Stable homotopy theory of invertible quantum spin systems

窪田 陽介　(京都大学)*

本文章の増補版が，私の Researchmap「資料公開」[*1]から入手できますので，よろしければご活用ください．

1　背景

Landau–Gintzbrug による超伝導の研究以来，相転移には対称性の変化を伴う（相は対称性の群によってラベルされている）という考え方が支持されていたらしい．例えば，金属の温度を下げていくと電子のスピンがある方向に揃うことで空間回転対称性を失って強磁性を得る，というのがその例である．ところが後年，対称性ではなく（何かしらの巻き付き数や Chern 数のような）位相不変量によって区別される相があることがわかってきた．これがいわゆる物質のトポロジカル相である．この概念が物理にどのように反映されるかというと，例えば，異なるトポロジカル相の間を連続的な変形によって移動する過程では状態の劇的な変化を伴いうる（トポロジカル相転移）．

ここでは，あらゆる量子状態のうち，あるハミルトニアンの基底状態として実現されるものに注目する．より正確には，**短距離的**で**スペクトルギャップ**を持つハミルトニアンである．このような状態のなす空間は，ハミルトニアンのなす空間と同じトポロジーを持つ（同じ基底状態を持つふたつのハミルトニアンは単に線形に繋ぐことでホモトピックになる）ので，以降はハミルトニアンのなす空間のトポロジーについて議論する．本研究では，その中でも特に**可逆**なもののなす部分集合に着目する（いずれの用語も §2 で後述）．

1.1　SPT 相の指数

このような空間のトポロジーがなぜ研究に値するのかは，数学の立場からは明白と思う（「そこに空間があるから」）が，その物理的な動機については説明が必要そうである．π_0 を知りたい理由については上で説明した通りだが，これは 1 次以上のホモトピー群に同じように興味を持つ理由にはならないだろう．主要な動機として挙げられるのが，SPT (symmetry potected topological) 相の位相不変量を理解する助けとなる，という点である．

これは微妙に不正確だが，SPT 相とは群 G の作用に関して不変な（可逆）トポロジカル相のことだと思って読んで頂いて差し支えない．その最も初期の有名な例が，以下の 1 次元模型である．

$$\mathsf{H}_{\mathrm{AKLT}} = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}} S_{\boldsymbol{x}} \cdot S_{\boldsymbol{x}+1} + \frac{1}{3}\sum_{\boldsymbol{x}} (S_{\boldsymbol{x}} \cdot S_{\boldsymbol{x}+1})^2$$

* 〒606-8502 京都府京都市左京区追分町 京都大学 理学研究科
e-mail: `ykubota@math.kyoto-u.ac.jp`

*1 `https://researchmap.jp/multidatabases/multidatabase_contents/detail/286903/aa3d986d1330a04061b23bc4db910485?frame_id=477881`

詳しい定義は省略する．この AKLT 模型はギャップを持ち，その基底状態はいわゆる行列積状態 (MPS) の一種である．そして，有限群 $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ の対称性を持っている．Gu–Wen[6] や Pollmann–Berg–押川–Tener[15] によって，G 対称性を持つ MPS は $H^2(G\,;\mathbb{T})$ に値を取る位相不変量を持つことが示されており，AKLT 模型はこの値が非自明である．この不変量はのちに緒方 [12] によってより広いクラスの G 対称性を持つ 1 次元量子スピン系に，緒方 [13] および Sopenko[18] によって 2 次元のスピン系に一般化された．

さてここで，次の問が考えられる．

(1) ここで群コホモロジーが現れるのは（トポロジーの見地から）何故か？
(2) $d \geq 3$ でもやはり群コホモロジーに値を取る不変量が構成できるか？

これらに答える筋道を与えたのが Kitaev である．Kitaev は次のことを提唱した [9].

予想 1.1. d 次元の可逆な gapped ハミルトニアンのなす集合 IP_d を $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に関して集めたものは Ω-スペクトラムをなす.

もしこの主張が正しいならば， 上の問には次のような議論によって解答できる.

$$[\mathrm{pt}, IP_d^G] \xrightarrow{(1)} [EG, IP_d]^G \xrightarrow{(2)} [BG, IP_d] \xrightarrow{(3)} [BG, K(\mathbb{Z}, d+2)] \cong H^{d+2}(G\,;\mathbb{Z}).$$

(1) は同変写像 $EG \to \mathrm{pt}$ に関する引き戻しである．常に存在するが，一般に同型とは限らない．(2) は一般には存在しないが，もし IP_d が ‘split G-スペクトラム’ であれば同型になる．最後に (3) について，各種ホモトピーを少し観察すると（§3.3），自然な写像 $K(\mathbb{Z}.d+2) \to \mathrm{IP}_d$ が存在し，$d \leq 2$ のときにはこれは split することがわかる．この戦略は d が小さいときの不変量の構成に成功していると同時に，d が大きくなると同じようにはいかず，より複雑だが計算可能そうな群 $[BG, IP_d]$ が不変量の値域としてよりふさわしそうであることを示唆している.

本研究はこの予想 1.1 に数学的に厳密な定義を与え，これを証明するものである.

1.2 自由フェルミオンの K 理論による分類

おそらく Kitaev の着想の雛型であったと思われることに，自由フェルミオンのトポロジカル相の理論がある．この分野は，整数量子ホール効果におけるホール伝導度の値の離散化が Chern 数の整数性によって説明できるという発見に端を発しており，物性物理におけるトポロジーのもうひとつの重要な顕れである．Schnyder–笠–古崎–Ludwig[17] および Kitaev[8] は，自由フェルミオンは K 理論によって分類されることを示した.

この事実も色々な数学的定式化を持っているが，中でも特に格子系の量子力学を素直に書き起こしたのが，1980 年代の Bellissard の仕事に端を発する非可換幾何学と作用素環の K 理論を用いたものである．平たく言うと，スピン系と自由フェルミオンの違いはテンソル積と直和の違いである．自由フェルミオンの解析は指数定理を介して K 理論や非

可換幾何と深く関係している．特に強調したいのは，粗幾何学 (coarse geometry) [16] との関係である．粗幾何学というのは空間の距離構造を粗くとらえる幾何学の一分野であり，一様に近い 2 点のなす集合 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X^2 \mid \mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < R\}$ たちのなす部分集合族を公理化した粗構造によって特徴付けられる．ハミルトニアンの短距離性というのは，まさにこの「一様に近い 2 点」という構造の言葉で記述される仮定である．実は，d 次元ハミルトニアンの集合のトポロジーは，Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の大域的な構造から規定されている．

この粗幾何学のアイデアや常識を量子スピン系の分野に移植したのが本研究である．

2 定義と解析的背景

本研究で扱う数学的対象である量子スピン系の解析の一部について，手短に紹介する．教科書 [3,4] や論文 [7,11] などに準拠しつつ，少しずつ必要な形に調整している．

(1) **d 次元格子** Λ．普通に考えるとこれは $\mathbb{R}^d$ の離散部分集合であるべきだが，ここではのちの議論を成立させるために仮定をやや緩和し，$\mathbb{R}^{d+l_\Lambda}$ の離散部分集合であって，射影 $\Lambda \to \mathbb{R}^d$ が固有であるようなものを扱う．正確にはもう少し強い条件を課す（弱一様離散性と射影の線形固有性, 参照）．

(2) **観測量の代数** $\mathcal{A}_\Lambda$．各格子点 $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ に行列 C*-環 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}})$ を乗せておき，その無限テンソル積として定義する: $\mathcal{A}_\Lambda = \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}$．代数的なテンソル積ではなく，行列ノルムによる完備化した C*-環を考える．その稠密な部分代数として，almost local な元，すなわち

$$\|a\|_{\boldsymbol{x},f} \coloneqq \max\left\{\|a\|, \sup_{r\geq 1}\Big(f(r)^{-1}\cdot\|a-\Pi_{\boldsymbol{x},r}(a)\|\Big)\right\} < \infty \quad \forall f(r) = e^{-r^\mu}, 0 \leq \mu < 1,$$

を満たす元のなす部分 Fréchet 代数を $\mathcal{A}_\Lambda^{\mathrm{al}}$ と置く．ただしここで $\Pi_{\boldsymbol{x},r}(a) = (\mathrm{id}_{\mathcal{A}_{B_r(\boldsymbol{x})}} \otimes \mathrm{tr})(a)$ は $\mathcal{A}_{B_r(\boldsymbol{x})} \subset \mathcal{A}_\Lambda$ の元で a に最も近いものである．すなわち，a が almost local であるというのは，半径 r の球に台を持つような作用素でよく近似できる（誤差が $r \to \infty$ で f より早く減衰する）ということである．

(3) **短距離的ハミルトニアン** H．これは $\mathcal{A}_\Lambda^{\mathrm{al}}$ の元の族 $\mathsf{H} = (\mathsf{H}_{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{x}} \in \Lambda$ であって，各 $\mathsf{H}_{\boldsymbol{x}}$ が $\boldsymbol{x}$ の近くに一様に局在しているもの（uniformly almost local (UAL)），すなわち

$$|||\mathsf{H}|||_f \coloneqq \sup_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \|\mathsf{H}\|_{\boldsymbol{x},f} < \infty \qquad \forall f(r) = e^{-r^\mu}, 0 \leq \mu < 1$$

を満たすものによって与えられる．このような作用素の族は，

$$[\mathsf{H}, a] \coloneqq \sum_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} [\mathsf{H}_{\boldsymbol{x}}, a]$$

によって $\mathcal{A}_\Lambda$ 上の（$\mathcal{A}_\Lambda^{\mathrm{al}}$ をコアとする）非有界微分を定める．実はこの微分は 1 パラメータ変換群 $\tau_{\mathsf{H}} \colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{A}_\Lambda$ を生成する: つまり $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau_{\mathsf{H},t}(a) = i[\mathsf{H}, a]$.

(4) **非縮退基底状態とスペクトルギャップ**．量子力学における状態とは，可観測量に数を対応させる操作，すなわち線型写像 $\omega \colon \mathcal{A}_\Lambda \to \mathbb{C}$ であって，$\omega(a^*a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と

$\omega(1)=1$ の 2 条件を満たすものである．これがハミルトニアン H のギャップを持つ非縮退な基底状態であるとは，$\omega(a)=0$ を満たす任意の $a\in\mathcal{A}_\Lambda$ に対して

$$\omega(a^*[\mathsf{H},a])\geq\delta\omega(a^*a)$$

を満たすことをいう．この不等式の意味は作用素環の GNS 表現を経由すると明白になる．

(5) **滑らかさ**．開集合 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ でパラメトライズされたの族 $(\mathsf{H}(p),\omega_{\mathsf{H}(p)})_{p\in\mathcal{U}}$ が滑らかであるとは,
  (a) 各 $\mathsf{H}_{\boldsymbol{x}}$ が Fréchet 空間値関数として C^∞ 級であり，それだけではなくその微分のノルム $\|\partial^I\mathsf{H}_{\boldsymbol{x}}\|_{\boldsymbol{x},f}$ が $\boldsymbol{x}$ に関して一様に有界,
  (b) ω_{H} も C^∞ 級である
ことを言うことにする．これは解析に必要な条件を詰め込んだ恣意的な定義で，例えばある Frechét 多様体への C^∞ 級写像として特徴づけることは難しそうである．

(6) **並行移動と Lieb–Robinson 評価**．UAL 条件を満たす反自己共役作用素の族 $\mathsf{G}=(\mathsf{G}_{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}$（すなわち UAL ハミルトニアンから基底状態に関する条件を落としたもの）のなす集合を $\mathfrak{D}^{\mathrm{al}}_\Lambda$ と書く．$\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ 上の，$\mathfrak{D}^{\mathrm{al}}_\Lambda$ に値を取る接続 1-形式 $\mathsf{G}=\sum_i\mathsf{G}^i dx_i$ に対して，曲線 $c\colon[a,b]\to\mathcal{U}$ に沿った時刻 s から t への並行移動

$$\alpha_c(\mathsf{G}\,;s,t)\colon\mathcal{A}_\Lambda\to\mathcal{A}_\Lambda\quad\text{s.t. }\ \alpha_c(\mathsf{G}\,;s,t)^{-1}\frac{d}{dt}\alpha_c(\mathsf{G}\,;s,t)(a)=[\mathsf{G},a]$$

が構成できる．これは，スピン系の時間発展に関する Lieb–Robinson 評価（cf. [11] など）の帰結として，$f(r)=e^{-r^\mu}$ に対して，別の $f'(r)=e^{-r^{\mu'}}$ によって

$$\|\alpha(\mathsf{G}\,;0,t)(a)\|_{\boldsymbol{x},f}\leq\Upsilon_{\mathsf{G},f}(t)\cdot\|a\|_{\boldsymbol{x},f'}$$

と評価でき，特に H が gapped UAL ハミルトニアンならば

$$\alpha_c(\mathsf{G}\,;s,t)(\mathsf{H}):=(\alpha(\mathsf{G}\,;s,t)(\mathsf{H}_{\boldsymbol{x}}))_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}$$

もまた gapped UAL ハミルトニアンである．ここで，$\Upsilon_{\mathsf{G},f}(t)$ がせいぜい $e^{t^{\mu''}}$ 程度の増大度を持つ関数であることも重要である．

(7) **Hasings の断熱過程**．gapped UAL ハミルトニアンの滑らかな族 $(\mathsf{H}(p),\omega_{\mathsf{H}(p)})$ に対して,

$$\mathsf{G}_{\mathsf{H}}:=\int\left(\int_0^t\tau_{\mathsf{H},u}(d\mathsf{H})du\right)w(t)dt$$

によって定める 1 形式（$w(t)$ は”よい”関数）は，曲線に沿って H の基底状態を運搬する．すなわち,

$$\omega_{\mathsf{H}(c(t))}=\omega_{\mathsf{H}(0)}\circ\alpha(\mathsf{G}_{\mathsf{H}}\,;0,t)$$

が成り立つ．別の言い方をすると，断熱時間発展を作用させたハミルトニアン $\alpha_c(\mathsf{G}_{\mathsf{H}}\,;0,t)(\mathsf{H}(c(t)))$ の基底状態は一定である．本研究ではこの構成を積極的に利用する．

(8) **系の合成と可逆性**．ふたつの量子系の合成は，観測量代数のテンソル積 $\mathcal{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\Lambda_2}$ に定まる無限小生成子の和 $\mathsf{H}_1 \boxtimes \mathsf{H}_2 = \mathsf{H}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathsf{H}_2$ である．可逆性とは，この積に関する（ホモトピーを法とした）可逆性である．各 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ に単位ベクトル $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ を一つ固定しておく．これは自明な（基準となる）ハミルトニアンの選び方を $\mathsf{h}_{\boldsymbol{x}} \coloneqq 1 - |\Omega_{\boldsymbol{x}}\rangle\langle\Omega_{\boldsymbol{x}}|$ の族として固定しておくことに当たる．H が可逆であるとは，別のハミルトニアン $\check{\mathsf{H}}$ と，$\mathsf{H} \boxtimes \check{\mathsf{H}}$ と自明なハミルトニアン h を繋ぐホモトピー $\overline{\mathsf{H}}$ を持つことを言う．

3 Kitaev 予想の定式化と証明

3.1 多様体の圏の上の層

本研究で興味があるのは gapped UAL ハミルトニアン H のなす集合 $\mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda}$ のトポロジーである．格子 Λ を一つに固定したままではハミルトニアンの積（系の合成）が演算として定まらないので，格子 Λ に関して $\mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda}$ の余極限（合併）を取っておいた方がよい．ハミルトニアンの可逆性というのはこの余極限を取った後に定まる概念である．具体的にどのような余極限を取るのかという定義の話は，[10, Section 3] で丁寧に扱った．

前述のとおり，写像 $\mathcal{M} \to \mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda}$ の滑らかさの定義は恣意的であり，無限次元多様体のような定式化を受け付けそうには感じられない．特に，連続写像を滑らかな写像で近似する Whitney 近似は望むべくもない．一方で，我々は BG のような多様体とは限らない位相空間から $\mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda}$ への写像を扱いたい．これらの一見すると深刻そうな不整合に関する懸念は，実はちょっとした工夫によって取り払われる．単に，位相空間の代わりに多様体の圏 Man の上の層 (あるいは diffeological space）の枠組の中で定式化すればよい．これらは，“C^∞ 級写像のなす部分集合 $C^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda}) \subset \mathrm{Map}(\mathcal{M}, \mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda})$” をすべての多様体 $\mathcal{M}$ に対して指定しようと思ったときに，その満たすべき性質を公理化した概念である．Man 上の層の基礎的なホモトピー論は Madsen–Weiss による Mumford 予想の解決の過程で整備された．特に，層 $\mathcal{F}$ の特異複体を作り，その幾何学的実現を取ると，得られる位相空間 $|\mathsf{Sing}\mathcal{F}|$ は次の意味で $\mathcal{F}$ の滑らかなホモトピー型を完全に記憶していることが示されている: 多様体 $\mathcal{M}$ に対して，ホモトピー集合 $[\mathcal{M}, |\mathsf{Sing}\mathcal{F}|]$ は，$\mathcal{M}$ から $\mathcal{F}$ への滑らかな写像の滑らかなホモトピー類のなす集合（に相当するもの）と同型になる．

定義 3.1. Man 上の層 $C^\infty(\textvisiblespace, \mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda})$ の Λ に関する余極限を $\mathcal{GP}_d$ と，その可逆な切断からなる部分層を $\mathcal{IP}_d$ と置く．また，$IP_d \coloneqq |\mathsf{Sing}\mathcal{IP}_d|$ と置く．

3.2 Kitaev ポンプ

d 次元可逆ハミルトニアン H に対して，そのホモトピー逆 $\check{\mathsf{H}}$ と, $\mathsf{H} \boxtimes \check{\mathsf{H}}$ と自明ハミルトニアンを繋ぐホモトピーを $\overline{\mathsf{H}}$ を一つ取る [*2]．これらを用いて $d+1$ 次元ハミルトニアン

[*2] このような $\check{\mathsf{H}}$ と $\overline{\mathsf{H}}$ を適当に取ってきて良いのは，H のなす層と，三つ組 $(\mathsf{H}, \check{\mathsf{H}}, \overline{\mathsf{H}})$ のなす層が，弱ホモトピー同値であるためである．

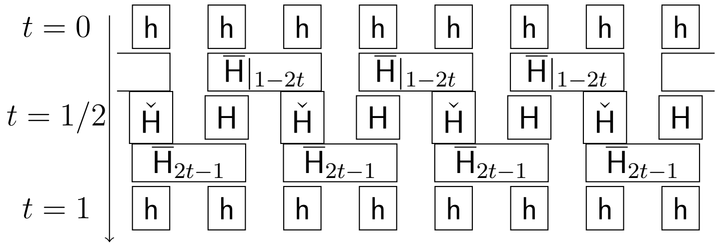

図 1　Kitaev ポンプ（左）とその右半空間への切り落とし（横軸は x_{d+1}）

のループを作りたい．

まず，$\overline{\mathsf{H}}$ のレイヤーを x_{d+1} 方向に無限枚重ねて $d+1$ 次元の層状のハミルトニアンを作る（図 1）．これは自明ハミルトニアンと層状ハミルトニアン $\cdots \boxtimes \mathsf{H} \boxtimes \check{\mathsf{H}} \boxtimes \mathsf{H} \boxtimes \cdots$ のホモトピーを与える．$1/2 \leq t \leq 1$ では同様のパスを用いて自明なハミルトニアンに帰ってくるのだが，ここでは H と $\check{\mathsf{H}}$ の組み合わせを組み替える．こうすることで，各時刻 t では層状ハミルトニアンなのだが，全体では真に $d+1$ 次元的な広がりを持っているハミルトニアンのループが手に入る．これを $(\mathsf{H}, \check{\mathsf{H}}, \overline{\mathsf{H}})$ に付随する Kitaev ポンプと呼ぶ．

ここで，本研究の主定理の一つを正確に主張しておく．

定理 3.2. $\kappa_d \colon \mathcal{IP}_d \to \Omega\mathcal{IP}_{d+1}$ は弱ホモトピー同値である．

3.3　変調ハミルトニアンと断熱補間 (adiabatic interpolation)

Kitaev のもともとのアイデアでは，κ_d の逆写像を構成することが考えられていた．まず，与えられた $d+1$ 次元ハミルトニアンの 1 パラメータ族 $\mathsf{H}(t)$ に対して，x_{d+1} 方向に $\mathsf{H}(0)$ から $\mathsf{H}(1)$ へだんだん変調していくハミルトニアン $\vartheta_d\mathsf{H}$ を考える（図 2）．すなわち，$\chi(-\infty) = 0$ と $\chi(+\infty) = 1$ を十分なだらかに結ぶ滑らかな関数 χ を使って

$$\text{“}(\vartheta_d\mathsf{H})_{\boldsymbol{x}} = \mathsf{H}_{\boldsymbol{x}}(\chi(x_{d+1}))\text{”}$$

という作用素の族 $(\vartheta_d\mathsf{H})_{\boldsymbol{x}}$ を考えるということである．特に H がループの時には，$\mathsf{H}(0) = \mathsf{H}(1) = \mathsf{h}$ なのだから，超平面 $\{x_{d+1} = 0\}$ から離れた部分では $\vartheta_d\mathsf{H}$ はほぼ自明になる．これはおおよそ $\vartheta_d\mathsf{H}$ が d 次元ハミルトニアンであるということである．

しかし，このような構成を実際に解析的に実行しようとすると，量子スピン系におけるスペクトルギャップの存在が一般にごく小さな摂動に対しても極めて不安定であるとい

図 2　変調ハミルトニアン

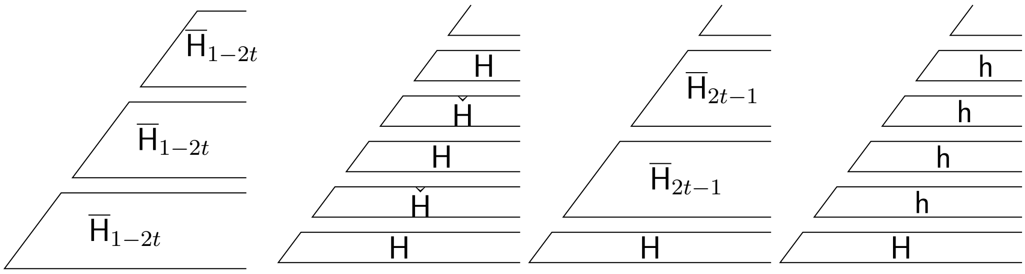

図 3　h と H をつなぐ (Carlsson–Pedersen–)Higson–Roe による Eilenberg の詐術（$d=1$）：縦軸は内部自由度の大きさを表しており，一様有限ではないが局所有限である．

う困難によって躓くことになる．そこで，単純に変調ハミルトニアンを考える代わりに，前節で紹介した Hastings の断熱過程を用いる．H そのものを気軽にいじるわけにはいかないが，接続 1-形式 G_{H} は適当に半空間に切り落としても平気である．このアイデア自体は緒方や Sopenko の $d=2$ の研究 [13, 18] の中で既に効果的に用いられていた．

左半空間への切り落としを $\Pi_L(\mathsf{G}_{\mathsf{H}})$ と置いて

$$\alpha(\Pi_L(\mathsf{G}_{\mathsf{H}});0,1)^{-1}\circ\alpha(\mathsf{G}_{\mathsf{H}};0,1)(\mathsf{H}(0))$$

を考える．つまり，まず G_{H} に沿って $t=1$ まで並行移動し，しかるのちに左半空間でのみ $\Pi_L(\mathsf{G}_{\mathsf{H}})$ によって $t=0$ まで逆向きに並行移動する．これは左半分では**ほとんど** $\mathsf{H}(0)$ と同じハミルトニアンを持ち，右半分では**基底状態**が $\mathsf{H}(1)$ のそれと**完全に**一致する．$\mathsf{H}(0)=\mathsf{H}(1)=\mathsf{h}$ のとき，実はこのようなハミルトニアンは右半分でギャップを保ったまま切り落とすことができ，h と h の補間，すなわち d 次元ハミルトニアンが得られる．

3.4　バルク・境界対応

前小節で構成したホモトピー逆の候補に対して，$\vartheta_d\circ\kappa_d\sim\mathrm{id}$ は比較的簡単に証明できるが，$\kappa_d\circ\vartheta_d\sim\mathrm{id}$ はどうにもうまくいかない．これは本質的な躓きである．というのも，もし K 理論（自由フェルミオン）におけるバルク・境界対応の証明がどんなものかを知っていたら，次の二つのことに気がつくはずである．第一に，その議論は上記の断熱補間とパラレルである．第二に，粗幾何学において「一様 Roe 環と Roe 環の K 群の違い」として知られている微妙な問題が，$\kappa_d\circ\vartheta_d\sim\mathrm{id}$ が証明できてしまっては困る，Kitaev 予想はそのままの素朴な形では成り立ちそうにない，と示唆している．

粗幾何学における教訓は，$\kappa_d\circ\vartheta_d\sim\mathrm{id}$ が「半空間 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上で定義された可逆ハミルトニアンの層の可縮性」に帰着できるということである．これはある種のバルク・境界対応である．この可縮性が自由フェルミオンに対してどのように証明されていたかというと，図 3 に示したような Eilenberg の詐術による．すなわち，量子スピン系の集合を Kitaev 予想が成り立つような形で定式化したければ，この議論が機能するような定義を採用する必要があるということである．手短にいうと，内部自由度の次元が各点ごとに一様に有限ではないことを許容するように定義を緩和すればよい（正確にはもっと上手くやる必要があるが）．このようにすることで，物理的には少々格好がつかないが，数学

的にクリーンな可逆トポロジカル相が定義できた.

4 周辺的な話題たち

4.1 ホモトピー群

得られたスペクトラムのホモトピー群はどうなっているのかというと，これは残念ながら現時点ではほとんど手がかりがない．ただし，図 4 のように，-1 次より上の次数についてはよくわかっており，ほとんどが消えている（下の二行は次節で説明）．まず，0 次元の可逆相 IP_0 は，$\mathbb{CP}^\infty$ とおおよそ同じ空間になっている．このことと Kitaev 予想によって，IP_1 の 1 次以上のホモトピー群は確定する．唯一非自明なのは π_0 群だが，これは緒方が行った von Neumann 環を用いる議論 [12] によって自明であることがわかる．$\pi_0(IP_2)$ はもはや不明だが，‘chiral central charge’ という不変量によって $\mathbb{Z}$ と同型で，‘Kiteav の E_8-状態’ によって生成されることが予想されている. 近年 Sopenko が $\mathbb{Z}/12$ に値を取る不変量を構成した.

4.2 フェルミオン系

同じやり方でフェルミオン系を扱うことができるかというのは自然な問であり，かつトポロジーの観点からも有意義なところがある．フェルミオンについては，単にテンソル積 $\otimes$ を次数付きテンソル積 $\hat{\otimes}$ に取り替えるだけで，同様の概念が定義できる.

少なくとも言葉の上では，自由フェルミオンはフェルミオンの一種なので，自由フェルミオンが K 理論によって分類されていたことを思い出すと，

$$\mathrm{Q}\colon \Sigma^{-2}KO \to \mathit{fIP}$$

という射が存在してもよさそうである．これは実際に定義することができる．これは，荒木による CAR 代数の一連の研究で，準自由第二量子化 (quasi-free second quantization) として知られていたものである.

フェルミオン系 fIP もまた，-1 次以上のホモトピー群は完全に決定できる．そこで，それ以下のホモトピーを切り落とした被覆 $\Sigma\mathrm{fIP}\langle 0,\infty\rangle$ を取ることを考える．すると，準自由第二量子化は，$\Sigma\mathrm{fIP}\langle 0,\infty\rangle$ と $\Sigma^{-1}KO\langle 0,\cdots,3\rangle$ の間の弱同値を与えている．これは Freed のスペクトラム R^{-1} と呼ばれているもので [5]，K 理論の捩れとの関係からよく調べられている (cf. [2])．このことによって，$\mathit{fIP}\langle -1,\infty\rangle$ の k-不変量がすべて決定できる．また，この群 $[\mathcal{M},\mathrm{fIP}]$ は，Gu–Wen および Wang–Gu の supercohomology 群とも一

$n-d$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\pi_n(IP_d)$	$\cdots$	?	?	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\cdots$
$\pi_n(\mathit{fIP}_d)$	$\cdots$	?	?	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\cdots$
$\pi_n(KO_{d+2})$	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\cdots$

図 4　スペクトラム IP と fIP のホモトピー群の表

致する．

4.3 高次 Berry 位相との関係

高次 Berry 位相とは，Kitaev によって提案され Kapustin, Spodyneiko, Sopenko らによって定式化された不変量 $[\mathcal{M}, IP_d] \to H^{d+2}(\mathcal{M};\mathbb{R})$ である．Kitaev 予想によって，このような射が存在することは安定ホモトピー論の一般論 (Chern–Dold 指標) から直ちに従うようになった．この Chern–Dold 指標が高次 Berry 位相と同一であるというのは一応証明が必要な事実だが，これは近日中に続編で発表する予定である．

SPT 相への応用を考えると，この射がいつ $\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーに持ちあがるかという問題が気がかりとなる（cf. §1.1）．これはすなわち，スペクトラムの被覆 $\Sigma^2 H\mathbb{Z} \to IP$ がいつ split するかという問に他ならない．Artymowicz–Kapustin–Sopenko[1] は $d \leq 2$ のときにこのような持ち上げが存在することを構成的に証明した．この結果は，現在ではごく簡単な計算によって再証明できるようになっている．

4.4 オンサイト対称性がある場合: SPT 相

G をコンパクト Lie 群とする．連結性は特に仮定せず，有限群と $U(1)$ を最も典型的な例として念頭に置いている．我々は各格子点 $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ に行列環 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}})$ を置いていたわけだが，この $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ が G の表現だったとしよう．このとき，各点で $\beta_{\boldsymbol{x}} \colon G \curvearrowright \mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}$ が定まる．これは，ハミルトニアンの集合 $\mathfrak{H}^{\mathrm{al}}_{\Lambda}$，ひいてはその余極限である層 $\mathcal{IP}_d$ への G の滑らかな作用 $\beta \coloneqq \prod_{\boldsymbol{x}} \beta_{\boldsymbol{x}}$ を与える．

Kitaev ポンプおよびその他の §3 の議論はすべて G 同変にでき，その結果として族 $\{IP_d\}$ は G-スペクトラムを与えていることが証明できる．ただし，この G-スペクトラムはいわゆる $RO(G)$-スペクトラムではなく，naive な G-スペクトラムである．そのかわり，（$\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}$ を適切に選んでおくことで）split G-スペクトラムではある．よって，§1.1 でいうところの写像 (2) が構成できる．

結局このことによって得られたのは，$d = 1, 2$ の SPT 相に関する既存の結果の多くの再証明と，少しの新しい結果である．その比較リストは [10, Example 5.24] にあるが，大まかには以下のようになる．

- 1 次元および 2 次元ボソン系では，知られている SPT 相の分類が再現された．
- 2 次元フェルミオン系では，$[BG, \mathit{fIP}_2]$ という群に値を取る不変量が得られた．これは緒方が [14] で構成していたものより値域が小さく，Wang–Gu が予想していたものと一致する．
- 任意の次元で，コホモロジー値不変量の一般化というべき
$$\mathrm{ind}_d^G \colon IP_d^G \to [BG, IP_d]$$
が定義できた．例えば $G = U(1)$ のとき，両辺に $\mathbb{Q}$ をテンソルすると，Kapustin–Sopenko による相互作用系の量子ホール効果の説明 [7] を再現する．

4.5　可逆なハミルトニアンの例

ここまでの議論の中でで抽象的に定義されたハミルトニアンの集合がどのような元を含んでいるのか，簡単に紹介しておく．理論的には，自明なハミルトニアンを自己同型で動かすことによって多様なハミルトニアンが入手できる．我々の IP が十分豊富な元を持つことはこれによって保証されていると言ってもよい．これとは別に，もう少し物理的な文脈のあるハミルトニアンの構成法がいくつかある．

- 格子上の Dijkgraaf–Witten 模型．これは有限群 G の $\mathbb{T}$ 値 $d+1$-コサイクルから G 不変な d 次元の可逆ハミルトニアンを構成するものだったが，群コサイクルを Cech コサイクルに取り換えることで，最も一般的な形としては，有限群 G に対して G 同変コホモロジー関手の自然変換 $\Sigma^{-2}H\mathbb{Z} \to IP$ を得る．
- 上でも述べた，自由フェルミオンの準自由第二量子化．これは最終的に自然変換 $\Sigma^{-2}KO \to fIP$ を与える．
- 1 次元の行列積状態 (MPS)．これは写像 $K(\mathbb{Z},2) \times K(\mathbb{Z},3) \to IP_1$ を与える．これの 2 次元版と呼ぶべき PEPS に対しても同じようなことがやりたいが，本稿執筆時点では理解は進んでいない．

4.6　局所化流と Baum-Connes 予想

スピン系というのは，場の理論と類似しているであろうという共通了解がある．先行している可逆場の理論の研究を横目に見ると，そこでは「空間」には二つの役割がある．ひとつは（ここまで扱ってきたように）理論をラベルするパラメータ空間であり，もうひとつはそこの上で物理を考える実際の空間（時空）である．物性物理に話を戻すと，後者の空間とは物質の形状のことである．例えば，S^n や $\mathbb{T}^n$ のような空間の上のスピン系を考えたくなるのは自然だろう．これが X のホモロジー理論を与えるとなお良い．

しかし，今の定義では，コンパクト空間 X が一点と区別できない．これは，我々のハミルトニアンに課されている「短距離性」が，単に $|||\mathsf{H}|||_f$ が有限であることしか仮定しないところに原因がある．これがもし十分小さいと仮定されているのであれば，ハミルトニアンの集合は X の局所的なトポロジーをよく反映するかもしれない．しかし我々の仮定はもっと大味なので，例えば単位球面 S^2 上のレンジが 10000 以下のハミルトニアンというのは，単なる 0 次元ハミルトニアンと見分けがつかない．

実は，これまでも手本として参照してきた粗指数理論では,「有限」を「無限小」に取り替えてこの問題をうまくクリアする方法が知られている．特に Yu の localization algebra という概念はこれを文字通り実現するものであり，コンセプチュアルな構成なので真似ができる．ここでは我々も Yu の定義のスピン系における対応物を考える．[10] では，この新しい概念を局所化流 (localization flow) と呼んでいる．この命名は，行列積状態の繰り込み群流と何らかの類似性が感じられることに由来する．

これは本研究の後半部分に相当し，増補版ではもう少し詳しく解説している．

参考文献

[1] Adam Artymowicz, Anton Kapustin, and Nikita Sopenko, *Quantization of the higher Berry curvature and the higher Thouless pump*, Communications in Mathematical Physics **405** (2024), no. 8, 191.

[2] Jonathan Beardsley, Kiran Luecke, and Jack Morava, *Brauer-Wall Groups and Truncated Picard Spectra of K-theory* (2023), preprint, `arXiv:2306.1011[math.KT]`.

[3] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1*, 2nd ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-17093-6, (1987).

[4] ———. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2*, 2nd ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-61443-5, (1997).

[5] Daniel S. Freed, *Lectures on twisted K-theory and orientifolds* (2012), preprint, `https://web.ma.utexas.edu/users/dafr/vienna.pdf`.

[6] Zheng-Cheng Gu and Xiao-Gang Wen, *Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order*, Physical Review B **80** (2009), no. 15, 155131.

[7] Anton Kapustin and Nikita Sopenko, *Local Noether theorem for quantum lattice systems and topological invariants of gapped states*, Journal of Mathematical Physics **63** (2022), no. 9, 091903.

[8] Alexei Kitaev, *Periodic table for topological insulators and superconductors*, AIP Conference Proceedings **1134** (2009), no. 1, 22–30.

[9] ———, *On the classification of short-range entangled states* (2013), Talk at Simons Center. `http://scgp.stonybrook.edu/video_portal/video.php?id=2010`.

[10] Yosuke Kubota, *Stable homotopy theory of invertible gapped quantum spin systems II: Kitaev's Ω-spectrum*), preprint, `arXiv:2503.12618[math-ph]`.

[11] Bruno Nachtergaele, Robert Sims, and Amanda Young, *Quasi-locality bounds for quantum lattice systems. I. Lieb-Robinson bounds, quasi-local maps, and spectral flow automorphisms*, Journal of Mathematical Physics **60** (2019), no. 6, 061101, 84.

[12] Yoshiko Ogata, *A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries*, Transactions of the American Mathematical Society. Series B **8** (2021), 39–65.

[13] ———, *An $H^3(G,\mathbb{T})$-valued index of symmetry-protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional quantum spin systems*, Forum of Mathematics. Pi **9** (2021), Paper No. e13, 62.

[14] ———, *An Invariant of Symmetry Protected Topological Phases with On-Site Finite Group Symmetry for Two-Dimensional Fermion Systems*, Communications in Mathematical Physics **395** (October 2022), no. 1, 405–457.

[15] Frank Pollmann, Ari M. Turner, Erez Berg, and Masaki Oshikawa, *Entanglement spectrum of a topological phase in one dimension*, Physical Review B **81** (February 2010), no. 6, 064439.

[16] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, ISBN 0-8218-3332-4, (2003).

[17] Andreas P. Schnyder, Shinsei Ryu, Akira Furusaki, and Andreas W. W. Ludwig, *Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions*, Physical Review B **78** (November 2008), no. 19, 195125.

[18] Nikita Sopenko, *An index for two-dimensional SPT states*, Journal of Mathematical Physics **62** (2021), no. 11, 111901.