位相構造や微分構造を忘れて，(一般化した) 点対称の代数構造に着目したものとみなせる．この意味で，カンドルは ‘対称空間の離散化’ とみなすことができる．典型的な対称空間として，実数直線 $\mathbb{R}$ と球面 S^n の具体的な構造を与える．

例 2.3. 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \triangleleft y := 2y - x$ で定めると，$\mathbb{R}$ 上のカンドル演算となる．これは，$\mathbb{R}$ の自然な対称空間としての構造と一致する． $\mathbb{R}$ の離散部分カンドル $R_\infty := \mathbb{Z}$ を**無限二面体カンドル**と呼ぶ.

例 2.4. 円周 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ には，$\mathbb{R}$ のカンドル構造から自然にカンドル構造が誘導される．つまり，$[x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して，$[x] \triangleleft [y] := [2y - x]$ で定めると，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のカンドル構造となる．このとき，n 点集合 $R_n := \{[0], [1/n], \ldots, [(n-1)/n]\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は有限部分カンドルになり，**二面体カンドル**と呼ばれる．

例 2.5. n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ を対称空間とみなし，カンドル構造を定める．つまり，$x, y \in S^n$ に対し，$x \triangleleft y := 2\langle x, y\rangle y - x$ と定めると，S^n 上のカンドル演算となる．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積である．特に，$n = 1$ のとき，例 2.4 の S^1 のカンドルと同型である．S^n の有限部分カンドル $DS^n := \{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ を**離散球面**と呼ぶ．ただし，$\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である．

カンドル X の自己カンドル同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(X)$ と書き，$\mathrm{Aut}(X)$ の群構造を $fg := g \circ f$ で定める．このとき，$\mathrm{Aut}(X)$ を X の**自己同型群**といい，X に右から作用する．$\mathrm{Aut}(X)$ の右作用が推移的であるとき，X を**等質**であるという．カンドルの二番目と三番目の公理から点対称 s_y はカンドル同型となる．

定義 2.6. カンドル X に対して，点対称のなす集合 $\{s_y \mid y \in X\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を**内部自己同型群**といい，$\mathrm{Inn}(X)$ とあらわす. $\mathrm{Inn}(X)$ の X への右作用の軌道を，X の**連結成分**という．特に連結成分が一つ (つまり，$\mathrm{Inn}(X)$ の作用が推移的) のとき，X は**連結**であるという．

次の群は Joyce [Joy82] によって transvection group として導入された.

定義 2.7. カンドル X に対して，$\{s_x s_y^{-1} \mid x, y \in X\}$ で生成される $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を **displacement 群**といい，$\mathrm{Dis}(X)$ であらわす.

一般に，$\mathrm{Inn}(X)$ の軌道と $\mathrm{Dis}(X)$ の軌道が等しいことが知られている [HSV16]．したがって，カンドル X の連結成分は，$\mathrm{Dis}(X)$ の作用の軌道と一致する．この節の最後に，カンドルの一般的なクラスを紹介する．

例 2.8. 群 G とその元 z に対して，g の共役類を $z^G = \{g^{-1}zg \mid g \in G\}$ と表す．このとき，$x, y \in z^G$ に対して，$x \triangleleft y := y^{-1}xy$ で定めると，z^G 上のカンドル演算となる．このとき，$\mathrm{Conj}(z^G) := (z^G, \triangleleft)$ を z^G 上の**共役カンドル**という．より一般に，共役演算

で閉じた部分集合 $X \subset G$ は共役カンドルの構造を持つ.

例 2.9. G を群，$\sigma : G \to G$ を群の自己同型写像とする．このとき，$g, h \in G$ に対して，$g \triangleleft h := \sigma(gh^{-1})h$ で定めると，G 上のカンドル演算となる．このとき，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) := (G, \triangleleft)$ を G 上の**一般化 Alexander カンドル**という．また，G がアーベル群のとき，**Alexander カンドル**という.

例 2.10. G を群，H を G の部分群，$\sigma : G \to G$ を群の自己同型写像とする．H が $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ の部分群であるとき，三つ組 (G, H, σ) を**カンドルの三つ組**という．(G, H, σ) がカンドルの三つ組のとき，右剰余類 $Hg, Hh \in H\backslash G$ に対して，$Hg \triangleleft Hh := H\sigma(gh^{-1})h$ で定めると，$H\backslash G$ 上のカンドル演算となる．このカンドルを，$Q(G, H, \sigma) := (H\backslash G, \triangleleft)$ とかく．任意の等質カンドルは $Q(G, H, \sigma)$ の形で書けることが知られている [Joy82].

3 Euler 標数：対称空間からの不変量

連結コンパクト Lie 群の等質空間の Euler 標数は，極大トーラスの作用の固定点の数と一致することが知られている [HS41]．特に，連結コンパクト対称空間の場合には，その点対称から自然に導かれる displacement 群の作用を用いて，Euler 標数が計算できる．これを踏まえて，この節ではカンドルに Euler 標数を定義する．また，いくつかのカンドルに対する Euler 標数の計算結果も与え，さらに，位相空間の Euler 標数と類似したいくつかの性質を見る．この節の内容は田丸博士氏との共同研究 [KT25] に基づく.

3.1 カンドルの Euler 標数の定義

カンドルの Euler 標数を，$\mathrm{Dis}(X)$ の作用を用いて，以下のように定義する.

定義 3.1. カンドル X の **Euler 標数** $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X)$ を次で定義する：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g, X) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}.$$

ここで，$\#A$ は集合 A の濃度，$\mathrm{Fix}(g, X)$ は g の作用の X における固定点集合を表す.

まず典型的な具体例として n 次元球面を考える.

例 3.2. 例 2.5 で見たように，球面 S^n は対称空間としての構造から，カンドルとなる．このとき，内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(S^n)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ は以下の通りである：

$$\mathrm{Inn}(S^n) = \begin{cases} \mathrm{SO}(n+1) & n\text{: 偶数} \\ \mathrm{O}(n+1) & n\text{: 奇数} \end{cases}, \quad \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1).$$

ここで，$\mathrm{Dis}(S^n)$ の元 g は，次元に応じて以下の形の元に $\mathrm{Dis}(X)$ 内で共役である：

$$g \sim_{\text{共役}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ & & (R_\theta \in \mathrm{SO}(2)). \\ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_{\frac{n+1}{2}}} \end{pmatrix} & \text{if } n\text{: 奇数,} \end{cases}$$

一般的な θ_i をとると，S^n 上の固定点の数は，n が偶数のときは 2 個，n が奇数のときは固定点が 0 個となることがわかる．固定点の数は共役で不変なので，g の固定点の数も同じである．よって，球面のカンドルとしての Euler 標数 $\chi^{\mathrm{Qdle}}(S^n)$ は位相空間としての Euler 標数 $\chi^{\mathrm{Top}}(S^n)$ と等しく，以下が得られる：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(S^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数.} \end{cases}$$

この例を一般化することで，コンパクト Riemann 対称空間のカンドル Euler 標数は，位相空間としての Euler 標数に一致することがわかる．その鍵となるのは次の Hopf と Samelson の結果 [HS41] である．

命題 3.3 ([HS41], [Püt02])**.** M を連結コンパクト Lie 群 G の等質空間とする．また，T を G の極大トーラスとして，その生成元 t_0 を取る．このとき，次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Top}}(M) = \#\mathrm{Fix}(T, M) = \#\mathrm{Fix}(t_0, M).$$

χ^{Qdle} を Euler 標数と呼ぶ理由は次の定理が成り立つからである．

定理 3.4. 連結コンパクト Riemann 対称空間 X に対して，

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \chi^{\mathrm{Top}}(X).$$

証明の概略は以下の通りである．

- 連結コンパクト Riemann 対称空間 X の $\mathrm{Dis}(X)$ は連結コンパクト Lie 群であることを示す．
- 連結 Riemann 対称空間 X は $\mathrm{Dis}(X)$ の等質空間，つまり X はカンドルとして連結であることを示す．
- 命題 3.3 を適用する．

注意 3.5. 定理 3.4 では対称空間のコンパクト性は重要な仮定である．実際，非コンパクト対称空間である $\mathbb{R}^n$ では，位相空間としての Euler 標数は 1 であるが，カンドルとしての Euler 標数は 0 となり，それぞれの Euler 標数は一致しない．

3.2 カンドル Euler 標数の例

ここでは，いくつかの (有限) カンドルの Euler 標数を紹介する．

例 3.6. X を空でない集合とする．$x, y \in X$ に対して，$x \triangleleft y = x$ で定義する．このとき，$(X, \triangleleft)$ を**自明カンドル**といい，カンドル Euler 標数は X の濃度 $\#X$ と一致する．

例 3.7. 自然数 $n > 2$ に対して，例 2.4 で導入した二面体カンドル R_n の Euler 標数は 0 となる．これは円周の位相空間としての Euler 標数と等しい．

例 3.8. 群 G 上の点対称を $s_x(y) := xy^{-1}x$ で定義し，$\mathrm{Core}(G) := (G, s)$ を G 上の**コアカンドル**という．一般に，コアカンドルとしての点対称によって，Lie 群は対称空間とみなされる．$\mathrm{Core}(G)$ が非自明カンドルのとき，つまり，G が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいくつかの直積と同型でないとき，カンドル Euler 標数は 0 になる．これは，非自明な連結コンパクト Lie 群の Euler 標数と等しい．

例 3.9. 群 G と非自明な自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，例 2.9 で導入した一般化 Alexander カンドル $\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ のカンドル Euler 標数は 0 となる．これも，非自明な連結コンパクト Lie 群の Euler 標数と等しい．

カンドル Euler 標数が 0 ではない非自明カンドルも存在する．

例 3.10. 例 2.5 で導入した離散球面 DS^n のカンドル Euler 標数は

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(DS^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数.} \end{cases}$$

となる．これは球面 S^n の Euler 標数と等しい．

2 以上の整数 n に対して，カンドル Euler 標数が n となるカンドルが存在する．一方で，有限連結カンドルに対しては，Burnside の補題から次の命題が直ちに従う．

命題 3.11. 濃度が 2 以上の有限連結カンドルのカンドル Euler 標数は 0 である．

命題 3.11 において，有限性の仮定は重要である．実際，対称空間としての 2 次元球面は連結カンドルであるが，定理 3.4 からカンドル Euler 標数は 2 となり，0 ではない．

3.3 カンドル Euler 標数の性質

この節では，カンドル Euler 標数の一般的な性質として，位相空間の Euler 標数に似た性質を紹介する．

$X_1 = (X_1, s^1), X_2 = (X_2, s^2)$ をカンドルとする．このとき，直積集合 $X_1 \times X_2$ 上に

$$s_{(x_1,x_2)}(y_1, y_2) := (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2))$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, s)$ を X_1 と X_2 の**直積カンドル**という．キネットの公式から，CW 複体の直積の Euler 標数は，それぞれの Euler 標数の積となることが知られている．カンドルの Euler 標数についても同様に次が成り立つ．

定理 3.12. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

また，直和集合 $X_1 \sqcup X_2$ 上に

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_i, \\ s_x^i(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases}$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2 = (X_1 \sqcup X_2, s)$ を X_1 と X_2 の **interaction-free union** という．位相空間の直和の Euler 標数は，それぞれの Euler 標数の和になることが知られている．interaction-free union のカンドル Euler 標数は，Euler 標数の和によって上から評価できる．

定理 3.13. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

定理 3.13 の不等式で，等号が成り立たない例を $\mathrm{Inn}(X)$ がアーベル群であるような等質カンドルで構成することができる．

4 カンドルの距離：粗幾何学からの不変量

注意 3.5 で述べた通り，前節の Euler 標数はコンパクト対称空間を想定した不変量である．したがって，コンパクト対称空間の離散化と期待できる有限カンドルに対して適した不変量であるいえる．一方で，非自明な結び目の基本カンドルや，非コンパクト対称空間の離散部分カンドルなど，興味深い可算無限カンドルも多くある．

無限離散群の研究手法の一つである幾何学的群論の手法に基づいて，この節では，カンドル構造から自然に定まる内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ の作用を用いて，カンドルの各連結成分に距離を導入する．その距離の擬等長類は，作用する群の有限生成集合の取り方に依らずに定まる．さらに，典型的な距離空間と擬等長同型な連結成分を持つカンドルの例を与える．この節の内容は岩本光平氏と児玉悠弥氏との共同研究 [IKK26] に基づく．

4.1 準備: Schreier グラフ

ここでは，距離の導入に用いる Schreier グラフについて紹介する．

定義 4.1. 群 G が空でない集合 X に右作用しているとする．また，G の生成集合 S をとる．このとき，S に関する G の X への右作用の **Schreier グラフ** $\mathrm{Sch}(X;G,S)$ とは，頂点集合を X，辺集合を $\{(x,x\cdot s)\mid x\in X, s\in S\}$ とする (無向) グラフである．

注意 4.2. $X=G$ として，右作用を $x\cdot g:=xg$ で定めると，対応する Schreier グラフは，群の Cayley グラフと一致する．

$\mathrm{Sch}(X;G,S)$ の連結成分は，右作用の軌道と 1:1 に対応することが簡単に確かめられる．$\mathrm{Sch}(X;G,S)$ の各連結成分は，グラフ構造から定まる弧長距離 d_S^{Sch} によって距離空間となる．したがって，この距離の制限によって，右作用の各軌道は距離空間となる．この距離は生成集合 S の取り方に依存するが，擬等長類は有限生成集合の取り方に依らずに定まる．

命題 4.3. 群 G が空でない集合 X へ右作用しているとする．このとき，有限生成集合 $S,T\subset G$ と X の G-軌道 O に対して，恒等写像 $\mathrm{id}\colon (O,d_S^{\mathrm{Sch}})\to(O,d_T^{\mathrm{Sch}})$ は擬等長同型写像である．

4.2 カンドルの距離

この節では, カンドル構造から定まる自然な群作用の Schreier グラフを用いて，カンドルの連結成分にグラフ構造と距離を導入する．

定義 4.4. X をカンドルとする．

1. 生成集合 $A\subset \mathrm{Inn}(X)$ に関する $\mathrm{Inn}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$.
2. 生成集合 $U\subset \mathrm{Dis}(X)$ に関する $\mathrm{Dis}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$.

$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ は Winker [Win84] によって導入された**カンドルの diagram** の一般化になっている．$\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ の作用に着目する理由は以下の命題が成立するからである．

命題 4.5. X をカンドルとする．このとき，X の連結成分全体の集合，$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ の連結成分全体の集合，$\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$ の連結成分全体の集合は，それぞれ 1:1 に対応する．

よって，グラフ構造から定まる弧長距離の制限として，カンドルの各連結成分に距離が定まる．

定義 4.6. O をカンドル X の連結成分とする．$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ から定まる O 上の距離を，$A\subset\mathrm{Inn}(X)$ に関する **inner 距離**といい，d_A^{Inn} で表す．$\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$ から定まる O 上の距離を，$U\subset\mathrm{Dis}(X)$ に関する **displacement 距離**といい，d_U^{Dis} で表す．

群の語距離の場合と同様に，これらの距離の擬等長類は有限生成集合に依らずに定まる．

定理 4.7. O をカンドル X の連結成分とする．

1. 有限生成集合 $A, B \subset \mathrm{Inn}(X)$ に対して, 二つの距離空間 (O, d_A^{Inn})，(O, d_B^{Inn}) は擬等長同型である．
2. 有限生成集合 $U, V \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して，二つの距離空間 (O, d_U^{Dis})，(O, d_V^{Dis}) は擬等長同型である．

有限生成カンドルの内部自己同型群は有限生成である．一方で，有限生成カンドルであっても displacement 群が有限生成であるとは限らない．実際，自由カンドルや非ファーバー結び目の結び目カンドルは，有限生成カンドルであるが，displacement 群は有限生成ではない．

定理 4.7 より，$\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ がどちらも有限生成であるとき，それぞれの作用に関する Schreier グラフから，カンドル X の各連結成分には二種類の距離の擬等長類が定まる．一般にこれらの擬等長類は異なるものである．

命題 4.8. 以下の条件を満たすカンドル X とその連結成分 O が存在する：

1. $\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ は有限生成.
2. 任意の有限生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ と $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して，二つの距離空間 (O, d_A^{Inn}) と (O, d_U^{Dis}) は擬等長同型ではない.

実際，無限二面体カンドル R_∞ は命題 4.8 の条件を満たす例となる．この節の最後に，特別な場合についてこれらの距離の性質を述べる．

命題 4.9. O と O' を等質カンドル X の連結成分とする．

1. 有限生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ に対して，距離空間 (O, d_A^{Inn})，(O', d_A^{Inn}) は擬等長同型である．
2. 有限生成集合 $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して, 距離空間 (O, d_U^{Dis})，(O', d_U^{Dis}) は擬等長同型である．

命題 4.10. カンドル X のある連結成分 O に，$\mathrm{Dis}(X)$ は自由に作用しているとする．このとき，$\mathrm{Dis}(X)$ の有限生成集合に関する displacement 距離を持つ O と，有限生成集合に関する語距離を持つ $\mathrm{Dis}(X)$ は擬等長同型である．

カンドルの一番目の公理から，$\mathrm{Inn}(X)$ では命題 4.10 のような状況，つまり，$\mathrm{Inn}(X)$ の作用が自由になることはない．また，Eisermann [Eis14] によって導入されたカンドルの被覆理論によると，単連結カンドルは命題 4.10 の仮定を満たす．したがって，命題 4.10 は，単連結カンドルが自身に作用するある有限生成群と擬等長同型であることも示している．

4.3 例

最後に，典型的な距離空間と擬等長同型となるような連結成分を持つカンドルの例を与える．初めに，自由カンドルを考える．自由カンドルの詳細は [Kam17] などを参照せよ．有限階数の自由群は木と擬等長同型であったが，自由カンドルも同様の性質を持つ．

命題 4.11. A を濃度が 2 以上の有限集合とする．このとき，A 上で生成される自由カンドル $FQ[A]$ は有限生成 (したがって，$\mathrm{Inn}(FQ[A])$ は有限生成) で，各連結成分は inner 距離に関して木と擬等長同型である．

注意 4.12. 濃度が 2 以上の有限集合上で生成される自由カンドルの displacement 群は有限生成ではない．したがって，定理 4.7 を適用することができない．

以下，特別なクラスとして，一般化 Alexander カンドル (cf 例 2.9) の displacement 距離を考える．一般化 Alexander カンドル $\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ は等質で，各連結成分に displacement 群が自由に作用する．したがって，前節で述べた結果から次が従う．

定理 4.13. 群 G とその群自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ から定まる一般化 Alexander カンドルを $X := \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とする．このとき，$\mathrm{Dis}(X)$ が有限生成ならば，任意の X の連結成分は displacement 距離に関して，有限生成集合に関する語距離を持つ $\mathrm{Dis}(X)$ と擬等長同型である．

一般化 Alexander カンドルの displacement 群は以下のように与えられる．

補題 4.14. $X := \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とし，単位元 $1 \in G$ を含む X の連結成分を P とおく．

1. P は G の部分群で，$\mathrm{Dis}(X)$ と同型である．
2. σ が $g \in G$ の内部自己同型，つまり，$\sigma(x) := g^{-1}xg$ で与えられているとき，群 P は部分群 $[G, \langle\langle g \rangle\rangle_G]$ に同型である．ただし，$\langle\langle g \rangle\rangle_G$ は $\{g\}$ の G での正規閉包である．

定理 4.13，補題 4.14 を用いることで，Euclid 空間や双曲平面と擬等長な連結成分を持つカンドルの例を構成できる．

命題 4.15. $t \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ とする．このとき，displacement 距離に関して $\mathrm{GAlex}(\mathbb{Z}^n, t)$ の各連結成分は k 次元 Euclid 空間と擬等長同型である．ただし，$k := \mathrm{rank}(1 - t^{-1})$.

命題 4.16. 正整数 p, q, r に対して，$\Delta^+(p, q, r)$ を以下の表示で定義される群とする：

$$\Delta^+(p, q, r) = \langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1 \rangle_{\mathrm{Grp}}.$$

また，群自己同型 $\sigma : \Delta^+(p, q, r) \to \Delta^+(p, q, r)$ を生成元 a での内部自己同型とする．このとき，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ならば，displacement 距離に関して $\mathrm{GAlex}(\Delta^+(p, q, r), \sigma)$ の

連結成分は双曲平面と擬等長同型である.

注意 4.17. $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，双曲平面の各点にその点を中心とする θ-回転によって点対称を定めるとカンドルになる．$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ とする．このとき，$Y := \mathrm{Conj}(a^{\Delta^+(p,q,r)})$ は $\frac{2\pi}{p}$-回転によるカンドル構造を持つ双曲平面の離散部分カンドルになる.

また，3 次元球面内の結び目を特異点とする軌道体の基本群を用いて，3 次元の単連結等質 Riemann 多様体と擬等長な連結成分を持つカンドルも構成できる [IKK26, Proposition 5.6].

参考文献

[Eis14] Michael Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fundamenta Mathematicae*, 225(1):103–167, 2014.

[HS41] H. Hopf and H. Samelson. Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 13:240–251, 1941.

[HSV16] Alexander Hulpke, David Stanovský, and Petr Vojtěchovský. Connected quandles and transitive groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(2):735–758, February 2016.

[IKK26] Kohei Iwamoto, Ryoya Kai, and Yuya Kodama. Metrics for quandles. *International Journal of Mathematics*, page 2650053, June 2026.

[Joy82] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 23(1):37–65, 1982.

[Kam17] Seiichi Kamada. *Surface-Knots in 4-Space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Singapore, Singapore, 2017.

[KT25] Ryoya Kai and Hiroshi Tamaru. On the Euler characteristics for quandles. *International Journal of Mathematics*, 36(11):2550034, September 2025.

[Loo69] Ottmar Loos. *Symmetric Spaces. I: General Theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Püt02] Thomas Püttmann. Homogeneity rank and atoms of actions. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 22(4):375–399, 2002.

[Win84] Steven Karl Winker. *QUANDLES, KNOT INVARIANTS, AND THE N-FOLD BRANCHED COVER*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984.