Recent research on singular decomposable continua
（特異な分解可能連続体に関する最近の研究）

島根大学総合理工学部　松橋英市

1　序章

コンパクト連結距離空間を**連続体**（**continuum**）と呼ぶ。平たく言えば $\mathbb{R}^n$ の中の連結な有界閉集合のことである（有限次元の場合に限っては）。連続体すべてが研究対象なわけで，その守備範囲は広い。連続体には分解可能連続体と分解不可能連続体の 2 種類があり，一般に後者のほうが前者に比べて複雑な構造を持ち，それゆえに興味深い話題を提供することが多い。では分解可能連続体のほうは常に簡単な性質を持っているかといえばそうでもない。たとえば後述するように Janiszewski 連続体のように全ての部分連続体が分解可能になるにもかかわらず**弧** (**(=arc)** 単位閉区間 [0,1] と同相な空間) を含まないものが存在する（弧を含まないということは曲線，直線問わずとにかく線を含まないということである）。連続体理論を研究するときいろいろな見地から研究するが，分解可能か不可能かということが研究テーマの重要な部分を占める研究をする場合は分解不可能連続体に関する研究が好まれるように私は感じる。それは上述のようにその複雑性ゆえに豊富な話題を提供するからであると思う。本講演では分解可能連続体に関しても分解不可能連続体に負けないような奇妙な話題があるということを中心に紹介していこうと思う。

2　特異な分解可能連続体の存在について

定義 2.1. X を連続体とする。X が**分解可能** (**decomposable**) であるとは真部分連続体 $A, B \subsetneq X$ が存在して $X = A \cup B$ をみたすときにいう。X が分解可能ではないとき，X を**分解不可能** (**indecomposable**) であるという。

本講演は主に分解可能連続体に関するものであるが，話のついでに分解不可能連続体についても少し触れておく。

例えば，閉区間，円周，球面など簡単に思い浮かぶような連続体は全て分解可能である。もう少し複雑なものは $\sin \frac{1}{x}$-continuum, さらに複雑なものとして Sierpinski gasket, Menger sponge などがあるが，それらも分解可能である。少し考えただけでは分解不可能な連続体を思い浮かべることはかなり難しい。分解可能不可能連続体の例で構成が比較的簡単なものの例として，backethandle continuum や和田の湖などがある。簡単とはいっても無限回の操作を経て構成するので，直感的に分解不可能と判断するのは困難であると思う。さらに複雑な連続体として，部分連続体がすべて分解不可能となる**遺伝的分解不可能連続体 (hereditarily indecomposable continuum)** がある。

X を連続体としたとき，$C(X)$ で X に含まれる部分連続体すべてからなる空間を表し，（位相はハウスドルフ距離から導かれるものとする）これを X の**超空間 (hyperspace)** とよぶ。$C(X)$ は連続体であることが知られている。

上述したように分解不可能連続体は思い浮かべること自体困難であるようなものなので，以下の定理は奇妙に思えるが，連続体理論の中では非常に有名な結果である。

定理 2.2. ((Bing [2]) $n \geq 2$ または $n = \infty$ とする。このとき，$C(I^n)$ の中で遺伝的分解不可能連続体全体からなる集合は稠密な G_δ-集合となる。

つまり位相的見地からみると，ほとんどすべての連続体は遺伝的分解不可能なのである。

遺伝的分解不可能とは真逆の次の定義を紹介する。

定義 2.3. 連続体 X の部分連続体がすべて分解可能であるとき, X を**遺伝的分解可能連続体 (hereditarily decomposable continuum)** とよぶ。

注意. 遺伝的分解可能連続体の位相次元は必ず 1 次元であることが次の定理からわかる。

定理 2.4. (Bing [1]) $n \geq 2$ とする。すべての n 次元連続体は $(n-1)$ 次元遺伝的分解不可能連続体を含む。

遺伝的に分解可能，そして 1 次元ということを考えるとあまり複雑な連続体は作れないような気がするが，Janiszewski は 1912 年，次のような特異な例を構成した。

例 1. (Janiszewsiki [11]) 遺伝的分解可能，arc-like であり，さらに弧を含まない連続体が平面の中に存在する。

連続体 X が **arc-like** であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、全射連続写像 $f \colon X \to [0,1]$ が存在し、f のすべての逆像の直径が ε 未満であるような場合をいう。弧ではない arc-like continuum の例として $\sin \frac{1}{x}$-continuum が挙げられる。Janiszewski が例 1 を提示した当時は，連続体に関する多くの基本的な性質がまだ明らかにされていない時代であった。そ

のような中で，Janiszewski は arc-like かつ遺伝的に分解可能という，一見すると単純そうに見える性質を持ちながらも，弧を一切含まないというきわめて複雑な性質を同時に併せ持っている例を提示したのである。

最初に紹介する我々の結果は，Janiszewski 連続体に関連するものである。そのために次の定義を導入する。

定義 2.5. X を連続体とする。

1. X が ***D*-連続体**であるとは，X の任意の互いに交わらない 1 点集合ではない 2 つの部分連続体 A，B に対して，次の条件をみたす X の部分連続体 L が存在するときにいう：
   - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L.$
   - $A \setminus L \neq \emptyset$ または $B \setminus L.$
2. X が ***D***-連続体**であるとは，X の任意の互いに交わらない 1 点集合ではない 2 つの部分連続体 A，B に対して，次の条件をみたす X の部分連続体 L が存在するときにいう：
   - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L.$
   - $A \setminus L \neq \emptyset.$
3. X が ***D**-連続体**であるとは，X の任意の互いに交わらない 1 点集合ではない 2 つの部分連続体 A，B に対して，次の条件をみたす X の部分連続体 L が存在するときにいう：
   - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L.$
   - $A \setminus L \neq \emptyset$ かつ $B \setminus L.$

D-連続体を最初に導入したのは Lončar[14] である。弧状連結連続体は D*-連続体であり，また，D-連続体は分解可能となる（前者は簡単に確認できるが後者は composant を用いた証明が必要なのでここでは割愛する)。ということで，連続体においては次の関係が成立する：

$$\text{弧状連結} \Longrightarrow D^* \Longrightarrow D^{**} \Longrightarrow D \Longrightarrow \text{分解可能}$$

例 2. (Espinoza-Matsuhashi [4]) Arc-like かつ遺伝的分解可能だが D-連続体を含まない連続体が存在する。

例 3. (Matsuhashi-Oshima [15]) Arc-like かつ遺伝的 D だが，D^{**}-連続体を含まない連続体が存在する。

上の例で遺伝的 D とは部分連続体がすべて D 連続体になるようなものをいう (以下に出てくる遺伝的 D^{**}，遺伝的弧状連結も同様である)。さて，上の 2 つの例から次の問いは自然であろう：

問．Arc-like，遺伝的 D^{**} で D^{*}-連続体を含まない連続体は存在するか？

この問いへの答えは次の結果より否定的なものとなる。

定理 2.6. (Matsuhashi-Oshima [15]) X を連続体とする。このとき次は同値である。

1. X は arc-like D^{**}-continuum である。
2. X は弧である。

つまり，Arc-like 連続体の世界では，D-連続体では例 3 のようにおかしなことが起こるが，それよりもほんの少し強い性質を持つ D^{**}-連続体は弧になってしまうのである。また、この定理の系として次が得られる。

定理 2.7. (Matsuhashi-Oshima [15]) X を連続体とする。このとき次は同値である。

1. X は遺伝的 D^{**} である。
2. X は遺伝的弧状連結である。

Arc-like, 遺伝的 D^{**} という条件を考えなければ以下のような例を構成できる。構成には射影極限を用いる。

例 4. ((Imamura-Matsuhashi-Oshima [10])) 遺伝的分解可能な D^{**}-連続体で D^{*}-連続体を含まないものが存在する。

注意：定義が煩雑になるので割愛するが，実際は D^{**}-連続体より強い性質を持つ連続体で D^{*}-連続体を含まない連続体を構成できる（興味のある方は [16] を参照してください)。図 1 は例 4 の目標の連続体を構成する際に射影極限を考える際の最初のステップ。

3　共通モデルについて

まず以下の有名な定理を紹介する。

定理 3.1.（Hausdorff-Alexandroff）任意のコンパクト距離空間はカントール集合の連続像となっている。

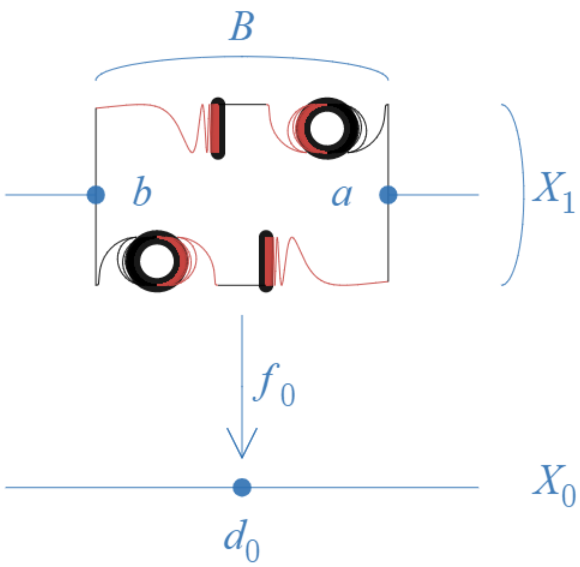

図1　X_0, X_1 and f_0

([10, Theorem 5.4] の図より)

つまり，任意のコンパクト距離空間はカントール集合をうまくつぶした空間として得られることがわかる。この定理に対応して次のような問いを考えることは自然であろう。

問. 次のような連続体 X は存在するか？

すべての連続体が X の連続像となっている。

上記の問いでは，すべての連続体をその連続像として生み出せるような連続体 X の存在を問うているわけだが，以下の定理により，それよりずっと狭いクラスにすらそのような連続体 X は存在しない。

定理 3.2. (Waraszkiewicz [20]) 任意の連続体 Z に対して，半開区間 $[0,1)$ のコンパクト化 W_Z であって, 次の条件を満たすものが存在する：

- 剰余 $W_Z \setminus [0,1)$ は円周 S^1 に同相である。
- Z から W_Z への連続な全射は存在しない。

しかし一方局所連結連続体（弧, 円周, n 次元立方体, Sierpinski gasket, Menger sponge, etc.）全体に対しては次の定理が成り立つことも有名である。その定理の紹介の前に一つ定義を導入する。

定義 3.3. $\mathcal{C}$ をある連続体のクラスとする。連続体 X が $\mathcal{C}$ の共通モデル **(common**

model) であるとは，任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して C が X の連続像になっているときにいう。

定理 3.4. (Hahn-Mazurkiewicz) 単位閉区間は局所連結連続体全体からなるクラスの共通モデルとなっている。つまり，任意の局所連結連続体は単位閉区間の連続像となっている。

また，次の定理も有名である。

定理 3.5. (Fearnley[5], Lelek[12], Mioduszewski[18]) Pseudo arc（= arc-like 遺伝的分解不可能連続体）は arc-like 連続体全体からなるクラスの共通モデルとなっている。

そこで，どのような連続体のクラスならば共通モデルをもつか（またはもたないか）を調べることは自然であろう。

注意. 任意の連続体の可算列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を考えると，この列には必ず共通モデルが存在する。

定理 3.6. (Fukaishi-Matsuhashi[6]) 任意の連続体 X に対して，以下を満たす連続体 Z が存在する：

- Z は分解不可能連続体であり，X を部分連続体として含む。
- $r : Z \to X$ なる開なレトラクションが存在し，任意の $x \in X$ に対して，逆像 $r^{-1}(x)$ はカントール集合に同相である。
- X と同相な空間からなる可算族 $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ が存在して，$Z = \mathrm{Cl}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i)$ が成り立つ。

連続体 X に対して定理 3.6にあるような Z 全体からなる集合族を $\mathbb{IC}_X$ とおく。定理 3.6で示したことは，$\mathbb{IC}_X$ は空ではないということである。これに関し，ごく最近，次の結果が得られた。

定理 3.7. (Matsuhashi-Ortega [17]) 任意の連続体 X に対して $\mathbb{IC}_X$ は共通モデルを持たない。

また，以下の結果より 2 章で紹介したような連続体のクラスにも共通モデルがない。

定理 3.8. $\mathcal{D}$ を次のいずれかの性質をもつ連続体のクラスとする：

- D-連続体を含まない遺伝的分解可能連続体,
- D^{**}-連続体を含まない遺伝的 D-連続体,

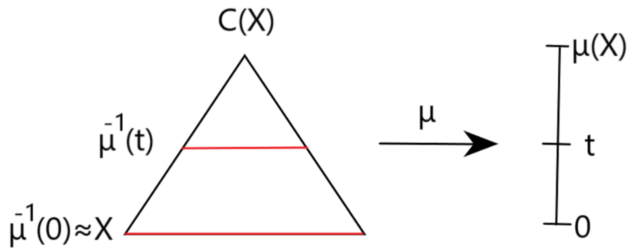

図2　$\mu^{-1}(t)$ は大きさ t の部分連続体からなる集合族

- D^*-連続体を含まない遺伝的分解可能な D^{**}-連続体.

このとき，$\mathcal{D}$ は共通モデルをもたない。つまり任意の連続体 X に対して、ある連続体 $D \in \mathcal{D}$ が存在し、X から D への連続全射は存在しない。

4　Whitney Property, Whitney reversible property

定義 4.1. 連続体 X に対して、その部分連続体全体の集合を $C(X)$ とする。写像 $\mu : C(X) \to [0, \mu(X)]$ が **Whitney 写像**（Whitney map）と呼ばれるのは、次の二つの条件を満たすときである：

- 任意の部分連続体 $A, B \in C(X)$ に対して、$A \subsetneq B$ ならば $\mu(A) < \mu(B)$ が成り立つ。
- 任意の点 $x \in X$ に対して、$\mu(\{x\}) = 0$ が成り立つ。

定義 4.2. 位相的性質 P が **Whitney 性質**（Whitney property）であるとは、次の条件を満たすときにいう：連続体 X が性質 P をもつならば、$C(X)$ 上の任意の Whitney 写像 μ と、任意の $t \in [0, \mu(X))$ に対して、$\mu^{-1}(t)$ も性質 P をもつ。

定義 4.3. 位相的性質 P が **Whitney 可逆性質**（Whitney reversible property）であるとは、次が成り立つときにいう：任意の連続体 X に対し、$C(X)$ 上の任意の Whitney 写像 μ と任意の $t \in (0, \mu(X))$ に対して、$\mu^{-1}(t)$ が性質 P をもつならば、X 自身も性質 P をもつ。

これらの性質に関しての研究は連続体理論の中心的課題である。それらに関しては連続体の性質の数だけ問題になりえるので（そしてそのいずれもが明らかではない），これま

で多くの研究がなされ，そして多くの未解決問題がある。たとえば分解可能性は Whitney の性質であるが Whitney の可逆性質ではないことが知られている。弧状連結性も同様である。詳しい情報は [8] にある。

定理 4.4. (Matsuhashi-Oshima [15]) 連続体が D であること，D^{**} であること，D^{*} であることはすべて Whitney の性質である。

定理 4.5. (Illanes-Matsuhashi-Oshima [9]) 連続体が D であること，D^{**} であること，D^{*} であることはすべて Whitney の可逆性質ではない。

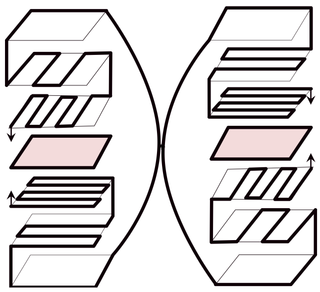

図3　D-連続体ではないが, 全ての正のホイットニーレベルが D^{*}-連続体となる

（[9, Example 3.2] の図を改良したもの）

参考文献

[1] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 267–273.

[2] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1** (1951), 43–51.

[3] B. Espinoza and E. Matsuhashi, *Weakly Whitney preserving maps*, Topology Appl., **262** (2019), 90–108.

[4] B. Espinoza and E. Matsuhashi, *D-continua, D^*-continua and Wilder continua*, Topology Appl., **285** (2020), 25p.

[5] L. Fearnley, *Characterizations of the continuous images of the pseudo-arc*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 380–399.

[6] S. Fukaishi and E. Matsuhashi, *Open retractions of indecomposable continua*, Colloq. Math. **148** (2017), no. 2, 191–194.

[7] A. Illanes, *Countable closed set aposyndesis and hyperspaces*, Houston J. Math. **23** (1997), no.1, 57-64.

[8] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[9] A. Illanes E. Matsuhashi and Y. Oshima, *More on Whitney levels of some decomposable continua*, Topology Appl. **357** (2024), Paper No. 109068, 12 pp.

[10] H. Imamura, E. Matsuhashi and Y. Oshima, *Some theorems on decomposable continua*, Topology Appl., **343** (2024), 13p.

[11] J. Janiszewski, *Über die Begriffe "Linie" und "Fläche"*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians II, Cambridge (1912), 126-128.

[12] A. Lelek, *On weakly chainable continua*, Fund. Math. **51** (1962/63), 271–282.

[13] H. Kato and E. Matsuhashi, *On surjective Bing maps,* Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **52** (2004), no.3, 329-333.

[14] I. Lončar, *D-continuum X admits a Whitney map for $C(X)$ if and only if it is metrizable*, Glas. Mat. Ser. III, **40**(60)(2005), 333-337.

[15] E. Matsuhashi and Y. Oshima, *Some decomposable continua and Whitney levels of their hyperspaces*, Topology Appl., **326** (2023), 9p.

[16] E. Matsuhashi, *Singular decomposable continua*, Topology Appl., **358** (2024), 16p.

[17] E. Matsuhashi and J.A.Ortega, *Open retractions of indecomposable continua, II*, submitted.

[18] J. Mioduszewski, *A functional conception of snake-like continua*, Fund. Math. **51** (1962/63), 179–189.

[19] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[20] Z. Waraszkiewicz, *Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre*, Fund. Math. **18** (1932), 118–137.