正則半単純 Hessenberg 多様体の座標環と
正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環

堀口　達也（明石工業高等専門学校）

1. 序文

Hessenberg 多様体は，1980 年代後半頃に導入された旗多様体の代数的部分多様体であり ([9, 10])，(1) Springer fiber (Weyl 群の幾何学的表現と関連 [23, 24])，(2) Peterson 多様体 (旗多様体の量子コホモロジーと関連 [18, 19, 20])，(3) weight polytope に付随するトーリック多様体 ([9])，を特別な場合として含む．

Hessenberg 多様体の中で「正則冪零型」と「正則半単純型」と呼ばれる二種類の重要なクラスがある．正則冪零 Hessenberg 多様体は，Peterson 多様体と旗多様体を自然に繋ぐもので，そのコホモロジー環は他分野における超平面配置と関連している ([5])．具体的に述べると，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環は，イデアル配置と呼ばれる超平面配置の対数微分加群の言葉を用いて記述することができる．一方，正則半単純 Hessenberg 多様体は，weight polytope に付随するトーリック多様体と旗多様体を自然に繋ぐもので，そのコホモロジー環の上に Weyl 群の作用がある ([25])．A 型の場合，正則半単純 Hessenberg 多様体のコホモロジー環上の対称群の作用は，他分野におけるグラフ理論の彩色対称関数と関係している ([8, 21])．さらに，正則半単純 Hessenberg 多様体のコホモロジー環上の Weyl 群作用の不変部分環をとると，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と環同型になることも知られている ([2, 5])．

本稿では，A 型の場合に得られた正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と正則半単純 Hessenberg 多様体の座標環の関係に関する結果 ([15]) について紹介する．A 型正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示は，[2] によって与えられた．具体的には，各 $i \geq j \geq 1$ に対して，多項式 $f_{i,j}$ を導入し，これらの多項式 $f_{i,j}$ を用いて，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示が記述される．これらの多項式 $f_{i,j}$ を Fomin–Gelfand–Postnikov の手法 ([11]) を用いて量子化すると，$f_{i,j}$ の量子化 $F_{i,j}$ たちは，正則半単純 Hessenberg 多様体の単位元周りの開集合における座標環と関連することが分かった．特に，正則半単純 Hessenberg 多様体の単位元周りの開集合における座標環において，“量子パラメータを忘れる”と，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環が得られる．

本稿ではまず (A 型)Hessenberg 多様体の基本的な性質について 2 節で紹介し，[2] で与えられた正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示を 3 節で説明する．4 節では，旗多様体の量子コホモロジー環および Fomin–Gelfand–Postnikov によって導入された量子化写像を説明する．その後，5 節で，[16] で与えられた正則冪零 Hessenberg 多様体の単位元周りの開集合における座標環の説明を行い，6 節で主結果の説明をする．

2. A 型 Hessenberg 多様体

本稿を通して，以下の記号を用いる．

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$$

(A 型) 旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列全体からなる．

$$Fl(\mathbb{C}^n) := \{V_\bullet = (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \text{ for all } i \in [n]\}$$

A 型 Hessenberg 多様体は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の代数的部分多様体であり，線形写像と Hessenberg 関数の 2 つのデータから定まる．まずは Hessenberg 関数の定義から始める．

定義 2.1. 関数 $h : [n] \to [n]$ が次の 2 条件

(i) $h(1) \leq h(2) \leq \ldots \leq h(n)$
(ii) 各 $j \in [n]$ に対して，$h(j) \geq j$

を満たすとき，h を **Hessenberg 関数**という．Hessenberg 関数 h は各値を並べて，

$$h = (h(1), h(2), \ldots, h(n))$$

と表される．

Hessenberg 関数 $h : [n] \to [n]$ の**双対** $h^* : [n] \to [n]$ を

$$h^*(i) = |\{j \in [n] \mid h(j) \geq n + 1 - i\}| \quad \text{for } i \in [n] \tag{2.1}$$

で定義する．$n \times n$ の格子を用意し，各 j 列目に上から $h(j)$ 個の箱を塗ることで，Hessenberg 関数 h はしばしば視覚化される．このとき，その双対 h^* は，h で表される箱の集まりを反対角線に関して折り返すことで視覚化される．

例 2.2. $n = 5$ とする．$h = (3, 3, 4, 5, 5)$ は Hessenberg 関数であり，その双対は $h^* = (2, 3, 5, 5, 5)$ である．これらの Hessenberg 関数は図 1 のように視覚化される．

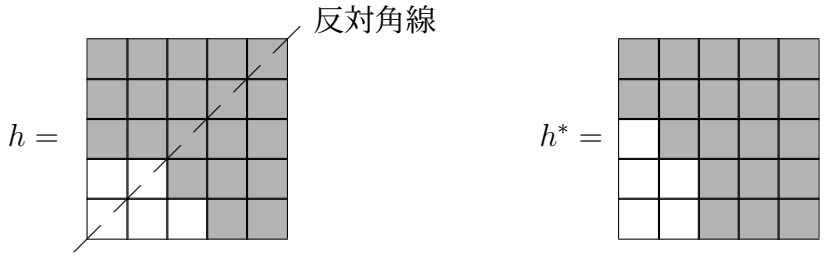


図 1. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ と $h^* = (2, 3, 5, 5, 5)$ に対応する箱の集まり

定義 2.3. $X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を線形写像，$h : [n] \to [n]$ を Hessenberg 関数とする．このとき，X と h に付随する **Hessenberg 多様体** $\mathrm{Hess}(X, h)$ は

$$\mathrm{Hess}(X, h) = \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for any } i \in [n]\}$$

で定義される．

X が零写像または $h=(n,n,\dots,n)$ のとき，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は全体の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ と一致することが定義から分かる．X を冪零写像，Hessenberg 関数を $h=(1,2,\dots,n)$ に取った Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ を **Springer fiber** という．Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の代数的な部分多様体である．そのことを見るために，旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ が等質空間 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ と同一視されることを思い出しておく．ここで，B は一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の中の上三角行列全体からなる部分群を表す．同一視 $Fl(\mathbb{C}^n)\cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ のもと，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は次のように書ける．

$$\mathrm{Hess}(X,h)=\{gB\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}Xg\in H\} \tag{2.2}$$

ここで，H は Hessenberg 関数 h に付随する Hessenberg 空間[1]と呼ばれ，次で定義される $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$（$n$ 次正方行列全体）の部分空間である．

$$H:=\{(a_{ij})\in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij}=0 \text{ if } i>h(j)\} \tag{2.3}$$

U を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の lower unipotent group とする．

$$U=\left\{ g=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{n1} & \cdots & x_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\} \cong \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tag{2.4}$$

このとき，対応 $U\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B;\ g\mapsto gB$ により，U は単位元 $eB\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ の周りの旗多様体の開集合と自然に思える．S_n を n 次対称群とし，$w\in S_n$ を置換行列と思うと，$\{wU\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B \mid w\in S_n\}$ は旗多様体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ の開被覆をなす．(2.2) と (2.3) より，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は局所的に定義方程式

$$(g^{-1}Xg)_{ij}=0 \quad \text{if } i>h(j) \text{ for all } g\in wU \tag{2.5}$$

で定義される旗多様体の代数的な部分多様体である．

例 2.4. $n=5$ とし，Hessenberg 関数 $h=(3,3,4,5,5)$ を考える．このとき，h に付随する Hessenberg 空間 H は次で与えられる．

$$H=\left\{ \left.\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_5(\mathbb{C}) \right| \ * \text{ は任意の複素数} \right\}$$

例えば，単位元周りの開集合 U 上では，Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は

$$(g^{-1}Xg)_{ij}=0 \quad \text{for } (i,j)=(5,1),(4,1),(5,2),(4,2),(5,3)$$

で定義される．ここで，$g\in U$ は (2.4) の形で与えられる．

---

[1] 一般に，Hessenberg 空間は B のリー環 $\mathfrak{b}$ を含む $\mathfrak{b}$-submodule として定義され，Hessenberg 空間全体と Hessenberg 関数全体は，(2.3) により，1 対 1 に対応している．

任意の $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$\mathrm{Hess}(X,h) \cong \mathrm{Hess}(gXg^{-1},h); V_\bullet \mapsto gV_\bullet$$

であるので，X をジョルダン標準形と仮定してもよい．

以下，線形写像 X を次の 2 つの行列に取って考える．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$$

Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ と $\mathrm{Hess}(S,h)$ をそれぞれ**正則冪零 Hessenberg 多様体**，**正則半単純 Hessenberg 多様体**という．これらの基本的な性質について以下では説明をしていく．

2.1. **正則冪零 Hessenberg 多様体** $\mathrm{Hess}(N,h)$**.**

$h = (2,3,4,\ldots,n,n)$ のとき，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ を**Peterson 多様体**という．Peterson 多様体は，5 節で説明するように，旗多様体の量子コホモロジー環と関連している ([18, 19, 20])．また，$n \geq 3$ のとき，Peterson 多様体は特異であることが知られている ([17, 18])．旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は $h = (n,n,\ldots,n)$ とする $\mathrm{Hess}(N,h)$ と思えたので，正則冪零 Hessenberg 多様体は Peterson 多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える．正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ の幾何学的性質について述べる．

命題 2.5 ([3, 6, 22])**.** $h : [n] \to [n]$ を Hessenberg 関数とする．このとき，次が成立．

(1) 正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$ で与えられる．
(2) すべての正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ は既約である．
(3) 任意の $j \in [n-1]$ に対して，$h(j) > j$ と仮定する．このとき，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ が正規である必要十分条件は，Hessenberg 関数 h が次の条件を満たすことである．

$$h(i-1) > i \text{ or } h(i) > i+1 \text{ for all } 1 < i < n-1$$

注意 2.6. 命題 2.5 (1) における $\mathrm{Hess}(N,h)$ の複素次元 $\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$ は，Hessenberg 関数 h を箱の集まりと思うと，対角線より真に下に位置する箱の総数を表している．例えば，Hessenberg 関数が $h = (3,3,4,5,5)$ の場合，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ の複素次元は 5 である（図 2 参照）．

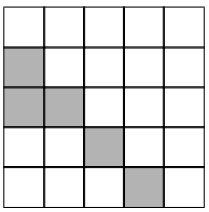


図 2. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hess}(N, h = (3,3,4,5,5))$ を表す箱の集まり

2.2. **正則半単純 Hessenberg 多様体** $\mathrm{Hess}(S,h)$**.**

$a_1,\dots,a_n$ を相異なる実数とし，$n!$ 個の点 $(a_{w(1)},\dots,a_{w(n)})\in\mathbb{R}^n$ $(w\in S_n)$ の凸包を **permutohedron** という．$h=(2,3,4,\dots,n,n)$ のとき，正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は，permutohedron に付随する滑らかな射影トーリック多様体であることが知られている ([9])．このトーリック多様体は **permutohedral 多様体**と呼ばれている．$h=(n,n,\dots,n)$ とする $\mathrm{Hess}(S,h)$ も旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ と思えたので，正則半単純 Hessenberg 多様体は permutohedral 多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える．正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ の幾何学的性質について纏める．

命題 2.7 ([6, 9])**.** $h:[n]\to[n]$ を Hessenberg 関数とする．このとき，次が成立．

(1) 正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は等次元的であり，その複素次元は $\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$ で与えられる．

(2) 正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ が連結である必要十分条件は，Hessenberg 関数 h が次の条件を満たすことである．

$$h(j)>j \text{ for all } j\in[n-1] \tag{2.6}$$

(3) すべての正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は滑らかである．

注意 2.8. 命題 2.5 (1) と命題 2.7 (1) より，任意の Hessenberg 関数 h に対して，

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hess}(N,h)=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hess}(S,h)$$

が成立．

3. コホモロジー環

この節では [2] で与えられた正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジー環の明示的表示について紹介する．よく知られているように，旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ のコホモロジー環の明示的表示は

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]/(e_1^{(n)},\dots,e_n^{(n)}) \tag{3.1}$$

で与えられる ([7])．ここで，各 x_i は次数 2 の元で，$e_k^{(n)}$ は変数を $x_1,\dots,x_n$ とする次数 $2k$ の基本対称式を表す．

$$e_k^{(n)}=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

[2] において，多項式 $f_{i,j}$ $(i\ge j\ge 1)$ を次の漸化式

$$\begin{aligned} f_{j,j}&=x_1+\cdots+x_j;\\ f_{i,j}&=f_{i-1,j-1}+(x_j-x_i)f_{i-1,j}\quad\text{for } i>j \end{aligned} \tag{3.2}$$

で導入した．ここで，任意の $*$ に対して，$f_{*,0}=0$ と約束する．この漸化式は

$$f_{i,j}=\sum_{k=1}^{j}\left(\prod_{\ell=j+1}^{i}(x_k-x_\ell)\right)x_k \tag{3.3}$$

と明示的に解くことができる．ここで，$i=j$ のときは $\prod_{\ell=j+1}^{i}(x_k-x_\ell)=1$ と約束する．これらの多項式を用いて，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジー環を次のように記述した．

定理 3.1 ([2])**.** $h : [n] \to [n]$ を任意の Hessenberg 関数とし，$\mathrm{Hess}(N,h)$ を $Fl(\mathbb{C}^n)$ の中の正則冪零 Hessenberg 多様体とする．このとき，包含写像 $\mathrm{Hess}(N,h) \subset Fl(\mathbb{C}^n)$ が導く制限写像 $H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$ は全射であり，次の次数付き $\mathbb{Q}$-代数としての同型が成立．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(f_{h(1),1}, f_{h(2),2}, \dots, f_{h(n),n}) \tag{3.4}$$

注意 3.2. (3.4) に関する注意を述べておく．

(1) 明示的表示 (3.4) に現れる x_i は (3.1) に現れる x_i の制限写像 $H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$ による像を表している．
(2) $h = (n,n,\dots,n)$ の場合，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ は全体の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ と一致した．このとき，(3.4) の右辺に現れるイデアル $(f_{h(1),1}, f_{h(2),2}, \dots, f_{h(n),n})$ は $(e_1^{(n)},\dots,e_n^{(n)})$ と $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ では一致するが，$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ では一致しない．特に，(3.4) は $\mathbb{Z}$-係数では成立しないことが分かる．
(3) Peterson 多様体の（有理数係数）コホモロジー環の明示的表示は [12] により与えられており，その表示は (3.4) から復元できる．また，Peterson 多様体の整数係数のコホモロジー環は [4] で与えられている．

漸化式 (3.2) を用いると，(3.4) は次のように書き直せる．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(f_{i,j} \mid i \geq h(j)) \tag{3.5}$$

この表示は，無駄な生成元を含んでいるが，6 節における主結果の形と比較しやすい形になっている．

次に，正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ と正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ のコホモロジー環が関連する結果について紹介する．正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ のコホモロジー環の上には対称群 S_n の作用がある ([25])．この対称群 S_n の作用に関する不変部分環を取ることで，正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と同型になるという結果が得られた．

定理 3.3 ([2])**.** 任意の Hessenberg 関数 h に対して，次の次数付き $\mathbb{Q}$-代数としての同型が成立．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q})^{S_n}$$

ここで，右辺は S_n 作用による $H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q})$ の不変部分環を表す．

4. 量子化写像

旗多様体の量子コホモロジー環は $\mathbb{Z}$-加群として

$$QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[q_1,\dots,q_{n-1}] \otimes H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$$

と定義され，$QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$ 上の積構造は，$H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$ 上の通常のカップ積を量子パラメータ $q_1,\dots,q_{n-1}$ で変形したものである．旗多様体の量子コホモロジー環の明示的表示は，(3.1) の量子アナログとして Givental–Kim と Ciocan-Fontanine に

よって，以下のように与えられている．まず，次の行列を考える．

$$M_n = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & x_{n-1} & q_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{pmatrix}$$

量子基本対称式 $E_i^{(n)}$ を，λ を変数とする M_n の特性多項式の λ^{n-i} の係数に $(-1)^i$ をかけたもので定義する．すなわち，I_n を n 次単位行列とすると，

$$\det(\lambda I_n - M_n) = \lambda^n - E_1^{(n)}\lambda^{n-1} + E_2^{(n)}\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n E_n^{(n)}$$

である．定義より，$q_1 = \cdots = q_{n-1} = 0$ とすると，量子基本対称式 $E_i^{(n)}$ は通常の基本対称式 $e_i^{(n)}$ に特殊化されることに注意しておく．各量子パラメータ q_i の次数を 4 とすると，量子基本対称式 $E_i^{(n)}$ は次数 $2i$ の斉次多項式となることに注意しておく．

定理 4.1 ([13, 14])**.** 次の次数付き環としての同型が成立．

$$QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\ldots,E_n^{(n)}) \tag{4.1}$$

注意 4.2. 明示的表示 (4.1) において，$q_1 = \cdots = q_{n-1} = 0$ とすると，(3.1) が得られる．

Fomin–Gelfand–Postnikov は [11] において，多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]$ 上に量子化写像

$$\psi : \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}] \to \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]$$

を定義し，量子シューベルト多項式を次のように導入した．まず，量子化写像の幾何学的意味から説明する．量子化写像 ψ は $\mathbb{Z}[q_1,\ldots,q_{n-1}]$-加群としての同型写像であり，任意の $1 \le i \le k \le n$ に対して，

$$\psi(e_i^{(k)}) = E_i^{(k)}$$

が成立する．量子化写像 ψ は環準同型写像ではないが，イデアル $(e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)})$ をイデアル $(E_1^{(n)},\ldots,E_n^{(n)})$ の上に写す．したがって，ψ が誘導する写像は，幾何学的には，$\mathbb{Z}[q_1,\ldots,q_{n-1}]$-加群としての同型写像

$$\mathbb{Z}[q_1,\ldots,q_{n-1}] \otimes H^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$$

を表している．Fomin–Gelfand–Postnikov は，量子化写像の性質を調べ，量子シューベルト多項式を組合せ的に定義した．まず，$i_1,\ldots,i_m$ $(0 \le i_k \le k)$ に対して，

$$e_{i_1,\ldots,i_m} = e_{i_1}^{(1)} \cdots e_{i_m}^{(m)} \tag{4.2}$$

を用意する．これらの多項式は無限変数の多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots]$ の $\mathbb{Z}$-基底をなす．特に，自然な射影 $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)})$ による $e_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ の像たちは，$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)})$ の $\mathbb{Z}$-基底をなす．同様に，

$$E_{i_1,\ldots,i_m} = E_{i_1}^{(1)} \cdots E_{i_m}^{(m)}$$

とおくと，$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}] \to \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)})$ による $E_{i_1,\dots,i_{n-1}}$ の像たちは，剰余環 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)})$ の $\mathbb{Z}[q_1,\dots,q_{n-1}]$-加群としての基底をなす．Fomin–Gelfand–Postnikov は，任意の $1 \le m \le n$ に対して，

$$\psi(e_{i_1,\dots,i_m}) = E_{i_1,\dots,i_m}$$

を示し，この観点から，量子シューベルト多項式を次のように定義した．$w \in S_n$ に付随するシューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w$ を

$$\mathfrak{S}_w = \sum c_{i_1,\dots,i_{n-1}} e_{i_1,\dots,i_{n-1}} \quad (c_{i_1,\dots,i_{n-1}} \in \mathbb{Z})$$

と一意的に表したとき，**量子シューベルト多項式** $\mathfrak{S}_w^q$ を

$$\mathfrak{S}_w^q = \sum c_{i_1,\dots,i_{n-1}} E_{i_1,\dots,i_{n-1}}$$

と定義する．特に，量子シューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w^q$ は，量子化写像 ψ によるシューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w$ の像である．この方法を用いて，(3.3) における多項式 $f_{i,j}$ の量子化を 6 節で定義する．

5. 座標環

Hessenberg 多様体の話に戻る．$h = (2,3,4,\dots,n,n)$ のときの正則冪零 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ を Peterson 多様体と呼んでいた．ここでは，Peterson 多様体を Pet_n と表すことにする．(2.4) における lower unipotent group U は，旗多様体の単位元周りの開集合と自然に同一視できたことを思い出そう．このとき，Dale Peterson は $\mathrm{Pet}_n \cap U$ の座標環 $\mathbb{C}[\mathrm{Pet}_n \cap U]$ と旗多様体の量子コホモロジー環の間の驚くべき関係を発見した．

定理 5.1 ([18, 19, 20])**.** 次の $\mathbb{C}$-代数としての同型が成立．

$$\mathbb{C}[\mathrm{Pet}_n \cap U] \cong QH^*(Fl(\mathbb{C}^n);\mathbb{C}) \tag{5.1}$$

定理 4.1 と定理 5.1 より，次の $\mathbb{C}$-代数としての同型が得られる．

$$\mathbb{C}[\mathrm{Pet}_n \cap U] \cong \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_{n-1}]/(E_1^{(n)},\dots,E_n^{(n)}) \tag{5.2}$$

[16] において，この同型を正則冪零 Hessenberg 多様体の場合に次のように拡張した．z_{ij} を U 上の座標関数とする．

$$z_{ij}(g) = x_{ij} \quad \text{for } g \in U$$

$g \in U$ で表される旗が $\mathrm{Hess}(X,h)$ に属すための条件は，(2.5) より，

$$(g^{-1}Xg)_{ij} = 0 \quad \text{for all } i > h(j)$$

であった．各 $i \ge j \ge 1$ に対して，

$$\nu_{i,j}(g) = (g^{-1}Ng)_{ij} \quad \text{for } g \in U$$

とおくと，$\mathrm{Hess}(N,h) \cap U$ の座標環は

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(N,h) \cap U] = \mathbb{C}[z_{ij} \mid 1 \le j < i \le n]/(\nu_{i,j} \mid i > h(j))$$

と定義される．

注意 5.2. $\mathrm{Hess}(N,h)\cap U$ はスキーム論的交叉を表している．Hessenberg 関数 h が条件 (2.6) を満たすとき，$\mathrm{Hess}(N,h)\cap U$ は被約であることが知られている ([1])．

行列

$$\widetilde{M_n}=\begin{pmatrix} x_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ -1 & x_2 & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & x_{n-1} & q_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{pmatrix}$$

を考え，量子基本対称式のときのように，$\widetilde{E_i^{(n)}}$ を

$$\det(\lambda I_n-\widetilde{M_n})=\lambda^n-\widetilde{E_1^{(n)}}\lambda^{n-1}+\widetilde{E_2^{(n)}}\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n\widetilde{E_n^{(n)}}$$

と定義する．剰余環

$$Q_n=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,q_{rs}\mid 1\le r<s\le n]/(\widetilde{E_1^{(n)}},\ldots,\widetilde{E_n^{(n)}})$$

とおき，環準同型写像

$$\varphi:\mathbb{C}[z_{ij}\mid 1\le j<i\le n]\to Q_n;\quad z_{ij}\mapsto \widetilde{E_{i-j}^{(n-j)}} \tag{5.3}$$

を定義する．

定理 5.3 ([16])**.** (5.3) で定義された写像 φ は $\mathbb{C}$-代数としての同型写像であり，任意の $1\le r<s\le n$ に対して，

$$\varphi^{-1}(q_{rs})=-\nu_{n+1-r,\,n+1-s}$$

が成立．特に，任意の Hessenberg 関数 $h:[n]\to[n]$ に対して，$\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(N,h)\cap U]\cong\frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,q_{rs}\mid 2\le s\le n, n-h(n+1-s)<r<s]}{({}^hE_1^{(n)},\ldots,{}^hE_n^{(n)})} \tag{5.4}$$

を得る．ここで，${}^hE_i^{(n)}$ は

$${}^hE_i^{(n)}=\widetilde{E_i^{(n)}}|_{q_{rs}=0\ (2\le s\le n\ \ and\ \ 1\le r\le n-h(n+1-s))} \tag{5.5}$$

で定義される．

注意 5.4. $h=(2,3,4,\ldots,n,n)$ のとき，(5.4) は (5.2) を表している．

定義 (5.5) において，どの量子パラメータ q_{rs} が 0 になるかは，視覚的には次のように解釈できる．w_0 を S_n の最長元とし，行列 $w_0\widetilde{M_n}w_0$ を考える．H を Hessenberg 関数 h に付随する Hessenberg 空間とするとき，$w_0\widetilde{M_n}w_0$ が H に属す条件が，すべての $2\le s\le n$ と $1\le r\le n-h(n+1-s)$ に対して $q_{rs}=0$ を満たすことである．

例 5.5. $h=(3,3,4,5,5)$ の場合を考えると，$\widetilde{E_i^{(5)}}$ において $q_{13}=q_{14}=q_{15}=q_{24}=q_{25}=0$ とおいたものが ${}^hE_i^{(5)}$ である（図 3 参照）．

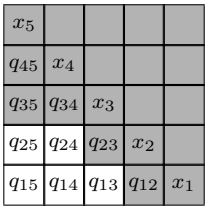


図 3. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ の場合の $w_0\widetilde{M}_5 w_0$ の中にある変数

6. 主結果

5 節で述べた正則冪零 Hessenberg 多様体のときのように，正則半単純 Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S, h)$ のときも，各 $i \geq j \geq 1$ に対して，

$$\xi_{i,j}(g) = (g^{-1}Sg)_{ij} \quad \text{for } g \in U$$

とおき，$\mathrm{Hess}(S, h) \cap U$ の座標環を

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(S, h) \cap U] = \mathbb{C}[z_{ij} \mid 1 \leq j < i \leq n]/(\xi_{i,j} \mid i > h(j))$$

と定義する．

注意 6.1. 任意の Hessenberg 関数 h に対して，スキーム論的交叉 $\mathrm{Hess}(S, h) \cap U$ は被約であることが知られている ([6])．

さて，主結果について述べよう．(3.3) における多項式 $f_{i,j}$ を，4 節で説明した Fomin–Gelfand–Postnikov の手法を用いて量子化する．(4.2) における多項式 $e_{i_1,\ldots,i_m}$ たちは $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ の $\mathbb{Z}$-基底をなすので，

$$f_{i,j} = \sum c_{i_1,\ldots,i_m} e_{i_1,\ldots,i_m} \quad (c_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{Z})$$

と一意的に書ける．このとき，$f_{i,j}$ の**量子化** $F_{i,j}$ を

$$F_{i,j} = \sum c_{i_1,\ldots,i_m} \widetilde{E_{i_1,\ldots,i_m}}$$

で定義する．ここで，$\widetilde{E_{i_1,\ldots,i_m}} = \widetilde{E_{i_1}^{(1)}} \cdots \widetilde{E_{i_m}^{(m)}}$ を表す．定義より，すべての量子パラメータ q_{rs} を 0 にすると，$F_{i,j}$ は $f_{i,j}$ に特殊化される．

定理 6.2. (1) 各 $i \geq j \geq 1$ に対し，量子化 $F_{i,j}$ は $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_i, q_{rs} \mid 1 \leq r < s \leq i]$ に属す．

(2) 多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, q_{rs} \mid 1 \leq r < s \leq n]$ において，イデアル $(E_1^{(n)}, \ldots, E_n^{(n)})$ はイデアル $(F_{n,1}, \ldots, F_{n,n})$ と一致する．特に，次が成立．

$$Q_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, q_{rs} \mid 1 \leq r < s \leq n]/(F_{n,1}, \ldots, F_{n,n})$$

(3) 任意の $1 \leq j \leq i \leq n-1$ に対して，

$$\varphi^{-1}(F_{i,j}) = (-1)^{i-j} \xi_{n+1-j,\, n-i}$$

が成立．特に，任意の Hessenberg 関数 $h : [n] \to [n]$ に対して，φ は $\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(S, h) \cap U] \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, q_{rs} \mid 1 \leq r < s \leq n]/(F_{i,j} \mid i \geq h^*(j)) \tag{6.1}$$

を導く．ここで，h^* は (2.1) で定義された h の双対を表す．

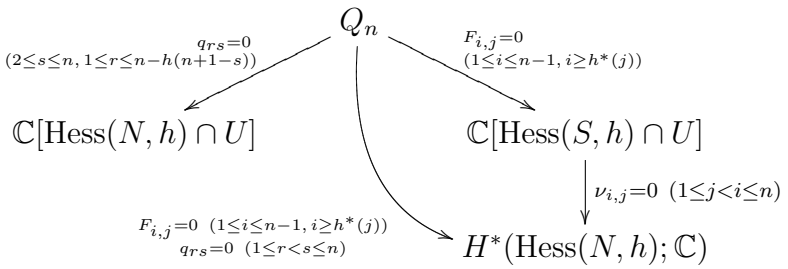
定理 6.2 の (6.1) の右辺において，すべての量子パラメータ q_{rs} を 0 とすると，(3.5) より，コホモロジー環 $H^*(\mathrm{Hess}(N,h^*);\mathbb{C})$ になることが分かる．一方，$\mathrm{Hess}(N,h)$ と $\mathrm{Hess}(N,h^*)$ は同相であるため，(6.1) において，すべての量子パラメータを忘れると，$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{C})$ が得られる．定理 5.3 より，量子パラメータ q_{rs} は $-\nu_{n+1-r,\,n+1-s}$ に対応していたことを思い出すと，次の結果を得る．

系 6.3. 任意の Hessenberg 関数 $h:[n]\to[n]$ に対して，$\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hess}(S,h)\cap U]/(\nu_{i,j}\mid i>j)\cong H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{C})$$

が得られる．

結果を一つの図式に纏めると次のようになる．



References

[1] H. Abe, L. DeDieu, F. Galetto, and M. Harada, *Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton–Okounkov bodies*, Selecta Math. (N.S.) **24** (2018), no. 3, 2129–2163.

[2] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, *The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2019** (2019), 5316–5388.

[3] H. Abe and E. Insko, *On singularity and normality of regular nilpotent Hessenberg varieties*, J. Algebra **651** (2024), 70–110.

[4] H. Abe and H. Zeng, *The integral cohomology rings of Peterson varieties in type A*, arXiv:2203.02629.

[5] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, J. Reine Angew. Math. **764** (2020), 241–286.

[6] D. Anderson and J. Tymoczko, *Schubert polynomials and classes of Hessenberg varieties*, J. Algebra **323** (2010), no. 10, 2605–2623.

[7] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115–207.

[8] P. Brosnan and T. Y. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. **329** (2018), 955–1001.

[9] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529–534.

[10] F. De Mari and M. A. Shayman, *Generalized Eulerian numbers and the topology of the Hessenberg variety of a matrix*, Acta Appl. Math. **12** (1988), no. 3, 213–235.

[11] S. Fomin, S. Gelfand, and A. Postnikov, *Quantum Schubert polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 3, 565–596.

[12] Y. Fukukawa, M. Harada, and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), no. 3, 1147–1159.

[13] I. Ciocan-Fontanine, *Quantum cohomology of flag varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN **1995** (1995), no. 6, 263–277.

[14] A. Givental and B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices*, Comm. Math. Phys. **168** (1995), no. 3, 609–641.

[15] T. Horiguchi, *Coordinate rings of regular semisimple Hessenberg varieties and cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties*, arXiv:2512.11565.
[16] T. Horiguchi and T. Shirato, *Coordinate rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in the open opposite Schubert cell*, Forum Math. Sigma **13** (2025), Paper No. e44, 42 p.
[17] E. Insko and A. Yong, Patch ideals and Peterson varieties, *Transform. Groups* **17** (2012), no. 4, 1011–1036.
[18] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 43–91.
[19] D. Peterson, *Quantum cohomology of G/P*, Lecture Course, M.I.T., Spring Term, 1997.
[20] K. Rietsch, *Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 363–392.
[21] J. Shareshian and M. L. Wachs, *Chromatic quasisymmetric functions*, Adv. Math. **295** (2016), 497–551.
[22] E. Sommers and J. Tymoczko, *Exponents for B-stable ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 8, 3493–3509.
[23] T. A. Springer, *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, *Invent. Math.* **36** (1976), 173–207.
[24] T. A. Springer, *A construction of representations of Weyl groups*, *Invent. Math.* **44** (1978) 279–293.
[25] J. Tymoczko, *Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties*, Toric topology, Contemp. Math., **460** American Mathematical Society, Providence, RI, (2008), 365–384.