

エマージェント組紐と柏原-ヴェルニュ方程式

久野 雄介 (津田塾大学)

1 はじめに

以下では、非可換ベキ級数やリー級数に関する方程式がいくつか登場する。それぞれの方程式は、あるトポロジカルな対象から定まる代数構造の形式性を実現するための条件として捉えられる。2010 年頃に、ドリンフェルトの結合子方程式と柏原-ヴェルニュ方程式の密接な関係が明らかにされた ([3, 1])。本講演では、両者の中間に位置する方程式を導入した研究の現状 ([18, 11]) を報告する。この方程式のトポロジカルな背景がエマージェント組紐である。なお、同様のアイデアに基づく研究が [2, 10, 22, 24] でなされている。

2 形式性 (formality) と expansion

ここでの形式性 (formality) という用語は有理ホモトピー論での使われ方 ([27]) から来ていて、大まかには、ある構造がその近似から回復可能なことを意味する。もとの構造を回復するときに用いられるのが expansion である。組紐など、様々な“結び目”の普遍的な有限型不変量は、しばしば適切な設定における expansion として定式化される ([9])。

標数 0 の体 \mathbb{K} 上で考える。 V をフィルター付き代数構造とする。^{*1} すなわち、 V はベクトル空間で、いくつかの演算と下降フィルトレーション $V = \mathcal{F}_0 V \supset \mathcal{F}_1 V \supset \mathcal{F}_2 V \supset \dots$ を持ち、全ての演算はフィルトレーションと適合しているとする。^{*2} このとき、自然に V の随伴次数商 $\mathrm{gr} V$ が定義される。これは、次数付きベクトル空間

$$\mathrm{gr} V := \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k V / \mathcal{F}_{k+1} V$$

に V の演算から自然に誘導される演算を与えたものである。 $\mathrm{gr} V$ はもとの代数構造 V の近似と考えられる。極めて自然な問題として、近似の精度を問うこと、すなわち V と $\mathrm{gr} V$ の代数構造の比較がある。より適切なのは、 V を完備化、すなわち射影的極限

$$\widehat{V} := \varprojlim_k V / \mathcal{F}_k V$$

に置き換えることである。 V の演算は \widehat{V} の演算に自然に拡張する。

問. \widehat{V} と $\mathrm{gr} V$ はフィルター付き代数構造として同型か? ^{*3}

本研究は科研費 (課題番号:23K03121, 24K00520) の助成を受けたものである。

^{*1} 念頭にあるのは、ホップ代数、リー代数、リー双代数など。また、ここは一つのベクトル空間 V 上の演算を想定した記述だが、より一般的に (線形) 圏やオペラッドでも良い。実際に、後ではそうした状況も考える。

^{*2} 例えば V が双線型な二項演算 $\Phi : V \times V \rightarrow V$ を持つとして、 Φ が $\{\mathcal{F}_k V\}_k$ と適合するとは、ある $d \in \mathbb{Z}$ が存在して任意の $u \in \mathcal{F}_k V, v \in \mathcal{F}_l V$ に対して $\Phi(u, v) \in \mathcal{F}_{k+l+d} V$ が成り立つことである。

^{*3} ここで $\mathrm{gr} V$ のフィルトレーションは、 $\mathcal{F}_k(\mathrm{gr} V) = \{ \text{次数 } k-1 \text{ 以下の成分が全て } 0 \}$ 。

フィルター付き代数構造の同型 $\theta: \widehat{V} \rightarrow \text{gr } V$ は随伴次数商の間の写像を誘導する:

$$\text{gr } \theta: \text{gr } V = \text{gr } \widehat{V} \rightarrow \text{gr}(\text{gr } V) = \text{gr } V.$$

$\text{gr } \theta = \text{id}$ となる様な同型 θ が存在するとき, 代数構造 V は形式性を持つという. また, この様な θ を V の expansion と呼ぶ.

expansion という言葉を用いたが, これはまさに 1 変数関数のテイラー展開

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

と同じことをしている (ただし, 収束の問題は考えない). この場合, $V = \{0 \text{ のまわりの解析関数芽 } \}$ であり, $\mathcal{F}_k V = \{f \mid f^{(0)}(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$ とする. テイラー展開の結果は座標の取り方に依存していることに注意する.

V が形式性を持つとき, V の expansion 全体の集合には $\text{gr } V$ と \widehat{V} の自己同型が合成によって自然に作用し, bi-torsor 構造ができる:

$$\text{IAut}(\text{gr } V) \curvearrowright \{V \text{ の expansion}\} \curvearrowleft \text{IAut}(\widehat{V}). \quad (1)$$

ここで, 記号 $\text{IAut}(\widehat{V})$ の I は $\text{gr } \varphi = \text{id}$ となる自己同型 φ のみ考えていることを意味する. 二つの群作用は可換で, ともに自由かつ推移的である.

例. 任意の群 G に対して, 群環 $V = \mathbb{K}G$ はホップ代数の構造を持つ. ^{*4} また, V は添加イデアル I のべきによるフィルトレーション $\{I^k\}_k$ を持つ. V がホップ代数として形式的であるかどうかを問題にしよう. このとき, 群 G は filtered-formal と呼ばれる ([26]).

- (i) G が階数 n の自由群 F_n のとき. $\text{gr } V = \text{gr } \mathbb{K}F_n$ は文字 x_1, \dots, x_n の生成する (完備) 自由結合代数 $\text{ass}_n = \mathbb{K}\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle\rangle$ と同型になる. ^{*5} より明示的には, F_n の基底 $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ を固定すると, $x_i = (\gamma_i - 1) \bmod I^2$ と読むことにより, 同型

$$\text{gr } \mathbb{K}F_n \cong \text{ass}_n$$

が成り立つ. いま $\theta_{\text{exp}}(x_i) = e^{x_i} = \sum_{k \geq 0} x_i^k / k!$ とおくと, これは完備ホップ代数の同型 $\theta_{\text{exp}}: \widehat{\mathbb{K}F_n} \rightarrow \text{ass}_n \cong \text{gr } \mathbb{K}F_n$ に拡張し, $\text{gr } \theta_{\text{exp}} = \text{id}$ である. (この同型は基底 $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ の取り方に依存している.) よって $\mathbb{K}F_n$ はホップ代数として形式的である.

- (ii) G が純組紐群 P_n のとき. $\text{gr } V = \text{gr } \mathbb{K}P_n$ はドリントフェルト-河野 リー代数 dk_n ([12, 17]) の普遍包絡環と同型になる. ここで, dk_n は生成元 $t_{ij} = t_{ji}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) と次の関係式によって定義される次数付きリー代数である:

$$\begin{cases} \text{可換関係式: } [t_{ij}, t_{kl}] = 0 & (\#\{i, j, k, l\} = 4 \text{ のとき}) \\ 4 \text{ 項関係式: } [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 & (\#\{i, j, k\} = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

^{*4} 余積, 対合, 添加写像はそれぞれ $\Delta(x) = x \otimes x$, $\iota(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(x) = 1$ ($x \in G$) で定まる.

^{*5} ass_n のホップ代数の構造は $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, $\iota(x_i) = -x_i$, $\varepsilon(x_i) = 0$ で定まる.

生成元 t_{ij} は次数 1 を持ち, 下図左の様な水平コードに対応している:

$$t_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array}, \quad \tau_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array}$$

同型 $\text{gr } \mathbb{K}P_n = U(\text{dk}_n)$ は, 上図右の様な純組紐を $\tau_{ij} \in P_n$ として $t_{ij} = (\tau_{ij} - 1) \bmod I^2$ と読んで得られる. $\mathbb{K}P_n$ はホップ代数として形式的である ([17]).

代数構造 V の expansion を求めるには, V の各演算 Φ に対して, 方程式 $\text{gr } \Phi \circ \theta = \theta \circ \Phi$ を $\text{gr } V$ の中で解くことになる. このためには V の “有限表示” がしばしば役に立つ.

3 ドリinfeld 結合子 (Drinfeld associator)

(ドリinfeld) 結合子 [12] はある条件を満たす非可換ベキ級数 $\Phi = \Phi(x, y) \in \text{ass}_2$ である. その全体は次の様な bi-torsor 構造を持っている:

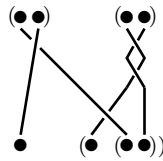
$$\text{GRT}_1 \curvearrowright \{ \text{ドリinfeld 結合子} \} \curvearrowleft \text{GT}_1. \quad (2)$$

ここで, GRT_1 と GT_1 はグロタンディーク-タイヒミュラー群 ([12]) と呼ばれる群である.

結合子によって, 結び目のコンセビッチ不変量が組み合わせ的に再構成される (例えば [23] 参照). そのアイデアは, 結び目を基本ブロックの積み重ねとして表すことにある:

$$\sigma = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \quad \alpha = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}, \quad \cap, \quad \cup$$

結合子のトポロジカルな側面, 特に組紐との関係は原論文 [12] にも言及されている. バーナタン [8] は括弧付き組紐の圏 \mathbf{PaB} の expansion として結合子を捉えた. \mathbf{PaB} の射は次の様な「組紐 + 端点の括弧付け」の線形結合で表される.



圏 \mathbf{PaB} は紐の二重化などの演算を備えている. マックレーンのコヒーレンス定理 [20] と組紐群のアルティン表示 [7] から, \mathbf{PaB} の “有限表示” が得られる ([15] も参照):

$$\mathbf{PaB} = \langle \sigma, \alpha \mid \text{局所性, 五角関係式, (二種類の) 六角関係式} \mid \text{種々の演算} \rangle.$$

ここで, 五角関係式と六角関係式は次の様な括弧付き組紐の等式である:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \end{array}$$

PaB の随伴次数商は括弧付き水平コード図のなす圏 **PaCD** となる. **PaCD** の射はある n に対する $U(\mathbf{dk}_n)$ の元に括弧付き置換のデータを付与したものである.

定理 ([8]). ドリinfeld結合子 Φ に対して

$$Z(\sigma) = \left(\exp(\tfrac{1}{2}t_{12}), \bigvee \right), \quad Z(\alpha) = \left(\Phi(t_{12}, t_{23}), \bigg| \bigg| \right)$$

とおくことで **PaB** の expansion $Z : \mathbf{PaB} \rightarrow \mathbf{PaCD}$ が得られる. この対応により, $\{\mathbf{PaB} \text{ の expansion}\} = \{\text{ドリinfeld結合子}\}$ と同一視される. 更に, **PaB** に対する bi-torsor の図式 (1) は図式 (2) と同一視される.

結合子 Φ は群的 (group-like), すなわち $\Delta\Phi = \Phi \otimes \Phi$ をみたし, $\Phi = \exp(\frac{1}{24}[x, y] + \text{高次の項})$ という形をしていて, 更に **PaB** の五角関係式と六角関係式に対応する方程式をみたす. 五角方程式は $U(\mathbf{dk}_4)$ における次の等式である:

$$(\text{Pent}) \quad \Phi(t_{12}, t_{23})\Phi(t_{1(23)}, t_{(23)4})\Phi(t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{(12)3}, t_{34})\Phi(t_{12}, t_{2(34)}).$$

ただし $t_{1(23)} = t_{12} + t_{13}$, etc. また, 六角方程式は $U(\mathbf{dk}_3)$ における等式である. 古庄 [13] により, 結合子に対する六角方程式は実は五角方程式の帰結であることが示されている.

4 柏原-ヴェルニユ方程式

文字 x_1, \dots, x_n の生成する完備自由リー代数を lie_n とする. 別の言葉では, lie_n は完備ホップ代数 ass_n の原始的部分であり, 自然に $\text{lie}_n \subset \text{ass}_n$ となる. 特に $n = 2$ のとき, x_1, x_2 のかわりに x, y とかく.

柏原-ヴェルニユ問題 [16] は, もとは有限次元リー代数に対して定式化された, リー理論における問題であった. アレクシーブとトロシアン [3] は, これを自由リー代数の自己同型群の 1-コサイクルを用いて再定式化した. リー代数 lie_2 の自己同型 F が tangential であるとは, $F(x) = \exp(\text{ad}_u)(x)$, $F(y) = \exp(\text{ad}_v)(y)$ (ただし $u, v \in \text{lie}_2$) となることをいう. lie_2 の tangential な自己同型全体のなす群を \mathbf{tAut}_2 とかく. $F \in \mathbf{tAut}_2$ に対する次の方程式を柏原-ヴェルニユ方程式という:

$$(\text{KV1}) \quad F(\log e^x e^y) = x + y.$$

$$(\text{KV2}) \quad \text{ある 1 変数ベキ級数 } f(s) \text{ が存在して } j(F) = f(x + y) - f(x) - f(y) \text{ をみたす.}$$

ここで, (KV1) において $\log e^x e^y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$ は BCH 級数であり, (KV2) において j は文字 x, y の巡回語が張る空間を係数とする群 \mathbf{tAut}_2 上のある 1-コサイクルである. 柏原-ヴェルニユ方程式の解は存在し, その全体は次の様な bi-torsor 構造を持つ:

$$\text{KRV}_2 \curvearrowright \{ \text{柏原-ヴェルニユ方程式の解} \} \curvearrowleft \text{KV}_2.$$

柏原-ヴェルニユ方程式の解には, トポロジカルな解釈が少なくとも二つ存在する. 一つは 4 次元トポロジーにおけるもので, バーナタンとダンチョ [9] によって与えられた. こ

これは、ウェルデッド・フォーム wTF° と呼ばれるサーキット代数 (wheeled prop と呼んでも同じ) の expansion としての解釈である。 wTF° は図式的な生成元と関係式によって定義されるが、チューブ写像 ([25]) を拡張する形で、各生成元は \mathbb{R}^4 内の (特異点を持つ) 曲面としての解釈を持つ。 もう一つは 2 次元トポロジーにおけるもので、アレクシーブ-河澄-久野-ネフ [4, 5, 6] により与えられている。 向き付けられた曲面を固定し、その上の自由ループのホモトピー類全体のなす集合を $\hat{\pi}$ とする。 ベクトル空間 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ にはループの交叉や自己交叉によりリー双代数 $(\mathbb{K}\hat{\pi}, [\cdot, \cdot], \delta^f)$ の構造が定まる (下図参照)。 これをゴールドマン-トゥラエフ リー双代数 [14, 28] という。 *6

$$\begin{aligned}
 [\alpha, \beta] &= \text{(Diagram 1)} - \text{(Diagram 2)} \\
 \delta^f(\gamma) &= \text{(Diagram 3)} \wedge \text{(Diagram 4)}
 \end{aligned}$$

$\mathbb{K}\hat{\pi}$ は曲面の基本群 π の群環 $\mathbb{K}\pi$ の商ベクトル空間であり、自然なフィルトレーションを持つ。 リー双代数 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ の随伴次数商は、曲面の 1 次元ホモロジー群の次元を n とするとき、文字 x_1, \dots, x_n の巡回語の張る空間上のリー双代数構造として具体的に記述される。

曲面が 2 点穴空き円板のとき、 π は階数 2 の自由群である。 $F \in \text{tAut}_2$ に対して、 $\theta_F := F \circ \theta_{\text{exp}}$ は $\mathbb{K}\pi$ の Hopf 代数としての expansion となる。 ここで、 θ_{exp} は 2 節の例 (i) のものである。 (適切に π の基底をとる。) θ_F はフィルター付きベクトル空間の同型

$$|\theta_F| : \widehat{\mathbb{K}\hat{\pi}} \rightarrow \text{gr } \mathbb{K}\hat{\pi} \quad (3)$$

を誘導する。 $|\theta_F|$ がリー双代数の射となると、 θ_F をゴールドマン-トゥラエフ (GT) expansion と呼ぶことにしよう。

定理 ([4, 5]). F が柏原-ヴェルニュ方程式の解であるとき、 θ_F はゴールドマン-トゥラエフ expansion となる。 さらに、この対応により、次の同一視が成り立つ:

$$\{ \text{2 点穴空き円板の GT expansion} \} / \text{共役} = \{ \text{柏原-ヴェルニュ方程式の解} \}.$$

*6 トウラエフ [28] の与えたリー余括弧積には定数ループ分の不定性があり、この補正のためには曲面上にフレミングを取る ([4, 6]). 従って、 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ にリー余括弧積を定めるときは、曲面は境界成分を持つと仮定する。

5 ドリinfeld結合子と柏原-ヴェルニユ方程式

2010 年頃に, 次の明示的な単射の存在が示された ([3, 1]): ^{*7}

$$\{\text{ドリinfeld結合子}\} \hookrightarrow \{\text{柏原-ヴェルニユ方程式の解}\}.$$

bi-torsor 構造と適合する群の単射準同型 $\text{GRT}_1 \hookrightarrow \text{KRV}_2$ および $\text{GT}_1 \hookrightarrow \text{KV}_2$ も明示的に構成されている. ここでは簡潔さのため, これらの群準同型の無限小版のみを記述する. 群 GRT_1 と KRV_2 のリー代数 grt_1 と krv_2 は, それぞれ, グロタンディーク-タイヒミュラーリー代数, 柏原-ヴェルニユリー代数と呼ばれ, 次の様に五角方程式 (Pent) と柏原-ヴェルニユ方程式 (KV1), (KV2) を線形化した方程式の解空間である:

$$\begin{aligned} \text{grt}_1 &= \{\psi \in \text{lie}_2 \mid \psi \text{ は方程式 (LPent) の解}\}, \\ \text{krv}_2 &= \{(a, b) \in \text{lie}_2^{\oplus 2} \mid (a, b) \text{ は方程式 (LKV1), (LKV2) の解}\}. \end{aligned}$$

$$(\text{LPent}) \quad \psi(t_{12}, t_{23}) + \psi(t_{1(23)}, t_{(23)4}) + \psi(t_{23}, t_{34}) = \psi(t_{(12)3}, t_{34}) + \psi(t_{12}, t_{2(34)}).$$

$$(\text{LKV1}) \quad [x, a] + [y, b] = 0.$$

$$(\text{LKV2}) \quad \text{ある } f(s) \in \mathbb{K}[[s]] \text{ が存在して, } x, y \text{ の巡回語の張る空間の中で次が成立する.}$$

$$(\partial_x a)x + (\partial_y b)y = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

ただし, ∂_x, ∂_y は自由リー代数上のある種の“偏微分作用素”である. ^{*8}

grt_1 のリー括弧積は伊原括弧積と呼ばれるもので, krv_2 は lie_2 の tangential な導分としてのリー括弧積を備えている.

定理 ([3]). 次は次数付きリー代数の埋め込みである:

$$\nu: \text{grt}_1 \hookrightarrow \text{krv}_2, \quad \psi(x, y) \mapsto (\psi(-x-y, x), \psi(-x-y, y)). \quad (4)$$

これらのリー代数の構造について次の予想がある. 特に, 予想 (ii) の成立は, 基本的に全ての柏原-ヴェルニユ方程式の解が結合子から得られることを意味する.

予想. (i) (ドリinfeld-ヴェルニユ-ドリinfeld) $\text{grt}_1 \cong \text{lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots)$.

(ii) (アレクシーブ-トロシアン) $\text{krv}_2 = \mathbb{K}t \oplus \nu(\text{grt}_1)$. ここで t は次数 1 のある元.

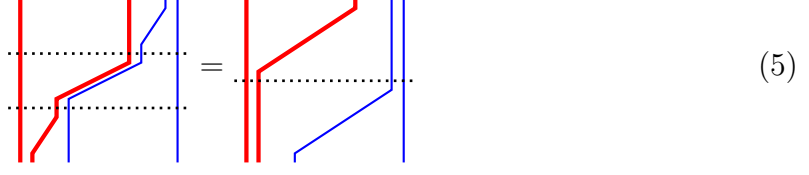
6 混合組紐 (mixed braids) とエマージェント組紐 (emergent braids)

ここからは, [18, 11] の内容を紹介する. 結合子の定義方程式, 特に五角方程式を弱めたものを考察する. Φ を結合子とする. dk_3 における 4 項関係式 $[t_{12} + t_{13}, t_{23}] = 0$ より, $\Phi(t_{12}, t_{23}) = \Phi(-t_{13} - t_{23}, t_{23})$ となる. そこで, 五角方程式 (Pent) の両辺は t_{12} を含まな

^{*7} 特に, この単射の存在が, 柏原-ヴェルニユ方程式の解の存在の別証明になっている.

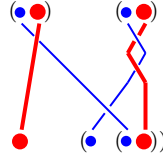
^{*8} 次の等式で定まる: 任意の $a \in \text{lie}_2$ を ass_2 の元とみて $a = (\partial_x a)x + (\partial_y a)y$ と一意にかく.

い形に書ける. すなわち, $\mathbf{dk}_{2,2}$ を $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$ の生成する \mathbf{dk}_4 の部分 Lie 代数とするとき, 五角方程式は $U(\mathbf{dk}_{2,2})$ における等式とみなせる. 次の様に紐に色を付けてみる:



これは $D^2 \setminus \{2 \text{ 点}\}$ における 2 本の括弧付き組紐の等式として解釈できる.

この様なものをもう少し組織的に考えるため, 括弧付き混合組紐の圏 **PaMB** を導入する. 対象は, 赤い点 \bullet と青い点 \bullet の括弧付き語とする. 射は, 赤と青に色付けされた組紐で, 端点の色が始域, 終域と適合していて, 青い紐を忘れると自明な括弧付き組紐になっている様なものの線形結合とする. 例えば, 以下は $\bullet(\bullet(\bullet\bullet))$ から $(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$ への射を表す.



赤い紐同士は絡むことはなく, それらの相対位置も変わらないが, 青い紐は自由に動いて良い. 圏 **PaMB** の基本ブロックは次のものになる: ^{*9}

$$\sigma_{ps}^+ = \text{diagram}, \quad \sigma_{ps}^- = \text{diagram}, \quad \alpha_{pps} = \text{diagram}, \quad \alpha_{psp} = \text{diagram}, \quad \alpha_{spp} = \text{diagram}.$$

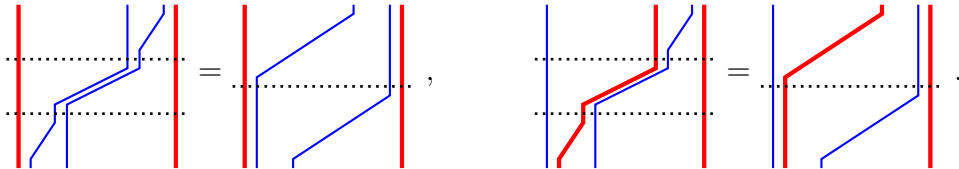
一方で, 次の様な射は **PaMB** には含まれていない:

$$\text{禁止: } \sigma_{pp} = \text{diagram}, \quad \alpha_{ppp} = \text{diagram}.$$

PaMB は紐の追加と削除, 二重化, 赤い紐を青い紐に変える演算を備えている. 例えば,

$$\sigma_{ps}^+ = \text{diagram} \xrightarrow{1 \text{ 本目を二重化}} \text{diagram}, \quad \alpha_{pps} = \text{diagram} \xrightarrow{2 \text{ 本目を青に}} \alpha_{pss} = \text{diagram}.$$

PaMB にも五角関係式や六角関係式があるが, **PaB** と比べて種類が増える. 例えば,



定理 ([11]). 圏 **PaMB** は次の有限表示を持つ:

$$\mathbf{PaMB} = \langle \sigma_{ps}^\pm, \alpha_{pps}, \alpha_{psp}, \alpha_{spp} \mid \text{局所性, 五角関係式, 六角関係式} \mid \text{種々の演算} \rangle.$$

^{*9} p は pole, s は strand を意味する.

これは, **PaB** の有限表示の類似である. 証明のポイントは, マックレーンのコヒーレンス定理の二色版を示すことと, [19] に倣った混合組紐の垂群の表示にある.

PaMB の随伴次数商を **PaMCD** とかく. これは, **PaB** に対する **PaCD** と同様に, 水平コード図の元に括弧付き置換のデータを付与したものとして記述される. コード図の空間の定義をきちんと述べておく.

定義. 次数付き Lie 代数 $\mathbf{dk}_{m,n}$ を以下の表示で定義する: 生成元は次数 1 の元 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$), $c_{ij} = c_{ji}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) で, これらを次の様に $m+n$ 本の紐上のドリinfeld-河野 リー代数 \mathbf{dk}_{m+n} の生成元とみなす:

$$a_{ij} = \begin{array}{c} \text{Red line 1} \dots \text{Red line } i \text{ --- Blue line } m \text{ --- Blue line } j \dots \text{Blue line } n \\ 1 \quad \dots \quad i \quad m \quad 1 \quad j \quad n \end{array}, \quad c_{ij} = \begin{array}{c} \text{Red line 1} \dots \text{Red line } m \text{ --- Blue line } i \text{ --- Blue line } j \dots \text{Blue line } n \\ 1 \quad \dots \quad m \quad 1 \quad i \quad j \quad n \end{array}.$$

関係式は, これら生成元が \mathbf{dk}_{m+n} においてみたす可換関係式や 4 項関係式の全てとする. 例えば, $[a_{11}, a_{22}] = 0$, $[a_{11}, c_{23}] = 0$, $[a_{11} + a_{12}, c_{12}] = 0$ など.

PaMB の形式性の問題が生じる. これを解くには, 生成元 $\sigma_{\text{ps}}^{\pm}, \alpha_{\text{pps}}, \alpha_{\text{psp}}, \alpha_{\text{spp}}$ に対する値を関係式と矛盾しない様に定められれば良い. $Z(\sigma_{\text{ps}}^{\pm}) = \left(\exp(\frac{\pm 1}{2} t_{12}), \textcolor{red}{X} \right)$ となることがすぐ分かる. そこで, 決めなければならないのは三つの値

$$\Phi_{\text{pps}} = Z(\alpha_{\text{pps}}), \quad \Phi_{\text{psp}} = Z(\alpha_{\text{psp}}), \quad \Phi_{\text{spp}} = Z(\alpha_{\text{spp}})$$

である. 結合子 Φ を一つとり, 赤い紐を青い紐に変える演算を施してこれらの三つの値を決めれば **PaMB** の expansion が一つ得られる. **PaMB** の全ての expansion がこの方法で得られるかはまだ分かっていない.

次に, 方程式を考える空間のサイズを小さくして, より扱いやすいものを得られるかと問うてみる. それには, $D^2 \setminus \{ \textcolor{red}{m} \text{ 点} \}$ における n 本の組紐に対してバシリエフ型フィルトレーションを考える. 青い紐同士の二重点を

$$\text{Blue crossing with dot} = \text{Blue crossing} - \text{Blue crossing}$$

と定める. そして

$$\mathbf{PaMB}^{/2} := \mathbf{PaMB} / (\textcolor{blue}{X} \textcolor{blue}{X})$$

とおく. この圏の射を表す組紐をエマージェント組紐と呼ぶ.

当然ながら, $\mathbf{PaMB}^{/1} := \mathbf{PaMB} / \textcolor{blue}{X}$ においては青い紐同士の結び目の現象は検知できない. 見えるものは $D^2 \setminus \{ \textcolor{red}{m} \text{ 点} \}$ 内の路のホモトピー類である. 次の商 $\mathbf{PaMB}^{/2}$ は結び目の現象が起き始める段階と見做せる. これを踏まえてエマージェント (emergent) という用語がつけられている.

圏 $\mathbf{PaMB}^{/2}$ の随伴次数商は **PaMCD** の商となる. 対応するコード図の空間では, 青い紐の間のコードが 2 本以上あったら 0 とすることになる.

定義. c_{ij} たちの生成する $\mathbf{dk}_{m,n}$ のリーイデアルを \mathbf{c} とおき, $\mathbf{edk}_{m,n} := \mathbf{dk}_{m,n}/[\mathbf{c}, \mathbf{c}]$ とおく.

例. $\mathbf{edk}_{2,2} \cong \mathbf{lie}_2 \oplus \mathbf{lie}_2 \oplus \mathbf{ass}_2[-1]$ となる. この同型は, 右辺の $(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ に対して $u(a_{11}, a_{21}) + v(a_{12}, a_{22}) + \mathbf{ad}_{w(a_{12}, a_{22})}(c_{12})$ を対応させることで得られる.

一般に $\mathbf{edk}_{m,n}$ は次数付きベクトル空間として n 個の \mathbf{lie}_m と $\binom{n}{2}$ 個の $\mathbf{ass}_m[-1]$ の直和に同型である. (“ $[-1]$ ” は次数 (-1) シフトを表す.) リー括弧積も具体的に記述される.

7 エマージェント五角方程式と柏原-ヴェルニュ方程式

当面の目標は, エマージェント版結合子, すなわち $\mathbf{PaMB}^{/2}$ の expansion から柏原-ヴェルニュ方程式の解を得ることである. それが可能なことは [10] の結果からも期待される. この目標に向けて, [18] では expansion の定義方程式の内の一つの線形化を, ある技術的な仮定のもとに考察した. 具体的には, $\mathbf{PaMB}^{/2}$ の五角関係式の一つである (5) から得られる方程式である. 特にその線形化は $\mathbf{edk}_{2,2}$ における方程式になり, 整理すると $\varphi \in \mathbf{lie}_2 \cong \mathbf{edk}_{2,1}$ に対する次の方程式になる:

$$(\text{ELP}) \quad \begin{cases} \varphi(y, 0) - \varphi(x + y, 0) = 0, \\ (\partial_y \varphi)(x, y) + (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0) - R(\varphi) = 0. \end{cases}$$

但し, 写像 $R : \mathbf{lie}_2 \rightarrow \mathbf{ass}_2$ は次で定まる: $R(x) = R(y) = 0$ かつ任意の $a, b \in \mathbf{lie}_2$ に対し

$$\begin{aligned} R([a, b]) &= [R(a), b] + [a, R(b)] \\ &\quad + (\partial_x b)x \iota(\partial_x a) - (\partial_x a)x \iota(\partial_x b) + (\partial_y b)y \iota(\partial_y a) - (\partial_y a)y \iota(\partial_y b). \end{aligned}$$

定義. 次数付きベクトル空間 $\mathbf{grt}_1^{\text{em}}$ を以下で定める:

$$\mathbf{grt}_1^{\text{em}} := \{\varphi \in \mathbf{lie}_2 \mid \varphi \text{ は条件 (ELP) および (VS) をみたす} \}.$$

$$(\text{VS}) \quad [x, \varphi(y, x)] + [y, \varphi(x, y)] = 0.$$

構成から, $\psi = \psi(x, y) \in \mathbf{grt}_1$ のとき $\varphi(x, y) = \psi(-x - y, y)$ は (ELP) をみたす. また, ドリinfeld [12] の結果から $\varphi(x, y)$ が (VS) を満たすことも良い. そこで,

$$\mathbf{grt}_1 \hookrightarrow \mathbf{grt}_1^{\text{em}}, \quad \psi(x, y) \mapsto \psi(-x - y, y).$$

次の結果は, 特に, アレクシーブ-トロシアン の埋め込み (4) の分解を与える.

定理 ([18]). (i) $\varphi \in \mathbf{grt}_1^{\text{em}}$ に対し $\nu^{\text{em}}(\varphi) := (\varphi(y, x), \varphi(x, y)) \in \mathbf{krv}_2$ となる.

(ii) 単射線形写像 $\nu^{\text{em}} : \mathbf{grt}_1^{\text{em}} \rightarrow \mathbf{krv}_2$ の像は \mathbf{krv}_2 の対称部分 $\mathbf{krv}_2^{\text{sym}} = \{(a, b) \in \mathbf{krv}_2 \mid b(y, x) = a(x, y)\}$ の次数 2 以上の部分に一致する. 特に,

$$\mathbf{krv}_2^{\text{sym}} = \mathbb{K}t \oplus \nu^{\text{em}}(\mathbf{grt}_1^{\text{em}}).$$

注. (i) $\mathbf{krv}_2^{\text{sym}}$ と \mathbf{krv}_2 が一致するかどうかは知られていない (次数 17 までは一致).

- (ii) 次数 17 以下で, (ELP) の解空間は grt_1 と一致し, 特に (ELP) の解は (VS) をみたす.
- (iii) 定理の帰結として, grt_1^{em} が伊原括弧積で閉じていてリー代数の構造を持つことが分かる. 直接証明はまだない. また, 条件 (VS) を外した場合はまだ分からない.
- (iv) 条件 (VS) は技術的な仮定として置いた側面があるが, $\Phi_{\text{pps}}, \Phi_{\text{psp}}, \Phi_{\text{spp}}$ に対するある対称性の仮定をおくと, **PaMB** の六角方程式から導かれることが分かる.

以下, 主張 (i) の証明の概略, 特に方程式 (ELP) の使用箇所を説明する. ポイントは, (ELP) に現れる写像 R が 2 点穴空き円板のゴールドマン-トゥラエフ リー双代数の演算と関係することである. より詳しく, R はトゥラエフ余括弧積の基点付き版の随伴次数商の制限に一致する. この事実と, 柏原-ヴェルニュ方程式とゴールドマン-トゥラエフ リー双代数の関係 ([4, 5, 6]) を用いると次が示される:

補題. $\tilde{u} = (a, b) \in \text{lie}_2^{\oplus 2}$ は (LKV1) をみたし, ある $c \in \text{ass}_2$ が存在して $R(\tilde{u}(x)) = [x, c]$ かつ $R(\tilde{u}(y)) = [y, c]$ とする. このとき, \tilde{u} は (LKV2) をみたし, 特に $\tilde{u} \in \text{krv}_2$ となる.

ただし, \tilde{u} は lie_2 に導分として次の様に作用している: $\tilde{u}(x) = [x, a], \tilde{u}(y) = [y, b]$.

定理 (i) の証明 $\varphi \in \text{grt}_1^{\text{em}}$ のとき, 条件 (VS) から $\nu^{\text{em}}(\varphi)$ は (LKV1) をみたす. $\nu^{\text{em}}(\varphi) \in \text{krv}_2$ を示すには, 補題の条件を確認すれば良い. 次の計算をする:

$$\begin{aligned} R(\nu^{\text{em}}(\varphi)y) &= R([y, \varphi(x, y)]) = [y, R(\varphi)] + (\partial_y \varphi)y - y\iota(\partial_y \varphi) \\ &= [y, R(\varphi) - \partial_y \varphi] \underset{\triangle}{=} [y, (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0)] = [y, -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)]. \end{aligned}$$

ここで, \triangle において方程式 (ELP) を用いた. 同様の計算で, $R(\nu^{\text{em}}(\varphi)(x)) = [x, -(\partial_y \varphi)(y + x, 0)]$ がわかる. $c := -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)$ とおけば良い. \square

参考文献

- [1] A. Alekseev, B. Enriquez, and C. Torossian, Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations, *Publications Mathématiques de L'IHÉS*, **112** (2010) 143–189.
- [2] A. Alekseev, F. Naef and M. Ren, Poisson brackets and coaction maps of regularized holonomies of the KZ equation, preprint, arXiv:2409.08894
- [3] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, *Ann. of Math.* (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.
- [4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, *Adv. Math.* **326** (2018), 1–53.
- [5] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne, *Quantum Topol.* **11**, 657–689 (2020)
- [6] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, preprint, arXiv:1804.09566v3 (2023)
- [7] E. Artin: Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1925), 47–72.

- [8] D. Bar-Natan, On associators and the Grothendieck-Teichmüller group, I, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 2, 183–212.
- [9] D. Bar-Natan and Z. Dancso, Finite type invariants of w-knotted objects II: tangles, foams and the Kashiwara-Vergne problem, *Math. Ann.* **367** (2017), no. 3–4, 1517–1586. Correction published in *Math. Ann.* **389** (2024), no. 3, 3257–3259.
- [10] D. Bar-Natan, Z. Dancso, T. Hogan, J. Liu, and N. Scherich, Goldman-Turaev formality from the Kontsevich integral, in preparation.
- [11] D. Bar-Natan, Z. Dancso, T. Hogan, Y. Kuno, and D. Lin, Coherence for the groupoid of mixed braids, in preparation.
- [12] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991) no. 4, 829–860.
- [13] H. Furusho, Pentagon and hexagon equations, *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 1, 545–556.
- [14] W. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, *Invent. Math.* **85** (1986) no. 2, 262–302.
- [15] A. Joyal and R. Street, Braided tensor categories, *Adv. Math.* **102** (1993), no. 1, 20–78.
- [16] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff Formula and Invariant Hyperfunctions, *Invent. Math.* **47** (1978), no. 3, 249–272.
- [17] T. Kohno, Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures, *Invent. Math.* **82** (1985), no. 1, 57–75.
- [18] Y. Kuno, Emergent version of Drinfeld’s associator equations (with an appendix by Dror Bar-Natan), preprint, arXiv:2504.02549
- [19] S. Lambropoulou, Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manifolds, in: *Knots in Hellas ’98 (Delphi)*, *Ser. Knots Everything* **24**, 274–289 (2000).
- [20] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Second edition, Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [21] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev’s loop operations, *Quantum Topol.* **9** (2018), no. 1, 39–117.
- [22] F. Naef and R. Navarro Betancourt, A functorial approach to the Kashiwara-Vergne problem, in preparation.
- [23] T. Ohtsuki, *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything **29**, World Scientific Publishing Co. Inc. 2002.
- [24] M. Ren, A relation between Turaev coaction, Goncharov–Brown coaction and the reduced coaction Lie algebra, preprint, arXiv:2504.17416
- [25] S. Satoh, Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), no. 4, 531–542.
- [26] A. Suciu and H. Wang, Taylor expansions of groups and filtered-formality, *Eur. J. Math.* **6** (2020), no. 3, 1073–1096.
- [27] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **47** (1977), 269–331.
- [28] V. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **24** (1991), no. 6, 635–704.