Alexander polynomials of knots and links, arithmetic progressions and persistently Salem polynomials

平澤 美可三　(名古屋工業大学)[*1]
村杉 邦男　　(トロント大学)

1. はじめに

1.1. 結び目，絡み目の Alexander 多項式

1928 年に J. Alexander が絡み目不変量として Alexander 多項式を導入して以来，J. Conway による漸化式を用いた再定式化や，その後の再解釈・一般化を通じて，重要な研究が進展してきた．それでもなお，与えられた Alexander 多項式がある交代結び目の Alexander 多項式として実現されるかという基本問題をはじめ，重要な問題が未解決のまま残されている．古典的には Alexander 多項式の係数に関する研究が主流であったが，コンピュータの発展に伴い，根の分布に関しても実験が容易になり，新たな研究が展開されている．転換点となったのは，2002 年の交代結び目に関する Hoste 予想であった [13, 11, 3]．著者らは Hoste 予想の提唱以降，根の配置に関する研究を継続している [5, 6, 7, 8, 9, 10]．根の配置に関して，特に重要なのは次の 3 種類の安定性である．**c-stable**（根がすべて単位円周上にある），**r-stable**（根がすべて実根），**bi-stable**（根がすべて実軸上か単位円周上にある）．

本講演では，bi-stable な多項式のうち，絶対値が 1 でない実根をちょうど 2 つもつものを **Salem 型** と定義し，その組織的な構成法について述べる．その等差数列部分の延長によって得られる多項式列に対し，Salem 型であることを統一的に証明する手法を導入する．

1.2. Salem 型多項式

Salem 多項式とは，モニックな既約整数多項式であって，重複度も込めて実根がちょうど 2 つ（$\alpha > 1$ と α^{-1}）であり，残りの根がすべて単位円周上にあるものをいう．Salem 多項式は相反的（reciprocal）な多項式になる．McMullen によって展開された Salem 多項式を通して K3 曲面の自己同型を研究する視点，およびその超 Kähler 多様体の自己双有理変換への発展については，論説 [14] に詳しい．

本講演では多項式の既約性を仮定せず，さらに変数 t を $-t$ に置き換えることも許して，**Salem 型多項式** として定式化する．Salem 型多項式からは，必要に応じて t を $-t$ に置き換え，円分多項式因子を取り除けば，Salem 多項式が得られる．Salem 型多項式 $f(t)$ に対して，$\max\{|\alpha|, |\alpha^{-1}|\}$ は $f(t)$ のマーラー測度と呼ばれる．特にプレツェル結び目 $P(-2,3,7)$ の Alexander 多項式 $t^{10}-t^9+t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t+1$ のマーラー測度（1.17628...）はレーマー数と呼ばれる．レーマー予想は，「これが Salem 多項式のマーラー測度の最小値であるか」を問うものである．一方，レーマー問題を否定的に解決するためには，測度が 1 に収束する Salem 型多項式の列を構成すればよい．この問題については，本稿の最後で再び取り上げる．

[*1] 466-8555 名古屋市 昭和区 御器所町 名古屋工業大学
e-mail: hirasawa.mikami@nitech.ac.jp
2026 年 第 73 回トポロジーシンポジウム講演集

2. 動機となった具体例

結び目の場合には Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ が，絡み目の場合には Alexander 多項式を $(t-1)^{\mu-1}$ で割って得られる簡約 Alexander 多項式が Salem 型多項式になるとき，その結び目または絡み目を **Salem 型** と呼ぶ．その際 t を $-t$ に変えたものが便利であることが多く，根の安定性を考察する際には，必要に応じてこの置き換えを行う．

Salem 型の結び目の探索にあたり，まず 2 橋絡み目に注目した．2 橋絡み目 L は，平坦アニュラスに $2a_k$ 個のフルツイストを入れたものを一列にプラミングした形の最小種数ザイフェルト曲面をもち，それを $[2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n]$ で表す．n が偶数のときは結び目，奇数のときは 2 成分絡み目になる．また Alexander 多項式がモニックになることが L がファイバー結び目・絡み目になることと同値であり，その条件はすべての a_k が $|a_k| = 1$ をみたすことである．L は有理数 $\frac{q}{p}$ で表されるが，これは $\frac{q}{p}$ の連分数展開の各項が $(-1)^{k+1}2a_k,\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ であることに対応する．

2 橋結び目の場合，$[\underbrace{2, \ldots, 2}_{a\ 個}, -2, \underbrace{2, \ldots, 2}_{b\ 個}]$ という形のものは Salem 型になることが符号数の理論からわかる [12]．これを $[2^a, -2, 2^b]$ と略す．この系列以外には，次の 5 つの散発例しか見つかっていない．

$$[(2)^5, (-2)^3], [(2)^9, (-2)^5], [(2)^6, -2, 2, -2, -2], [(2)^4, (-2)^3, 2], [(2)^6, (-2)^5, (2)^3]$$

それとは対照的に，2 橋絡み目については Salem 型になる多くの散発例と 6 つの系列を発見した．特に，次の 2 つの系列が本講演における Salem 型多項式の構成につながった．

$$K_1(m) = [(2)^m, -2, 2, (-2)^{m+1}],\ K_2(m) = [2, -2, (2)^m, (-2)^{m+1}], m \geq 1$$

例 1 および例 2 が示すように，$K_1(m)$ と $K_2(m)$ では，$\frac{\Delta(-t)}{t+1}$ の係数列は回文的となり，その一部に等差数列 (arithmetic progression) が現れている．

3. 第 1 種および第 2 種の AP 多項式（Arithmetic Progression polynomials）

定義 3.1. モニックな相反整数多項式 $f(t)$ が，次の係数列をもつとする．

$$\{1, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_2, a_1, 1\}.$$

係数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$a_1 = 1 + p, \qquad a_j = a_{j-1} + p \quad (2 \leq j \leq n-1), \qquad a_n = a_{n-1} + p - k$$

をみたすとき，$f(t)$ を $\lambda_n(\{p\}, k)$ と表し，**第 1 種 AP 多項式**と呼ぶ．ただし，$n \geq 2$ とする．

係数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$a_1 = 1 + p, \qquad a_j = a_{j-1} + q \quad (2 \leq j \leq n-1), \qquad a_n = a_{n-1} + q - k$$

をみたすとき，$f(t)$ を $\lambda_n(\{p, q\}, k)$ と書き，**第 2 種 AP 多項式**と呼ぶ．ただし，$n \geq 3$ とする．

第 2 種 AP 多項式 $\lambda_n(\{p, q\}, k)$ において $q = p$ のとき，これは第 1 種 AP 多項式 $\lambda_n(\{p\}, k)$ に一致する．第 5 節では一般の AP 多項式を定義する．

例 1. $K_1(5) = [(2)^5, -2, 2, (-2)^6]$ は Salem 型で，$f(t) := \dfrac{\Delta_{K_1(5)}(-t)}{t+1}$ の係数列は

$$\{1, 6, 11, 16, 21, 26, (31-2), 26, 21, 16, 11, 6, 1\}$$

従って $f(t) = \lambda_6(\{5\}, 2)$ である．

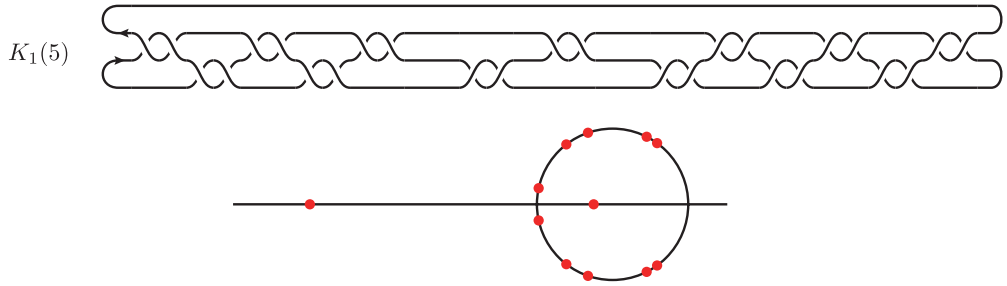


図 1: 2 橋絡み目 $K_1(5)$ と $\frac{\Delta_{K_1(5)}(-t)}{t+1} = \lambda_6(\{5\}, 2)$ の根

例 2. $K_2(4) = [2, -2, (2)^4, (-2)^5]$ は Salem 型で，$f(t) := \dfrac{\Delta_{K_2(4)}(-t)}{t+1}$ の係数列は

$$\{1, 6, 13, 20, 27, (34-4), 27, 20, 13, 6, 1\}$$

従って $f(t) = \lambda_5(\{5, 7\}, 4)$ である．

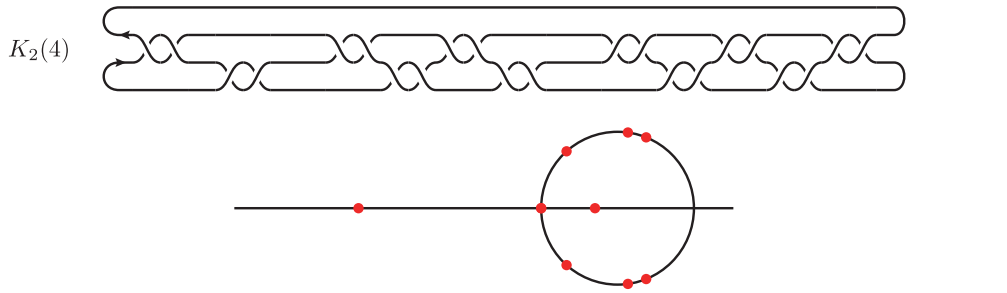


図 2: 2 橋絡み目 $K_2(4)$ と $\frac{\Delta_{K_2(4)}(-t)}{t+1} = \lambda_5(\{5, 7\}, 4)$ の根

計算機実験により，AP 多項式はしばしば次数 $2n$ を上げても Salem 型であることが保たれ，また中央の係数をずらすパラメータ k についても，Salem 型になる範囲が n に依存せず存在することが見出された．この持続性を次のように定式化する．

定義 3.2. *AP* 多項式 $\lambda_n(\{p, q\}, k)$ が**持続的 Salem 型** （*persistently Salem-type*）であるとは，ある整数 n_0 以上のすべての n について *Salem* 型になることをいう．このような n_0 の最小値を n-閾値という．

次節では，第 1 種および第 2 種の AP 多項式が持続的 Salem 型になるための必要十分条件を与える．上の例 1,2 の $\lambda_n(\{5\}, 2), \lambda_n(\{5, 7\}, 4)$ は $n \geq 4$ ならば Salem 型になる．第 5 節では一般の AP 多項式を定式化し，持続的 Salem 型になる十分条件を与える．

4. 第2種 AP多項式が持続的Salem型になる必要十分条件

定理 4.1. *AP*多項式 $\lambda_n(\{p,q\},k)$ を考える．

(I) (p,q) が $(-1,0),\ (0,0),\ (1,0),\ (2,2),\ (3,4)$ の5つの例外的なパターンのいずれかのとき，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ は任意の k に対して持続的*Salem*型にならない．

(II) (p,q) が *(I)* の5つの例外パターンに属さないとする．このとき，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ が持続的*Salem*型になるための必要十分条件は，次の2条件をみたすことである．

(a) $q(q-2p+2)\le 0$,

(b) $\min\{q-p+1,\ p-1\}\le k\le \max\{q-p+1,\ p-1\}$.

さらに，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ が持続的*Salem*型であるとき，その n-閾値は $(p,q)=(2,1)$ または $(0,-1)$ の場合には 5，それ以外の場合には 4 である．

一方，固定した (p,q,k) に対して $\lambda_n(\{p,q\},k)$ が持続的 *Salem*型でないならば，ある自然数 n_0 が存在して，すべての $n\ge n_0$ に対し，$\lambda_n(\{p,q\},k)$ は*Salem*型にならない．

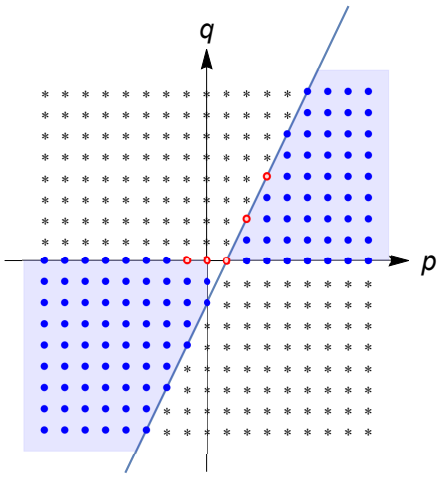


図 3: 定理を表す (p,q) の図．● にあたる (p,q) において持続的Salem型になる．

系 4.2. 特に $p=q$ とする．このとき，$\lambda_n(\{p\},k)$ が持続的*Salem*型になるための必要十分条件は，次の条件が成り立つことである．

$$p\le -1 \quad \text{または} \quad p\ge 3$$

$$\min\{1,p-1\}\le k\le \max\{1,p-1\}$$

この場合の n-閾値は 4 である．

例 3. $\lambda_n(\{-1,0\},k)$ は持続的サーレム型ではない．このケースについては下図の様に根の配置が対称的になる．

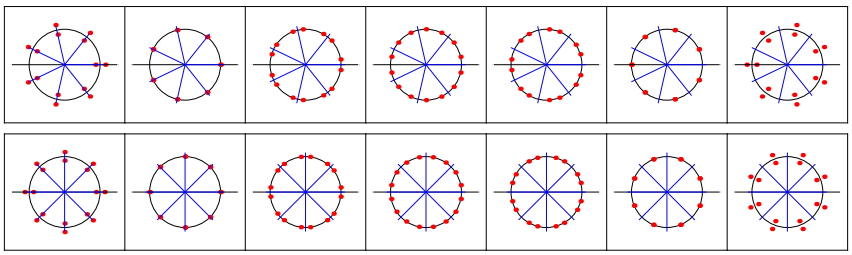


図 4: $\lambda_n(\{-1,0\},k)$, $k=-3,\ldots,3$, $n=7,8$ の根

5. 一般の AP 多項式

第 2 種 AP 多項式 $\lambda_n(\{p,q\},k)$ は，係数列において最初の階差 p のみが例外であり，それ以降は公差 q の等差数列が中央の係数まで続いた．例外部分が複数項にわたり，それ以降が等差数列になるものを一般の AP 多項式と呼ぶ．

定義 5.1. *AP* 多項式 $\lambda_n(\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},k)$ とは，次数 $2n$ $(>2m)$ の相反的な整数係数多項式で，係数が次をみたすものをいう．

$$\begin{aligned} a_0 =& 1 \\ a_j =& a_{j-1}+p_j, (1\le j\le m-1) \\ a_j =& a_{j-1}+p_m, (m\le j\le n-1) \\ a_n =& a_{n-1}+p_m-k \end{aligned}$$

$m=1, m=2$ が，第 1 種および第 2 種 AP 多項式に対応する．AP 多項式が**持続的 Salem 型**であるとは，ある n_0 以上のすべての n について Salem 型になることをいう．

例 4. $\lambda_4(\{3,2,1\},k)=1+4t+6t^2+7t^3+(8-k)t^4+7t^5+6t^6+4t^7+t^8$
$\lambda_5(\{1,2,3\},k)=1+2t+4t^2+7t^3+10t^4+(13-k)t^5+10t^6+7t^7+4t^8+2t^9+t^{10}$
$\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ の最後の p_m だけが繰り返されることに注意．p_m を公差とする反復部分が確実に現れるように，定義において $n>m$ を仮定している．

定理 5.2. $\lambda=\lambda_n(\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},k)$ とし，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_{m-1}>p_m>0$ とする．

(1) $p_m\ge 3$ のとき，$1\le k\le p_m-1$ をみたす k に対して，λ は持続的 *Salem* 型である．

(2-i) $p_1\ne p_2$ とする．このとき $1-p_1+p_2\le k\le p_m-1$ をみたす k に対して λ は持続的 *Salem* 型である．

(2-ii) さらに，$2(1-p_1+p_2)\le p_m$ であれば，$1-p_1+p_2\le k\le -(1-p_1+p_2)+p_m$ をみたす k に対して λ は持続的 *Salem* 型である．

定理 5.3. $\lambda=\lambda_n(\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},k)$ について，$p_1<p_2\ge p_3\ge\cdots\ge p_{m-1}>p_m$ とする．$2p_1+p_m>2p_2+2$ ならば，$1+p_2-p_1\le k\le -(1+p_2-p_1)+p_m$ をみたす k に対して λ は持続的 *Salem* 型である．

上記の 2 つの定理は，AP 多項式が持続的 Salem 型になる十分条件を与えているが，その条件をみたさなくても持続的 Salem 型になる例が見つかっている．

6. 証明の技法

次数 $2n$ の相反的な多項式 $f(t)$ に対して，$\dfrac{f(t)}{t^n}$ を $x = t + \frac{1}{t}$ の多項式として表したものを $m(x)$ とする．$f(t)$ が bi-stable になる必要十分条件は $m(x)$ が r-stable になることである．開区間 $(-2, 2)$ にある $m(x)$ の各根は単位円周上にある $f(t)$ の 2 つの根に対応し，区間 $[-2, 2]$ の外にある $m(x)$ の各根は単位円周上にない $f(t)$ の 2 つの実根に対応する．また，$m(2) = 0$ と $f(1) = 0$ は同値であり，$m(-2) = 0$ と $f(-1) = 0$ も同値である．

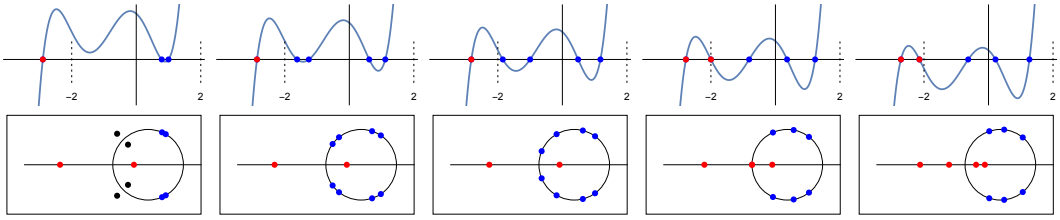


図 5: $m(x)$ の根と $f(t)$ の根の対応

AP 多項式は直接 $x = t + \frac{1}{t}$ の多項式に変換しても扱い難い．そこで，$t^n + \dfrac{1}{t^n}$ を $x = t + \dfrac{1}{t}$ の多項式として書き下したものを $y_n(x)$ と書く．$\dfrac{y_n(2x)}{2}$ は第 1 種チェビシェフ多項式になる（$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表したもの）．

中間項を除去するため，$(t-1)^2$ をかけてから変換することで，AP 多項式を $y_n(x)$ の一次結合 $F_n(x)$ と一次式 $-G_k(x)$ の和にできる．それにより，Salem 型であるか否かが $[-2, 2]$ とその外側における $y = F_n(x)$ と直線 $y = G_k(x)$ の交点の個数によって解析できる．AP 多項式 $\lambda_n(\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, k)$ においては，$F_n(x)$ と $G_k(x)$ は次の形になる．

$$\begin{cases} F_n(x) = y_{n+1} + (p_1 - 1)y_n + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{m-1} (p_{\ell+1} - p_\ell) y_{n-\ell}, \\ G_k(x) = kx + 2(p_m - k) \end{cases}$$

交点の解析は困難であるため，$F_n(x)$ を様々な方法で折れ線近似することにより，持続的 Salem 型になることを証明する．逆を考えるにあたっては，Salem 型であっても，この折れ線近似法では証明できない場合がある．持続的 Salem 型にならないことを証明するためには，$y_n(x)$ の一次結合がつくる曲線族のエンベロープを考える．その解析には，Stankov によるチェビシェフ多項式の一次結合に対するエンベロープの手法を用いる．例えば，y_{n+1}, y_n, y_{n-1} の一次結合 $ay_{n+1} + by_n + cy_{n-1}$ に対して $(-2, 2)$ におけるエンベロープは次式で与えられる．

$$y^2 = 4\left((a-c)^2 + b^2 + b(a+c)x + acx^2\right)$$

エンベロープと上記の直線 $y = G_k(x)$ が $(-2, 2)$ で交わるときには，n を十分大きくすると $(-2, 2)$ における $F_n(x)$ と $G_k(x)$ の交点数が不足することを用いて，持続的 Salem 型にならないことが証明できる．この解析は第 2 種 AP 多項式では有効であったが一般の AP 多項式についてはかなり複雑になる．

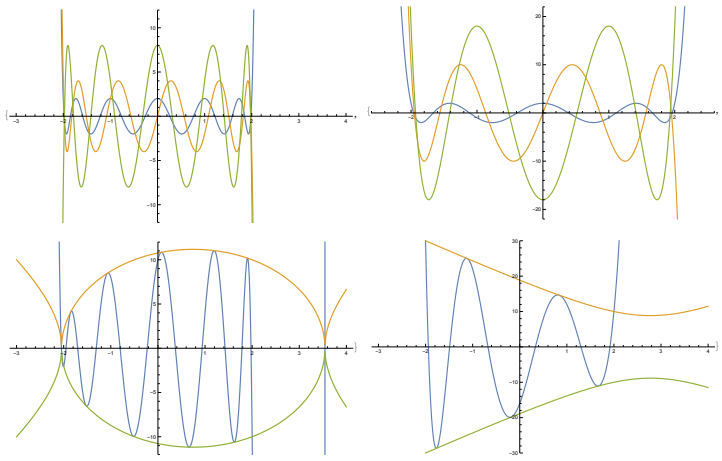


図 6: y_n の一次結合と，そのエンベロープ

7. divide 結び目が Salem 型になる例とならない例

divide 絡み目とは，N. A'Campo [1] によって導入された概念で，複素平面曲線の特異点絡み目を含む，ファイバー絡み目のクラスをなす．divide とは円板に一般の位置ではめ込まれたアークとループの集合である．divide が 1 本のアークからなるとき，その divide は結び目を表す．与えられた divide からそれが表す絡み目を，ファイバー曲面ごと表示するアルゴリズム [2] が知られており，下図では二重点が 2 点のアークが表す結び目 10_{145} の構造と，divide に沿ったファイバー曲面を表している．

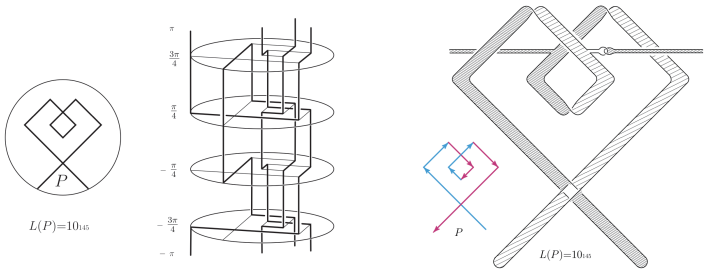


図 7: divide 結び目 10_{145} とそのファイバー曲面

7.1. 内枝 divide

図 8(左) で表される divide のクラスを**内枝 divide** D_d と呼ぶ．d は並んだキンクの個数である．それが表す結び目 K_d は $K_0 = 3_1$, $K_1 = 10_{145}$, $K_2 = 12n_{276}$ になる．$K_d, d \geq 2$ は Salem 型になる．特に $d \geq 4$ において $\Delta_{K_d}(-t) = \lambda_d(\{-2, -6, -8\}, -4)$ となり，これは持続的 Salem 型になる．ただし，その証明は定理 5.2, 5.3 の証明より複雑になる．

7.2. フィラメント型 divide

自然数 d に対し，図 8(右) のフィラメント型の divide の表す結び目 K_d は次の形の Alexander 多項式を持つ．この型が Salem 型になることは AP 多項式は使わず証明する．

$$\Delta_{K_d}(t) = \left(1 - t + t^2\right)^{d-1} \left(1 + (3d-2)t + (-6d+3)t^2 + (3d-2)t^3 + t^4\right)$$

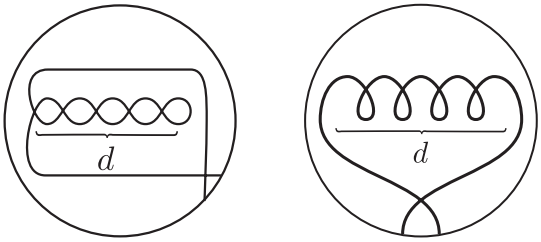


図 8: 左：内枝 divide D_d，右：フィラメント型 divide

7.3. 渦巻き型 divide

次に示す渦巻き型 divide は Salem 型結び目を与えない．Alexander 多項式は次のように，鋭い単峰型になり，根も特徴的な配置になる．ファイバー曲面は [4] で与えている torti-rational 結び目（2 橋絡み目の一方の成分を他方の成分で捻って得られる結び目）のファイバー曲面になっている．

$$\{1,-1,1\},\{1,1,-3,1,1\},\{1,1,1,-5,1,1,1\},\{1,1,1,1,-7,1,1,1,1\}$$

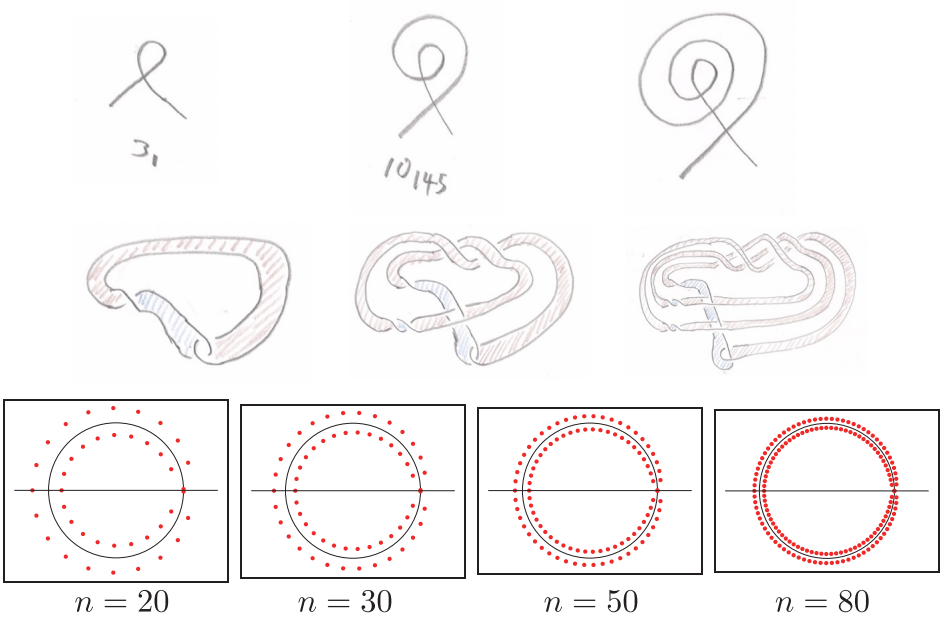


図 9: 渦巻き型 divide は Salem 型結び目を与えない

8. 今後の課題と展望

AP 多項式を導入したことで，Salem 型多項式を次数方向に拡張した多項式列として研究できるようになった．次の課題は $n \to \infty$ にしたときの根の分布の漸近挙動である．

8.1. AP 多項式の根の分布の漸近挙動

第 2 種 AP 多項式 $f(t) = \lambda_n(\{p,q\},k)$ を考える．$H(z) = z^2 + (p-1)z + (q-p)$ について，$H(z)$ の大きさが最大の根の 1 つを α とおく．計算機実験により次のような状況が観察されている．

(1) k を固定して n を大きくすると，$f(t)$ は α の小近傍にちょうど1つの根 $a \neq 0$ をもつ．また，$f(t)$ の根のうち

$$a,\ \overline{a},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{\overline{a}}$$

以外の根をすべて含む最小の原点中心の円環領域を

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{\rho} \leq |z| \leq \rho \right\}, \qquad \rho \geq 1,$$

とする．n が増大すると，ρ は減少する．

(2) 十分大きな n を固定すると，k の増大に伴って ρ も増大する．

この ρ を n, p, q, k の具体的な関数として書き下すことが課題である．

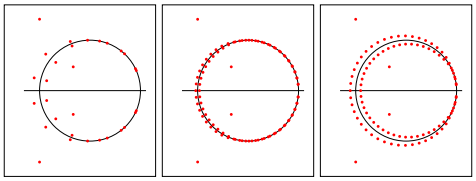


図 10: $\lambda_{15}(\{3,6\},6)$, $\lambda_{50}(\{3,6\},6)$, $\lambda_{50}(\{3,6\},80)$ の根

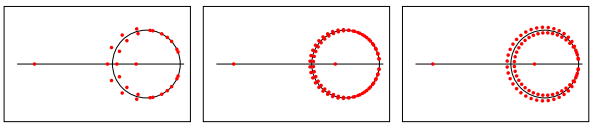


図 11: $\lambda_{15}(\{4,3\},7)$, $\lambda_{40}(\{4,3\},7)$, $\lambda_{40}(\{4,3\},50)$ の根

8.2. AP 多項式の持続的 Salem 型による Lehmer 問題への挑戦

1 より大きい既知のマーラー測度の最小値 (1.17628...) は，プレツェル結び目 $P(-2,3,7)$ の Alexander 多項式 $\Delta_{K_{P(-2,3,7)}}(t)$ によって実現されている．

$$\Delta_{K_{P(-2,3,7)}}(-t) = 1 + t - t^3 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 + t^9 + t^{10}$$

であり，これは AP 多項式として，$\lambda_{n=5}(\{0,-1,-1,0\},0)$ であるので，これを次数に関して拡張し AP 多項式 $\lambda_n(\{0,-1,-1,0\},0)$ に拡張することを考える．それに対応する結び目として，$P(-2,3,2n-3), n \geq 5$ が見つかった．

AP 多項式 $\lambda_n = \lambda_n(\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, k)$ が持続的 Salem 型であり，

$$H(x) = x^m + (p_1 - 1)x^{m-1} + \sum_{\ell=1}^{m-1} (p_{\ell+1} - p_\ell) x^{m-1-\ell}$$

が実根をもつとする．λ_n のマーラー測度は $n \to \infty$ のとき，$H(x)$ のある実根に収束すると考えている．レーマー数より小さいマーラー測度をもつ多項式の探索に加えて，マーラー測度が 1 に収束する Salem 型多項式の列を構成することも重要な課題である．

参考文献

[1] Norbert A'Campo, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 88 (1998), 151–169.

[2] Mikami Hirasawa, *Visualization of A'Campo's fibered links and unknotting operation*, Topology Appl. 121 (2002), 287–304.

[3] Mikami Hirasawa, Katsumi Ishikawa and Masaaki Suzuki, *Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros*, Topology Appl. 253 (2019), 48–56.

[4] Mikami Hirasawa and Kunio Murasugi, *Fibred torti-rational knots*, J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), 1291–1353.

[5] Mikami Hirasawa and Kunio Murasugi, *Various stabilities of the Alexander polynomials of knots and links*, arXiv:1307.1578 (2013), 92 pp.

[6] ———, 絡み目のアレクサンダー多項式の零点の配置について，第 61 回トポロジーシンポジウム講演集（2014 年 7 月），27–36.

[7] ———, *Stable Alexander polynomials of arborescent links*, J. Knot Theory Ramifications 28 (2019), 1940017, 21 pp.

[8] ———, *Alexander polynomials of knots and links and detection of sequential Salem-type polynomials*, draft.

[9] ———, *A uniform construction of Salem-type polynomials from arithmetic progressions*, draft.

[10] ———, *Some basic classes of divide knots and the distribution of zeros of their Alexander polynomials*, in preparation.

[11] Katsumi Ishikawa, *Hoste's conjecture for the 2-bridge knots*, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), 2245–2254.

[12] Livio Liechti, *Signature, positive Hopf plumbing and the Coxeter transformation*, Osaka J. Math. 53 (2016), 251–266.

[13] Lilya Lyubich and Kunio Murasugi, *On zeros of the Alexander polynomial of an alternating knot*, Topology Appl. 159 (2012), 290–303.

[14] 小木曽啓示，Salem 多項式と超 Kähler 多様体の双有理型変換群,『数学』59 (2007), 1–23.

[15] Dragan Stankov, *On linear combinations of Chebyshev polynomials*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 97 (111) (2015), 57–67.