Parametrized topological complexity of spherical fibrations over spheres

箕輪　悠希　(京都大学理学研究科　数学・数理解析専攻 (D3))*

1　概説

ロボット工学の領域には経路計画とよばれる研究主題があり、おおむね次のような問題の解決を目標とする。

Question 1.1. 空間上の 2 点 A, B が与えられたとき、A 地点から B 地点までの経路を返すプログラムを構成せよ。

これとは別に動作計画とよばれる研究主題があるが、根源的な問いはこれと同質である。たとえば「空間」として「ロボットアームの取りうる姿勢すべてのなす空間」を想定すれば、上の問題は「ロボットアームを初期姿勢から目標姿勢まで動作させるプログラムを構成せよ」と置換され、これは動作計画の基本的な問題となる。Farber [4] はこれを翻案し、おおむね次のような問題を提示した。

Question 1.2. 空間上の 2 点 A, B が与えられたとき、A 地点から B 地点までの経路を返す**連続**プログラムは存在するか。ただし、ここでいう連続とは「初期・目標地点が微小に変化したときに微小変化した経路を返す」の意である。

ここで追加された連続性の仮定は、もとの問題を顧慮しても自然なものに思える。ところが、空間が可縮でないとき上のような連続プログラムは**存在しない**。それでも、いくつかの局所的な連続プログラムを組み合わせて空間全体にわたる経路計画・動作計画のプログラムを構成することは可能である。Farber は、ここで必要となる局所的な連続プログラムの最小数が空間のホモトピー型によって決定されることを示し、空間の **topological complexity**（位相的複雑さ）というホモトピー不変量を定義した。

Topological complexity の研究は、多種多様な方針のもとで行われている。まず、**LS カテゴリー**とよばれるホモトピー不変量との類似性が注目される。LS カテゴリーは 20 世紀後半の代数トポロジーにおける主要な研究対象であり、さまざまな理論や手法が展開されてきた。これらの不変量は sectional category という（写像の）ホモトピー不変量に統合され、それを媒介して LS カテゴリーの研究手法を topological complexity に応用することが試みられてきた。さらに、空間の幾何学的な性質との関連も調べられている。たとえば実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ の topological complexity は、そのはめ込み次元と関係している。

---

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 理学研究科
e-mail: minowa.yuki.48z@st.kyoto-u.ac.jp
本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 の支援を受けたものです。

一方で、Question 1.2 の変種に対応した様々な亜種も考案されている。というのも、実際の経路計画や動作計画では Question 1.2 よりも複雑な問題を取り扱うことが多い。たとえば 2 点 A, B のほかに中間地点を設定することもあれば、2 点 A, B が同一のときに自明な経路を返すようなプログラムを考えたり、ロボットアームの関節の可動性に制約を課すこともある。本稿ではこれらの亜種についても言及し、とくに表題にもある **parametrized topological complexity** を詳細にみていく。

Topological complexity やその亜種の研究は、これらの方針が相補い連携することによって枝葉を広げてきた。本稿ではこの関連の様相を述べつつ、球面上の球面ファイブレーションの parametrized topological complexity に関する講演者 [13] の結果を紹介する。CW 複体のセル構造にもとづく LS カテゴリーの研究手法を parametrized topological complexity の決定に応用したものは本結果をおいてなく、この複合的な方針にもとづく研究のさらなる発展が期待できる。

以下、本稿では「空間」といえば（非退化な）基点つき空間を指すものとする。

2 Topological complexity

まず、概説で述べた topological complexity の説明を定式化するところから始めよう。弧状連結な位相空間 X の自由道空間を $X^I = \{\gamma\colon [0,1] \to X\}$ とかく。

Definition 2.1. 空間 X の **topological complexity** は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、$\mathsf{TC}(X)$ と記述される。[*1]

- 各 U_i 上で次のファイブレーション Π の（連続な）右逆写像をとることができるような、X^2 の開被覆 $U_0, \cdots, U_k$ が存在する。

$$\Pi\colon X^I \to X^2, \quad \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)).$$

上のような開被覆が存在しないときは、$\mathsf{TC}(X) = \infty$ とする。

Topological complexity のもっとも基本的な性質として、次のようなものがある。

Proposition 2.2

1. 空間 X および Y がホモトピー同値のとき、$\mathsf{TC}(X) = \mathsf{TC}(Y)$ である。
2. 空間 X が可縮のとき、かつそのときに限り $\mathsf{TC}(X) = 0$ である。

Sketch of the proof. 1. に関しては、X^2 と Y^2 のホモトピー同値写像によって該当の開被覆を引き戻せばよい。2. に関しては、Π の連続な右逆写像によって 1 点への変位レトラクションが構成される。逆も同様。 □

[*1] Farber [4] の原論文ではこれに 1 を加えた値を $\mathsf{TC}(X)$ の定義としている。年代の古い論文はこれに倣っているため、参照の際は注意されたい。

Topological complexity の知られている空間の例をいくつか紹介する。この他にも閉曲面などの topological complexity が計算されている。

Example 2.3. 球面 S^n に対し、次が成立する。

$$\mathsf{TC}(S^n) = \begin{cases} 1 & (n\text{ が奇数}) \\ 2 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

Example 2.4. [5, 6] Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の m 点配置空間

$$F(\mathbb{R}^d, m) := \{(x_1, \cdots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}^d, \quad i \neq j\text{ ならば }\quad x_i \neq x_j\}$$

に対し、次が成立する。

$$\mathsf{TC}(F(\mathbb{R}^d, m)) = \begin{cases} 2m-2 & (d\text{ が奇数}) \\ 2m-3 & (d\text{ が偶数}) \end{cases}$$

とくに $F(\mathbb{R}^d, 2) \simeq S^{d-1}$ であることに注意されたい。

Example 2.5. [6] 実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ の（Euclid 空間への）はめ込み次元を $\epsilon(n)$ とする。このとき、次が成立する。

$$\mathsf{TC}(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \epsilon(n) - 1 & (n = 1, 3, 7) \\ \epsilon(n) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

3 LS カテゴリー

LS カテゴリーは「閉多様体上の滑らかな実関数は、最小でいくつの臨界点をもつか」という問題に由来する不変量であり、次のように定義される。以下、X の道空間を $\mathcal{P}X = \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = *_X\}$ とかく。

Definition 3.1. 空間 X の **LS カテゴリー**は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、$\mathsf{cat}(X)$ と記述される。

- 各 U_i 上で次のファイブレーション ev_1 の右逆写像をとることができるような、X の開被覆 $U_0, \cdots, U_k$ が存在する。

$$\mathrm{ev}_1 \colon \mathcal{P}X \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

上のような開被覆が存在しないときは、$\mathsf{cat}(X) = \infty$ とする。

Proposition 2.2 2. と同じような議論によって、上の定義は「各 $U_i \hookrightarrow X$ が零ホモトピックになるような X の開被覆 $U_0, \cdots, U_k$ が存在する最小の k」と換言できる。LS カテゴリーの（ほぼ）同値な定義のひとつとして、Whitehead によるものを次に挙げる。

Proposition 3.2　$T^m(X) := \{(x_1, \cdots, x_m) \in X^m \mid$ ある i に対して $x_i = *_X\}$ とする。X が弧状連結な正規空間のとき、$\mathsf{cat}(X)$ は次の図式がホモトピー可換となる整数 k の最小値と一致する。

$$\begin{tikzcd} & T^{k+1}(X) \arrow[d, hook] \\ X \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "\Delta"] & X^{k+1} \end{tikzcd}$$

ただし、Δ は対角写像 $x \mapsto (x, \cdots, x)$ である。

たとえば二つめの定義より、非自明な懸垂空間 ΣX に対し $\mathsf{cat}(\Sigma X) = 1$ となることがわかる。[*2] しかしながら空間が複雑になればなるほど、その LS カテゴリーを上の定義から直截に決定することは困難になる。そこで、さまざまな評価手法が編み出されてきた。

Definition 3.3. 空間 X の**弱カテゴリー**は合成写像 $X \xrightarrow{\Delta} X^{k+1} \twoheadrightarrow X^{k+1}/T^{k+1}(X)$ が零ホモトピックになる整数 k の最小値であり、$\mathsf{wcat}(X)$ と記述される。上のような整数が存在しないときは、$\mathsf{wcat}(X) = \infty$ とする。

可換環上の代数 A およびそのイデアル I に対し、冪零度 $\mathsf{nil}(I)$ は $I^{k+1} = 0$ となる最小の整数 k として定義される。たとえば $\mathsf{nil}(H^*(X; R))$ は「$u_1 u_2 \cdots u_k \neq 0$ となるような非零元 $u_1, u_2, \cdots, u_k \in H^{\geq 1}(X; R)$ が存在する最大の k」と換言できる。[*3]

Proposition 3.4　空間 X および可換環 R に対し、次が成立する。

$$\mathsf{nil}(H^*(X; R)) \leq \mathsf{wcat}(X) \leq \mathsf{cat}(X).$$

とはいうものの、実は $\mathsf{wcat}(X)$ の決定もそこまで容易ではない。後ほど紹介するが、X が CW 複体の場合はセル構造を用いて $\mathsf{wcat}(X)$ を評価することが可能である。

最後に、LS カテゴリーによる topological complexity の "評価" を確認しよう。

Proposition 3.5　空間 X に対し、$\mathsf{cat}(X) \leq \mathsf{TC}(X) \leq 2\,\mathsf{cat}(X)$ となる。

Sketch of the proof.　左の不等式は次の引き戻し図式から示される。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & X^I \arrow[d, "\Pi"] \\ X \arrow[r, "x \mapsto (*, x)"'] & X^2 \end{tikzcd}$$

Π はファイブレーションであるため、$U \hookrightarrow X^2$ が零ホモトピックならば U 上で Π の右逆写像をとることができる。よって右の不等式が従う。 □

[*2] 読者の演習問題とする。
[*3] このことから、しばしば cup-length とよばれる。

4 Topological complexity の亜種たち

4.1 さまざまな亜種

概説でも述べたとおり、Question 1.2 の変形に対応した topological complexity の様々な亜種を定義することができる。たとえば、Rudyak [14] は「2 点 A, B のほかに中間地点が設定された」問題に対応する不変量 sequential topological complexity を定義した。また、岩瀬ら [11] は「2 点 A, B が同一のときに自明な経路を返すようなプログラム」に対応する不変量 monoidal topological complexity を定義した。本稿の主題からそれるため、これらの正確な定義は割愛する。[*4]

一方で Cohen ら [3] は、topological complexity をファイブレーションに沿って拡張することで parametrized topological complexity を定義した。ファイバーが弧状連結なファイブレーション $p\colon X \to B$ に対し、ファイバーワイズ道空間 X_B^I およびファイバーワイズ積 X_B^2 を次のように定義する。

$$X_B^I = \{\gamma\colon [0,1] \to X \mid p \circ \gamma \text{は恒等写像}\}$$
$$X_B^2 = \{(x_1, x_2) \in X^2 \mid p(x_1) = p_{(}x_2)\}$$

Definition 4.1. ファイブレーション $p\colon X \to B$ の **parametrized topological complexity** は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、$\mathsf{TC}[X \to B]$ と記述される。

- 各 U_i 上で次のファイブレーション Π の右逆写像をとることができるような、X_B^2 の開被覆 $U_0, \cdots, U_k$ が存在する。

$$\Pi\colon X_B^I \to X_B^2, \quad \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \tag{1}$$

上のような開被覆が存在しないときは、$\mathsf{TC}[X \to B] = \infty$ とする。

自明なファイブレーション $X \to *$ に対し、$\mathsf{TC}[X \to *] = \mathsf{TC}(X)$ となっていることに注意されたい。より一般に、次が成立する。

Proposition 4.2 $p\colon X \to B$ をファイブレーション、F をそのファイバーとする。

1. $\mathsf{TC}[X \to B] \geq \mathsf{TC}(F)$ となる。
2. p が自明なファイブレーションのとき、$\mathsf{TC}[X \to B] = \mathsf{TC}(F)$ となる。

Sketch of the proof. 次の図式は引き戻し図式である。

$$\begin{tikzcd}
F^I \arrow[r] \arrow[d, "\Pi"'] & X_B^I \arrow[d, "\Pi"] \\
F^2 \arrow[r] & X_B^2
\end{tikzcd}$$

[*4] これらの問題設定を手当たり次第に組み合わせて "新しい不変量" を提案し、初歩的な命題や計算例を添えて完結するような論文もないわけではない。

開被覆を最下行の写像で引き戻すことで 1. が証明される。2. も同様。 □

Parametrized topological complexity は、経路や動作にかかる制約がファイブレーションで記述されるような問題設定に対応している。具体的な例をみていこう。

Example 4.3. [3, 7] 空間 $\mathbb{R}^d$ に m 個の動かない障害物がランダムに配置され、さらに n 体のロボットの初期配置と目標配置とが与えられたとき、衝突を起こさずにロボットたちを初期配置から目標配置まで移動させるプログラムを考える。この問題設定は、次の Fadell-Neuwirth ファイブレーションとよばれる射影によって定式化される。

$$F(\mathbb{R}^d, m+n) \to F(\mathbb{R}^d, m),\ (x_1, \cdots, x_m, \cdots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, \cdots, x_m)$$

このとき、次が成立する。

$$\mathsf{TC}[F(\mathbb{R}^d, m+n) \to F(\mathbb{R}^d, m)] = \begin{cases} 2n+m-1 & (d\text{ が奇数}) \\ 2n+m-2 & (d\text{ が偶数}) \end{cases}$$

Example 4.4. ここに空間 $\mathbb{R}^{n+2}$ の原点から伸びて 1 個の関節をもち、関節部分の角度が直角に固定されているロボットアームがある。原点側の腕がランダムな位置に固定され、さらにもう 1 本の腕の初期配置と目標配置が与えられたとき、原点側の腕を軸とした回転によって初期配置から目標配置まで動作させるプログラムを考える。この問題設定は、単位接束 $T \to S^{n+1}$ によって定式化される。次が本稿における主結果である。

Theorem 4.5 [13] 単位接束 $S^n \to T \to S^{n+1}$ に対し、次が成立する。

$$\mathsf{TC}[T \to S^{n+1}] = \begin{cases} 1 & (n = 1, 5) \\ 2 & (n\text{ が偶数、または }n \equiv -1 \pmod 4) \end{cases}$$

4.2 LS カテゴリーとの関連

Schwarz [15] はファイブレーションの種数（genus）という不変量を定義した。今日この名称はあまり用いられず、専ら sectional category とよばれる。

Definition 4.6. 写像 $f\colon X \to Y$ の **sectional category** は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、$\mathsf{secat}(f)$ と記述される。

- 各 U_i 上で写像 f の右ホモトピー逆写像をとることができるような、Y の開被覆 $U_0, \cdots, U_k$ が存在する。

上のような開被覆が存在しないときは、$\mathsf{secat}(f) = \infty$ とする。

Sectional category は、次の意味においてホモトピー不変量である。

Lemma 4.7 下のホモトピー可換図式において、上下辺はホモトピー同値写像である。

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "\sim"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

このとき $\mathsf{secat}(f_1) = \mathsf{secat}(f_2)$ となる。

この Lemma から次のようなことがわかり、LS カテゴリーと (parametrized) topological complexity との関連がみえてくる。

- $\mathsf{cat}(X) = \mathsf{secat}(\mathrm{ev}_1 \colon \mathcal{P}X \to X) = \mathsf{secat}(*_X \hookrightarrow X)$.
- $\mathsf{TC}[X \to B] = \mathsf{secat}(\Pi \colon X^I_B \to X^2_B) = \mathsf{secat}(\Delta \colon X \to X^2_B)$.

ただし対角写像 Δ は $\Delta(x) := (x, x)$, $x \in X$ で定義される。

さらなる関連をみていこう。Schwarz[15] は、コホモロジーを用いて $\mathsf{secat}(f)$ の下からの評価を与えた。

Proposition 4.8 写像 $f \colon X \to Y$ および可換環 R に対し、次が成立する。

$$\mathsf{secat}(f) \geq \mathsf{nil}(\mathrm{Ker}\{f^* \colon H^*(Y; R) \to H^*(X; R)\})$$

García-Calcines ら [10] は特定の条件下で Proposition 3.4 と類似の結果を証明し、より強い（かもしれない）下からの評価を与えた。

Proposition 4.9 [10, Theorem 21] $f \colon X \to Y$ を左ホモトピー逆写像をもつ写像とし、そのコファイバーを Z とする。このとき、次の不等式が成立する。

$$\mathsf{nil}(\mathrm{Ker}\{f^* \colon H^*(Y; R) \to H^*(X; R)\}) \leq \mathsf{wcat}(Z) \leq \mathsf{secat}(f).$$

ファイブレーション $p \colon X \to B$ に対し、第一成分の射影 $X^2_B \to X$ は明らかに $\Delta \colon X \to X^2_B$ の左逆写像となる。したがって次を得る。

Corollary 4.10 ファイブレーション $p \colon X \to B$ に対し、次の不等式が成立する。

$$\mathsf{nil}(\mathrm{Ker}\{\Delta^* \colon H^*(X^2_B; R) \to H^*(X; R)\}) \leq \mathsf{wcat}(W) \leq \mathsf{TC}[X \to B]$$

ただし W は $\Delta \colon X \to X^2_B$ のコファイバーである。

とくに $B = *$ のとき、$u, v \in H^*(X)$ に対して $\Delta^*(u \otimes v) = uv$ となる。*5

Example 4.11. 自明なファイブレーション $S^n \to *$ を考える。$H^n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 u をとると、$a = u \otimes 1 - 1 \otimes u \in H^*((S^n)^2; \mathbb{Z})$ は $\mathrm{Ker}\{\Delta^* \colon H^*((S^n)^2; \mathbb{Z}) \to H^*(S^n; \mathbb{Z})\}$

*5 このことから、$\mathsf{nil}(\mathrm{Ker}\,\Delta^*)$ はしばしば zero-divisors cup-length とよばれる。

の生成元となり、次が成立する。

$$\mathsf{nil}(\mathrm{Ker}\{\Delta^*\colon H^*((S^n)^2;\mathbb{Z})\to H^*(S^n;\mathbb{Z})\}) = \begin{cases} 1 & (n\text{ が奇数}) \\ 2 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

これは $\mathsf{TC}(S^n) = \mathsf{TC}[S^n \to *]$ の十分な下限を与える。

一般のファイブレーションに関しても、Serre スペクトル系列を用いることにより冪零度が計算できる。とくに、$R = \mathbb{Z}$ とすると単位接束 $S^n \to T \to S^{n+1}$ に関して

$$\mathsf{TC}[T \to S^{n+1}] \geq \mathsf{nil}(\mathrm{Ker}\,\Delta^*) = \begin{cases} 1 & (n\text{ が奇数}) \\ 2 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

を得る。一方で、[8, Theorem 5.2] より次が成立する。

$$\mathsf{TC}[T \to S^{n+1}] \leq \begin{cases} 1 & (n = 1, 5) \\ 2 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これで Theorem 4.5 は $n \equiv -1 \pmod 4$ の場合を除いて証明された。

5 複体 W のセル構造と弱カテゴリー

以降の章では $m \geq n$ をみたすファイブレーション $S^n \to X \to S^{m+1}$ に注目し、対角写像 $\Delta\colon X \to X^2_{S^{m+1}}$ のコファイバー W の弱カテゴリーを計算していく。そのためにはまず、W の CW 複体としてのセル構造を理解する必要がある。ホモトピー群の元 $\alpha \in \pi_m(S^n)$ に対し、Whitehead 積 $[\alpha, 1] \in \pi_{m+n-1}(S^n)$ が定義されたことを思い出そう。全空間 X および $X^2_{S^{m+1}}$ のセル構造を検討し、球面のホモトピー群の EHP 系列を考えることによって次の結果が得られる。

Theorem 5.1 [13, Corollaries 4.6, 4.10] n を 3 以上の奇数とし、$n \leq m \leq 2n-3$ とする。ファイブレーション $S^n \to X \to S^{m+1}$ に対し、次が成立する。

1. コファイバー W は次の 4 セル複体として表される。

$$W \simeq W_{4n+2} \cup_\lambda e^{m+2n+2} \cup_\phi e^{m+4n+3}$$

   ただし $W_{4n+2} = S^{2n+1} \cup_{[1_{S^{2n+1}}, 1_{S^{2n+1}}]} e^{4n+2}$ であり、上の 2 セルはいずれも W_{4n+2} に接着している。
2. W_{4n+2} は懸垂空間であり、$\Sigma W_{4n+2} \simeq S^{2n+2} \vee S^{4n+3}$ となる。

Corollary 5.2 $1 \leq \mathsf{wcat}(W) \leq \mathsf{cat}(W) \leq 2$ となる。

Berstein および Hilton [2] の定義した crude Hopf invariant は、CW 複体のセル構造を用いて弱カテゴリーを評価する有力な手法である。$\mathsf{cat}(Z) = k$ をみたす空間 Z と $\Delta\colon Z \to Z^{k+1}$ の持ち上げ $\gamma\colon Z \to T^{k+1}(Z)$ に対し、接着写像 $\zeta \in \pi_p(Z)$ の **crude Hopf** invariant は $\pi_{p+1}(Z^{k+1}/T^{k+1}(Z))$ の元 $\overline{H}_\gamma(\zeta)$ として定義される。$\overline{H}_\gamma(\zeta)$ の値が γ の取り方によらず一意に定まるとき、$\overline{H}(\zeta)$ と表記する。

Theorem 5.3 [2, Corollary 3.9] $\mathsf{wcat}(Z\cup_\zeta e^{p+1})=k+1$ ならば、すべての持ち上げ γ に対して $\overline{H}_\gamma(\zeta)\neq 0$ となる。

一般に、上の主張の逆は成立しない。しかしながら、Theorem 5.1 で与えられた 4 セル複体 W に関しては主張の逆が部分的に成立する。James ら [12] の結果より、ファイブレーション $S^n\to X\to S^{m+1}$ の全空間 X は 3 セル複体 $X\simeq S^n\cup_\beta e^{m+1}\cup e^{m+n+1}$ として表される。η を $\pi_1^S\cong\mathbb{Z}/2$ の生成元とする。

Theorem 5.4 n を 3 以上の奇数とし、$n\le m\le 2n-3$ とする。$\Sigma(\eta\circ\beta)=0$ をみたすファイブレーション $S^n\to X\to S^{m+1}$ に対して $\overline{H}_\gamma(\lambda)$ は一意に定まり、次が成立する。

- $\overline{H}(\lambda)\neq 0$ ならば $\mathsf{wcat}(W)=\mathsf{wcat}(W_{m+2n+2})=2$ である。

球面束 $S^n\to X\to S^{n+1}$ に対し、$\beta\in\pi_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$ は束の Euler 類と同一視することができる。したがって、単位接束 $S^n\to T\to S^{n+1}$ は上の定理における $\Sigma(\eta\circ\beta)=0$ の条件を満たす。次章では、この前提のもとで主結果の証明を完成させる。

6 主定理の証明（概要）

Sketch of the proof of Theorem 4.5. まず $n=3,7$ の場合を証明する。

6.1 $n=3,7$ の場合

ファイブレーション $S^n\to X\to S^{m+1}$ への $\alpha\in\pi_{m+n+1}(S^n)$ の "余作用" を考える。まず、全空間 X は図式

$$S^n\xleftarrow{p_2}S^m\times S^n\xrightarrow{\mu}S^n$$

のホモトピー押し出しとして記述される。ここで p_2 は第二成分への射影であり、μ は $\mu|_{S^m}=\beta$ かつ $\mu|_{S^n}=1$ をみたす写像である。右側の写像に α を余作用 [*6]させると、得られた図式のホモトピー押し出し $X(\alpha)$ によって新たなファイブレーション $S^n\to X(\alpha)\to S^{m+1}$ が構成される。

n を 3 以上の奇数とし、$n\le m\le 2n-3$ とする。この新たなファイブレーションに関して、対角写像のコファイバーは $W(\alpha)\simeq W_{4n+2}\cup_{\lambda(\alpha)}e^{m+2n+2}\cup_{\phi(\alpha)}e^{m+4n+3}$ と記述される。それぞれの接着写像の crude Hopf invariant を議論することで次が明らかになる。

$$\overline{H}(\lambda)=0\quad かつ\quad \overline{H}(\alpha)\neq 0\in\pi_{m+n+1}(S^{2n})\quad のとき、\quad \overline{H}(\lambda(\alpha))\neq 0 \tag{2}$$

いま、ある複素ベクトル束の球面束 $X\to S^{n+1}$ と $\alpha\in\pi_{2n}(S^n)$ が存在し、$T\to S^{n+1}$ は $X\to S^{n+1}$ を α だけ "余作用" させたものと見做せる。さらに $n=3,7$ では α は $\pi_{2n}(S^n)$

[*6] 詳しくは [1, Section 4] などを参照のこと。

の生成元となることがわかり、したがって $\overline{H}(\alpha) \neq 0$ を満たす。一方で [8, Corollary 5.5] より $\mathsf{TC}[X \to S^{n+1}] = 1$ となる。よって Theorem 5.4 と (2) から主定理が示される。

6.2　$n \geq 11$ の場合

実は、次のより強い主張が成立する。

Proposition 6.1　[13, Theorem 1.4(2)] $n \equiv -1 \pmod 4$ かつ $n \geq 11$ とする。このとき、$\beta \equiv 2 \pmod 4$ となるようなすべてのファイブレーション $S^n \to X \to S^{n+1}$ に対し $\mathsf{TC}[X \to S^{n+1}] = \mathsf{wcat}(W) = 2$ となる。

上の命題は $\overline{H}(\lambda) \neq 0$ となること、および Theorem 5.4 より従う。前者の主張は、球面のホモトピー群の EHP 系列に関する Thomeier [16] の結果より示される。 □

$n = 3, 7$ の場合に用いた “余作用” の手法によって、次のような定理を示すことができる。具体的には、自明束に $\overline{H}(\alpha) \neq 0$ なる元 α を “余作用” させればよい。

Theorem 6.2　[13, Corollary 1.3] $\mathsf{TC}[X \to S^{m+1}] = 2$ を満たすファイブレーション $S^{2n+1} \to X \to S^{m+1}$ の存在するような整数 (m, n) の組は無限に存在する。

7　今後の課題

最後に、今後の課題をいくつか挙げる。

7.1　$\mathsf{TC}[T \to S^{n+1}]$ の完全な決定

$n \geq 9$ かつ $n \equiv 1 \pmod 4$ の場合、本稿の議論では $\mathsf{TC}[T \to S^{n+1}]$ は決定されない。

Proposition 7.1　[13, Proposition 1.6] $n \geq 9$ かつ $n \equiv 1 \pmod 4$ のとき、次の不等式が成立する。

$$\mathsf{wcat}(W) = 1 \leq \mathsf{TC}[T \to S^{n+1}] \leq 2$$

$n = 1, 5$ の場合から類推すると $\mathsf{TC}[T \to S^{n+1}] = 1$ と予想される。しかしながら、これを証明するための上からの評価は今のところ与えられていない。[*7]

7.2　Hopf invariant を用いた手法の拡張

本稿で述べた手法は、ファイバーが偶数次球面の場合や底空間が球面でない場合などに拡張できる。これらの場合において対角写像のコファイバー W はより複雑なセル構造をもち、crude Hopf invariant による $\mathsf{wcat}(W)$ の計算はさらに困難になるが、本結果と同様の手法によって解決されるであろう。

Topological complexity やその亜種の研究に (crude) Hopf invariant を活用したものと

*7 本稿では省略したが、topological complexity やその亜種を上から評価することは困難であり、多くの結果では構成的な評価が用いられている。その一因として、LS カテゴリーの強力な評価手法である cone-length が応用できないことが挙げられる。

しては、たとえば 2 セル複体の topological complexity に関する González ら [9] の結果などがあるが、さらなる発展の余地を残している。これらの不変量の核心を捉えるにはセル構造との関連を解明することが不可欠であり、Hopf invariant を用いた手法がさらに拡張されることが期待される。

参考文献

[1] Arkowitz, M.: Introduction to homotopy theory, Universitext (Springer, New York, 2011), xiv+344 pp. 9

[2] Berstein, I. and Hilton, P. J.: Category and generalized Hopf invariants, Illinois J. Math. **4** (1960), 437 – 451. 8, 9

[3] Cohen, D. C., Farber, M. and Weinberger, S.: Topology of parametrized motion planning algorithms, SIAM J. Appl. Algebra Geom. **5** (2021), no. 2, 229 – 249. 5, 6

[4] Farber, M.: Topological complexity of motion planning, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), no.2, 211 – 221. 1, 2

[5] Farber, M. and Grant, M.: Topological complexity of configuration spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 5, 1841 – 1847. 3

[6] Farber, M., Tabachnikov, S. and Yuzvinsky, S.: Topological robotics: motion planning in projective spaces. Int. Math. Res. Not. (2003), no. 34, 1853 – 1870. 3

[7] Farber, M. and Weinberger, S.: Parametrized motion planning and topological complexity, Algorithmic Foundations of Robotics XV, Springer Proc. Adv. Robot. **25** (Springer, Cham, 2023), 1 – 17. 6

[8] Farber, M. and Weinberger, S.: Parametrized topological complexity of sphere bundles, Topol. Methods Nonlinear Anal. **61** (2023), no. 1, 161 – 177. 8, 10

[9] González, J., Grant, M. and Vandembroucq, L.: Hopf invariants for sectional category with applications to topological robotics, Q. J. Math. **70** (2019), no. 4, 1209 – 1252. 11

[10] García-Calcines, J. M. and Vandembroucq, L.: Weak sectional category, J. Lond. Math. Soc. (2) **82** (2010), no. 3, 621 – 642. 7

[11] Iwase, N. and Sakai, M.: Topological complexity is a fibrewise L-S category, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 10 – 21. 5

[12] James, I. M. and Whitehead, J. H. C.: The homotopy theory of sphere bundles over spheres, I, Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), 196 – 218. 9

[13] Minowa, Y.: Parametrized topological complexity of spherical fibrations over spheres, Math. Z. **311**, 1 (2025). https://doi.org/10.1007/s00209-025-03794-8 2, 6, 8, 10

[14] Rudyak, Y. B.: On higher analogs of topological complexity, Topology Appl. **157** (2010), no. 5, 916 – 920. 5

[15] Švarc, A. S.: The genus of a fibered space, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **10** (1961), 217-272. 6, 7

[16] Thomeier, S.: Einige Ergebnisse über Homotopiegruppen von Sphären, Math. Ann. **164** (1966), 225 – 250. 10