

複素曲面特異点リンクにまつわるはめ込みとそのトポロジー

田邊 真郷（北海道大学大学院理学院数学専攻，JSPS 特別研究員 DC2）*

1 はじめに

多様体のはめ込みに関する大域的研究の発端は，Whitney が多様体の現代的な定義を与えると同時に発表したはめ込み・埋め込み定理 [Whi36] だと思われる．これによって多様体のはめ込み可能性の研究が隆盛したが，一方で分類問題も大きな興味の対象であった．Whitney–Graustein は正則閉曲線を回転数によって分類し [Whi37]，それを包括する形で，Smale, Hirsch ははめ込みの分類問題をホモトピー論に帰着した [Sma59a, Sma59b, Hir59]．彼らの理論は今日でいう h -原理の源泉でもある．その後も多くの研究者たちによって，分類の完全不変量やその計算公式などが与えられた．今世紀からは，可微分写像の特異点論の観点から不変量の新解釈が与えられたり，それによって具体的なはめ込みの構成・不変量の計算も行われたりと，目覚ましい発展を見せている [ES03, SST02, ET11, Kin15]．以上の事例から，はめ込みのトポロジーは写像のトポロジーの中心的テーマの一つとして，幾何学の発展と共に深く研究されてきたと言える．

複素特異点のトポロジーに関する研究もまた深い歴史を持つ．1928 年，Brauner によって複素平面曲線の Brieskorn 特異点とトーラス結び目の間の関係が発見されて以降，Mumford, Milnor, Brieskorn をはじめとする多くの研究者たちによって，特異点とトポロジーの関わりが明らかにされてきた [Bra28, Mil68]．なかでもリンク・Milnor ファイバーは，特異点の性格を象徴する重要な多様体として有名である．これらは Poincaré のホモロジー 3 次元球面やエキゾチック球面といった（微分）トポロジーの研究においても重要な対象を例に持つほか，接触幾何・シンプレクティック幾何・複素幾何の観点からも，束化定理やそれに付随する開本構造を通じて研究されてきた．

本稿で紹介する筆者の研究は，これら二つの潮流の交叉点に位置づけられる．本稿の構成は以下の通りである．まず，はめ込みおよび特異点リンクの概要を筆者の知識が及ぶ範囲で振り返る．その後，筆者が特異点リンクをはめ込みの観点から研究して得られた結果を紹介する．最後に，今後の展望についても少し述べる．詳細は [Tan25a, Tan25b] やその参考文献を参照されたい．なお，特に断らない限り，多様体や写像はすべて C^∞ 級とする．

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 西 8 北海道大学大学院理学院数学専攻
メールアドレス: tanabe.masato.i8@elms.hokudai.ac.jp または tanabemasatono34@gmail.com
HP: <https://sites.google.com/view/masatotanabe>
本研究は科研費（課題番号: 25KJ0480）の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: 32S25 (primary), 53D15, 57R42 (secondary)
キーワード: はめ込み, 複素特異点, 単純特異点, 概接触構造, 複素接触

2 はめ込みのトポロジー

埋め込み・はめ込みの理論を詳説した和書として [足立 84] がある．最近出版された [田中 25] でも，古典から今日に至るまでの豊富な話題が紹介されている．

2.1 Smale–Hirsch 理論

多様体 M, N 間の写像 $f: M \rightarrow N$ が**はめ込み**であるとは，任意の点 $x \in M$ における微分 $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射であることをいう．はめ込みを $f: M \looparrowright N$ と表す．

M の N へのはめ込み全体が成す空間に C^∞ 位相が備わったものを $\text{Imm}(M, N)$ と書き， $\text{Imm}[M, N] := \pi_0(\text{Imm}(M, N))$ と置く．二つのはめ込み $f, g: M \looparrowright N$ が $\text{Imm}[M, N]$ において同じ元を定めるとき， f と g は**正則ホモトピック**であるという．

はめ込みの分類問題とは，集合 $\text{Imm}[M, N]$ の研究である．分類問題のはじまりに相当する業績は以下の四つであろう．一つ目は Whitney–Graustein の定理である．

定理 2.1 ([Whi37]). 正則閉曲線に対してその回転数を与える写像は， $\text{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2]$ から $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ への全単射を引き起こす．

この定理は，正則ホモトピック性という（単なるホモトピック性よりも）デリケートな概念が，微分写像の単なるホモトピック性に帰着できるという，大きな示唆を含んでいた．その精神を汲んで，Smale は以下の事実を発見した． \mathbb{R}^n における一次独立な k 本のベクトルの組全体が成す空間（**Stiefel 多様体**）を $V_{n,k}$ と表す．

定理 2.2 ([Sma59a]). $\text{Imm}[S^2, \mathbb{R}^n]$ からホモトピー群 $\pi_2(V_{n,2})$ への全単射が存在する．

系 2.3 (球面の裏返し). $\text{Imm}[S^2, \mathbb{R}^3]$ は一点集合である．特に，標準的な埋め込み $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ について， ι と $-\iota$ ははめ込みとして正則ホモトピックである．

第三の結果も Smale による．彼は上の結果から程なくして，任意次元の球面の Euclid 空間へのはめ込みの分類を，**Smale 不変量** Ω という完全不変量の構成によって達成した． $\text{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n]$ に，はめ込みの連結和で群構造を備える．

定理 2.4 ([Sma59b]). $n > k + 1$ ならば， $\Omega: \text{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n] \rightarrow \pi_k(V_{n,k})$ は群同型である．

例 2.5. Smale 不変量 $\Omega: \text{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ は「回転数引く 1」によって与えられる．また， $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \pi_3(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり^{*1}， $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^5] \cong \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathbb{Z}$ である．

^{*1} この場合 ($n = k + 1$) は定理の仮定を充たさず，正則ホモトピーの基点に関する問題を考える必要がある．しかし， $\pi_1(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z}_2$ の $\pi_3(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ への作用が自明なこと，したがって $\pi_3(V_{4,3})$ は $[S^3, V_{4,3}]$ に全単射であることから，結果としては問題ない．

そして、第四の結果は Hirsch によって与えられた。少しだけ用語を準備する。

定義 2.6. 連続な束準同型 $F: TM \rightarrow TN$ が**形式的なはめ込み**であるとは、任意の点 $x \in M$ において、線型写像 $F_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射であることをいう。

M の N への形式的なはめ込み全体が成す空間にコンパクト開位相が備わったものを $\text{Mon}(M, N)$ と書き、 $\text{Mon}[M, N] := \pi_0(\text{Mon}(M, N))$ と置く。Hirsch の定理を述べよう。

定理 2.7 ([Hir59]). 微分写像 $\text{Imm}(M, N) \rightarrow \text{Mon}(M, N)$; $f \mapsto df$ は弱ホモトピー同値である。特に、 $\text{Imm}[M, N] \rightarrow \text{Mon}[M, N]$ は全単射である。

$\text{Mon}[M, N]$ は $\text{Imm}[M, N]$ よりも格段に扱いやすい。というのも、形式的なはめ込みにおいて、ファイバー方向の振舞いは底空間方向を尊重する必要がないからである。

例 2.8. M を平行化可能多様体（つまり、接束 TM が自明である）とする。このとき、二つの自明化 $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を固定すれば、全単射

$$\text{Imm}[M, \mathbb{R}^n] = \text{Mon}[M, \mathbb{R}^n] = [M, \mathbb{R}^n \times V_{n,m}] = [M, V_{n,m}]$$

を得る。ただし、 $[X, Y]$ は連続写像のホモトピー集合を表す。

このように、はめ込みの分類理論は「微分写像のホモトピー論」へと厳密に帰着された。今日では、彼らの業績はまとめて **Smale–Hirsch 理論**と呼ばれている。

2.2 特異 Seifert 膜の方法論

Smale 不変量や、Hirsch の結果を具体的状況下で適用しようとする、現れる不変量の解釈や計算可能性に関する問題が立ち上がる。Ekholm–Szűcs は、 $S^{4m-1} \looparrowright \mathbb{R}^{4m+1}$ の Smale 不変量に対する新解釈を与えた。そこには、可微分写像の特異点論における Thom 多項式理論が応用された。

定理 2.9 ([ES03], $m = 1$ 版). はめ込み $f: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して、 S^3 を境界に持つ有向コンパクト 4 次元多様体 X^4 および然るべき条件を充たす拡張写像 $\hat{f}: X^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ をとる。このとき、 f の Smale 不変量は

$$\Omega(f) = \frac{3}{2}\sigma(X^4) + \frac{1}{2}\#\Sigma^{1,1}(\hat{f}) \in \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathbb{Z}$$

により与えられる。ただし、 $\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数、 $\#\Sigma^{1,1}(\hat{f})$ は \hat{f} の上に現れる $\Sigma^{1,1}$ 型特異点の代数的数え上げである。

上記のような \hat{f} を、結び目理論の術語に倣って f の**特異 Seifert 膜**という。この概念は他幾つかの状況にも応用され、はめ込みの不変量に新解釈を与えてきた [SST02, ET11]。

3 特異点リンク

$h: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を、原点に孤立特異点を持つ複素正則函数芽とする。このとき、曲面 $(h^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ は原点に孤立特異点を持つ。これを $(\mathbb{C}^3$ 内の) **複素曲面特異点** という。複素曲面特異点については、最近出版された入門書 [都丸・奥間 25] も参照されたい。

定理-定義 3.1 ([Mil68]). 充分小さな正数 ε に対して $K = K_\varepsilon := h^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^5$ は有向閉 3 次元多様体を成す。これを h の **リンク** という。さらに、上記の ε に依存して充分小さな正数 δ に対し、偏角写像および制限

$$h/|h|: S_\varepsilon^5 - K_\varepsilon \rightarrow S^1, \quad h|_{h^{-1}(S_\delta^1) \cap \text{Int } B_\varepsilon^6}: h^{-1}(S_\delta^1) \cap \text{Int } B_\varepsilon^6 \rightarrow S_\delta^1$$

は局所自明なファイブレーションであり、互いに同型である。そして、 $h/|h|$ のファイバーの閉包 $F = F_{\varepsilon, \delta}$ は K を境界に持つ有向コンパクト 4 次元多様体を成す。これを h の **Milnor ファイバー** という。

注意 3.2. 上述の同型を通じて、 F は境界付き複素曲面 $h^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon^6$ と見做せる。

Arnol'd は、複素函数芽 $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対してモダリティと呼ばれる概念を導入し、高々 2 のモダリティを持つ函数芽の完全な分類を与えた [Arn72, Arn73, Arn76] ([AGV85] も参照)。なかでも、モダリティ 0 の特異点を **単純特異点** といい、函数芽が 3 変数の場合には以下のように分類される [Arn72]:

- A_{n-1} ($n \geq 2$): $x^2 + y^2 + z^n$
- D_{n+2} ($n \geq 2$): $x^2 + y^2z + z^{n+1}$
- E_6 : $x^2 + y^3 + z^4$, E_7 : $x^2 + y^3 + yz^3$, E_8 : $x^2 + y^3 + z^5$

単純特異点は、正多面体や単純 Lie 代数といった数学の重要なトピックと深く関連している。このことから、**Klein 特異点**, **du Val 特異点**, **有理二重特異点** といった別名を持つ。

以下では、単純特異点から定まるリンク (**単純特異点リンク**) が持つ幾何構造を紹介する。

3.1 軌道空間としての単純特異点リンク

Arnol'd の分類よりもずっと昔、Klein は $\text{SU}(2)$ の有限部分群を分類し、それらが以下のように単純特異点 (と後に呼ばれたクラスの特異点) と対応することを示した [Kle56].

- A_{n-1} ($n \geq 2$): 位数 n の巡回群 C_n
- D_{n+2} ($n \geq 2$): 位数 $4n$ の二項二面体群 Dic_n
- E_6 : 二項四面体群 $2T$, E_7 : 二項八面体群 $2O$, E_8 : 二項十二面体群 $2I$

$\Gamma \subset \text{SU}(2)$ を上記の群の一つとする。 Γ は \mathbb{C}^2 に左から作用し、商特異点 $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ を定める。Klein は $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ が \mathbb{C}^3 内の複素曲面の特異点として実現されることを示した。そして、ここ

に現れる曲面の定義方程式が、対応する単純特異点のそれであった。このとき、軌道空間 $\Gamma \backslash S^3$ は、対応する特異点のリンク K に微分同相となることに注意する（言い換えれば、リンク K は S^3 からの普遍被覆 $p: S^3 \rightarrow K$ であって被覆変換群が Γ なるものを許容する）。

3.2 鉛管多様体としての単純特異点リンク

単純特異点のブローアップによる極小特異点解消に対して、重み付きグラフ G を「例外曲線ごとに頂点（重みは自己交叉数）を置き、例外曲線の交わりごとに辺を結ぶ」ことで構成する。このとき、件の特異点解消およびリンクは、 G を台グラフとするような鉛管 4 (resp. 3) 次元多様体 $X(G)$ (resp. $M(G)$) に微分同相となる。さらに、得られるグラフ G は、以下に示す **Dynkin 図形** と一致する。

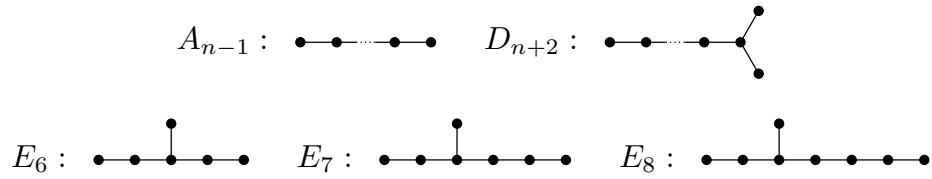


図1 A-D-E 型の Dynkin 図形（頂点数は添字と一致する。頂点は重み -2 ）

単純特異点に限っては、その Milnor ファイバー F も $X(G)$ に微分同相となる [Bri66, Bri68, Bri70] ([OO05] も参照)。ただし、極小特異点解消と Milnor ファイバーそれぞれが許容する自然な複素構造は対極にある。実際、極小特異点解消は例外曲線たちを複素部分多様体として持つ一方、複素曲面としての F は \mathbb{C}^3 の複素部分多様体なので、コンパクトで境界のない複素部分多様体を持たない。

4 動機

本研究は、以下二つの独立した先行研究に動機付けられて始まった。

一つ目の研究は Némethi–Pintér による [NP15]。彼らは、 $(\mathbb{C}^2, 0)$ からのパラメタづけを持つような \mathbb{C}^3 内の曲面孤立特異点に対し、以下の手続きではめ込みを得た。特異点のパラメタづけを $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ と置く。 \mathbb{C}^3 内で原点を中心とする充分小さな球面 S_ϵ^5 をとり、逆像 $\mathcal{G} := \Phi^{-1}(S_\epsilon^5)$ を考える。 \mathcal{G} は S^3 に微分同相であることから、はめ込み $\Phi|_{\mathcal{G}}: S^3 \hookrightarrow S_\epsilon^5 - \{1\text{pt.}\} = \mathbb{R}^5$ が得られる。彼らの主結果は、 Φ が持つ複素特異点の重複度と $\Phi|_{\mathcal{G}}$ の Smale 不変量に関係づける公式であったが、その具体例として以下を述べている。

定理 4.1 ([NP15]). 単純特異点とそのパラメタづけ $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\Gamma \setminus \mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ に対し, 誘導されるはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}}) \in \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}}) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}); \\ -167 & (E_6 \text{ の場合}); \\ -383 & (E_7 \text{ の場合}); \\ -1079 & (E_8 \text{ の場合}). \end{cases}$$

ここで, 上記のはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}$ は

$$\Phi|_{\mathfrak{S}} = f \circ p: S^3 \rightarrow \Gamma \setminus S^3 \cong K \hookrightarrow \mathbb{R}^5$$

と分解されることに注意しておく. ただし, p はリンク上の普遍被覆を, f はリンクの $S^5 - \{1\text{pt.}\} = \mathbb{R}^5$ への包含写像を表す.

二つ目の研究は, Kinjo による, 単純特異点リンクを通じた非自明なはめ込みの構成およびその Smale 不変量の計算である [Kin15]. Kinjo は, 単純特異点リンクの鉛管構造に注目し, 以下のようにはめ込みを構成した. まず, はめ込み $w: S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$ であって, 正の自己交叉を唯一つだけ持つようなもの (Whitney の球面) を考える. この法 Euler 数は -2 であるため, 法束は余接束 T^*S^2 に同型である. 法束の円盤化・円周化をそれぞれ

$$\hat{g}_{A_1}: DT^*S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_{A_1}: UT^*S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$$

と置こう. $DT^*S^2 = X(A_1)$ および $UT^*S^2 = M(A_1)$ に注意 (記号は 3.2 節を参照) すれば, A_1 型リンクの \mathbb{R}^4 へのはめ込みが得られたことになる. あとはこれをはめ込みごと鉛管工事することで, 任意の A - D - E 型 Dynkin 図形 G に対して, はめ込み

$$\hat{g}_G: X(G) \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_G: M(G) \looparrowright \mathbb{R}^4$$

が得られる. Kinjo は, g_G を普遍被覆 $p: S^3 \rightarrow M(G)$ で引き戻すことによって, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ を得た. そして, A 型および D 型に対して, 以下の結果を得た.

定理 4.2 ([Kin15]). A 型および D 型の単純特異点, および対応する Dynkin 図形 G を考える. このとき, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}). \end{cases}$$

注意が二点ある. 一点目に, Kinjo の結果は $M(G)$ の向きを裏返したものに対する計算であって, 上記の結果はそれを裏返し直したものである. 二点目に, Kinjo の手法は E 型に応用可能ではなかった. というのも, Smale 不変量の計算は, 2.2 節で紹介した特異 Seifert 膜の技巧的な構成に依拠していたためである. (膜上の特異点の数え上げには Ekholm–Takase の公式 [ET11] が用いられた.)

上記二つの研究は、それぞれ異なる動機から始まり、手法も別物であったにも拘らず、ある関係を持っていた。 $j: \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ で標準的な包含写像を表す。

系 4.3. A 型・ D 型の単純特異点、および対応する Dynkin 図形 G を考える。このとき、はめ込み $j \circ g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(j \circ g_G \circ p) \in \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(j \circ g_G \circ p) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}). \end{cases}$$

この事実、定理 3.1, そして Smale 不変量が正則ホモトピー分類の完全不変量であることから、 A 型と D 型の場合には、二つのはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}} = f \circ p$ と $j \circ g_G \circ p$ は正則ホモトピックであることが分かる。この現象は既に [NP15, Kin15] 両者から指摘されていたが、幾何学的な理由は調べられていなかった。すると、以下の問いが立ち上がる。

(Q1) E 型に対しても g_G の Smale 不変量が求められるか？

(Q2) そもそも f と $j \circ g_G$ が正則ホモトピックなのではないか？

筆者はこれらを肯定的に解決した。その説明のために、以下で有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類について振り返る。

5 有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類

M^3 を有向連結閉 3 次元多様体とする。 M^3 は平行化可能だから、例 2.8 により全単射

$$\text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5] = [M^3, V_{5,3}]$$

を得る。Wu は [Wu64] において、右辺のホモトピー集合を解析し、 M^3 の \mathbb{R}^5 へのはめ込みに対する完全不変量を得た。これは二つの不変量から成る。一つ目は M^3 の 2-骨格上で定まる **Wu 不変量**、二つ目は Smale 不変量の類似に相当する **Smale 型不変量** である。ただし、Wu が与えた Smale 型不変量の表式は具体的計算に向かなかった。これを改善したのが Saeki–Szűcs–Takase [SST02] (はめ込みの法束が自明な場合。後述する) および Juhász [Juh05] (一般の場合。割愛する) であった。

定義 5.1 (Wu 不変量). 平行化 $\tau: TM^3 \rightarrow M^3 \times \mathbb{R}^3$ を固定する。はめ込み $f: M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して、その微分の τ (および \mathbb{R}^5 の標準的な平行化) に沿った行列表現を $df^\tau: M^3 \rightarrow V_{5,3}$ と置く。また、生成元 $\Sigma \in H^2(V_{5,3}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を、有向円周束 $SO(5) \rightarrow SO(5)/SO(2) \cong V_{5,3}$ の Euler 類が 2Σ となるように選ぶ。このとき、引き戻し

$$c_\tau(f) := (df^\tau)^*(\Sigma) \in H^2(M^3; \mathbb{Z})$$

を f の τ に関する **Wu 不変量** という。

注意 5.2. 生成元 Σ の選び方から, Wu 不変量の 2 倍は f の法 Euler 類となる. しかし, Wu 不変量自体の値は, M^3 の平行化の選び方に依存して切り替わる [Tan25a, Appendix]. このため, Wu 不変量の計算では, そもそも平行化をどのように選ぶかが重要となる.

定理-定義 5.3 (Smale 型不変量 [SST02]). 法束が自明なはめ込み $f: M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して, M^3 を境界に持つ有向コンパクト 4 次元多様体 X^4 および f の特異 Seifert 膜 $\hat{f}: X^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ をとる. このとき, 整数値

$$i(f) := \frac{3}{2}(\sigma(X^4) - \alpha(M^3)) + \frac{1}{2}\#\Sigma^{1,1}(\hat{f}) \in \mathbb{Z}$$

が f の正則ホモトピー類のみによって定まる. これを f の **Smale 型不変量** という. ただし, $\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数, $\alpha(M^3) := \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Tor } H_1(M^3; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, $\#\Sigma^{1,1}(\hat{f})$ は \hat{f} に現れる $\Sigma^{1,1}$ 型特異点の代数的数え上げである (\hat{f} がはめ込みならば $\#\Sigma^{1,1}(\hat{f}) = 0$).

この下で, [SST02] は以下を示した. 法束が自明なはめ込み $M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の正則ホモトピー類全体が成す集合を $\text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0$ と書き, $\Gamma_2(0) := \{C \in H^2(M^3; \mathbb{Z}) \mid 2C = 0\}$ と置く.

定理 5.4 ([Wu64, SST02]). 対応 $(c_\tau, i): \text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0 \rightarrow \Gamma_2(0) \times \mathbb{Z}$ は全単射である.

6 主結果

問題 (Q1), (Q2) において注目していた包含写像 $f: K \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ とはめ込み $j \circ g_G: M(G) \looparrowright \mathbb{R}^5$ の定義域は, それぞれリンク K と鉛管多様体 $M(G)$ であり, ある微分同相によって同一視できる. 微分同相を固定すれば, f と $j \circ g_G$ の正則ホモトピック性を問うことに意味がある. しかもそれは, 定理 5.4 から, Wu 不変量と Smale 型不変量の比較によって判定できる. 筆者はこの方針に基づき, 問題 (Q2) を肯定的に解決した. 主定理は以下の通りである.

定理 6.1 ([Tan25a]). 任意の単純特異点を考え, そのリンクを K , Milnor ファイバーを F , 対応する Dynkin 図形を G とする. K の平行化 $\tau: TK \rightarrow K \times \mathbb{R}^3$ を, K 上の標準接触構造に沿って固定する (後述). このとき,

$$(c_\tau(f), i(f)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(F) - \alpha(K))\right), \quad (1)$$

$$(c_\tau(j \circ g_G), i(j \circ g_G)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(X(G)) - \alpha(M(G)))\right). \quad (2)$$

したがって, f と $j \circ g_G$ は正則ホモトピックである.

証明の要点を述べる. Smale 型不変量 i の方は, Milnor ファイバーが (特異点のない) 特異 Seifert 膜として選べるため, 容易に計算できる. 主定理の新規性は, Wu 不変量の特定 — 適切な平行化を選び取り, その下で Wu 不変量の消滅を示したこと — にある.

(1) における f の Wu 不変量の消滅は, K が \mathbb{R}^5 の (概) 接触部分多様体になっていることに由来する. Kasuya [Kas16] の結果により, この接触構造を 2-平面場として自明化できるため, それに沿って K を平行化できる. 筆者はこの結果を, Wu 不変量の棲み処を $V_{5,3} \cong \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(2)$ から接触要素のモジュライである $\mathrm{SO}(5)/\mathrm{U}(2)$ に移すことで得た.

(2) における $j \circ g_G$ の Wu 不変量の消滅は, g_G の構成に用いた w たちが $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ への総実なはめ込みに正則ホモトピックであること, したがって, $M(G)$ 上の (概) 接触構造が g_G によって \mathbb{C}^2 へはめ込まれると複素接触することに由来する. この変形は, g_G および \mathbb{C}^2 が $X(G)$ 上に誘導する複素構造と Milnor ファイバー上の複素構造とが, 概複素構造として同一視できることを見据えたものである. これは, $M(G)$ 上に誘導する概接触構造と K 上の標準接触構造との, 概接触構造としての同一視をも引き起こす. 筆者は複素接触と Wu 不変量の関係を, $V_{5,3} \cong \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(2)$ の中にある $\mathrm{SO}(4) \supset \mathrm{U}(2)$ に着目して得た.

最後に, 上記の正則ホモトピック性を利用することで, 筆者は問題 (Q1) を肯定的に解決した. さらに, [Kin15] により既知であった A, D 型の計算結果を再証明することにも成功した. 証明は Gergő Pintér 氏 (ブダペスト工科経済大学) との議論に基づく.

定理 6.2 ([Tan25a]). 任意の単純特異点, および対応する Dynkin 図形 G を考える. このとき, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}); \\ (-169, 1) & (E_6 \text{ の場合}); \\ (-385, 1) & (E_7 \text{ の場合}); \\ (-1081, 1) & (E_8 \text{ の場合}). \end{cases}$$

証明には, 今回の主結果である定理 3.1, [NP15] の定理 3.10, そして $g_G \circ p$ の法写像度の計算のみを用いる. これは, Kinjo による特異 Seifert 膜の技巧的構成とは大きく異なる.

定理 6.1(1) について補足する. 実は, この結果は, 任意の孤立特異点リンクに対して成立する. このことと, 有向閉 3 次元多様体上の Milnor 充填可能な正接触構造が向きを保つ接触微分同相を除いて一意であること [CNP06] から以下が従う.

系 6.3 ([Tan25a]). K_i を \mathbb{C}^3 内の孤立特異点リンク, $f_i: K_i \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ をその包含写像とする ($i = 1, 2$). このとき, f_1, f_2 が (向きを保つ接触微分同相を除いて) 正則ホモトピックである必要十分条件は, K_1, K_2 が有向多様体として微分同相であって, かつ Milnor ファイバー F_1, F_2 の符号数が等しいことである.

例 6.4. Brieskorn 特異点 $x^2 + y^9 + z^{18}$, $x^3 + y^5 + z^{15}$ から定まるリンクたちは有向多様体として微分同相である [Mil75]. しかし, 付随する Milnor ファイバーの符号数はそれぞれ $-80, -64$ である. よって, それぞれのリンクの包含写像は互いに正則ホモトピックでない.

7 今後の展望

本研究を踏まえて、新たに立ち上がった問題を幾つか述べる。

問題 7.1. リンクの \mathbb{R}^5 へのはめ込みであって、(標準接触構造に関する) Wu 不変量が非自明であるようなものを構成せよ。例えば A_1 型リンク ($\cong \mathbb{R}P^3 \cong \mathrm{SO}(3)$) の場合はどうか。

また、以下は Gergő Pintér 氏によって指摘された。

問題 7.2. 定理 6.2 において、Smale 不変量の第 2 成分 $b(g_G \circ p)$ が揃う理由は何か。

筆者の証明において、 $b(g_G \circ p)$ の計算は間接的であった。この問いに答えるには、 $b: \mathrm{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \rightarrow \pi_3(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}$ に対して新たな解釈を与える必要があると考えている。

最後に、高次元においても、リンクの包含写像の正則ホモトピー類を調べることは意義があると思われる (例えば, [KNS14] では 5 次元の A 型リンクが扱われている)。そのためには, [Wu64, SST02] のように、まずははめ込みの分類・不変量の構成から始める必要がある。この営みにおいて、特異 Seifert 膜の方法論が有効ではないかと筆者は期待している。

謝辞

本集会「第 72 回トポロジーシンポジウム」にご招待くださいました世話人の小須田雅先生、中村拓司先生、佐藤進先生、逆井卓也先生に、心より御礼申し上げます。講演におきましてご質問・コメントを下さった皆様にも、この場を借りて御礼申し上げます。特に本稿の話題について、函数芽の特異点分類の歴史について大本亨先生より、接触構造の向きに関する条件について三松佳彦先生より、金城就実氏の研究について境圭一先生よりご教示いただきました。

参考文献

- [足立 84] 足立正久: 埋め込みとはめ込み, 岩波書店, 1984.
- [田中 25] 田中心: 埋め込みとはめ込み, 数理科学 2025 年 4 月号: 《多様体》の探求, サイエンス社, 2025.
- [都丸・奥間 25] 都丸正・奥間智弘: 複素曲面特異点入門, 内田老鶴圃, 2025.
- [Arn72] V. I. Arnol'd: *Normal forms of functions near degenerate critical points, Weyl groups A_k , D_k , E_k and Lagrange singularities*, Funct. Anal. Appl. **6**(4) (1972), 254–272.
- [Arn73] V. I. Arnol'd: *Classification of unimodular critical points of functions*, Funct. Anal. Appl. **7**(3) (1973), 75–76.
- [Arn76] V. I. Arnol'd: *Local normal forms of functions*, Invent. Math. **35** (1976), 87–109.
- [AGV85] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps I*, Monograph in Math. **82**, Birkhäuser, 1985.
- [Bra28] K. Brauner: *Zur geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen III, IV*, Abh. Math. Sem. Hambrug **6** (1928), 8–54.
- [Bri66] E. Brieskorn: *Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen*, Math.

- Ann. **166** (1966), 76–102.
- [Bri68] E. Brieskorn: *Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen*, Math. Ann. **178** (1968), 255–270.
- [Bri70] E. Brieskorn: *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Proc. Internat. Congress Math. Nice, 1970, 279–284.
- [CNP06] C. Caubel, A. Némethi, and P. Popescu-Pampu: *Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds*, Topology **45**(3) (2006), 673–689.
- [ES03] T. Ekholm and A. Szűcs: *Geometric formulas for Smale invariants of codimension two immersions*, Topology **42**(1) (2003), 171–196.
- [ET11] T. Ekholm and M. Takase: *Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions*, Bull. Lond. Math. Soc. **43**(2) (2011), 251–266.
- [Hir59] M. W. Hirsch: *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.
- [Juh05] A. Juhász: *A geometric classification of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **117**(1) (2005), 65–83.
- [Kas16] N. Kasuya: *An obstruction for codimension two contact embeddings in the odd dimensional Euclidean spaces*, J. Math. Soc. Jpn. **68**(2) (2016), 737–743.
- [KNS14] A. Katanaga, A. Némethi, and A. Szűcs: *Links of singularities up to regular homotopy*, J. Singul. **10** (2014), 174–182.
- [Kin15] S. Kinjo: *Immersions of 3-sphere into 4-space associated with Dynkin diagrams of types A and D*, Bull. Lond. Math. Soc. **47**(4) (2015) 651–662.
- [Kle56] F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner(Leipzig), 1884. [English translation: *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover, 1956.]
- [Mil68] J. W. Milnor: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, AMS **61**, Princeton Univ. Press, 1968.
- [Mil75] J. W. Milnor: *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$* , Ann. of Math. Stud. **84** (1975), 175–225.
- [NP15] A. Némethi and G. Pintér: *Immersions associated with holomorphic germs*, Comment. Math. Helv. **90**(3) (2015), 513–541.
- [OO05] H. Ohta and K. Ono: *Simple Singularities and Symplectic Fillings*, J. Differential Geom. **69**(1) (2005), 1–42.
- [SST02] O. Saeki, A. Szűcs, and M. Takase: *Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **108**(1) (2002), 13–32.
- [Sma59a] S. Smale: *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90**(2) (1959), 281–290.
- [Sma59b] S. Smale: *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*, Ann. of Math. **69** (1959), 327–344.
- [Tan25a] M. Tanabe: *Regular homotopy classes of links of simple singularities and immersions associated with their Dynkin diagrams*, Jour. Lond. Math. Soc. **111**(4) (2025), e70140.
- [Tan25b] M. Tanabe: *Immersions associated with links of complex surface singularities and their topology*, doctoral thesis, Hokkaido University, in preparation.
- [Whi36] H. Whitney. *Differentiable Manifolds*, Ann. of Math. **37**(3) (1936), 645–680.
- [Whi37] H. Whitney: *On regular closed curves in the plane*, Compos. Math. **4** (1937), 276–284.
- [Wu64] W. T. Wu: *On the immersion of C^∞ -3-manifolds in a Euclidean space*, Sci. Sinica **13** (1964), 335–336.