最適化に現れる制約関数芽の $\mathcal{K}[G]$-分類・認識と制約想定

早野　健太（慶應義塾大学）

本稿で述べる一連の研究は，濱田直希氏（株式会社サイバーエージェント）および寺本央氏（関西大学）との共同研究 [15, 16, 17, 18] に基づく．

本稿では，最適化問題に現れる制約を，可微分写像の特異点論の観点から調べる一連の研究 [15, 16, 17, 18] を概説する．まず,「一般的な」最適化問題の諸性質を理解するという動機のもとで，Mather [23] により定義された群 $\mathcal{K}$ の部分群 $\mathcal{K}[G]$ を用いて，一般的な助変数族に現れる制約関数芽を分類する（[15]）．次にこの分類をもとに，一般的な制約関数芽に対する，最適化の基本的な一次必要条件（KKT 条件）が解において常に成立することを保証する**制約想定（constraint qualification）**の成否を決定する（[16, 17]）．紙面の都合上，結果の理解に必要な用語の定義と結果の主張に重点を置き，証明には立ち入らない．また，認識問題に関する結果 [18] については，軽く触れるに留める．

1. はじめに

制約付き多目的最適化問題とは，制約関数値に関する（不）等式で定まる領域（実行可能領域）の中で，複数の目的関数の値を最小化する，より厳密には **Pareto 解**と呼ばれる解を求める問題である．(Pareto 解の定義は後述する.）これは計画，設計，運用など，理論と応用の双方で広く現れる基本的な問題である [2]．線型計画問題 [5, 6] や凸計画問題 [3, 24] など限られた状況に対しては強力な理論があるが，一般の場合に Pareto 解を求める保証がある解法は知られていない．そのため，一般の問題に対する解法（Bayes 最適化 [26]，進化計算 [8] など）は，**ベンチマーク問題**，すなわち，アルゴリズムの性能を比較するための共通の試験問題としてあらかじめ整備された最適化問題に対して，どれだけ優れた解を発見できるかによって評価されてきた．制約付き多目的最適化では，C-DTLZ [21] と呼ばれるベンチマークが広く用いられている．これは，無制約多目的最適化のためのベンチマーク DTLZ [7] に人工的な制約を付加したものである．しかし，このように人工的に設計されたベンチマーク問題が，実応用で生じる問題の性質をどこまで反映しているのかについては，疑問も提起されている（たとえば [19] を参照）．このことは，C-DTLZ のようなベンチマーク上で得られた性能比較が，実際の応用におけるアルゴリズムの相対的な性能をどの程度まで信頼できる形で反映しているのか，という問題にもつながる．よいベンチマークを設計し，また既存のベンチマークを適切に評価するためには，まず実応用で典型的に生じる問題の構造を理解する必要がある．

本研究では，実応用に典型的に現れる最適化問題の構造を理解するための第一歩として，実行可能領域を規定する制約関数に着目する．実問題の制約は，観測やモデル化の過程で生じる誤差の影響を受けうるほか，求めた解を設計や運用の現場で利用する際にもまた誤差が生じるため，摂動によって変化しない安定な構造に注目することが重要である．さらに，実問題に現れる制約には多様なものがあるため，個々の制約関数を個別に解析することは現実的ではない．そこで本研究では，有限個の助変数をもつ制約関数の族の中で典型的に現れる，つまり「一般的な」制約関数の局所構造を調べる．本研究の主な目的は，可微分写像の特異点論を援用して，このような局所構造を把握することである．

我々はまず，4 個以下の助変数をもつ一般的な制約関数の族に現れうる制約関数芽を，**簡約化**と **$\mathcal{K}[G]$-同値**の差を除いて分類した（定理 4.1，[15]）．ここで簡約化とは，有効でない不等号制約を除き，正則な等号制約が定める部分多様体へ制限することにより，実行可能領域芽の微分同相類などを変えずに余分な制約を取り除く操作である（詳しくは第 3 節で説明する）．またこの分類で用いる $\mathcal{K}[G]$-同値は，Mather [23] により導入された接触同値群 $\mathcal{K}$ の部分群から定まる同値関係である．一般線型 Lie 群 G に対するこの種の部分群 $\mathcal{K}[G]$ は Tougeron [27] により導入され，その基本的性質は Gervais [9, 10, 11] により研究され，Izumiya，Takahashi，Teramoto [20] によりさらに研究されている．本稿では，不等号制約と等号制約の役割を保つように G を選ぶ．このとき $\mathcal{K}[G]$ による作用は実行可能領域芽の微分同相類を保つ，ということもあり，最適化の制約を分類する同値関係として自然であるといえる．

$\mathcal{K}[G]$-同値に付随して，制約関数芽の $\mathcal{K}[G]_e$-余次元という数値的な指標を考えることができる．これは，その芽が一般の制約族の中でどの程度特殊なものか，を測る量である．実際上述の分類定理は，(stratum) $\mathcal{K}[G]_e$-余次元の小さい写像芽を分類し，$\mathcal{K}[G]_e$-余次元の大きい写像芽を横断性定理により避けることで示される．C-DTLZ には $\mathcal{K}[G]_e$-余次元が ∞ となる制約関数芽が現れるが [15]，このことは，C-DTLZ に含まれる問題の一部が，一般の有限助変数族に現れうる局所構造から大きく外れた特殊な制約を含むことを示唆している．

上記の分類を踏まえて，本研究のもう一つの主題である**制約想定**を論ずる．最適化では，（局所）解が満たすと期待される一次の必要条件として，Lagrange 乗数の存在で表される **Karush–Kuhn–Tucker（KKT）条件**がしばしば用いられる．制約のない問題では任意の局所解が KKT 条件を満たすが，制約のある問題ではそうとは限らない．この不足を補い，「任意の目的関数に対し KKT 条件が解において成立する」ことを保証する，制約のみへの十分条件が制約想定である．古典的には，LICQ，MFCQ，ACQ，GCQ という四つの制約想定が広く用いられ，これらは

$$\text{LICQ} \implies \text{MFCQ} \implies \text{ACQ} \implies \text{GCQ}$$

という階層をなす，つまりたとえば，LICQ が成立すれば MFCQ も成立する，などが知られている．逆向きの含意はいずれも一般には成立せず，これを示す具体例は先行研究でいくつか与えられてきた [25] が，一般の制約に対して四つの制約想定がどの程度異なり得るのか，その全体像は明らかでなかった．本研究では，前述の分類を通じて，一般的な制約に対しこれらの制約想定の成否を網羅的に決定し，この問いに答える．

ここで多目的の場合に対する注意を与える．最も弱い GCQ については，**単目的**（目的関数が一つ）の場合，これが任意の目的関数の局所解において KKT 条件が成立するための必要十分条件であることが知られている [12]．一方，**多目的**の場合には GCQ では十分でなく[1]，これを一般化した制約想定が近年 Haeser–Ramos [14] により導入された．本稿ではこれを**弱 p-Guignard 制約想定**（p-WGCQ）と呼ぶ．ここで p は目的関数の個数であり，$p = 1$ のとき p-WGCQ は GCQ に一致する（定義は第 5 節）．GCQ が単目的の場合に必要十分条件であったのと同様に，p-WGCQ は，任意の p 目的問題の局所弱 Pareto 解が KKT 条件を満たすための必要十分条件である．p-WGCQ には単調性（p-WGCQ が成立すれば $(p-1)$-WGCQ

[1] 多目的（$p \geq 2$）の場合，GCQ が成立しても，局所弱 Pareto 解において KKT 条件が成立するとは限らない（具体例は [14]）．これが p-WGCQ を導入する動機である．なお [16]（arXiv:2510.02381v1）には，GCQ のこの必要十分性が多目的の場合にも成立すると記載されているが，これは誤りである．

も成立する）があるため，p-WGCQ が成立する p の範囲の情報は制約関数芽ごとに定まるただ一つの**閾値**

$$p_* = \min\{p \geq 1 \mid p\text{-WGCQ が成立しない}\} \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

に集約され，p-WGCQ はちょうど $p < p_*$ のときに成立する．

本研究では，一般的な制約関数芽に対し，四つの古典的制約想定の成否と閾値 p_* を決定することを目的とする．まず初めに，本稿で考える制約想定の成否は $\mathcal{K}[G]$ の作用および簡約化で不変である（定理 5.2）．よって先述の分類結果より，4 個以下の助変数を持つ一般的な制約関数の族に現れうる制約関数芽に対して制約想定の成否を調べるには，分類表内の写像芽にそれを行えば十分である．四つの古典的制約想定のうち，LICQ と MFCQ は制約の一次の情報から容易に判定できる（定理 5.3）．残る ACQ と GCQ は閾値 p_* から読み取れる：$p_* = \infty$ が ACQ の成立に，$p_* = 1$ が GCQ の不成立に対応する（命題 5.4）．したがって p_* を決定すれば ACQ および GCQ の成否も同時にわかり，四つの古典的制約想定の決定（[16]）と p-WGCQ の決定（[17]）が統一的に述べられる（定理 5.5）．

得られる結果の一つの含意として,「GCQ は満たすがより強い制約想定はすべて満たさない」芽が一般的に多数現れることがわかる．これは，上で述べた制約想定間の「隔たり」が，例外的な現象ではなく一般的な制約に普遍的に現れることを意味し，本研究の枠組みがこの種の問いに有効であることを示している．さらに，分類に現れる各芽の**認識問題**（与えられた制約がどの標準形に当たるかを計算可能な不変量で判定する問題）とその応用についても，進行中の研究 [18] として第 6 節で簡単に触れる．

2. 最適化問題と Pareto 解

本節では，本稿で扱う多目的最適化問題と，Pareto 解・弱 Pareto 解，および KKT 条件を導入する．N を可微分多様体とし，可微分写像 $f = (f_1, \ldots, f_p) : N \to \mathbb{R}^p$，$g = (g_1, \ldots, g_q) : N \to \mathbb{R}^q$，$h = (h_1, \ldots, h_r) : N \to \mathbb{R}^r$ を考える．$f_1, \ldots, f_p$ を**目的関数**，$g_1, \ldots, g_q$ を**不等号制約関数**，$h_1, \ldots, h_r$ を**等号制約関数**と呼ぶ．**本稿を通じて，N の次元 $n = \dim N$ は q, r に比べて十分大きい（$n \gg q, r$）と仮定する.**（この仮定は多目的最適化においては標準的であるといえるものである.）以上の設定のもと，**実行可能領域** $M(g, h) \subset N$ を以下のように定義する．

$$M(g, h) = \{x \in N \mid g_1(x), \ldots, g_q(x) \leq 0,\ h_1(x) = \cdots = h_r(x) = 0\}\,.$$

多目的最適化問題とは，**Pareto 解**，すなわち $f_i(y) \leq f_i(x)$ $(\forall i)$ かつ $f_{i_0}(y) < f_{i_0}(x)$ $(\exists i_0)$ となる $y \in M(g, h)$ が存在しないような $x \in M(g, h)$ を求める問題である．これを少し弱めた概念として，**弱 Pareto 解**を次のように定義する：$f_i(y) < f_i(x)$ $(\forall i)$ となる $y \in M(g, h)$ が存在しないような $x \in M(g, h)$ を弱 Pareto 解という．定義より Pareto 解は弱 Pareto 解である．目的関数 f を実行可能領域内の x のある近傍 U に制限して上の条件が成立するとき（すなわち $M(g, h) \cap U$ 内に上の y が存在しないとき），x をそれぞれ**局所 Pareto 解**，**局所弱 Pareto 解**という．目的関数が一つ（$p = 1$）のときは，これらはいずれも通常の（局所）最小解に一致する．

Pareto 解を直接特徴づけるのは一般に困難なため，次の一次必要条件がしばしば用いられる．

KKT 条件（$x \in M(g,h)$ について）：以下を満たす $\alpha_i \geq 0$，$\lambda_j \geq 0$，$\mu_k \in \mathbb{R}$ が存在する．

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \operatorname{grad} f_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(x) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \operatorname{grad} h_k(x) = 0.$
- 任意の j に対し $\lambda_j g_j(x) = 0$（相補性条件）.

KKT 条件を満たす点を **KKT 点**（または弱 KKT 点）という．さらに，すべての目的関数の乗数として正（$\alpha_i > 0$）のものをとれるとき，**強 KKT 点**という．単目的（$p = 1$）の場合，両者は一致し，通常の KKT 条件に帰着する．制約がない場合には KKT 条件は局所弱 Pareto 解であることの必要条件となるが，一般にはそうとは限らない．任意の目的関数芽の局所弱 Pareto 解において KKT 条件が成立することを保証する，制約関数芽への十分条件が制約想定であるが，これについては分類を述べた後の第 5 節でまとめて扱う．

3. $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化

本節では，分類の記述に必要となる $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化を導入する．いずれも，制約関数芽を「実行可能領域の構造を保ったまま」標準形へ変形するための道具である．

3.A. $\mathcal{K}[G]$-同値

$\mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$ の部分群 G_{gp} を，各列にただ一つの非零成分を持ち，その成分が正であるような正則行列（各成分が正の対角行列と置換行列の積）全体とする．$\mathrm{GL}(q+r,\mathbb{R})$ の部分群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ O & \Psi_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; \Psi_{11} \in G_{gp},\ \Psi_{12} \in M_{q,r}(\mathbb{R}),\ \Psi_{22} \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \right\}$$

とする．二つの制約関数芽 $(g,h), (g',h') : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{q+r}, 0)$ に対し，

$$(g'(x), h'(x)) = \big(\Psi_{11}(x)\, g(\Phi^{-1}(x)) + \Psi_{12}(x)\, h(\Phi^{-1}(x)),\ \Psi_{22}(x)\, h(\Phi^{-1}(x))\big) \qquad (1)$$

となる微分同相写像芽 Φ と可微分写像芽 $\Psi : (\mathbb{R}^n, 0) \to G$ が存在するとき，(g,h) と (g',h') は **$\mathcal{K}[G]$-同値**であるという．G_{gp} が不等号制約を正の係数で置換・スケールするのみであることから，(1) を満たす Φ, Ψ があれば $\Phi(M(g,h)) = M(g',h')$ となる，すなわち $\mathcal{K}[G]$-同値は実行可能領域芽の微分同相類を保つ．また，群 $\mathcal{K}[G]$ は Damon [4] の意味で幾何学的な部分群である．

3.B. 簡約化

制約関数芽 $(g,h) : (N,x) \to (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r, (z,0))$ に対し，不等号制約芽 g_i が x で値 0 をとるとき，すなわち $z_i = g_i(x) = 0$ をみたすとき**有効**（active）であるといい，そうでない（x での値が 0 でない）ものを**有効でない**という．有効でない不等号制約芽は実行可能領域芽に影響しないため取り除いてよく，また沈めこみとなる等号制約芽は，それが定める部分多様体芽への制限に置き換えてから取り除いても，実行可能領域芽の微分同相類は変化しない．この操作を**簡約化**と呼ぶ．正確には次のように定義する（[15]）．制約関数芽 $(g,h) : (N,x) \to (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r, (z,0))$（$z_i \leq 0$）に対し，

- 有効でない不等号制約の添字 $(k) = (k_1, \ldots, k_{q-s}) \subset \{1, \ldots, q\}$（$z_{k_i} = g_{k_i}(x) < 0$），

- 微分が一次独立な等号制約の添字 $(i) = (i_1, \ldots, i_{r-\ell}) \subset \{1, \ldots, r\}$（$dh_{i_1,x}, \ldots, dh_{i_{r-\ell},x}$ が一次独立），
- 部分多様体 $(h_{i_1}, \ldots, h_{i_{r-\ell}})^{-1}(0)$ へのはめ込み芽 $\iota_{(i)} : (\mathbb{R}^{n-r+\ell}, 0) \to (N, x)$

を選ぶ．このとき (k)，(i) に関する (g, h) の**簡約化**を，添字 (k)，(i) の成分を除いて $\iota_{(i)}$ と合成した芽

$$(g, h)_{\iota_{(i)},(k)} = \big((g_j \circ \iota_{(i)})_{j \notin (k)},\ (h_m \circ \iota_{(i)})_{m \notin (i)}\big)$$

で定める．この操作で実行可能領域芽は（微分同相を除いて）保たれる．残ったすべての不等号制約が有効で（$g_{\iota_{(i)},(k)}(0) = 0$），かつ残った等号制約の微分が零（$dh_{\iota_{(i)},0} = 0$）となるところまで簡約したものを**完全簡約化**という．本研究の分類は，この完全簡約化のレベルで行われる．

4. 一般的な制約関数芽の分類

本節では分類定理 [15] を述べる．第 1 節で述べた通り，注目すべきは小さな摂動で保たれる**一般的**な性質である．横断性定理の変種を用いると，次の意味で，一般的な制約族に現れる制約関数芽を分類することができる．

定理 4.1 ([15, Theorem 5.2])**.** 境界のない多様体 N と開集合 $U \subset \mathbb{R}^b$（$b \leq 4$）に対し，制約関数 $(g, h) \in C^\infty(N \times U, \mathbb{R}^{q+r})$ で次を満たすものの全体は，$C^\infty(N \times U, \mathbb{R}^{q+r})$ の中で残留集合（特に稠密な部分集合）をなす：任意の $u \in U$ と $\overline{x} \in M(g_u, h_u)$ に対し，写像芽 $(g_u, h_u) : (N, \overline{x}) \to \mathbb{R}^{q+r}$ の完全簡約化の微分の余階数は高々1 であり，かつそれは沈め込み芽，または表 1，2，3 のいずれかの写像芽と $\mathcal{K}[G]$-同値である．ここで $g_u(x) = g(x, u)$，$h_u(x) = h(x, u)$ である．

分類は，等号制約のみ（$q = 0, r = 1$，表 1），不等号制約のみ（$r = 0$，表 2），両者を持つ場合（$q > 0, r = 1$，表 3）に分かれる．（ここでの q, r は完全簡約化後の（不）等号制約の個数であり，もとの (g, h) の値域の次元の q, r とは異なることに注意する．）

5. 制約想定とその判定

本節では，一般的な制約関数芽について，四つの古典的制約想定の成否（[16]）と多目的のための p-WGCQ の閾値 p_*（[17]）を決定する．まず制約想定の定義を与え，それらが $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化で不変であること（このため分類表の標準形だけを調べれば十分であること）を述べる．

5.A. 制約想定の定義と不変性

$\overline{x} \in M(g, h)$ のまわりの N のチャートを一つとり，制約関数芽を $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上の写像芽 $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, z)$（$z_j \leq 0$），$h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$ とみなす．$I = \{j \mid z_j = 0\}$（$\overline{x}$ において有効な不等号制約の添字集合）とし，$g_I = (g_j)_{j \in I}$ とおく．制約想定とは，「任意の目的関数芽 f に対し，$\overline{x}$ が局所（弱）Pareto 解ならば KKT 条件が成立する」ことを保証する，(g, h) への十分条件である．

- $d(g_I, h)_0$ が全射のとき，(g, h) は **LICQ** を満たすという．

型	写像芽 $h(x)$
$(1,k)$	$x_1^k+\sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 5)$
(2)	$x_1^3+\epsilon_2 x_1x_2^2+x_3^2+\sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$

表 1: 等号制約のみ（$q=0, r=1$）の場合に現れる完全簡約化の標準形．$\epsilon_j\in\{1,-1\}$.

型	$\tilde{g}(x_{l+1},\dots,x_n)$	l
$(1,k)$	$\epsilon_q x_q^k+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 5)$	$q-1$
(2)	$x_q^3+\epsilon_{q+1}x_qx_{q+1}^2+\sum_{j=q+2}^n \epsilon_j x_j^2$	
$(3,k)$	$\epsilon_{q-1}x_{q-1}^k+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 4)$	$q-2$
$(4,k)$	$\epsilon_q x_q^k+x_{q-1}x_q+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (k=3,4)$	
(5)	$\epsilon_{q-1}x_{q-1}^2+x_q^3+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$	
(6)	$\delta_1 x_{q-2}^2+\delta_2 x_{q-1}^2+\alpha x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-3$
(7)	$\epsilon_{q-2}(x_{q-2}+\epsilon'_{q-1}x_{q-1})^2+\epsilon_{q-1}x_{q-1}^3+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	
(8)	$\epsilon_{q-2}x_{q-2}^3+\epsilon_{q-1}x_{q-1}^2+\epsilon'_{q-1}x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	
(9)	$x_q^3+\epsilon_{01}x_{q-1}x_q+\epsilon_{02}x_{q-2}x_q+\epsilon_{12}x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q+1}^n \epsilon_j x_j^2$	
(10)	$\sum_{j=1}^3 \delta_j x_{q-4+j}^2+\sum_{1\le i<j\le 3}\alpha_{ij}x_{q-4+i}x_{q-4+j}+\epsilon_0 x_{q-3}x_{q-2}x_{q-1}+\sum_{j=q}^n \epsilon_j x_j^2$	$q-4$

表 2: 不等号制約のみ（$r=0$）の場合の標準形．$\mathcal{K}[G]$-同値類は次で代表される：

$$\left(x_1,\dots,x_{q-1},\ \sum_{j=1}^{l_1}x_j-\sum_{j=l_1+1}^{l}x_j+\tilde{g}(x_{l+1},\dots,x_n)\right)$$

ただし $0\le l_1\le\lceil l/2\rceil$．表には $\tilde{g}$ のみを示す．$\epsilon_j,\delta_j\in\{1,-1\}$，$\alpha,\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$．(6)，(10) のパラメーターは次の条件をみたす：(6) では $4\delta_1\delta_2-\alpha^2\neq 0$，(10) では二次形式 $\sum_{j=1}^3\delta_j x_j^2+\sum_{1\le i<j\le 3}\alpha_{ij}x_ix_j$ に対応する 3×3 対称行列の主小行列式がすべて 0 でないこと，すなわち $4\delta_i\delta_j-\alpha_{ij}^2\neq 0$ $(1\le i<j\le 3)$ かつこの 3×3 行列の行列式が 0 でないこと（[15] の条件 $(*),(**)$）.

型	写像芽 $h(x)$	q
$(1,k)$	$x_1^k+\sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (2\le k\le 4)$	1
(2)	$x_2^3+x_1^2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	
$(3,k)$	$x_2^k+\epsilon_1x_1x_2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2 \quad (3\le k\le 4)$	
(4)	$\delta_1 x_1^2+\delta_2 x_2^2+\alpha x_1x_2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	2
(5)	$x_1^3+\epsilon_1x_2^2+\epsilon_2x_1x_2+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	
(6)	$(x_1+\epsilon_1x_2)^2+\epsilon_2x_2^3+\sum_{j=3}^n \epsilon_j x_j^2$	
(7)	$x_3^3+\epsilon_1x_2x_3+\epsilon_2x_3x_1+\epsilon_3x_1x_2+\sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$	
(8)	$\sum_{j=1}^3 \delta_j x_j^2+\sum_{1\le i<j\le 3}\alpha_{ij}x_ix_j+\epsilon_1x_1x_2x_3+\sum_{j=4}^n \epsilon_j x_j^2$	3

表 3: 等号制約と不等号制約を両方持つ（$q>0, r=1$）場合の標準形．$\mathcal{K}[G]$-同値類は $(x_1,\dots,x_q,h(x))$ で代表され，表には h のみを示す．$\epsilon_j,\delta_j\in\{1,-1\}$，$\alpha,\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$．(4)，(8) のパラメーターは，それぞれ表 2 の型 (6)，(10) と同じ条件をみたす.

- （Mangasarian–Fromovitz [22]）dh_0 が全射で，任意の $j \in I$ に対し $d(g_j)_0(d) < 0$ となる $d \in \operatorname{Ker} dh_0$ が存在するとき，(g,h) は **MFCQ** を満たすという．

ACQ と GCQ は，実行可能領域の接錐を用いて定義される．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $C^+(g,h)$，$L^+(g,h)$ を次で定める．

$$C^+(g,h) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} M(g,h) \text{ 内の点列 } \{x_l\} \text{ と正実数列 } \{t_l\} \text{ で} \\ x_l \to 0,\ t_l x_l \to d \text{ となるものが存在} \end{array} \right\},$$
$$L^+(g,h) = \{ d \in \operatorname{Ker} dh_0 \mid \text{任意の } j \in I \text{ に対し } d(g_j)_0(d) \le 0 \}.$$

$C^+(g,h)$ を $M(g,h)$ の**接錐**（Bouligand 接錐），$L^+(g,h)$ を**線型化錐**という．つねに $C^+(g,h) \subset L^+(g,h)$ が成立する．また $X \subset \mathbb{R}^n$ に対し，その**極錐**を $X^\circ = \{ v \mid \langle d, v \rangle \le 0 \ (\forall d \in X) \}$ とする．

- （Abadie [1]）$C^+(g,h) = L^+(g,h)$ が成立するとき，(g,h) は **ACQ** を満たすという．
- （Guignard [13]）$C^+(g,h)^\circ = L^+(g,h)^\circ$ が成立するとき，(g,h) は **GCQ** を満たすという．

これら四つの間には第 1 節で述べた含意，つまり

$$\text{LICQ} \implies \text{MFCQ} \implies \text{ACQ} \implies \text{GCQ}$$

が成立し，GCQ が最も弱い．単目的（$p = 1$）の場合，GCQ は局所最小解において KKT 条件が任意の目的関数に対し成立するための必要十分条件である（Gould–Tolle [12]）．含意が逆向きには一般に成立しないことを示す具体例は，先行研究においていくつか与えられてきた [25]．後で述べる判定結果（定理 5.5 とそれに続く考察）から，そのような例は分類表の中に系統的に現れることがわかる．

多目的のための p-WGCQ． 多目的（$p \ge 2$）の場合，第 1 節で述べた通り，GCQ では「局所弱 Pareto 解ならば KKT 点」を保証できない．Haeser–Ramos [14] は，これを保証する制約想定を，ある錐の包含関係として特徴づけた．$\overline{x} = 0$，$\Omega = M(g,h)$ とする．彼らはまず Ω の**正則 p-多目的法錐** $\widehat{N}(\Omega; p)$ を，次のように定義した（[14, Definition 3.1]）：

$$\widehat{N}(\Omega;p) = \left\{ V = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^{n \times p} \;\middle|\; \limsup_{x \to 0,\, x \in \Omega} \frac{\min_{1 \le \ell \le p} \langle v_\ell, x \rangle}{\|x\|} \le 0 \right\}.$$

$p = 1$ のときこれは古典的な（Fréchet）正則法錐に一致する．これは接錐を用いて次のように書き換えられる（[14, Theorem 3.1]）：

$$\widehat{N}(\Omega;p) = \left\{ V \;\middle|\; \min_{1 \le \ell \le p} \langle v_\ell, d \rangle \le 0 \ \ \forall d \in C^+(g,h) \right\}.$$

さらにこれから定まる錐

$$C(\Omega;p) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \min_{1 \le \ell \le p} \langle v_\ell, d \rangle \le 0 \ \ \forall V \in \widehat{N}(\Omega;p) \right\}$$

を考える．

定義 5.1 (Haeser–Ramos [14])**.** 包含 $L^+(g,h) \subset C(\Omega;p)$ が成立するとき，(g,h) は**弱 p-Guignard 制約想定**（p-WGCQ）を満たすという．

p-WGCQ は,「$\bar{x}$ が（p 個の目的関数 f の）局所弱 Pareto 解ならば弱 KKT 点である」が任意の C^1 級目的関数 f について成立することと同値である（[14, Theorem 4.1]）．$p=1$ では $C(\Omega;1) = C^+(g,h)^{\circ\circ}$ となり，包含条件は極錐をとると GCQ に一致する．すなわち p-WGCQ は GCQ の一般化であると言える．また，p-WGCQ は第 1 節で述べた単調性を満たす，つまり，制約関数芽 (g,h) は p-WGCQ を満たせば，$(p-1)$-WGCQ も満たす．特に，**閾値**

$$p_* = p_*(g,h) = \min\{p \geq 1 \mid (g,h) \text{ に対して } p\text{-WGCQ が成立しない}\} \in \{1,2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$$

を求めることが重要となる．弱 KKT に対するこの p-WGCQ と並行して，強 KKT 条件に対応する**強 p-Guignard 制約想定**（p-SGCQ）も同様に定義される（第 5.C 節で扱う）．

ここで説明した制約想定はいずれも $\mathcal{K}[G]$-同値と簡約化で不変である．

定理 5.2 ([16, Theorems 3.1, 3.2]，[17])**.** 制約関数芽 (g,h) が LICQ，MFCQ，ACQ，GCQ，p-WGCQ，および p-SGCQ のいずれかを満たすことと，(g,h) と $\mathcal{K}[G]$-同値な制約関数芽が同じ制約想定を満たすことは同値である．また (g,h) がこれらのいずれかを満たすことと，その簡約化が同じ制約想定を満たすことも同値である．

定理 5.2 と定理 4.1 より，一般的な制約族に現れる芽の制約想定を決定するには，表 1–3 の標準形について同じ問題を解けば十分である．

5.B. 古典的制約想定の成否と閾値 p_* の決定

四つの古典的制約想定のうち，LICQ と MFCQ は一次の情報のみで判定できる．まず LICQ については，定義より，表 1–3 の芽はいずれも LICQ を満たさない（制約関数芽が LICQ を満たすのは，完全簡約化が沈め込み芽となるときに限る）．MFCQ については次が成立する．

定理 5.3 ([16, Theorem 4.1])**.** 表 1，3 の芽はいずれも MFCQ を満たさない．表 2 の芽が MFCQ を満たすための必要十分条件は,（表 2 の注釈内の）標準形に現れるパラメーター l_1 が 0 でないことである．

以下の命題が示す通り，p-WGCQ（定義 5.1）に関する閾値 p_* を決定すれば，ACQ，GCQ の成否も決定できる．

命題 5.4 ([17])**.** 任意の制約関数芽 (g,h) に対し，

$$p_* = \infty \iff \text{ACQ が成立}, \qquad p_* = 1 \iff \text{GCQ が成立しない}.$$

前者についてはより強く，ACQ が成立しないことと $p_* \leq n$ は同値である．

命題 5.4 より，p_* を決定すれば ACQ，GCQ の成否も決まる．そこで p_* そのものを分類表のすべての芽に対して決定するのが，本研究の主結果の一つである．

定理 5.5 ([16, 17])**.** 表 1–3 の各標準形に対し，p-WGCQ の閾値 p_* は表 4–6 の通りである．

この定理から特に，**GCQ は満たすが，より強い制約想定（ACQ，MFCQ，LICQ）はいずれも満たさない**制約関数芽が，分類表の（つまり一般的な制約関数の）中に多数存在することになる（表 5 で $1 < p_* < \infty$ となる芽）．すなわち，GCQ と他の古典的制約想定との間の「隔たり」は，人為的，例外的な現象ではなく，一般的に現れるものであるといえる．

閾値 p_* の幾何的記述．閾値 p_* の値は主に二次形式の性質をみることにより決定される．その仕組みを述べる．まず [16] の結果より，表 1–3 の関数芽のうち GCQ を満たすものの接錐は，線型化錐を二次形式で制限した形

$$C^+(g,h) = L^+(g,h) \cap \{Q = 0\} \quad \text{または} \quad L^+(g,h) \cap \{Q \le 0\}$$

をしている．ここで Q は関係する成分の二次部分である．目的関数行列 $V = (v_1, \dots, v_p)$ に対し開錐 $\mathcal{P}(V) = \{d \mid \langle v_\ell, d\rangle > 0 \ \forall \ell\}$ を考えると，$\widehat{N}(\Omega; p)$ の特徴づけ（[14, Theorem 3.1]）より，p-WGCQ が成立しないことは，

$$\emptyset \neq L^+(g,h) \cap \mathcal{P}(V) \subset \{Q > 0\} \quad \text{または} \quad \subset \{Q < 0\}$$

となる p 列の V が存在することと同値である（$\cap\{Q \le 0\}$ 型のときは $\{Q > 0\}$ 側のみ）．そこで

$$p_+ = \min\{p \mid \exists V,\ \emptyset \neq L^+(g,h) \cap \mathcal{P}(V) \subset \{Q > 0\}\},$$
$$p_- = \min\{p \mid \exists V,\ \emptyset \neq L^+(g,h) \cap \mathcal{P}(V) \subset \{Q < 0\}\}$$

とおくと，上の同値性から直ちに，$\cap\{Q = 0\}$ 型のとき $p_* = \min(p_+, p_-)$，$\cap\{Q \le 0\}$ 型のとき $p_* = p_+$ が従う．すなわち p_* は，線型化錐の中から Q の符号を一定に保つ非空な部分を切り出すのに必要な半空間（目的関数）の最小個数である．この $p_\pm$ を（たとえば）Q の符号数で評価することで，Q が不定値であるとき以下の評価が得られる：$C^+(g,h) = L^+(g,h) \cap \{Q = 0\}$ のときは

$$\min(s_E, t_E) + 1 \le p_* \le \min(s,t) + 1$$

一方 $C^+(g,h) = L^+(g,h) \cap \{Q \le 0\}$ のときは

$$t_E + 1 \le p_* (= p_+) \le t + 1$$

となる．ここで $(s,t) = \mathrm{sig}(Q)$，$(s_E, t_E) = \mathrm{sig}(Q|_E)$，$E$ は線型化錐の線型部分，つまり $E = L^+(g,h) \cap (-L^+(g,h))$ である．この不等式の両側が一致しないときや，Q が定値であるときは別の議論が必要となるが，紙面の都合上，これ以上の詳細は省略する．

型	p_*
$(1,k)$	$k = 2$ のとき $\min(a_+ + 1, a_-) + 1$，　$k \ge 3$ のとき $\min(a_+, a_-) + 1$
(2)	$\min(a_+ + 1, a_-) + 1$

表 4: 表 1（等号制約のみ）の各芽の閾値 p_*．a_+, a_- は，標準形における自由な二乗項 $\sum_j \epsilon_j x_j^2$ に現れる ϵ_j のうち $+1$，-1 の個数.

5.C. 強 KKT のための制約想定

型	条件	p_*
$(1,k)$	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，または（$k \geq 3$ かつ $\epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = -1$）	∞
	その他	$t_E + 1$
(2)	$\epsilon_{q+2} = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	その他	$t_E + 1$
$(3,k)$	$\epsilon_{q-1} = \cdots = \epsilon_n = -1$，または（$k \geq 3$ かつ $\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$）	∞
	その他	$t_E + 1$
$(4,k)$	$\epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = +1$ かつ $\epsilon_q = (-1)^k$	1
	その他	$t_E + 2$
(5)	$\epsilon_{q-1} = \epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	その他	$t_E + 1$
(6)	$\delta_1 = \delta_2 = -1$，$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\alpha < 2$	∞
	$\delta_1 = \delta_2 = -1$，$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\alpha > 2$	$t_E + 2$
	その他	$t_E + 1$
(7)	$\epsilon_{q-2} = \epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	その他	$t_E + 1$
(8)	$\epsilon_{q-1} = \epsilon'_{q-1} = \epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$	∞
	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\epsilon_{q-1} = -1$，$\epsilon'_{q-1} = +1$	$t_E + 2$
	その他	$t_E + 1$
(9)	$\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = -1$ かつ $\epsilon_{q+1} = \cdots = \epsilon_n = +1$	1
	その他	$t_E + 2$
(10)	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$，$(\star)$	∞
	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$，$\max_{i<j} \alpha_{ij} \leq 2$，$(\star)$ を満たさない．	$t_E + 3$
	$\epsilon_q = \cdots = \epsilon_n = -1$，$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1$，$\max_{i<j} \alpha_{ij} > 2$	$t_E + 2$
	その他	$t_E + 1$

表 5: 表 2（不等号制約のみ）の各芽の閾値 p_*．MFCQ を満たさない場合（$l_1 = 0$）のみを考えていることに注意する（$l_1 \geq 1$ のときは MFCQ が成立し $p_* = \infty$）．Q は $\tilde{g}$ の二次部分，$E = \mathrm{span}(e_q, \ldots, e_n)$，$(s_E, t_E) = \mathrm{sig}(Q|_E)$ である．型 (10) の（$p_* = \infty$ となる）条件 $(\star)$ は，$B = \sum_{j=1}^{3} -a_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_{ij} a_i a_j$ に対し $a \geq 0$ なる任意の $a \in \mathbb{R}^3$ で $-B(a) \geq 0$ となること（$-B$ の $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ 上での共正値性，copositivity）である．これと等価な α_{ij} に関する明示的な不等式条件，および両者の同値性は [16, Proposition 4.37] で与えられている．

型	条件	p_*
$(1,k)$，(2)，(4)，(5)，(6)，(8)	（無条件）	$\min(a_+, a_-) + 1$
$(3,k)$	k が偶数で $a_- \geq 1$，または k が奇数で（$\epsilon_1 = +1$ または $\min(a_+, a_-) \geq 1$）	$\min(a_+, a_-) + 2$
	その他	1
(7)	$\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ かつ $\min(a_+, a_-) = 0$	1
	その他	$\min(a_+, a_-) + 2$

表 6: 表 3（混合型）の各芽の閾値 p_*．a_+, a_- は，標準形における自由な二乗項 $\sum_j \epsilon_j x_j^2$ に現れる ϵ_j のうち $+1$，-1 の個数．

第 5.A 節で触れた p-SGCQ（強 KKT 条件に対応する強 p-Guignard 制約想定）について述べる．これは，p-WGCQ の定義（定義 5.1）における錐 $C(\Omega;p)$ を，以下の**強錐** $C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)$ に置き換えて得られる．$V=(v_1,\dots,v_p)\in\widehat{N}(\Omega;p)$ と $d\in\mathbb{R}^n$ に対し，

$$\min_{1\le\ell\le p}\langle v_\ell,d\rangle<0,\quad \text{または}\quad \langle v_\ell,d\rangle=0\ (\forall\ell)$$

が成り立つとき，d は ***V*-許容的**であるという．これを用いて

$$C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)=\left\{d\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;\text{任意の } V\in\widehat{N}(\Omega;p)\text{ に対し } d\text{ は } V\text{-許容的}\right\}$$

とおく．p-WGCQ が $\min_\ell\langle v_\ell,d\rangle\le 0$ のみを要求するのに対し，強錐では，この最小値が 0 となってかつある $\langle v_\ell,d\rangle$ が正となる境界の場合を除いており，つねに $C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)\subset C(\Omega;p)$ である．

定義 5.6 (Haeser–Ramos [14])**.** 包含 $L^+(g,h)\subset C^{\mathrm{S}}(\Omega;p)$ が成立するとき，(g,h) は**強 *p*-Guignard 制約想定**（p-SGCQ）を満たすという．

p-SGCQ は,「$\overline{x}$ が局所弱 Pareto 解ならば**強** KKT 点である」が任意の C^1 級 p 目的関数 f について成立することと同値である（[14, Theorem 4.2]）．$p=1$ では $C^{\mathrm{S}}(\Omega;1)=C(\Omega;1)$ となり 1-SGCQ は GCQ に一致するが，$p\ge 2$ では p-WGCQ より著しく強い．

定理 5.7 ([17])**.** $p\ge 2$ のとき，$(\overline{x},\Omega)$ が p-SGCQ を満たすための必要十分条件は $L^+(g,h)=\{0\}$ となることである．特に分類表 1–3 のすべての芽は，$p\ge 2$ において p-SGCQ を満たさない（これらの芽ではつねに $L^+(g,h)\neq\{0\}$ である）．

6. 認識問題と分岐

最後に，認識問題に関する現在進行中の研究 [18] に簡単に触れる．第 5 節で述べた制約想定の判定を，与えられた具体的な制約に適用するには，その芽が分類表のどの標準形と $\mathcal{K}[G]$-同値かを，計算可能な不変量によって判定する必要がある．これを**認識問題**と呼ぶ．

認識問題の完全な解決に向けて，一次の不変量の導入，それによる余核の自然な向きの定義，および高余次元の型を扱うためのベクトル場の芽に関する条件の導入を行っている．これらはいずれも $\mathcal{K}[G]$-同値および簡約化で不変である．さらに，$\mathcal{K}[G]$-不変となるよう拡張した内在的微分（[15] 参照）とその符号数を用いる．ここで内在的微分は，制約芽の余核に値をとる対称双線形形式であり，余核の向きを定めれば実二次形式とみなせる．一次の不変量から定まる自然な向きのもと，その符号数も $\mathcal{K}[G]$-同値および簡約化で不変となる．

これらの不変量と条件を組み合わせることにより，分類表に現れる制約関数芽のうち，表 2 の (10) 型，および表 3 の (8) 型以外については，制約関数から認識するための判定条件を具体的に導くことができている．この研究は，本稿で述べた分類と制約想定の判定を，具体的な最適化問題の解析へ応用するための基盤を与えると期待される．

参考文献

[1] J. M. Abadie, *On the Kuhn–Tucker theorem*, in: Nonlinear Programming, John Wiley, 1967, 21–36.

[2] R. K. Arora, *Optimization: Algorithms and Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2015.

[3] S. P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2014.

[4] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$*, Mem. Amer. Math. Soc. **50** (1984), no. 306.

[5] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming 1: Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 1997.

[6] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming 2: Theory and Extensions*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2003.

[7] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, E. Zitzler, *Scalable multi-objective optimization test problems*, in: Proc. 2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC 2002), vol. 1, IEEE, 2002, 825–830.

[8] A. E. Eiben, J. E. Smith, *Introduction to Evolutionary Computing*, 2nd ed., Springer, 2015.

[9] J.-J. Gervais, *Sufficiency of jets*, Pacific J. Math. **72** (1977), 419–422.

[10] J.-J. Gervais, *G-stability of mappings and stability of bifurcation diagrams*, J. London Math. Soc. (2) **25** (1982), 551–563.

[11] J.-J. Gervais, *Déformations G-verselles et G-stables*, Canad. J. Math. **36** (1984), 9–21.

[12] F. J. Gould, J. W. Tolle, *A necessary and sufficient qualification for constrained optimization*, SIAM J. Appl. Math. **20** (1971), 164–172.

[13] M. Guignard, *Generalized Kuhn–Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space*, SIAM J. Control **7** (1969), 232–241.

[14] G. Haeser, A. Ramos, *Constraint qualifications for Karush–Kuhn–Tucker conditions in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl. **187** (2020), 469–487.

[15] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Characterization of generic parameter families of constraint mappings in optimization*, J. Singul. **28** (2025), 104–147.

[16] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Constraint qualification for generic parameter families of constraints in optimization*, preprint, arXiv:2510.02381v1.

[17] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Multiobjective constraint qualifications for generic constraint map-germs*, in preparation.

[18] N. Hamada, K. Hayano, H. Teramoto, *Recognition and bifurcation of constraints in optimization*, in preparation.

[19] H. Ishibuchi, L. He, K. Shang, *Regular Pareto front shape is not realistic*, in: 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2019.

[20] S. Izumiya, M. Takahashi and H. Teramoto, *Geometric equivalence among smooth section germs of vector bundles with respect to structure groups*, in preparation.

[21] H. Jain, K. Deb, *An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, Part II*, IEEE Trans. Evol. Comput. **18** (2014), 602–622.

[22] O. L. Mangasarian, S. Fromovitz, *The Fritz John necessary optimality condition in the presence of equality and inequality constraints*, J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 37–47.

[23] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined map-germs*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 279–308.

[24] Y. Nesterov. *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 edition, 2014.

[25] D. W. Peterson, *A review of constraint qualifications in finite-dimensional spaces*, SIAM Review **15** (1973), 639–654.

[26] B. Shahriari, K. Swersky, Z. Wang, R. P. Adams, N. de Freitas, *Taking the human out of the loop: a review of Bayesian optimization*, Proc. IEEE **104** (2016), 148–175.

[27] J.-C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer, 1972.