

# 4次元多様体のシャドウと不变量

直江 央寛 (東京科学大学)\*

## 序章

シャドウとは、4次元多様体に埋め込まれた2次元の多面体で然るべき条件を満たすものであり、3次元および4次元多様体の組み合わせ的な表示を与える。シャドウは3次元多様体や絡み目の量子不变量の研究を目的として Turaev により導入されたが [33, 34]、後に Costantino により量子トポロジー以外の分野へのいくつかの応用が提案された [5, 9, 10]。特に、[6]において Costantino はシャドウを用いてシャドウ複雑度と呼ばれる3次元多様体および4次元多様体の不变量を定義した。これはシャドウの持つ特別な頂点(真頂点という)の個数の最小値として定義される非負整数値の不变量であり、4次元の場合には本質的に多様体の微分構造に依存する量であることが知られている [19]。本稿では、この4次元多様体のシャドウ複雑度に焦点を当て、

- シャドウ複雑度を用いた4次元多様体の分類問題
- シャドウ複雑度と4次元多様体の他の不变量との比較

という2つの問題について、筆者の結果を中心に解説する。

## 1 準備

すべての多様体はコンパクト、連結、滑らか、向き付けられているものとする。また、 $\cong$  で微分同相を表すこととする。単体分割可能な位相空間対  $A \subset B$  に対して、 $A$  の  $B$  における正則近傍を  $\text{Nbd}(A; B)$  と表記する。閉  $n$  次元多様体  $W$  と整数  $k$  に対し、 $kW$  という記号によって、 $k > 0$  のとき  $W$  の  $k$  個のコピーの連結和、 $k = 0$  のとき  $n$  次元球面  $S^n$ 、 $k < 0$  のとき  $W$  の向きを反転させた多様体の  $|k|$  個のコピーの連結和を表すものとする。 $M$  が境界付き  $n$  次元多様体の場合も、 $kM$  を境界連結和を表す記法として同様に解釈する。ただし、 $k = 0$  のときは  $n$  次元球体  $B^n$  を表すものとする。

### 1.1 単純多面体

ここではまず単純多面体とシャドウに関して概説する。 $X$  を連結、コンパクトな位相空間とする。各点  $x \in X$  の正則近傍  $\text{Nbd}(x; X)$  が図1の(i)-(iv)のいずれかと同相であるとき、 $X$  を**単純多面体** (simple polyhedron) という。(iii)型の点を**真頂点** (true vertex) という。(ii)型および(iii)型の点全体の集合を  $X$  の**特異集合** (singular set) といい、 $S(X)$

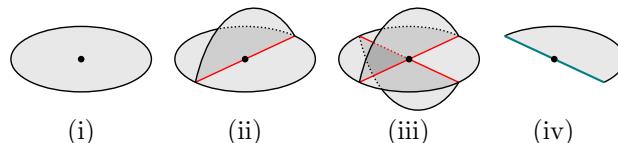


図1 単純多面体の局所モデル。

\* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京科学大学 理学院 数学系

e-mail: naoe@math.titech.ac.jp

本研究は科研費(課題番号:20K14316、25K17248)の助成を受けたものである。

で表す. この特異集合  $S(X)$  は円周または 4 値グラフらの非交和である.  $S(X)$  から真頂点を除いた集合の各連結成分を**三重線** (triple line) といい,  $X \setminus S(X)$  の各連結成分を**領域** (region) という. 直ちに分かるように, 各領域はあるコンパクトな曲面からいくつかの点 (0 個も許す) を除いたものと同相である. 領域すべてが開円板であるような単純多面体は**特殊** (special) であるといい, 特にこのとき  $X$  を**特殊多面体** (special polyhedron) という. (iv) 型の点全体の集合を  $X$  の**境界** (boundary) といい,  $\partial X$  と書く. 境界が空である場合は,  $X$  は**閉** (closed) であるという.

- 例 1.1.** (1) 任意のコンパクトな曲面は, それ自身が唯 1 つの領域であるような単純多面体である.  
 (2) 2 次元円板  $D, D'$  に対し, はめ込み  $i : \partial D' \rightarrow \text{Int}D$  を考える. ただし, 多重点は横断的な二重点のみであるとする. このとき,  $D \cup_i D'$  は単純多面体である. この境界は  $\partial D$ , 特異集合は  $i(\partial D')$ , 真頂点は  $i$  の二重点である.

## 1.2 4 次元多様体のシャドウ

**定義 1.2.**  $M$  を境界付き 4 次元多様体とする.  $M$  に局所平坦<sup>\*1</sup>かつ  $X \cap \partial M = \partial X$  を満たすよう埋め込まれた単純多面体  $X$  が存在し,  $M$  が  $X$  に縮約する<sup>\*2</sup>とき,  $X$  を  $M$  の**シャドウ** (shadow) という.

- 例 1.3.** (1) コンパクトな曲面を底空間とする円板束に対し, その切断は全空間である境界付き 4 次元多様体のシャドウと見なせる.  
 (2) 4 次元球体の境界内の結び目  $K$  に沿った 2-ハンドルの接着により得られる境界付き 4 次元多様体  $M$  を考える.  $K$  の 2 次元円板  $D$  への正則射影に対し, 例 1.1 (2) の方法で得られる単純多面体は  $M$  のシャドウとして  $M$  に埋め込める.  
 (3) 任意の 4 次元 2-ハンドル体<sup>\*3</sup>はシャドウを許容する.

序章で述べたように, シャドウは量子不变量の研究を目的として Turaev により導入された [33, 34]. 本稿ではシャドウを用いた量子不变量の研究について詳しく触れないが, これらの研究については例えば [2, 3, 7, 8, 13, 30, 32] などを参照してほしい.

4 次元多様体に埋め込まれた閉曲面は, その法束の Euler 数によって埋め込みの情報が記述される. 一般のシャドウの埋め込みを記述するために, この考えを拡張した**グリーム** (gleam) と呼ばれる概念がある. 具体的には, 各領域に対する半整数の割り振りとして与えられる. 詳しくは [34, 4] を参照のこと. グリームを備えた単純多面体  $(X, \mathfrak{gl})$  を**グリーム付き多面体** (shadowed polyhedron) という. 混乱がない場合は  $(X, \mathfrak{gl})$  は単に  $X$  と表記する.

**定理 1.4** (Turaev [34]). グリーム付き多面体  $X$  に対し,  $X$  をシャドウとするような境界付き 4 次元多様体を微分同相による違いを除き唯 1 つ指定する写像が存在する.

この定理において, グリーム付き多面体から境界付き 4 次元多様体への対応を **Turaev の再構成** (Turaev reconstruction) という. グリーム付き多面体  $X$  に対して Turaev の

<sup>\*1</sup> 各  $x \in X$  に対し, 滑らかに埋め込まれた 3 次元球体  $B \subset M$  が存在し,  $\text{Nbd}(x; X) \subset B$  であるとき,  $X$  は  $M$  内で**局所平坦** (locally-flat) であるという.

<sup>\*2</sup> 縮約 (collapse) とは, 本来単体的複体に対する用語である. ここでは,  $M$  の微分構造に対応する三角形分割の縮約を考えている.

<sup>\*3</sup> 指数が高々  $k$  までのハンドルらへの分解を持つ境界付き  $n$  次元多様体を  **$n$  次元  $k$ -ハンドル体** という.

再構成によって得られる境界付き 4 次元多様体を  $M_X$  と表記する. これも, 本来であれば  $M_{(X, \mathfrak{gl})}$  と表記すべきであるが, 混乱がない場合はしばしば略す.

**例 1.5.** 閉曲面  $X$  にグリームとして整数  $n$  を備え, グリーム付き多面体としたとき, 対応する境界付き 4 次元多様体  $M_X$  は,  $X$  上の円板束で Euler 数が  $n$  であるものである.

グリーム付き多面体  $X$  に対して, ある  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が存在し  $M_X$  の境界の 3 次元多様体が  $k(S^1 \times S^2)$  と同相であったとき,  $k(S^1 \times B^3)$  を  $M_X$  の境界に沿って接着することで閉 4 次元多様体  $W$  が得られる. このとき,  $X$  は  $W$  のシャドウと呼ばれる. グリームを用いずに述べれば, 次のような定義になる.

**定義 1.6.** 閉 4 次元多様体  $W$  に局所平坦に埋め込まれた単純多面体  $X$  に対し, ある  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が存在し,  $W \setminus \text{IntNbd}(X; W)$  が  $k(S^1 \times B^3)$  と微分同相であったとき,  $X$  を  $W$  のシャドウ (shadow) という.

**定理 1.7** (Turaev [34]). 任意の閉 4 次元多様体はシャドウを許容する.

閉 4 次元多様体  $W$  とそのシャドウ  $X$  があったとき, その埋め込みから  $X$  のグリーム  $\mathfrak{gl}$  も定まる. Turaev の再構成と Laudenbach, Poénaru の結果 [17] により, グリーム付き多面体は閉 4 次元多様体の表示として機能する.

## 2 4 次元多様体のシャドウ複雑度

**定義 2.1.**  $X$  は単純多面体,  $W$  はシャドウを許容する 4 次元多様体とする.

- (1)  $X$  が有する真頂点の個数を  $c(X)$  と書き,  $X$  の**複雑度** (complexity) という.
- (2)  $W$  の**シャドウ複雑度**  $\text{sc}(W)$  (shadow-complexity) を  $W$  のすべてのシャドウの複雑度の最小値として定義する.
- (3)  $W$  の**特殊シャドウ複雑度**  $\text{sc}^{\text{sp}}(W)$  (special shadow-complexity) を  $W$  のすべての特殊シャドウの複雑度の最小値として定義する.

定理 1.7 により, シャドウ複雑度と特殊シャドウ複雑度は閉 4 次元多様体の非負整数値の不変量である. また, 定義より任意の閉 4 次元多様体  $W$  に対して  $\text{sc}(W) \leq \text{sc}^{\text{sp}}(W)$  という関係が成り立つ. これらの概念は Costantino により導入された [6].

### 2.1 特殊シャドウ複雑度に関する分類

**定理 2.2** (Costantino [6]).  $W$  を閉 4 次元多様体とする.

- (1)  $\text{sc}^{\text{sp}}(W) = 0$  であることの必要十分条件は,  $W$  が  $S^4, \pm \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2, \pm 2\mathbb{CP}^2$  または  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$  のいずれかと微分同相であることである.
- (2)  $\text{sc}^{\text{sp}}(W) = 1$  であるような  $W$  は存在しない.

この定理の証明の概要は以下の通りである.  $X$  を  $c(X) = 0$  (または  $c(X) = 1$ ) の特殊多面体として, その上の任意のグリームを考え  $M_X$  を構成する. このとき, ある  $k \geq 0$  が存在し  $M_X$  の境界  $\partial M_X$  が  $k(S^1 \times S^2)$  と微分同相であれば, 3-, 4-ハンドルの接着により閉 4 次元多様体が得られる. この方法で得られる閉 4 次元多様体らを分類すれば十分である. しかし実際には,  $\partial M_X$  が  $k(S^1 \times S^2)$  と微分同相になるという条件は非常に大きな制約であり, この条件の特定が証明の主要部となる.

特殊シャドウ複雑度が 2 以上の場合については, 次の結果がある.

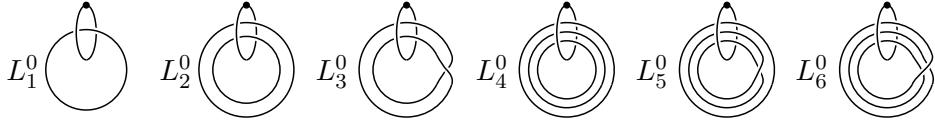


図 2  $S^1 \times S^2 \subset S^1 \times S^3$  内の絡み目  $L_1^0, \dots, L_6^0$ .

**定理 2.3** (直江 [26]). 任意の正整数  $k$  に対し,  $\text{sc}^{\text{sp}}(k(S^1 \times S^3)) = k + 1$ .

この事実と定理 2.2 と合わせて,  $\text{sc}^{\text{sp}}$  は 1 を除く 0 以上の整数全体への全射であることが分かる. なお, 本稿執筆時点では, 特殊シャドウ複雑度が 2 である閉 4 次元多様体はすべて決定されていない. また, 特殊シャドウ複雑度が 3 以上の場合で, その値が具体的に決定されている 4 次元多様体は定理 2.3 の他に知られていない.

Martelli は境界付き 4 次元多様体  $k(S^1 \times B^3)$  の境界の絡み目を固定した際, その絡み目に沿って (適切な枠で) 2-ハンドルを接着し, さらに 3-, 4-ハンドルを接着し得られるような閉 4 次元多様体は微分同相による違いを除き高々有限個であることを示した [18]. この結果から直ちに次が従う.

**定理 2.4** (Costantino [6]). 任意の非負整数  $n$  に対し,  $\text{sc}^{\text{sp}}(W) \leq n$  となる閉 4 次元多様体  $W$  は微分同相による違いを除き高々有限個である.

なお, シャドウ複雑度  $\text{sc}$  については定理 2.4 のような有限性は成り立たない.

## 2.2 シャドウ複雑度 0 の閉 4 次元多様体

ここでは, Martelli [19] のシャドウ複雑度 0 の閉 4 次元多様体に関する結果を紹介する. 境界が  $S^1 \times S^2$  の非交和であるような境界付き 4 次元多様体を **ブロック** という. ブロックの集合  $\mathcal{S}$  に対し,  $\mathcal{S}$  に属するブロックらのコピーを境界同士で貼り合わせて得られる閉 4 次元多様体を  $\mathcal{S}$  で生成される **グラフ多様体** という.

各  $i \in \{1, \dots, 6\}$  に対し,  $L_i^0$  を図 2 に示す  $S^1 \times S^2 \subset S^1 \times S^3$  内の絡み目とし,  $M_i^0 := (S^1 \times S^3) \setminus \nu(L_i^0)$  とおく. さらに,

$$\mathcal{S}_0 = \{S^2 \times D^2, S^2 \times P, M_1^0, \dots, M_6^0\}$$

とする. ただし,  $P$  はパンツ ( $S^2$  から開円板を 3 つ取り除いて得られる曲面) である.

**定理 2.5** (Martelli [19]).  $W$  を閉 4 次元多様体とする. このとき,  $\text{sc}(W) = 0$  であることの必要十分条件は,  $\mathcal{S}_0$  で生成されるあるグラフ多様体  $W'$  とある整数  $k$  が存在し  $W \cong W' \# k\mathbb{CP}^2$  であることである.

さらに, Martelli は  $\text{sc}(W) = 0$  かつ基本群が有限であるような閉 4 次元多様体  $W$  もすべて決定しており, 特に単連結の場合は  $S^2 \times S^2$ ,  $\mathbb{CP}^2$ ,  $\overline{\mathbb{CP}}^2$  らの任意有限個のコピーの連結和と微分同相であることを示している. なお,  $\mathbb{CP}^2 \# k\overline{\mathbb{CP}}^2$  と同相だが微分同相でないような 4 次元多様体の存在はよく知られており (例えば, ごく一部だが [1, 29, 31]), そういった多様体らはすべてシャドウ複雑度が 1 以上ということになる. このことから, シャドウ複雑度は本質的に 4 次元多様体の微分構造に依存した量であることが分かる.

## 2.3 (連結) シャドウ複雑度 1 の閉 4 次元多様体

次に考えるべきは  $\text{sc}(W) = 1$  であるような閉 4 次元多様体の分類である. Martelli の定理 2.5 の類似として安直に次が期待できるであろう.

**予想 2.6.**  $W$  を閉 4 次元多様体とする. このとき,  $\text{sc}(W) \leq 1$  であることの必要十分条件は,  $\mathcal{S}_0$  を含むあるブロックの集合  $\mathcal{S}$  で生成されるあるグラフ多様体  $W'$  とある整数  $k$  が存在し  $W \cong W' \# k\mathbb{CP}^2$  であることである.

これを証明しようとすると, いくつかの技術的な難しさに気付く. その 1 つが連結和に関する問題である.  $\mathcal{S}_0$  により生成されるグラフ多様体全体の集合は, 実は連結和で閉じている. 一方, シャドウ複雑度は連結和に関して劣加法的に振る舞う. つまり,  $\text{sc}(W) = \text{sc}(W') = 1$  なる ( $\mathcal{S}$  で生成される) グラフ多様体  $W, W'$  に対し,  $W \# W'$  もまた ( $\mathcal{S}$  で生成される) グラフ多様体だが  $\text{sc}(W \# W') = 2$  となるが可能性がある. この問題を回避するために, [15] において次が導入された.

**定義 2.7.**  $X$  は単純多面体,  $W$  はシャドウを許容する 4 次元多様体とする.

- (1)  $X$  の特異集合の各連結成分に含まれる真頂点の個数の最大値を  $c^*(X)$  と書き,  $X$  の**連結複雑度** (connected complexity) という.
- (2)  $W$  の**連結シャドウ複雑度**  $\text{sc}^*(W)$  (connected shadow-complexity) を  $W$  のすべてのシャドウの連結複雑度の最小値として定義する.

定義から  $0 \leq \text{sc}^*(W) \leq \text{sc}(W)$  が直ぐに分かる. また,  $\text{sc}^*(W) = 0$  と  $\text{sc}(W) = 0$  は同値である. さらに, 閉 4 次元多様体  $W, W'$  に対し,  $\text{sc}^*(W \# W') \leq \max\{\text{sc}^*(W), \text{sc}^*(W')\}$  が成り立ち, グラフ多様体を扱う上で都合が良い.

$\text{sc}^*(W) \leq \text{sc}(W)$  であることから,  $\text{sc}^*$  は  $\text{sc}$  より粗い不変量になっているが, 次の定理により,  $\text{sc}^*$  は確かに“複雑さ”を測る指標であると言える.

**定理 2.8** (古宇田-Martelli-直江 [15]). 任意の整数  $n$  に対し,  $\text{sc}^*(W) \geq n$  を満たす閉 4 次元多様体  $W$  が存在する.

この定理の証明には, 任意の有限表示群が 4 次元多様体の基本群として実現できることと, Freedman による群の幅 [11] という概念が用いられている.

今一度, 定理 2.5 を思い出す. この定理に現れる  $\mathcal{S}_0$  の各ブロックは, 実は  $c(X) = 0$  であるような単純多面体  $X$  を分解して得られる“多面体の基本パーツ”らに由来している. そこで, 唯 1 つの真頂点を持つ特異集合の近傍に対応する“多面体の基本パーツ”を考えると, さらに 11 種類追加で現れる. これらに対応するブロック  $M_1^1, \dots, M_{11}^1$  は, それぞれ図 3 に示される  $2(S^1 \times S^2) \subset 2(S^1 \times S^3)$  内の絡み目  $L_i^1$  ( $i \in \{1, \dots, 11\}$ ) の管状近傍の補空間  $M_i^1 = 2(S^1 \times S^3) \setminus \nu(L_i^1)$  として定まる. ここで,

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \sqcup \{M_1^1, \dots, M_{11}^1, (\mathbb{RP}^3 \times S^1) \setminus \nu(\mathbb{RP}^1 \times \{\text{pt.}\})\}$$

とする.

**定理 2.9** (古宇田-Martelli-直江 [15]).  $W$  を閉 4 次元多様体とする. このとき,  $\text{sc}^*(W) \leq 1$  であることの必要十分条件は,  $\mathcal{S}_1$  で生成されるあるグラフ多様体  $W'$  とある整数  $k$  が存在し  $W \cong W' \# k\mathbb{CP}^2$  であることである.

$\mathcal{S}_1$  で生成されるグラフ多様体は, ほとんど 2-ハンドル体のダブルであるが,  $\mathbb{RP}^3 \times S^1$  は実はそうではない (このことから, 実は  $\text{sc}^*(\mathbb{RP}^3 \times S^1) = \text{sc}(\mathbb{RP}^3 \times S^1) = 1$  であることも分かる).  $\mathcal{S}_1$  は,  $\mathcal{S}_0$  のブロック, 多面体に由来する 11 個のブロックの他に  $(\mathbb{RP}^3 \times S^1) \setminus \nu(\mathbb{RP}^1 \times \{\text{pt.}\})$  という例外的なブロックが必要であり, これを見つける点に定理 2.9 の難しさがある. また, 4 次元多様体のブロックへの分解を見つけるため, 論文

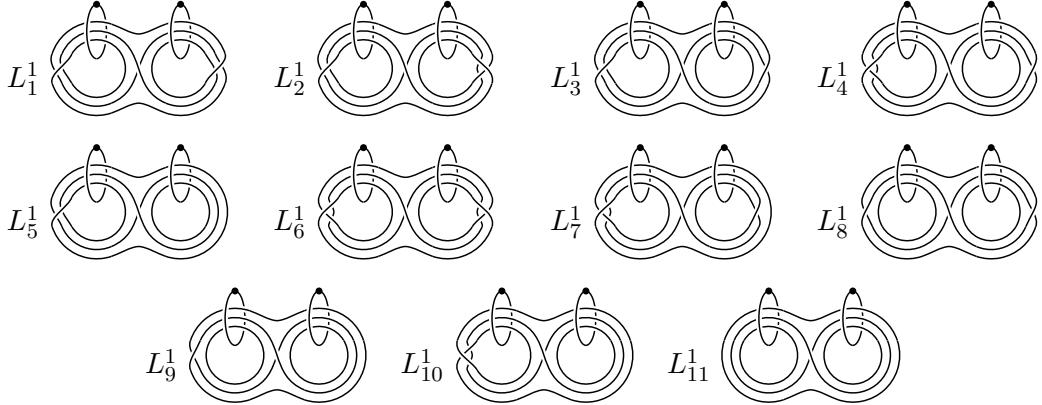


図3  $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2) \subset (S^1 \times S^3) \# (S^1 \times S^3)$  内の絡み目  $L_1^1, \dots, L_{11}^1$ .

では 11 種類の絡み目  $L_1^1, \dots, L_{11}^1$  の例外的手術<sup>\*4</sup> の分類を行っている. この定理をさらに  $\text{sc}^*(W) \leq 2$  の場合に拡張しようと考えた場合, 同様に絡み目の例外的手術の分類が必要となるが, 追加で考えるべき絡み目は 170 種類<sup>\*5</sup> に上る. ちなみに,  $\mathcal{S}_1$  で生成されるグラフ多様体には, 例えば次のような閉 4 次元多様体は現れない;

- 交差形式が  $mE_8 \oplus n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ( $m \neq 0$ ) であるもの;
- 符号数が 0 で, ダブルでないもの;
- 非球面的 (aspherical) であるもの.

したがって, 例えば K3 曲面, 4 次元トーラス  $T^4$ , 双曲 4 次元多様体などの(連結)シャドウ複雑度は少なくとも 2 以上であり, これらを決定することは興味深い問題として残されている.

### 3 シャドウ複雑度と他の不変量との比較

この章の初めに, まず 3 次元多様体のシャドウ複雑度に関して簡単に紹介しておきたい. 閉 3 次元多様体  $N$  に対し,  $\partial M \cong N$  となるような境界付き 4 次元多様体  $M$  がシャドウ  $X$  を許容するとき, この  $X$  を  $N$  の **シャドウ** という. この定義のもと, 3 次元多様体に対しても同様に **シャドウ複雑度** が定義される. Costantino と Thurston は 3 次元多様体のシャドウ複雑度が双曲構造や安定写像と密接な関係を持つことを見出し [10], これによりシャドウ複雑度の幾何的な解釈が進んだ(石川, 古宇田 [14] も参照してほしい). 具体的には, ある正の定数  $C, C'$  が存在し, 任意の 3 次元多様体  $N$  に対し,

$$C\|N\| \leq \text{sc}(N) \leq C'\|N\|^2$$

が成り立つことが示された. ここで,  $\|N\|$  は  $N$  の単体的体積である. このことから, 3 次元多様体  $N$  のシャドウ複雑度が 0 であることと  $N$  がグラフ多様体であることが同値であることも分かる. また, これらの事実を用いて, 境界付き 4 次元多様体のシャドウ複雑度の評価も行われている [24, 25].

さて, 本章の主題はシャドウ複雑度と 4 次元多様体の他の不変量との関係についてであ

<sup>\*4</sup> Costantino-Thurston [10] の結果により, これらの絡み目は  $2(S^1 \times S^2)$  内の絡み目として双曲的である.

<sup>\*5</sup> [16] で真頂点の個数が 2 の特殊多面体がすべてリストアップされている. それらがちょうど 170 個ある.

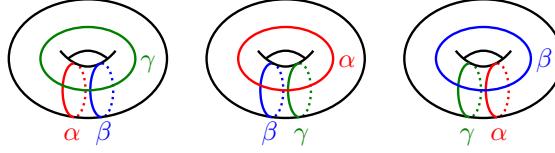


図 4 安定化に用いる  $S^4$  の種数 1 のトライセクション図式.

る. 筆者の知る限り, このような観点での研究は [27] に先立つものは見当たらない. ここでは, 直江-小川 [27] により得られた, 4 次元多様体のシャドウ複雑度とトライセクション種数の関係について解説する.

### 3.1 トライセクション

**定義 3.1.**  $W$  を閉 4 次元多様体とする. ある整数  $g, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し, 次を満たすような  $W$  の分解  $W_1 \cup W_2 \cup W_3$  が存在したとする;

- 各  $i \in \{1, 2, 3\}$  に対し,  $W_i \cong k_i(S^1 \times B^3)$ ;
- 各  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  に対し,  $i \neq j$  ならば  $W_i \cap W_j \cong g(S^1 \times B^2)$ ;
- $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cong g(S^1 \times S^1)$  (すなわち, 種数  $g$  の有向閉曲面).

このような分解  $\mathcal{T}$  を  $W$  の**トライセクション** (trisection) という. また, 曲面  $\Sigma = W_1 \cap W_2 \cap W_3$  を**中心曲面** (central surface) といい, その種数  $g(\mathcal{T}) = g$  を  $\mathcal{T}$  の**種数** (genus) という.

トライセクションは Gay と Kirby によって導入された. 彼らは, 4 次元多様体  $W$  から  $\mathbb{R}^2$  へのある種の可微分写像の特異点の変形を介し, 次の定理を示している.

**定理 3.2** (Gay, Kirby [12]). 任意の閉 4 次元多様体はトライセクションを許容する.

次に, トライセクション図式を紹介する. 中心曲面  $\Sigma$  は,  $\partial(W_1 \cap W_2) = \partial(W_2 \cap W_3) = \partial(W_3 \cap W_1)$  とも見なせる.  $W_1 \cap W_2, W_2 \cap W_3, W_3 \cap W_1$  はそれぞれ種数  $g$  の 3 次元 1-ハンドル体であるため, 各々が完備メリディアン円板系を持つ. その境界を  $\Sigma$  に描き込んだものが**トライセクション図式** (trisection diagram) である. トライセクション図式は閉 4 次元多様体を微分同相の違いを除き一意的に復元し, 4 次元多様体の表示として機能する.

トライセクション図式に対し, 図 4 のいずれかの図式との連結和を取るといった操作を**安定化** (stabilization) と呼ぶ. この安定化は, トライセクションの種数を 1 つ増やしつつ, 対応する 4 次元多様体の微分同相類を変えない操作になっている [12, 21]. また, 安定化の逆操作を**非安定化** (destabilization) という.

### 3.2 トライセクション種数

**定義 3.3.** 閉 4 次元多様体  $W$  のトライセクションの種数の最小値を  $g(W)$  と書き,  $W$  の**トライセクション種数** (trisection genus) という.

$g(S^4) = 0$ ,  $g(\mathbb{CP}^2) = g(\overline{\mathbb{CP}}^2) = g(S^1 \times S^3) = 1$  であり,  $g \leq 1$  の閉 4 次元多様体はこれらに限ることは容易に分かる.  $g = 2$  の場合は, Meier と Zupan によって分類が行われ,  $S^2 \times S^2$  あるいは  $g = 1$  の閉 4 次元多様体 2 つの連結和のみであることが証明された [22].  $g \geq 3$  の場合の分類は完了していないが, Meier によって次が予想されている.

**予想 3.4** (Maier [20]).  $g(W) = 3$  であるような閉 4 次元多様体  $W$  は,  $g \leq 2$  の閉 4 次元多様体らの連結和で得られるもののに,  $L_p$  または  $L'_p$  ( $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ) に限る.

ただし,  $L_p, L'_p$  はそれぞれレンズ空間  $L(p, 1)$  のスパン多様体, 捻れスパン多様体である.  $p$  が偶数の場合は  $L_p \not\cong L'_p$  であり,  $p$  が奇数の場合は  $L_p \cong L'_p$  である [28].

### 3.3 ハンドル分解から得られるトライセクション

閉 4 次元多様体  $W$  のハンドル分解からトライセクションを構成することができる. 簡単のため, ハンドル分解は, 0-ハンドルと 4-ハンドルをちょうど 1 つずつ有し, 各ハンドルは自身よりも指数が低いハンドルらの境界に接着されているものとする. ここで,  $H_{01}$  として 0-,1-ハンドルらの和集合,  $H_2$  として 2-ハンドルらの和集合,  $H_{34}$  として 3-,4-ハンドルらの和集合を表すことにする. また,  $L \subset \partial H_{01}$  を 2-ハンドルの接着円周からなる絡み目とし,  $\tau$  を  $L$  の解消トンネル<sup>\*6</sup>とする. このとき,

$$\begin{aligned} W_1 &= H_{01} \setminus \text{IntNbd}(L \cup \tau; W), \\ W_2 &= H_2 \cup \text{Nbd}(L \cup \tau; W), \\ W_3 &= H_{34} \setminus \text{IntNbd}(L \cup \tau; W) \end{aligned}$$

と定義すると, これらは  $W$  のトライセクションを与える [23]. このときの中心曲面は,  $\partial \text{Nbd}(L \cup \tau; \partial H_{01})$  と同一視できる. また, 2-ハンドルの枠の情報からトライセクション図式を具体的に描くこともできる.

### 3.4 加重シャドウ複雑度

単純多面体  $X$  の複雑度  $c(X)$  は, その真頂点の個数として定義されていた. つまり, 謂わば  $c(X)$  とは “特異集合の複雑さ” である. 一方で, [27] では “領域の複雑さ” も考慮に入れた加重複雑度  $c_r(X)$  が導入された.

**定義 3.5.** 実数  $r \geq 0$  を固定する.

(1) 単純多面体  $X$  に対し,  $X$  が閉曲面でないときは

$$c_r(X) = c(X) + \sum_{R: \text{領域}} r(1 - \chi(R)).$$

とし,  $X$  が 2 次元球面  $S^2$  に同相であるときは  $c_r(X) = 0$  として  $X$  の  $r$ -加重複雑度  $c_r(X)$  ( $r$ -weighted complexity) を定義する.

(2) 閉 4 次元多様体  $W$  の  $r$ -加重シャドウ複雑度  $\text{sc}_r(W)$  ( $r$ -weighted shadow-complexity) を  $W$  のすべてのシャドウの  $r$ -加重複雑度の最小値として定義する.

**注意 3.6.** (1)  $S^2$  以外の閉曲面は閉 4 次元多様体のシャドウになり得ないため, それらに対しては加重複雑度を定義していない.  
(2)  $X$  が閉曲面でない場合, 領域  $R$  内に適切に弧をいくつか取ると, これに沿って  $R$  を切り開くことで円板が得られる. このような弧の成分数はちょうど  $1 - \chi(R)$  である. そのような弧らの和集合を  $X$  の **切断系** という.

<sup>\*6</sup> 閉 3 次元多様体  $N$  と, 絡み目  $L \subset N$  に対し,  $L$  の解消トンネル  $\tau$  とは,  $L$  に端点を置く線分らの  $N$  への埋め込みであり,  $\text{Nbd}(L \cup \tau; N)$  と  $N \setminus \text{IntNbd}(L \cup \tau; N)$  が  $N$  の Heegaard 分解を与えるものである.

$\text{sc}_r(W)$  は閉 4 次元多様体の不変量であり,  $\{m + rn \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  に値を取る. この新たな不変量と, シャドウ複雑度, 特殊シャドウ複雑度, 連結シャドウ複雑度の比較は次の通りである.

**命題 3.7** (直江-小川 [27]).  $W$  を閉 4 次元多様体とし, 実数  $r, r'$  を  $0 < r < r'$  とする.

- (1)  $\text{sc}^*(W) \leq \text{sc}(W) \leq \text{sc}_r(W) \leq \text{sc}_{r'}(W) \leq \text{sc}^{\text{sp}}(W)$ .
- (2)  $\text{sc}(W) = \text{sc}_0(W)$ .
- (3)  $r \geq 2$  のとき,  $\text{sc}_r(W) = \text{sc}^{\text{sp}}(W)$ .

また,  $\text{sc}_r$  は定理 2.4 と同様の有限性をもつ. つまり, 任意の実数  $r > 0, a \geq 0$  に対し,  $\text{sc}_r \leq a$  となる閉 4 次元多様体全体は微分同相による違いを除き高々有限個である.

### 3.5 トライセクション種数の評価

第 3.3 節で説明した方法を応用し, シャドウからトライセクション  $\mathcal{T}$  を構成することができる. まず,  $X$  を閉 4 次元多様体  $W$  のシャドウ,  $T$  を  $S(X)$  の極大木とし,  $\Gamma$  を  $X$  の切断系とする. これらから,  $W$  のハンドル分解が 1 つ指定できる. この分解における 2-ハンドルの接着円周を  $L_2$  とすると,  $S(X) \setminus T$  の各連結成分に対し 2 本,  $\Gamma$  の各連結成分に対し 1 本のトンネルを用意することで  $L_2$  の解消トンネル  $\tau$  を与えることができる.  $T$  は  $S(X)$  の極大木であるため,  $S(X) \setminus T$  の連結成分数は  $\text{rank}\pi_1(S(X)) = c(X) + 1$  に等しい. 一方で,  $\Gamma$  の成分数は  $\sum_{R: \text{領域}} (1 - \chi(R))$  に等しい. 以上より, このときの解消トンネル  $\tau$  の成分数は

$$\begin{aligned} 2(c(X) + 1) + \sum_{R: \text{領域}} (1 - \chi(R)) &= 2 + 2 \left( c(X) + \frac{1}{2} \sum_{R: \text{領域}} (1 - \chi(R)) \right) \\ &= 2 + 2c_{1/2}(X) \end{aligned}$$

となる. さらに, このときのトライセクション  $\mathcal{T}$  の種数は, 簡単な計算から  $\tau$  の成分数に 1 を加えたものであることが分かるため,

$$g(W) \leq 3 + 2c_{1/2}(W)$$

が得られる. ここから, シャドウの領域の形状に関する場合分けを行い, トライセクションの非安定化が必ず 1 度は行えることが示せる. 命題 3.11 と合わせて次が得られる.

**定理 3.8** (直江-小川 [27]). 任意の実数  $r \geq \frac{1}{2}$  と任意の閉 4 次元多様体  $W$  に対して,  $g(W) \leq 2 + 2\text{sc}_r(W)$  が成り立つ.

### 3.6 計算例と最良性

$k$  を 1 以上の整数として, 以下のように単純多面体  $X_k$  を定義する.  $k = 1$  のときは,  $X_1 = S^2$ .  $k \geq 2$  のとき,  $S^2$  に  $k - 1$  個の互いに交わらない単純閉曲線の族  $C_1, \dots, C_{k-1}$  をとる. ただし,  $S^2 \setminus (C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{k-1})$  は 2 つの円板と  $k - 2$  個のアニュラスに分かれるものとする. ここで, 各  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$  に対し, 円板  $D_i$  の境界が  $C_i$  に一致するよう  $S^2$  に  $D_i$  を貼り付ける. こうして得られる単純多面体  $S^2 \cup (D_1 \cup \dots \cup D_{k-1})$  を  $X_k$  とする. 図 5 を見よ. このとき, 簡単な計算により  $c_{1/2} = \max \{0, \frac{k-2}{2}\}$  であることが分かる.

整数  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$  を  $2k_1 + k_2 + k_3 = k$  となるよう選ぶ. このとき, 単純多面体  $X_k$  は  $k_1(S^2 \times S^2) \# k_2 \mathbb{CP}^2 \# k_3 \overline{\mathbb{CP}}^2$  にシャドウとして埋め込むことができる. さらに, これにより次が成り立つ.

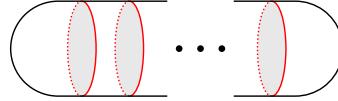


図 5 単純多面体  $X_k$ .

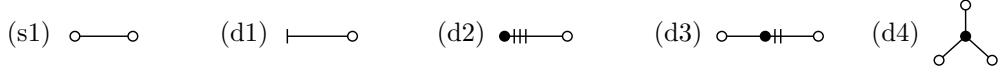


図 6  $c_{1/2} = 0$  の単純多面体のエンコードグラフ.

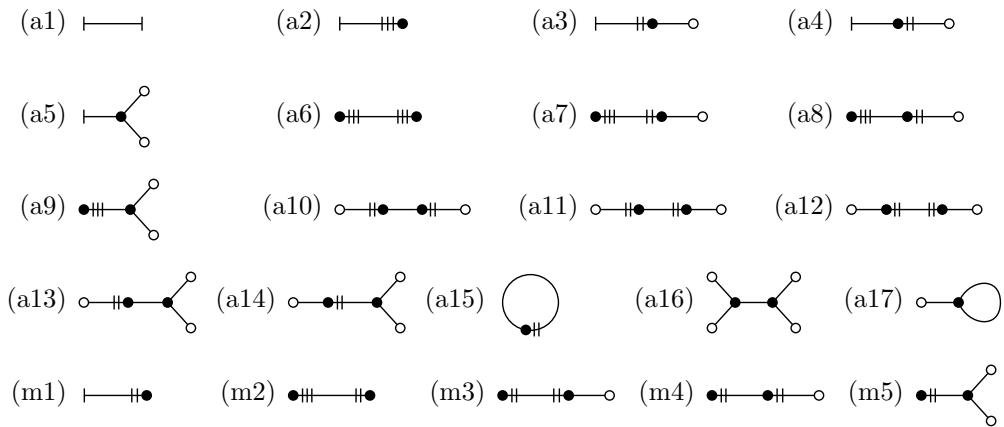


図 7  $c_{1/2} = \frac{1}{2}$  の単純多面体のエンコードグラフ.

**命題 3.9.**  $\text{sc}_{1/2}\left(k_1(S^2 \times S^2) \# k_2 \mathbb{CP}^2 \# k_3 \overline{\mathbb{CP}}^2\right) = \max \left\{0, \frac{2k_1+k_2+k_3-2}{2}\right\}$

**注意 3.10.** (1)  $k\mathbb{CP}^2$  のシャドウ  $X_k$  を考えれば,  $0 \leq r < \frac{1}{2}$  に対しても  $\text{sc}_r(k\mathbb{CP}^2) \leq \max \{0, (k-2)r\}$  であることが分かる. 一方で,  $g(k\mathbb{CP}^2) = k$  であるため,  $k\mathbb{CP}^2$  は  $k \geq 3$ ,  $0 \leq r < \frac{1}{2}$  に対して  $g(W) > 2 + 2\text{sc}_r(W)$  である. すなわち, 定理 3.8 の不等式が成り立つための  $r$  は  $\frac{1}{2}$  以上である必要がある.

(2)  $p = 2 + 2q$  を満たす任意の  $(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し,  $g(W) = p$ ,  $q = \text{sc}_{1/2}(W)$  を満たす閉 4 次元多様体  $W$  が存在する. なお,  $g$  は 0 以上の整数,  $\text{sc}_{1/2}$  は 0 以上の半整数すべてに値を取りうることに注意する. とくに, 命題 3.9 の多様体はすべてこの性質を満たす.

以上の意味で, 定理 3.8 の不等式  $g(W) \leq 2 + 2\text{sc}_{1/2}(W)$  は最良であると言える.

### 3.7 加重シャドウ複雑度が低い閉 4 次元多様体の分類

最後に, 定理 3.8 と注意 3.10 を踏まえ,  $r = \frac{1}{2}$  の状況に着目し, 加重シャドウ複雑度に関する閉 4 次元多様体の分類問題を考える.

図 6, 図 7 にそれぞれ  $\frac{1}{2}$ -加重複雑度が 0 の単純多面体,  $\frac{1}{2}$ -加重複雑度が  $\frac{1}{2}$  の単純多面体を示した. なお, これらは**エンコードグラフ**<sup>\*7</sup>と呼ばれる [19] で導入された方法で単純

<sup>\*7</sup> 単純多面体を単純閉曲線らに沿っていくつかの基本的なピースに分解し, その各ピースに対して頂点を用意し, 単純閉曲線で貼り合うピースに対応する頂点同士を辺で結ぶことで得られるグラフである. 各頂点はピースを特定させるため描き分けを行っている.

多面体を表している. これらの単純多面体  $X$  にグリームを任意に与え, Turaev の再構成により境界付き 4 次元多様体  $M_X$  を構成し, その境界が  $k(S^1 \times S^2)$  となるような場合を特定する. さらに, 4 次元多様体を Kirby 図式で表し Kirby 計算を行うことで, 4 次元多様体を絞り込み次が得られた.

**定理 3.11** (直江-小川 [27]).  $W$  を閉 4 次元多様体とする.

- (1)  $\text{sc}_{1/2}(W) = 0$  であることの必要十分条件は,  $W$  が  $S^4, \pm \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2, \pm 2\mathbb{CP}^2$  または  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$  のいずれかと微分同相であることである.
- (2)  $\text{sc}_{1/2}(W) = \frac{1}{2}$  であることの必要十分条件は,  $W$  が  $\pm 3\mathbb{CP}^2, \pm 2\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2, S^1 \times S^3, \pm \mathbb{CP}^2 \# (S^1 \times S^3), L_2, L'_2$  または  $L_3$  のいずれかと微分同相であることである.

**注意 3.12.**  $\text{sc}_{1/2} = 0$  の閉 4 次元多様体は  $\text{sc}^{\text{sp}} = 0$  のものらと同じである (cf. 定理 2.2).

## 参考文献

- [1] A. Akhmedov and B. D. Park, *Exotic smooth structures on small 4-manifolds*, Invent. Math. **173** (2008), no. 1, 209–223.
- [2] U. Burciu, *For a fixed Turaev shadow Jones-Vassiliev invariants depend polynomially on the gleams*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), no. 1, 110–127.
- [3] A. Carrega and B. Martelli, *Shadows, ribbon surfaces, and quantum invariants*, Quantum Topol. **8** (2017), no. 2, 249–294.
- [4] F. Costantino, *Shadows and branched shadows of 3 and 4-manifolds*, Scuola Normale Superiore, Edizioni della Normale, Pisa, Italy, 2005.
- [5] F. Costantino, *Stein domains and branched shadows of 4-manifolds*, Geom. Dedicata **121** (2006), 89–111.
- [6] F. Costantino, *Complexity of 4-manifolds*, Exp. Math. **15** (2006), no. 2, 237–249.
- [7] F. Costantino, *6j-symbols, hyperbolic structures and the volume conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 1831–1854.
- [8] F. Costantino, *Coloured Jones invariants of links and the volume conjecture*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 1, 1–15.
- [9] F. Costantino, *Branched shadows and complex structures on 4-manifolds*, J. Knot Theory Ramif. **17** (2008), no. 11, 1429–1454.
- [10] F. Costantino and D. Thurston, *3-manifolds efficiently bound 4-manifolds*, J. Topol. **1** (2008), no. 3, 703–745.
- [11] M. H. Freedman, *Group width*, Math. Res. Lett. **18** (2011), no. 3, p. 433–436.
- [12] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
- [13] M. N. Goussarov, *Interdependent modifications of links and invariants of finite degree*, Topology **37** (1998), no. 3, 595–602.
- [14] M. Ishikawa and Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of 3-manifolds*, Math. Ann. **367** (2017), no. 3-4, 1819–1863.
- [15] Y. Koda, B. Martelli and H. Naoe, *Four-manifolds with shadow-complexity one*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **31** (2022), no. 4, 1111–1212.
- [16] Y. Koda and H. Naoe, *Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary*, Algebr.

Geom. Topol. **20** (2020), no. 7, 3707–3731

- [17] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.
- [18] B. Martelli, *Links, two-handles, and four-manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2005**, no. 58, 3595–3623.
- [19] B. Martelli, *Four-manifolds with shadow-complexity zero*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2011**, no. 6, 1268–1351.
- [20] J. Meier, *Trisections and spun four-manifolds*, Math. Res. Lett. **25** (2018), no. 5, 1497–1524.
- [21] J. Meier, T. Schirmer and A. Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 11, 4983–4997.
- [22] J. Meier and A. Zupan, *Genus-two trisections are standard*, Geom. Topol. **21** (2017), no. 3, 1583–1630.
- [23] J. Meier and A. Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115** (2018), no. 43, 10880–10886.
- [24] H. Naoe, *Mazur manifolds and corks with small shadow complexities*, Osaka J. Math. **55** (2018), no. 3, 479–498.
- [25] H. Naoe, *Corks with large shadow-complexity and exotic 4-manifolds*, Experiment. Math. **30** (2021), no. 2, 157–171.
- [26] H. Naoe, *The special shadow-complexity of  $\#_k(S^1 \times S^3)$* , J. Knot Theory Ramifications, **34** (2025), no. 5, 2550014.
- [27] H. Naoe and M. Ogawa, *Shadow-complexity and trisection genus*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) (in press).
- [28] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifolds with effective torus actions. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279–317.
- [29] J. Park, A. I. Stipsicz, and Z. Szabó, *An exotic smooth structure on  $\mathbb{CP}^2 \# 5\overline{\mathbb{CP}}^2$* , Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 5–6, 701–712.
- [30] A. N. Shumakovitch, *Shadow formula for the Vassiliev invariant of degree two*, Topology **36** (1997), no. 2, 449–469.
- [31] A. Stipsicz and Z. Szabó, *An exotic smooth structure on  $\mathbb{CP}^2 \# 6\overline{\mathbb{CP}}^2$* , Geom. Topol. **9** (2005), 813–832.
- [32] D. P. Thurston, The algebra of knotted trivalent graphs and Turaev’s shadow world, in *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, 337–362, Geom. Topol. Monogr., 4, Geom. Topol. Publ., Coventry.
- [33] V. G. Turaev, *Shadow links and face models of statistical mechanics*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 1, 35–74.
- [34] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.