平面被覆予想，その誕生から未来まで

根上　生也　(横浜国立大学)*

2025 年 8 月 5 日

概　　要

平面に埋め込み可能な有限被覆を持つ連結グラフは射影平面に埋め込み可能であるという予想は “平面被覆予想” と呼ばれ，位相幾何学的グラフ理論における未解決難問の１つとして認知されている。本稿では，その始まりから現在に至るまでの概要を解説するとともに，未来に向けた展望を述べる。

1　事の始まり

1986 年のこと，私が博士の学位を取得した翌年のことだった。その学位論文 [20] では，論文 [19] で提唱したグラフの埋め込みの “一意性” と “忠実性” という概念とグラフの連結性の関係について探究した。ある意味で研究が一区切りついたので，何か新しいことをしたいと考えて思い至ったのが次の予想である。

平面被覆予想 (Negami [23], 1988)　連結グラフ G が平面的な有限被覆を持てば，G は射影平面に埋め込み可能であろう。

文献上は予想の公開は 1988 年となるが，私がこの予想に思い至ってはその 2 年前で，その証明のスキームの原型にあたるアイディアを論文 [21] の中で示している。

その当時，いわゆる “Thurston のレクチャーノート” [42] が国内に出回っており，私は特にその 13 章に書かれていた “軌道体 (orbifold)” に興味を持った。その一方で，同じ頃に Gross-Tucker 著の “Topological Graph Theory” [8] が出版された。私はそれを入手してざっと目を通したが，Ringel の “Map Color Theorem” [37] の中で開発された方法を紹介しているだけのように思えた。

後述するように，[8] ではトポロジーにおける被覆空間の概念をグラフに限定して，“ボルテージ・グラフ” という組合せ的な表現を与えている。そういう表現を与えるところで終わらずに，その表現を使って明らかになる “現象” を示すべきだと私は考えた。そういう思いとともに，Thurston のレクチャーノートが教えてくれた軌道体の考え方と私が独自に探究していたグラフの埋め込みの忠実性の概念を融合させて，次の定理を得た。

定理 1 (Negami [23]) 連結グラフ G が平面的な有限正則被覆を持てば，G は射影平面に埋め込み可能である。

---

* e-mail: negami-seiya-vj@ynu.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 05C10, 57M10, 57M15
キーワード：位相幾何学的グラフ理論, 被覆グラフ, 被覆空間, 平面被覆予想

冒頭の予想と比較すると，その違いは「正則」があるかないかだけである。つまり，上の定理は，群作用のある被覆に限定すれば，予想が正しいことを意味している。また，被覆が有限のものに限定されていることも重要である。なぜなら，無限被覆も許してしまえば，どんなグラフでも平面的な被覆を持ってしまうからだ。たとえば，普遍被覆を考えればよい。サイクルを含むどんなグラフの普遍被覆も無限の木になり，それは平面に埋め込み可能，つまり平面的である。しかし，射影平面に埋め込み不可能なグラフはいくらでも存在するので，「有限」を削除してしまうと，予想は成立しない。というよりも，面白味を欠いてしまうだろう。

2 被覆グラフの組合せ的表現

本稿で扱っているグラフの“被覆”は代数的トポロジーでいうところの被覆空間のグラフ版に他ならない。一般的な被覆空間は基底の空間（被覆される空間）X と局所位相同型な位相空間 $\tilde{X}$ のことである。つまり，全射 $p : \tilde{X} \to X$ があり，それを介して対応する点どうしの適当な近傍が位相同型になっている。グラフの場合に限定すると，各点 x の近傍の形状はその点から何本の線分が出ているかで決まってしまうので，以下のような組合せ的な定義が可能となる。

一般に，**グラフ** G とは，頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ からなる構造であり，各辺 $e = uv \in E(G)$ は 2 つの頂点 $u, v \in V(G)$ を結ぶ線分になっている。頂点 $v \in V(G)$ に接続している辺の本数（ループの場合は 2 と数える）をその頂点の**次数**と呼び，$\deg v$ で表す。以下で述べる諸概念は，ループや多重辺がある場合にも整合するように定義できるが，記号が煩雑になるだけなので，そういうものがない**単純グラフ**の場合に限定して記述し，ループや多重辺のある場合には適宜解釈してもらうこととする。

このような前提のもとで，頂点 $v \in V(G)$ と辺で結ばれている頂点の集合を $N(v)$ で表すと，$|N(v)| = \deg v$ となり，頂点 v の“近傍”の形状は $\deg v$ の値で決まる。ちなみに，グラフ理論の用語では，$N(v)$ を v の**近傍**と呼ぶ。この理解のもとで解釈すれば，以下の組合せ的な定義がトポロジーにおける“被覆空間”と同様の概念を定義していることがわかるだろう。

2 つの（有限）グラフ G と $\tilde{G}$ を考える。そのいずれも**連結**であるとする。つまり，そのグラフ内のどの 2 頂点の間も辺をたどっていける道があるとする。その頂点集合間の全射 $p : V(\tilde{G}) \to V(G)$ で，対応する頂点の近傍の間の 1 対 1 対応を誘導するものが存在するとき，$\tilde{G}$ を G の**被覆グラフ**，または単に**被覆**といい，p をその**射影**と呼ぶ。この射影は辺集合間の対応も自然に誘導するので，それも併せて $p : \tilde{G} \to G$ と書く。（図 3 参照）

特に，G の被覆 $\tilde{G}$ に対して群 Γ の作用があり，$p(u) = p(v)$ であることと $\gamma(u) = v$ となる元 $\gamma \in \Gamma$ が存在することが同値となるとき，$\tilde{G}$ を G の**正則被覆**といい，群 Γ をその**被覆変換群**と呼ぶ。そのような群作用のある被覆グラフを構成する組合せ的な方法として，“ボルテージ・グラフ”というものがある。

まず，G の各辺に群 Γ の元を割り当てる写像 $\sigma : E(G) \to \Gamma$（**ボルテージ割り当て**）を与える。ただし，$e = uv$ を有向辺と考えたときに，$\sigma(vu) = \sigma(uv)^{-1}$ であるとする。このとき，(G, σ) を**ボルテージ・グラフ**と言う。そこで，直積 $V(G) \times \Gamma$ を頂点集合とし，各辺 $uv \in E(G)$ に対して，(u, γ) と $(v, \gamma \cdot \sigma(uv))$ を結ぶ辺を追加することで得られるグラフ G^σ は，群 Γ を被覆変換群とする G の正則被覆になっている。

一方，群作用を前提としない n 重被覆を構成するには，n 次対称群 S_n を利用する。まず，各辺に S_n の元を割り当てる任意の写像を $\rho : E(G) \to S_n$ とし，被覆の頂点集合として $V(G) \times \{1, \ldots, n\}$ を考え，各辺 uv に対して，(u, k) と $(v, \rho(k))$ を結ぶ辺を追加する。このようにして構成されたグラフ G_ρ は G の被覆グラフになっている。この場合，ρ は**置換ボルテージ割り当て**と呼ばれる。

Gross-Tucker の本 [8] では，任意の被覆グラフが上のようにして構成できることを述べているが，私にはそれはほぼ明らかな事実のように思えた。その一方で，代数的トポロジーの教科書 [40] に書かれている被覆空間の理論はとても高尚なもののように感じた。だからといって，それは平面被覆予想を解決してくれるものではない。

大事なことは，グラフの平面性はホモトピー不変ではないという事実である。代数的トポロジーにおける被覆空間の理論では，位相空間の被覆空間はその基本群の部分群の共役類と 1 対 1 に対応して存在することが示されている。しかし，1 次元ベッチ数が等しいグラフはすべてホモトピー同値である。つまり，グラフが平面的であれ，非平面的であれ，ループのブーケとホモトピー同値になってしまう。つまり，ホモトピーの目で見ているだけでは，平面被覆予想は解決できないということである。

3 埋め込みの忠実性

思い返せば，学部時代に Ringel の “Map Color Theorem”[37] と出会ったことがすべての始まりだった。その本には，上で述べたボルテージ・グラフのアイディアを使って，**完全グラフ** K_n（n 個の頂点があり，そのすべての組が辺で結ばれているグラフ）の閉曲面への埋め込み (辺の交差なく，グラフを閉曲面に描くこと) を構成する方法が示されていた。簡単にいうと，それは小さなグラフの埋め込みから，被覆グラフの考え方を使って，大きなグラフの埋め込みを構成するというものだった。それを知った私は，グラフを閉曲面に埋め込む問題を考えるようになった。

「地図色分け定理」と同様に，その当時の研究は目的のグラフを適当な閉曲面に埋め込むことができるかどうかが議論されているものばかりだった。そこで私は，これからは「埋め込むことができるかどうか」ではなく，「どのように埋め込めるか」と問うべきだと考えた。たとえば，Whitney [43, 44] では，3-**連結**（2 頂点を除去しても非連結にならない）平面的グラフは球面に一意的に埋め込み可能であることが示されている。

Whitney の論文では，今日のマトロイド理論のもとになっているような議論が展開されており，当時の私には少々難解に思えた。そこで，自力でその証明を試みたところ，埋

め込みの一意性を証明するだけならそれほど難しい議論をする必要はないことがわかった。さらに，その証明は埋め込みの一意性だけではなく，私が後に定義した“忠実性”の証明にもなっていることを理解した。

グラフ G の閉曲面 F^2 への埋め込みを G からの連続写像として捉えて $f : G \to F^2$ と表すことにする。このとき，G の任意の自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，閉曲面上の自己同相写像 $h : F^2 \to F^2$ が存在し，$h \circ f = f \circ \sigma$ となるとき，$f : G \to F^2$ は**忠実**であるといい，G がそのような埋め込みを持つとき，G は F^2 に**忠実に埋め込み可能**であるという。つまり，忠実な埋め込みは，グラフ自身が持っている対称性を忠実に実現するようにグラフを閉曲面に埋め込んでいる。

そこで，グラフ G の平面的な正則被覆 $\tilde{G}$ を考えてみよう。まず，$\tilde{G}$ は正則被覆なので，$\tilde{G}$ は被覆変換群 Γ を持つ。特に $\tilde{G}$ が 3-連結ならば，$\tilde{G}$ は球面 S^2 に忠実に埋め込み可能なので，群 Γ は S^2 に作用し，$\tilde{G}$ はその作用のもとで不変になっている。これは，$\tilde{G}/\Gamma$ が S^2/Γ として得られる楕円的 2-軌道体の中に埋め込まれていることを意味している。

Thurston の講義録 [42] の 13 章が教えてくれたように，その楕円的 2-軌道体の基礎となる曲面は球面，射影平面，円板のいずれかと位相同型である。特に，球面や円板に埋め込み可能なグラフは射影平面にも埋め込み可能なので，上述の $G = \tilde{G}/\Gamma$ が射影平面に埋め込み可能であることが結論できる。これが定理 1 の証明の基本的なアイディアである。一般には $\tilde{G}$ が 3-連結になる保証がないので，少々テクニカルな議論も必要である。

4 グラフ・マイナー

論文 [23] では，定理 1 の証明を与え，平面被覆予想（「1-2-∞ 予想」とも言う）を提起した後に，以下のような予想解決の道筋が示されている。

グラフ G が平面被覆予想の反例ならば，G は平面的有限被覆を持つが，射影平面には埋め込み可能ではない。そのような反例グラフの中で包含関係に関して最小のものを G とすると，G 自身は射影平面には埋め込み不可能であるが，任意の辺 $e \in E(G)$ を除去して得られるグラフ $G - e$ は射影平面に埋め込み可能になる。

一般に，閉曲面 S に埋め込み不可能ではあるが，その任意の部分グラフが S に埋め込み可能であるグラフを S に対する**既約グラフ**という。たとえば，球面に対する既約グラフは次数 2 の頂点を無視すれば，K_5 と $K_{3,3}$ のみであることが **Kuratowski の定理**として知られている。それと同様に，論文 [2, 7] には射影平面に対する既約グラフはちょうど 103 個存在することが示されている。

もし平面被覆予想の反例があれば，その最小反例は射影平面に対する既約グラフになっている。その既約グラフのうち 3 個は非連結なので，反例となる候補はその 3 個を除くちょうど 100 個のグラフの中に隠れていることになる。逆に言うと，その 100 個のグラフが予想の反例にならないことを示せれば，予想が正しいことになる。これで問題が有限の問題になったかに思えた。

それからしばらくして，アメリカの数学者 Mike Fellows からメールが届いた。といっても，当時は現在のように電子メールが利用できたわけではないので，紙にタイプされた手紙である。そして，その手紙には，Fellows が博士論文 [5] の中で平面的被覆と類似する “平面的エミュレーター”（後述）を研究しており，彼の同級生の Dan Archdeacon [2] が射影平面に対する既約グラフがそれまでに知られていた 103 個になることを証明したと書かれていた。私はこの “共時性” に驚いた。

私たちはその後も手紙のやり取りをして議論を交わした。そして，その過程でアメリカを中心とするグラフ理論の研究者の中で “グラフ・マイナー” という考え方が動きだしていることを知った。その考え方に従って射影平面に対する既約グラフを分類すると，連結なものは 32 個になる。有限とはいえ 100 個では途方に暮れるが，32 個なら考える気にはなれそうだ。さらに，その 32 個は 11 個のグループに分類され，そのグループの親玉にあたるグラフを攻略すれば十分であることを知った。

そして，Fellows [6] はその親玉の 1 つである $K_{3,5}$ が予想の反例にならないことを示したが，Archdeacon [4] と私 [24] は独立に 8 個の親玉を攻略した。そして，$K_{4,4}-e$ と $K_{1,2,2,2}$ と呼ばれる親玉が残り，“恐怖の 2 つ（terrible two）” と呼ばれるようになった。ちなみに，英語圏で “terrible two” といえば手に負えない 2 歳児のことだそうだ。

退治すべき親玉があと 2 つだと思うと予想の解決も近いように感じられたが，私たちの研究はここで行き詰っていた。ところが，20 世紀も終わりに近づいたときにチェコ人の Petr Hliněný [9] という新星が登場した。彼は平面的な被覆グラフのある場所に配置した電荷を周辺に放電し，その流れを追跡するという巧妙な方法で，$K_{4,4}-e$ が予想の反例にならないことを証明した。

これで退治すべき親玉が $K_{1,2,2,2}$（図 1）のみとなったが，$K_{1,2,2,2}$ を除けば予想が成立するというわけではない。あくまで，この親玉を退治すれば，それと連動して，その背後に隠れている無限個の小物たちも自動的に次々と退治されてしまうという意味である。

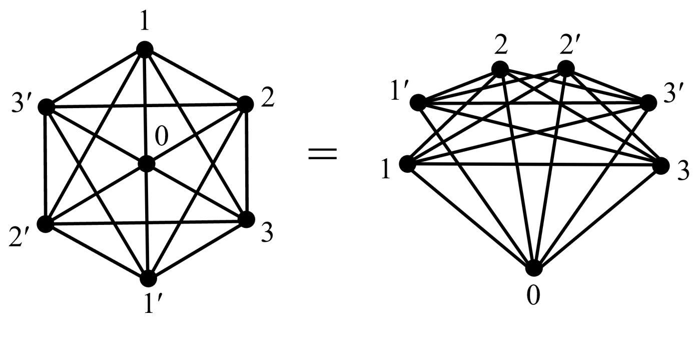

図 1　$K_{1,2,2,2}$

しかし，その後に Hliněný は博士課程の指導教官である Robin Thomas とともに，それを除けば予想が成立するという 16 個のグラフを特定した [10, 12, 13]。もちろん，それらが予想の反例だと言っているわけではない。厳密には，次数 3 の頂点を平面的グラフ

で置き換えるという変形を許すので，“有限個の反例”とは言えないが，その変形は本質的な差異を生み出さない。ここまでの経緯は [14] の中でも語られている。

グラフ理論ではグラフの局所的な変形を考えることが多い。その代表的な変形操作は辺の**除去**と**縮約**である。前者は単に 1 本の辺を取り除くことであり，後者は両端点を一致させるまで辺を縮めていく操作である。グラフ G から辺の除去と縮約を繰り返してグラフ H が得られるとき，H は G の**マイナー**であるといい，$H \leq_m G$ と書く。このマイナーの関係によりグラフ全体が半順序集合になることは明かだろう。

このマイナーという言葉を使うと，私が修士論文の中で証明した定理 [17, 18] は，3-連結グラフ G が車輪グラフ以外の 3-連結グラフ H をマイナーとして持つための必要十分条件は，G が H から辺の追加と 3-**頂点分割**と呼ばれる変形を繰り返して得られることであると述べられる。その後，この定理は “Negami's Splitter Theorem” と呼ばれるようになり，グラフ・マイナーの理論の先駆的な仕事として認知されている。

グラフ・マイナーの理論の中で最も重要なものは，Neil Robertson と Paul D. Seymour が証明した次の定理である。この定理の出典を 1 つの論文としているが，それまでに公表された膨大な量の議論の末に証明されたもので，**Wagner 予想**として知られていた予想を解決したものになっている。

定理 2 (**グラフ・マイナー定理** [38]) マイナーを取る操作で閉じているグラフの族に対する極小の禁止マイナーは有限個である。

たとえば，平面的な被覆を持つグラフ全体はマイナーを取る操作で閉じた族になっている。したがって，平面的な被覆を持たないグラフの中でマイナー関係で極小なものは有限個しかない。つまり，平面被覆予想はその有限個が上述した 32 個と一致するかどうかを問うている。特に，$K_{1,2,2,2}$ がその有限個のうちの 1 つなのかどうかを確定することが問題になっているのである。

5 部分的な解決

ここまでに述べたことはほぼ 20 世紀中に起こったことであり，私が予想を提唱した頃に考えていたスキームで展開された議論であった。その後に示された予想を支持する事例を列挙しておこう。当然のことながら，予想の不成立を示唆する事例は存在しない。

以下ではグラフ G が平面的被覆 $p : \tilde{G} \to G$ を持つと仮定する。まず，時系列に沿って，その平面的被覆もしくは射影に関する条件を紹介する。その条件が満たされれば，基底グラフ G が射影平面的になることが証明されている。

- **群作用を伴う被覆である** (Negami [23], 1988)
  これは被覆が正則の場合なので，定理 1 のとおりである。特に，2 重被覆は正則被覆なので，それが平面的ならば，基底グラフは射影平面的になる [21]。近年の成果と組み合わせると，ある程度の大きさの群作用があれば同様の事実が証明できる。

- **射影が奇数重になっている** (Archdeacon-Richter [3], 1990)
  より正確には，非平面的グラフの平面的被覆は偶数重であることが示されている。つまり，奇数重の被覆が平面的になるならば，G 自体が平面的になる。

- **いくつかの 2 重被覆を合成したものになっている** (Negami [27], 2000)
  射影平面的グラフによる 2 重被覆を持てば，基底グラフが射影平面的であるという事実が本質的であり，それを繰り返し適用することで証明できる。実は，恩師・本間龍雄先生の "Dehn の補題" の証明にインスパイアされてこれを思いついた。

- **10 重以下の被覆になっている** (Ota [36, 41], 2000+)
  $K_{1,2,2,2}$ の 12 重平面的被覆に想定される局所構造を分類し，四色問題の解法として利用された放電法を模した手法によって矛盾を導くことで証明されている。

- **極大平面的になっている**（Negami, 2000+ ）
  これは被覆グラフが球面の三角形分割になっていることと同値である。その三角形分割をもとに球面のオイラー数を計算することで，被覆が 2 重または 6 重であることが容易にわかる。1 つ前の結果から 6 重の場合は排除できる。

- **2 重被覆を経由する** (Negami [29], 2003)
  そのような $2n$ 重被覆は $(n, 2)$-**合成的**であるという。$K_{1,2,2,2}$ の 2 重被覆が平面的被覆を持たないことが示すことで，この事実が証明されている。3 つ前の事実はこの事実から容易に導かれる。

- **2 重射影平面的被覆になっている**（Negami-Suzuki [30, 31], 2003）
  これは，2-連結非平面的もしくは 3-連結なグラフの 2 重射影平面的被覆が平面的になるという事実による。つまり，$\tilde{G}$ は 2 重平面的被覆である。

- **二部グラフになっている** (Negami [32], 2012+)
  古くは $\tilde{G}$ が 2 重平面的被覆であり，**二部グラフ**（2 色で色分けできる）ならば，G はどの領域も偶角形になるように射影平面に埋め込み可能であることが示されていた [25, 26]。論文 [22] で導入された**標準二部グラフ被覆** $B(G)$ と 2 つ前の事実を利用することで，$\tilde{G}$ が 2 重でなくてもよいことがわかる。

- **14 重未満になっている** (Annor-Nikolayevsky-Payne [1], 2023+)
  第 35 回位相幾何学的グラフ理論研究集会–TGT35 において，Annor がこの事実をアナウンスした。彼らは Archdeacon [4] が注目した $K_{1,2,2,2}$ が含む K_4 の平面的被覆の構造に着目して，最小反例における "innermost" な構造を分類する手法を示している。同様の面倒な議論を繰り返すことで，記録更新をする余地がある。

基底グラフに条件を課した形の研究はあまり見られないが，あえてまとめると次のようになる。基底グラフ G が以下の条件を満たし，さらに平面的な被覆グラフ $\tilde{G}$ を持つならば，G が射影平面的であることが結論できる。

- **3-正則グラフになっている** (Negami-Watanabe [28], 2002)
それはどの頂点の次数も 3 になっているグラフのことである。そのようなグラフが反例候補の中にあるかどうかを確認すれば，この事実が容易に証明できる。頂点の次数が 4 以下という条件に置き換えても，同様の議論ができるだろう。
- **特定された 16 種類以外のグラフになっている** (Hlineny-Thomas [13], 2004)
$K_{1,2,2,2}$ から Y-Δ 変形によって生成されるグラフをマイナーに持つグラフを精査して，予想の反例にならないと結論できるものを排除した結果，16 種類のグラフが残っている。現時点で最強の結果である。

グラフの被覆の定義では，射影 $p : \tilde{G} \to G$ が対応する頂点の近傍間の全単射（1 対 1 対応）を誘導するとしているが，この “全単射” の部分を “全射” に置き換えて定義されるものをグラフの**分岐被覆**と呼ぶことにする。また，$\tilde{G}$ 上の群作用に伴って生じる分岐被覆を**正則**な分岐被覆と呼ぶ。すると，被覆の場合と同様の命題が成立する。

定理 3 (Kitakubo [16]) 連結グラフ G が平面的な有限正則分岐被覆を持てば，G は射影平面に埋め込み可能である。

Mike Fellows [6] は情報科学的な文脈の中で，グラフの分岐被覆と同等の概念を定義して，グラフの**エミュレーター**と呼んだ。そして，北久保の定理を知ってかどうかは定かではないが，平面被覆予想と同じように，平面的なエミュレーターを持つグラフは射影平面的だろうと予想した。しかし，Rieck-Yamashita [39] が $K_{1,2,2,2}$ の平面的な分岐被覆を発見したことで，Fellows の予想は否定されている。

平面被覆予想の発展形として，他の閉曲面に埋め込み可能なグラフを考えてはどうかと思う人もいるかもしれない。たとえば，論文 [11] ではそのようなことが議論されているが，個人的にはあまり意味のないことのように思う。米国のシアトルで開催された “Graph Structure Theory 1991” で Huneke [15] が平面被覆予想を紹介したときにもそういう一般化に関する質問が出ていたが，私はあえて関わらなかった。というのも，私は平面被覆予想を提唱した当初から，そこに “現象の違い” を直観していたからだ。

球面は射影平面の普遍被覆でありコンパクトだが，球面と射影平面以外の閉曲面の普遍被覆は $\mathbb{R}^2$ と位相同型であり，コンパクトではない。また，球面に埋め込み可能なグラフは射影平面にも埋め込み可能だが，トーラスに埋め込み可能でもクラインの壺に埋め込み不可能なグラフがあるし，その逆のグラフもある。

6 ローテーション・コンパティブルな平面的被覆

ここまでの展開は，“ラスボス” である $K_{1,2,2,2}$ をいかに退治するか，もしくは，いかに回避するかに注力した話だった。残念ながら最終的な攻略方法が見つけきれず，40 年近くが過ぎてしまった。そこで，初心に戻り，攻略の方向性を変えてみようと考えて，以下のような試み [35] を行った。

一般に，グラフの被覆 $p:\tilde{G}\to G$ はその基本群の部分群 $H<\pi_1(G)$（正しくは，その共役類）に対応して存在するので，それを添え字として付けて，$p_H:\tilde{G}_H\to G$ と表すことにする。その被覆グラフ $\tilde{G}_H$ が球面 S^2 に埋め込み可能であると仮定する。図 2 の中央部分がその状況を表している。もし H が $\pi_1(G)$ の正規部分群ならば，群 $\pi_1(G)/H$ が $\tilde{G}_H$ に作用する。さらに，$\tilde{G}_H$ が 3-連結ならば，それは S^2 に忠実に埋め込まれているので，群 $\pi_1(G)/H$ が S^2 にも作用し，その作用で割って得られる楕円的軌道体 O^2（右下）に G が埋め込まれることになる。

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{G}_N \arrow[rrr] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "p_N"'] & & & F^2 \arrow[dl, "\bar{q}"'] \arrow[dd, "\bar{p}"] \\
& \tilde{G}_H \arrow[r] \arrow[dl, "p_H"] & S^2 \arrow[dr, "r"'] & \\
G \arrow[rrr] & & & O^2
\end{tikzcd}
$$

図 2　証明のスキーム（論文 [33] より転用）

これが定理 1 の証明の基本的なスキームだった。しかし，H が正規部分群でない場合にはこのスキームはそのままでは動かない。そこで，G の正則被覆 $p_N:\tilde{G}_N\to G$ で，その射影 p_N が $\tilde{G}_H$ を経由するものを考える。つまり，射影 $q:\tilde{G}_N\to\tilde{G}_H$ が存在し，$p_N=p_H\circ q$ となる。そのような正則被覆が存在することは論文 [33] で示されており，それは H を含む最小の正規部分 $N\lhd\pi_1(G)$ に対応している。しかし，$\tilde{G}_N$ が球面 S^2 に埋め込まれているわけではない。

そこで，$\tilde{G}_N$ が埋め込み可能な閉曲面 F^2 で, 商群 $\Gamma=\pi_1(G)/N$ が作用するものを作りたい。それができれば，軌道体 $O^2=F^2/\Gamma$ の中に G を埋め込めることになる。また，トポロジー的な考察により，射影 $\bar{p}:F^2\to O^2$ が S^2 を経由することがわかり，O^2 は楕円的軌道体になるので，D^2, S^2, P^2 のいずれかと位相同型になる。これは G が射影平面的であることを意味している $\cdots$

「めでたしめでたし」と言いたいところだが，上の議論にはある重大なことが隠されている。それは F^2 が期待どおりに構成できるのかという問題である。S^2 上に埋め込まれた $\tilde{G}_H$ の領域（面）は 2-胞体なので，そのコピーまたは中心を分岐点とする分岐被覆（これも 2-胞体である）を $\tilde{G}_N$ に貼り付けていけば，閉曲面 F^2 自体は作ることができる。しかし，そうして構成した F^2 に群 Γ が期待どおりに作用するかどうかが一般には保証できない。もちろん，F^2 に埋め込まれた $\tilde{G}_N$ の部分には Γ は作用するが，その作用を F^2 全体に拡張できるかどうかが自明ではない。

実際，群 Γ の $\tilde{G}_N$ への作用が F^2 に拡張可能となるためには，次の条件が満たされなければならない。その詳細は後述する。

補題 4 (Negami [35]) 上述の群 Γ の作用が F^2 に拡張するための必要十分条件は，球面上の $\tilde{G}_H$ がローテーション・コンパティブルに埋め込まれていることである。

連結グラフ G の平面的被覆 $\tilde{G}_H$ が球面 S^2 に埋め込まれているとする。その S^2 上に１つの向きを定め，“時計回り”と呼ぶ。一般に，そのように向きが定められた S^2 に埋め込まれたグラフの各頂点 v に対して，その隣接点の並びを時計回りに読んで得られる円順列を v のまわりの**ローテーション**という。基底グラフ G の頂点 $v \in V(G)$ に射影される $\tilde{G}_H$ の頂点のまわりのローテーションは自然に $N(v)$ 上の円順列を誘導するので，ローテーションどうしを比較することができる。

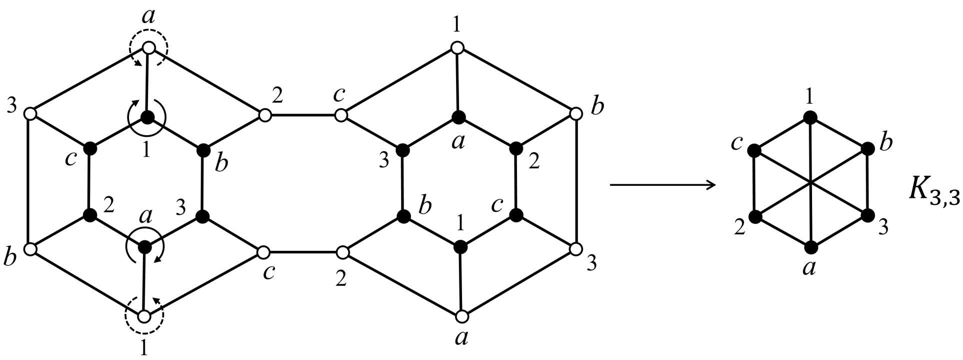

図 3　ローテーション・コンパティブルな $K_{3,3}$ の平面的被覆

図 3 は 2 つの独立点集合 $\{1, 2, 3\}$ と $\{a, b, c\}$ を持つ**完全二部グラフ** $K_{3,3}$ の 4 重平面的被覆の S^2 への埋め込みを示している。球面 S^2 上には通常の意味で “時計回り”が定められており，同じラベルの頂点は共通の頂点に射影される。たとえば，ラベル a が付された 4 つの頂点は $K_{3,3}$ の頂点 a に射影される。そして，黒い a のまわりでローテーションを読むと (123) であり，白い a のまわりではその逆の (321) になっている。他のラベルについても同様であり，この $K_{3,3}$ の 4 重平面的被覆は次の条件を満たしている。

> **条件 1:** 同じ頂点 $v \in V(G)$ に射影される頂点のまわりのローテーションは共通であるか，その逆になっている。

次に，辺の両端に注目してみよう。たとえば，辺 $1b$ に射影される辺にはその両端が黒黒になっているものがある。これはその両端の頂点に誘導されているローテーションが同じ向き（**同調**）であることを意味している。$1b$ の他の辺についても，その両端は黒黒または白白であり，すべて同調である。一方，辺 $1a$ に射影される辺の両端は黒白になっており，すべて非同調である。したがって，図 3 の平面的被覆は次の条件を満たしている。

> **条件 2:** 基底グラフ G の同一の辺に射影される辺の両端のローテーションはすべて同調であるか，すべて非同調になっている。

球面に埋め込まれた平面的被覆 $\tilde{G}_H$ に対して条件 1 および条件 2 が成り立つとき，その埋め込みは**ローテーション・コンパティブル**であるという。次の定理は補題 4 より直ちにわかる。

定理 5 (Negami [35]) 連結グラフ G の平面的被覆が球面にローテーション・コンパティブルに埋め込み可能ならば，G は射影平面的である。

特に，平面的被覆 $\tilde{G}_H$ が 3-連結な正則被覆ならば，$\tilde{G}_H = \tilde{G}_N$ となり，それはローテーション・コンパティブルである。また，論文 [35] では，同じ頂点に射影される頂点どうしの距離がある程度大きいと，ローテーション・コンパティブルになることも証明されている。その応用として，平面的被覆 $\tilde{G}$ を平面に埋め込んだときに，個々の領域の境界がある程度短い閉路になっていれば，G が射影平面的になることも示されている。

しかし，ローテーション・コンパティブルでない平面的被覆の埋め込みはいくらでも構成することができる。だとしても，適当な変形操作によって，それらをローテーション・コンパティブルなものに修正できるのではないだろうか？また，ローテーション・コンパティブルに埋め込み可能な平面的被覆を持つという性質はマイナーに関して閉じている [35]。そうならば，まずは非平面的グラフがマイナーとして含んでいる K_5 や $K_{3,3}$ の平面的被覆について調べてみるべきだろう。

7 有限被覆全体を考える

私はここ近年，連結グラフ G の有限被覆全体 $\tilde{\mathcal{C}}(G)$ が作る "束" について考察している。2 つの被覆 $p_i : \tilde{G}_i \to G$ に対して，被覆射影 $q : \tilde{G}_2 \to \tilde{G}_1$ が存在し，$p_2 = p_1 \circ q$ となるときに $G_1 \leq G_2$ と定義すれば，$\tilde{\mathcal{C}}(G)$ がこの "$\leq$" を順序とする半順序集合になることは明らかだろう。基底グラフ G はその半順序集合の中の最小元であるが，$\tilde{\mathcal{C}}(G)$ は有限被覆のみを含んでおり，普遍被覆を含まないので，最大限は存在しない。

さらに，2 つの被覆に対する上限 $\tilde{G}_1 \vee \tilde{G}_2$ と下限 $\tilde{G}_1 \wedge \tilde{G}_2$ が存在することもほぼ明らかな気もするが，私はそれらを具体的に構成する組合せ的な方法を明らかにした。それを利用して，いろいろな実験や考察ができるようになる。

たとえば，与えられた平面的被覆 $\tilde{G}$ は 2 重被覆を経由するのだろうか？もしそれが確認できれば，5 節で述べたことから，基底グラフ G が射影平面的であることが結論できる。そして，それを確認するには，2 重被覆 $D_1, D_2, \ldots$ を生成して，$\tilde{G} \vee D_i = \tilde{G}$ が成立するかどうかを試せばよい（[34] 参照)。しかし，残念ながら，私は 2 重被覆を経由しない $K_{3,3}$ の 4 重平面的被覆を見つけてしまった。

他にも被覆グラフが作る束 $\tilde{\mathcal{C}}(G)$ の構造を利用して平面被覆予想に挑戦する方法があるかもしれないが，それは未来に属する事柄です。

平面被覆予想を創出した当初より親しくしていただき，海外への扉を開いていくれた
故 Dan Archdeacon 氏（1954–2015）に本稿を捧ぐ—

参考文献

[1] D.Y.B. Annor, Y. Nikolayevsky and M.S. Payne, $K_{1,2,2,2}$ has no n-fold planar cover graph for $n < 14$, arXiv:2311.01672v2 [math.CO] 10 Sep. 2024

[2] D. Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, *J. Graph Theory* **5** (1981), 243–246.

[3] D. Archdeacon and R.B. Richter, On the parity of planar covers, *J. Graph Theory* **14** (1990), 199–204.

[4] D. Archdeacon, Two graphs without planar covers, *J. Graph Theory* **41** (2002), 318–326.

[5] M. Fellows, "Encoding graphs in graphs", Ph.D. Dissertation, University of California, San Diego, 1985.

[6] M. Fellows, Planar emulators and planar covers, manuscript, 1989.

[7] H.H. Glover, J.P. Huneke and C.S. Wang, 103 graphs that are irreducible for the projective plane, *J. Comb. Theory, Ser. B* **27** (1979), 332–370.

[8] J.L. Gross and T.W. Tucker, "Topological Graph Theory", John Wiley & Sons, 1987.

[9] P. Hliněný, $K_{4,4} - e$ has no finite planar cover, *J. Graph Theory* **27** (1998), 51–60.

[10] P. Hliněný, "Planar covers of Graphs: Negami's conjecture", Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Technology, 1999

[11] P. Hliněný, A note on possible extensions of Negami's conjecture, *J. Graph Theory* **32** (1999), 234–240.

[12] P. Hliněný, Another two graphs with no planar covers, *J. Graph Theory* **37** (2001), No. 4, 227–242.

[13] P. Hliněný and R. Thomas, On possible counterexamples to Negami's planar cover conjecture, *J. Graph Theory* **46** (2004), 183–206.

[14] P. Hliněný, 20 Years of Negami's Planar Cover Conjecture, *Graph & Combin.* **26** (2010), 525–536.

[15] J.P. Huneke, A conjecture in topological graph theory, "Graph Structure Theory", edited by N. Robertson and P. Seymour, *Contemporary Math.* **147** (1993), 363–379.

[16] S. Kitakubo, Planar branched coverings of graphs, *Yokohama Math. J.* **38** (1991), 113–120.

[17] S. Negami, "A characterization of 3-connected graphs containing a given graph and its applications", Master thesis, Tokyo Institute of Technology, 1981.

[18] S. Negami, A characterization of 3-connected graphs containing a given graph, *J. Combin. Theory, Ser. B* **32** (1982), 69–74.

[19] S. Negami, Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, *Discrete Math.* **44** (1983), 161–180.

[20] S. Negami, "Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces", Doctor Thesis, Tokyo Institute of Technology 1985.

[21] S. Negami, Enumeration of projective-planar embeddings of graphs, *Discrete Math.* **62** (1986), 299–306.

[22] S. Negami, The virtual k-factorability of graphs, *J. Graph Theory* **11** (1987), 359–365.

[23] S. Negami, The spherical genus and virtually planar graphs, *Discrete Math.* **70** (1988),

159–168.

[24] S. Negami, Graphs which have no finite planar covering, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* **16** (1988), 377–384.

[25] S. Negami, Projective-planar graphs with even duals, *J. Graph Theory* **16** (1992), 287–295.

[26] S. Negami, Projective-planar graphs with even duals II, “Graph Structure Theory”, edited by N. Robertson and P. Seymour, *Contemporary Math.* **147** (1993), 363–379.

[27] S. Negami, Tower construction of planar coverings of graphs, Information and Communication Studies of the Faculty of Information and Communication, Bunkyo University, **25** (2000), 25–29.

[28] S. Negami and T. Watanabe, Planar cover conjecture for 3-regular graphs, *J. Fac. Edu. Hum. Sci.* IV, Yokohama National University, **4** (2002), 73–76.

[29] S. Negami, Composite planar coverings of graphs, *Discrete Math.* **268** (2003), 207–216.

[30] S. Negami and Y. Suzuki, Projective-planar double coverings of 3-connected graphs, *Yokohama Math. J.* **50** (2003), 87–95.

[31] S. Negami, Projective-planar double coverings of graphs, *Europ. J. Combin.* **26** (2005), 325–338.

[32] S. Negami, Bipartite planar coverings and even embeddings of graphs on the projective plane, submitted (2012).

[33] S. Negami and I. Sato, Note on graph coverings with voltage assignments, *Yokohama Math. J.* **68** (2022), 109–126. https://doi.org/10.18880/0002000034

[34] S. Negani, Composite coverings of graphs and cryptography, *Yokohama Math. J.* **70** (2024), 183–197. https://doi.org/10.18880/0002001753

[35] S. Negami, Another approach to Planar Cover Conjecture focusing on rotation systems, *J. Math. Soc. Japan* **76** (2023), 975–996. https://doi.org/10.2969/jmsj/90769076

[36] K. Ota, $K_{1,2,2,2}$ has no 10-fold planar covering, presented in “Japan Mathematical Society, fall conference 2001”, Kyushu University, Japan (2001), in Japanese.

[37] G. Ringel, “Map Color Theorem”, Grundlehren Math. Wiss., **209**, Springer-Verlag, 1974.

[38] N. Robertson and P. Seymour, Graph Minors. XX. Wagner’s conjecture, *J. Combin. Theory, Ser. B* **92** (2) (2004), 325–357, doi:10.1016/j.jctb.2004.08.001

[39] Y. Rieck and Y. Yamashita, Finite planar emulators for $K_{4,5} - 4K_2$ and $K_{1,2,2,2}$ and Fellows’ conjecture, *Europ. J. Comb.* **31** (2010), No. 3, 903–907.

[40] E.H. Spanier, “Algebraic Topology”, New York, McGraw-Hill, 1966.

[41] N. Takahashi, On finite planar coverings of $K_{1,2,2,2}$ (in Japanese), Master thesis, Keio University, 2001.

[42] W. Thurston, “Geometry and topology of three-manifolds”, electronic version, Mathematical Sciences Research Institute, http://library.msri.org/nonmsri/gt3m/

[43] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.*, **54** (1932), 150–168.

[44] H. Whitney, A set of topological invariants for graphs, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 231–235.