

# ニット状曲面による曲面絡み目のチャート表示

安田 順平 (大阪大学大学院 理学研究科 D3)\*

## 1 はじめに

曲面絡み目とは、4次元空間  $\mathbb{R}^4$  に滑らかに埋め込まれた閉曲面である。2つの曲面絡み目が  $\mathbb{R}^4$  のアイソトピーによって互いに移り合うとき、これらは同値であるという。曲面結び目理論においては、これらの同値類の分類および同型の判定が主なテーマとなる。

ブレイド状曲面は、分岐被覆曲面の構造を持つ  $D^2 \times B^2$  内の曲面であり、これはブレイドの高次元化である。また、ブレイド状曲面の特別な場合として2次元ブレイドが定まる。2次元ブレイドは閉包を取ることで曲面絡み目を構成することができ、これにより曲面絡み目を2次元ブレイドを用いて研究することが可能となる。例えば、曲面絡み目の補空間の基本群（結び目群）の特徴付け [6] や、曲面絡み目の非可逆性の判定 [2] などが挙げられる。2章においてブレイド状曲面について紹介する。

一方で、ブレイド状曲面や2次元ブレイドの閉包は  $D^2 \times B^2$  内の曲面や  $\mathbb{R}^4$  内の曲面絡み目をすべて表示することができない。この問題を解消するために、3章では新たにニット状曲面と呼ばれる  $D^2 \times B^2$  内の曲面を導入する。ここで、ニットとはブレイドのいくつかの交点をスプライスと呼ばれる操作で変形することによって得られる  $D^2 \times I$  内の曲線であり、ブレイドの一般化である。

ブレイド状曲面の重要な特徴として、チャートと呼ばれる平面的な記述が挙げられる。チャートを用いることで曲面絡み目を平面的に記述することができるだけでなく、図式的な性質を計算することも可能とする。4章ではブレイド状曲面のチャートをニット状曲面に拡張したものを導入する。

本研究は佐賀大学の中村伊南沙氏との共同研究に基づく。以下では特に断らない限り、多様体や写像は全て滑らかまたはPLであるとし、埋め込みは局所平坦であり、そして曲線や曲面はコンパクトな多様体であって向き付け可能性と連結性は課さないものとする。

## 2 ブレイド状曲面

本節ではブレイド状曲面について紹介する。詳細については [8] を参照されたい。整数  $n \geq 1$  に対して2次元円板  $D^2$  の内部で直線上に並んだ相異なる  $n$  点からなる集合  $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  を1つ固定する。また  $B^2 = I \times I$  の点  $y_0 = (0, 0) \in \partial B^2$  を  $B^2$  の基点とする。このとき直積空間  $D^2 \times B^2$  へプロパーに埋め込まれた曲面  $S$  が次数  $n$  のブレ

---

\* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山 1-1

e-mail: u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:22J20494) の助成を受けたものである。

キーワード：曲面絡み目, ブレイド状曲面, チャート

イド状曲面であるとは、射影  $\pi : D^2 \times B^2 \rightarrow B^2$  の  $S$  への制限  $\pi_S : S \rightarrow B^2$  が次数  $n$  の分岐被覆写像となり、かつ  $\pi_S^{-1}(y_0) = X_n \times \{y_0\}$  を満たすことを言う。次数  $n$  のブレイド状曲面が**単純**であるとは、各  $y \in B^2$  の逆像  $\pi_S^{-1}(y)$  に対して濃度  $|\pi_S^{-1}(y)|$  が  $n$  または  $n - 1$  であるときをいう。本稿では、特に断らない限りブレイド状曲面といえば単純であると仮定する。単純とは限らないブレイド状曲面については例えば [7, 9] を参照されたい。

2つのブレイド状曲面  $S, S'$  が**同値**であるとは、 $D^2 \times B^2$  のファイバーを保つアイソトピーによって移り合うことをいう；すなわち、 $D^2 \times \{y_0\}$  を固定する  $D^2 \times B^2$  のアイソトピー  $H_t$  と  $B^2$  のアイソトピー  $h_t$  ( $t \in [0, 1]$ ) が存在して、(1)  $H_0 = \text{id}$ ,  $H_1(S) = S'$  として (2) 各  $t \in [0, 1]$  で  $p \circ H_t = h_t \circ p$  が成り立つことをいう。

### 2.1 モーションピクチャー

次にブレイド状曲面のモーションピクチャーについて紹介する。 $B^2$  の直積成分を区別するために、 $B^2 = I_3 \times I_4$  と記す。ブレイド状曲面  $S$  の時刻  $t \in I_4$  における切断  $S_{[t]}$  を  $S \cap (D^2 \times I_3 \times \{t\})$  によって定める。ここで  $I_3 \times \{t\}$  と  $I$  を同一視することで  $S_{[t]}$  は  $D^2 \times I$  の部分集合であるとみなす。このとき 1-パラメータ族  $\{S_{[t]}\}_{t \in I_4}$  を  $S$  の**モーションピクチャー**という。次数  $n$  のブレイド状曲面  $S$  を同値なものと取り替えることで  $S \cap D^2 \times (\partial I_3 \times I_4) = X_n \times (\partial I_3 \times I_4)$  と仮定してよい。すると各  $S_{[t]}$  にはブレイドまたは特異ブレイド<sup>\*1</sup>が図1のように現れる。本稿の後半ではチャートからブレイド状曲面（及びニット状曲面）を構成する際にモーションピクチャーを利用する。

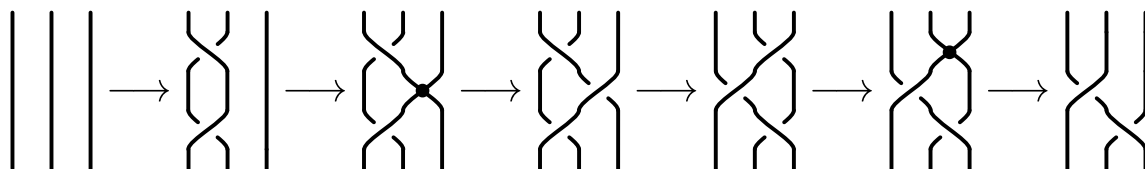


図1 次数3のブレイド状曲面のモーションピクチャー

### 2.2 2次元ブレイド、ブレイド状曲面による曲面絡み目の表示

次数  $n$  の**2次元ブレイド**とはブレイド状曲面  $S$  であって境界  $\partial S$  が  $X_n \times \partial B^2$  に等しいものである。直積空間  $D^2 \times B^2$  を  $\mathbb{R}^4$  内の部分集合として考える。このとき、 $\partial S$  は  $\partial(D^2 \times B^2)$  内の自明な絡み目であるため、 $\partial S$  に沿って自明な円板を貼り合わせることで  $\mathbb{R}^4$  内の曲面絡み目  $\bar{S}$  を得る。この曲面絡み目  $\bar{S}$  を2次元ブレイド  $S$  の**閉包**という。これは絡み目におけるブレイドの閉包を高次元化したものであり、鎌田氏により次の定理が示された。

**定理 2.1 ([5, 13])** 全ての有向曲面絡み目はある2次元ブレイドの閉包とアイソトピッ

<sup>\*1</sup>特異ブレイドとは自己交叉を持つブレイドであり、モーションピクチャー内の自己交叉は  $\pi_S$  の分岐点に対応する。

クである。

2次元ブレイドの閉包を用いることで曲面絡み目の**ブレイド指数**と呼ばれる正整数値の不変量が定まる。ブレイド指数が2以下である曲面絡み目は自明であること、またブレイド指数3となる曲面絡み目はリボンであることが知られている [4]。またこの指数は連結和に関して加法的でないことが知られている [10]。

また著者により**プラット表示**と呼ばれる曲面絡み目の表示手法が導入された。これは絡み目におけるプラット表示と呼ばれる偶数次のブレイドを用いた表示の高次元化であり、この表示を用いることで向き付け不可能な場合を含む全ての曲面絡み目を表示することが可能となった。

**定理 2.2 ([14])** 全ての曲面絡み目はあるブレイド状曲面のプラット閉包とアイソトピックである。

ブレイド指数と同様に、曲面絡み目に対してもプラット指数と呼ばれる正整数値の不変量が定まる。また曲面絡み目のプラット表示を用いることで、曲面絡み目の結び目群や対称結び目カンドルと呼ばれる不変量を計算することが可能である。詳細については [14, 15] を参照されたい。

### 2.3 ブレイド状曲面による $D^2 \times B^2$ 内の曲面の表示

本節ではブレイド状曲面とアイソトピックな  $D^2 \times B^2$  内の曲面の特徴付け (定理 2.3)、及びその一般化について紹介する。4次元球体  $D^4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$  上のモース関数  $\phi: D^4 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\phi(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$  として定める。 $D^4$  と  $D^2 \times B^2$  の同相写像を1つ固定することにより同一視を行い、 $\phi$  は  $D^2 \times B^2$  上の関数であるとする。また  $D^2 \times B^2$  へプロパーに埋め込まれた曲面  $F$  に対して、 $\phi$  の  $F$  への制限を  $\phi_F$  とする。このとき  $F$  がリボンであるとは、 $F$  をアイソトピーで変形することによって  $\phi_F$  が極大点を持たないモース関数として取れることをいう。ブレイド状曲面は構成よりリボン曲面であることが分かる。さらに Rudolph 氏により次の定理が示された。

**定理 2.3 ([12])**  $D^2 \times B^2$  へプロパーに埋め込まれた有向リボン曲面はアイソトピーによってブレイド状曲面へ変形することができる。

Hughes 氏はブレイド状曲面にある種の折り目特異点<sup>\*2</sup>を許容することで、定理 2.3 の一般化を与えた。曲面  $S, \Sigma$  の間の写像  $\varphi: S \rightarrow \Sigma$  に対して、 $S$  に埋め込まれた円板  $d$  が  $\varphi$  に関する**キャップ**であるとは、(1)  $\varphi$  の  $d$  への制限  $\varphi|_d: d \rightarrow \Sigma$  は埋め込み写像であり、(2)  $d$  の境界は  $\varphi$  の折り目特異点であるときをいう。そして  $D^2 \times B^2$  へプロパーに埋め込まれた曲面  $S$  が**キャップ付きブレイド状曲面**であるとは、 $\pi_S$  の臨界点は単純分岐

<sup>\*2</sup>  $n$ 次元多様体  $M, M'$  の間の写像  $\phi: M \rightarrow M'$  について  $M$  の点  $a$  が**折り目特異点**であるとは、 $a$  及び  $\phi(a)$  の周りで座標を取ることで  $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$  と表示できることをいう。

点<sup>\*3</sup>または折り目特異点であり、全ての折り目特異点は  $\pi_S$  に関するキャップの境界であるときをいう。ここで  $\pi_S$  は射影  $\pi$  の  $S$  への制限である。

ブレイド状曲面及び2次元ブレイドの閉包はキャップ付きブレイド状曲面である。また定義より、キャップ付きブレイド状曲面は向き付け可能曲面である。

**定理 2.4 ([3])**  $B^2 \times D^2$  へ埋め込まれた全ての向き付け可能曲面はキャップ付きブレイド状曲面へアイソトピーによって変形することができる。

### 3 ニットとニット状曲面

ブレイド、及びブレイド状曲面の一般化であるニット、及びニット状曲面を導入する。

#### 3.1 ニット

円筒  $D^2 \times I$  内へプロパーに埋め込まれた曲線  $\beta$  について、射影  $p: D^2 \times I \rightarrow I$  の  $\beta$  への制限を  $\pi_\beta: \beta \rightarrow I$  とする。このとき、 $D^2 \times I$  内のブレイド  $\beta$  に対してスプライスと呼ばれる操作を行うことで得られる曲線をニットと呼ぶ。ここでスプライスとは、ブレイドの図式に現れる交点 (図3の  $\sigma_i$  または  $\sigma_i^{-1}$ ) を  $\pi_\beta$  の折り目特異点の対 (図3の  $\tau_i$ ) に置き換える操作である。一方で、 $D^2 \times I$  内の曲線がニットであるためには、スプライスによって得られる折り目特異点のペアを見つける必要がある。そこで本節では、ペアリングと呼ばれる単純弧を用いてニットを導入する。

$\pi_\beta$  の折り目特異点全体からなる集合を  $\text{Fold}(\beta)$  と記す。このとき  $D^2 \times I$  内の単純弧  $l$  が  $\beta$  のペアリングであるとは次を満たすことをいう。

- (1)  $l \cap \beta = \partial l$  は  $\text{Fold}(\beta)$  に含まれる。
- (2)  $l$  の各点は射影  $p$  の  $l$  への制限  $\pi_l$  に関して正則である。
- (3) 各  $a \in \partial l \cap \text{Fold}(\beta)$  に対して  $\pi_\beta(x) = x^2$  及び  $\pi_\beta(l) \cap V = \{s \leq 0\}$  を満たす  $a$  と  $\pi_\beta(a)$  の局所座標近傍  $(U; x)$  と  $(V, s)$  が取れる。

**定義 3.1.**  $\beta$  の互いに交わらないペアリングからなる集合  $\ell = \{l_1, \dots, l_q\}$  に対して、組  $(\beta, \ell)$  が次数  $n$  のニット (または BMW タングル<sup>\*4</sup>) であるとは次を満たすことをいう。

- (1)  $l_1 \cup \dots \cup l_q$  は  $\text{Fold}(\beta)$  を含む。
- (2)  $\pi_\beta$  はモース的、すなわち  $\pi_\beta$  の臨界点は折り目特異点である。
- (3)  $\partial\beta = X_n \times \{0, 1\}$  が成り立つ。

またこのとき、 $\ell$  を  $\beta$  のニット構造という。

<sup>\*3</sup> 曲面の間の写像  $\varphi: S \rightarrow \Sigma$  について  $S$  の点  $a$  が (孤立) 単純分岐点であるとは、 $a$  及び  $\varphi(a)$  の周りで複素座標を取ることで  $\varphi(z) = z^2$  と表示できることをいう。単純なブレイド状曲面  $S$  の  $\pi_S$  の臨界点は全て単純分岐点である。

<sup>\*4</sup> BMW は Birman-Murakami-Wenzl の頭文字を取ったものである、注意 3.3 を参照されたい。

ニット  $(\beta, \ell)$  に対して、 $\beta$  がブレイドであるため必要十分条件は  $\ell = \emptyset$  である。そのため、ニットはブレイドの一般化であると言える。

2つの次数  $n$  のニット  $(\beta_0, \ell_0)$  と  $(\beta_1, \ell_1)$  が同値であるとは、ニットを保つアイトピーによって移り合うときをいう；すなわち、ある  $D^2 \times I$  のアイトピー  $H_t$  が存在して、(1)  $H_0 = \text{id}$ ,  $(H_1(\beta_0), H_1(\ell_0)) = (\beta_1, \ell_1)$  そして (2) 各  $t \in [0, 1]$  で  $(H_t(\beta_0), H_t(\ell_0))$  がニットであるときをいう。

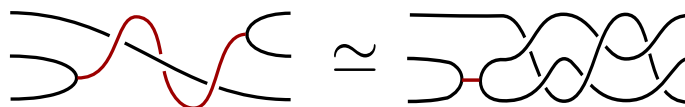


図2 曲線の折り目特異点を結ぶペアリング（赤色）の例とその同値変形

図2はニットの同値変形の例である。以下では断りのない限り、図2右のように変形することによってペアリングで結ばれる折り目特異点は十分近い位置にあるとし、またペアリングは線形なものを考えることで、ニットの図式にはペアリングを記述しないこととし、またニット  $(\beta, \ell)$  は単に  $\beta$  とも記す。

次数  $n$  のニットの同値類全体からなる集合を  $D_n$  とおく。ブレイドと同様に、2つの次数  $n$  のニット  $(\beta_1, \ell_1)$  と  $(\beta_2, \ell_2)$  の積を  $(\beta_1 \cdot \beta_2, \ell_1 \cup \ell_2)$  によって定める。するとこの積は  $D_n$  上にモノイドの構造を与える。そこで  $D_n$  を次数  $n$  のニットモノイドという。

**命題 3.2** ニットモノイド  $D_n$  は以下のモノイド表示を持つ。

$$\left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \\ \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}, \\ \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, \tau_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \tau_j, \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i, \sigma_i \tau_k = \tau_k \sigma_i, \tau_i \tau_k = \tau_k \tau_i, \\ \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = e, \sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i = \tau_i. \end{array} \right. \right\rangle.$$

ここで生成元は図3のニットが代表する元であり、添え字  $i, j, k \in \{1, \dots, n-1\}$  は  $|i-j|=1$  かつ  $|i-k|>1$  を満たす。

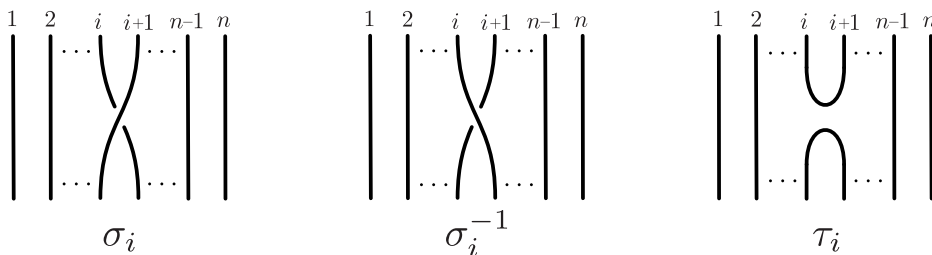


図3 ニットモノイドの生成元  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$  を代表する次数  $n$  のニット。

**注意 3.3.** 村上氏におけるニットの定義は、ニット構造を許容する曲線として与えられている [11]。また2つのニットが同値であることは境界を固定するアイトピーによって移り合うことで定義されるため、本稿で定めた同値関係よりも緩やかな同値性である。この同値関係においても同様にしてニットモノイドが定まるが、Birman-Wenzlにより、

この場合のモノイド表示は以下の関係式を追加することで得られることが知られている ([1])。ここで添え字  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$  は  $|i-j|=1$  を満たす。

$$\begin{cases} \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_i, \tau_i \sigma_j \tau_i = \tau_i, \\ \sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j = \tau_j \tau_i, \sigma_i \tau_j \sigma_i = \sigma_j^{-1} \tau_i \sigma_j^{-1}, \\ \sigma_i \tau_j \tau_i = \sigma_j^{-1} \tau_i, \tau_i \tau_j \sigma_j = \tau_i \sigma_j^{-1}. \end{cases}$$

### 3.2 ニット状曲面

本節ではブレイド状曲面の一般化としてニット状曲面を導入する。ブレイド状曲面はブレイドの変形からなるモーショントリッチャーを持っていたが、ニット状曲面はニットの変形からなるモーショントリッチャーを持つ  $D^2 \times B^2$  内の曲面として定まる。またニットはペアリングと呼ばれる付加構造を持っていたが、ニット状曲面にはペアリングの変形からなるモーショントリッチャーによって得られる曲面 (の族) を付加構造として持つ。

$D^2 \times B^2$  へプロパーに埋め込まれた曲面  $S$  について、 $\pi_S : S \rightarrow B^2$  の折り目特異点全体を  $\text{Fold}(S)$  とする。このとき、 $D^2 \times B^2$  へ埋め込まれた境界付き曲面  $L$  が  $S$  のペアリングであるとは、以下を満たすことをいう。

- (1-1)  $L \cap S = \partial L \cap \text{Fold}(S)$  は空でない部分集合である。
- (1-2)  $\partial L$  は  $\text{Fold}(S) \cup (D^2 \times \partial B^2)$  に含まれ、 $\partial L \cap (D^2 \times \partial B^2)$  の各成分はループでない。
- (2)  $L$  の各点は射影  $\pi : D^2 \times B^2 \rightarrow B^2$  の  $L$  への制限  $\pi_L$  に関して正則である。
- (3) 各  $a \in \partial L \cap \text{Fold}(S)$  に対して、 $\pi_S(x, y) = (x, y^2)$  及び  $\pi_S(L) \cap V = \{(s, t) \mid t \leq 0\}$  を満たす  $a$  と  $\pi_S(a)$  の局所座標近傍  $(U; x, y)$  と  $(V; s, t)$  が取れる<sup>\*5</sup>。

**注意 3.4.** 曲面  $S$  の折り目特異点は境界  $\partial S$  にも現れるため、1次元の場合と比較して複雑な定義となっている。 $S$  の折り目特異点が  $\partial S$  と交わらないとき、(1-1) と (1-2) は以下のように言い換えることができる。

- (1')  $L \cap S = \partial L$  は  $\text{Fold}(S)$  に含まれる。

**定義 3.5.** 互いに交わらない  $S$  のペアリングからなる集合  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_q\}$  に対して、組  $(S, \mathcal{L})$  が次数  $n$  のニット状曲面であるとは、次を満たすことをいう。

- (1)  $|\mathcal{L}| = L_1 \cup \dots \cup L_q$  は  $\text{Fold}(S)$  を含む。
- (2)  $\pi_S$  の臨界点は単純分岐点または折り目特異点である。
- (3)  $S \cap (D^2 \times \{y_0\}) = X_n \times \{y_0\}$  かつ  $|\mathcal{L}| \cap (D^2 \times \{y_0\}) = \emptyset$  を満たす。

またこのとき、 $\mathcal{L}$  を  $S$  のニット構造と呼ぶ。

ニット状曲面  $(S, \mathcal{L})$  について、 $S$  がブレイド状曲面であることとニット構造  $\mathcal{L}$  が空集合となることは同値である。またニット状曲面を用いることにより、定理 2.3 の一般化と

<sup>\*5</sup>  $a \in \partial S$  のとき局所座標はそれぞれ  $x \geq 0$  と  $s \geq 0$  を満たすとする。

して次を得る。

**定理 3.6**  $D^2 \times B^2$  へプロパーに埋め込まれた全ての境界付き曲面はアイソトピーによってニット状曲面へ変形することができる。

### 3.3 2次元ニットの閉包

次数  $n$  の **2次元ニット** とは、次数  $n$  のニット状曲面  $(S, \mathcal{L})$  であって境界  $\partial S$  が  $X_n \times \partial B^2$  に等しいものである。2次元ブレイドと同様に、2次元ニットの閉包が定義される。また曲面絡み目のプラット表示は2次元ニットの閉包の特別な場合であることがみなすことができる。特に、定理 2.2 の系として次を得る。

**系 3.7** 全ての曲面絡み目はある2次元ニットの閉包とアイソトピックである。

定理 3.6 及び系 3.7 により、向き付け不可能な曲面を含むより一般の曲面をニット状曲面を用いて表示できることが分かった<sup>\*6</sup>。そして次節で導入するチャート表示を用いることにより、これらの曲面を平面的に記述することが可能となる。

## 4 ニット状曲面のチャート表示

次数  $n$  の **BMW チャート** (もしくは単に**チャート**) とは以下のデータを持つ  $B^2$  へ埋め込まれた有限グラフ  $\Gamma = (V, E)$  である。

- (1) 各辺は  $\{1, \dots, n-1\}$  に値を持つラベルを持ち、さらに有向または無向である。
- (2) 各頂点は次のいずれかと一致する。これらの頂点は図 4, 5 のように記述される。
  - 境界  $\partial B^2$  上にある次数 1 の頂点を**境界点**という。

以下で定義する頂点は全て  $B^2$  の内点であると仮定する。

- 次数 1 の頂点を**黒頂点**という。特に有向辺の端点として現れる黒頂点を  $\sigma$ -**黒頂点**、無向辺の端点として現れる黒頂点を  $\tau$ -**黒頂点**という。
- 次数 3 の頂点であって隣接する全ての辺が無向辺かつラベルが一致するとき  $\tau$ -**3 価頂点**という。
- 次数 3 の頂点であって隣接する 2 つの辺が無向、1 つの辺が有向、そして 3 本の辺のラベルが一致するとき**混合 3 価頂点**という。
- 次数 4 の頂点が図 5 の上段にあるような向き及びラベルを満たすとき**交点**という。
- 次数 6 の頂点が図 5 の下段にあるような向き及びラベルを満たすとき**白頂点**という。特に隣接する全ての辺が有向辺であるとき、 $\sigma$ -**白頂点**という。

鎌田氏によって導入されたチャートは全ての辺が有向であり、BMW チャートはそれ

<sup>\*6</sup> キャップ付きニット状曲面を導入することで全ての曲面を表示することが可能となる。本稿はチャート表示に焦点を当てるため詳細については割愛する。

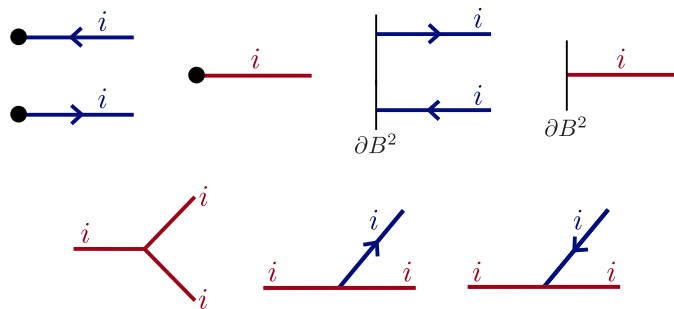


図4 チャートに現れる次数 1,3 の頂点 ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ )。

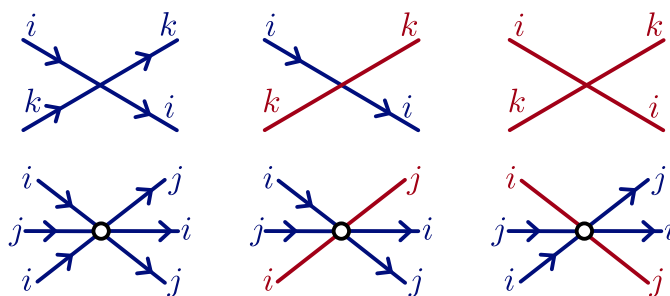


図5 チャートに現れる次数 4,6 の頂点、ここでラベル  $i, j, k \in \{1, \dots, n-1\}$  は  $|i-j|=1$  と  $|i-k|>1$  を満たす。

の一般化である。

チャート  $\Gamma$  からニット状曲面  $S(\Gamma)$  を構成する手法について紹介する。チャート  $\Gamma$  を  $B^2$  のアイソトピーで変形することにより、次を満たす  $I_4$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$  が取れる。

- チャートの境界点は  $I_3 \times \{t_0, t_{m+1}\}$  上にある。
- 各  $t \in I_4$  について  $\Gamma$  と  $I_3 \times \{t\}$  の交わりは有限個の点からなる。
- $\Gamma$  の各辺は射影  $I_3 \times I_4 \rightarrow I_4$  に関してモース的である。
- 各  $k \in \{1, \dots, m\}$  に対して  $t \in I_4$  は次のどちらかを満たす。
  - (1)  $I_3 \times \{t_k\}$  は  $\Gamma$  のある辺と 1 点で接している。
  - (2)  $I_3 \times \{t_k\}$  上には  $\Gamma$  の頂点  $v$  があり、十分小さな  $\varepsilon > 0$  について次が成り立つ。

$$|\#(\Gamma_\tau \cap N_{t_k+\varepsilon/2}) - \#(\Gamma_\tau \cap N_{t_k-\varepsilon/2})| \leq 1.$$

ここで  $N_t$  は  $v$  の  $\varepsilon$ -近傍  $N$  と  $I_3 \times \{t\}$  の共通部分であり、 $\Gamma_\tau$  は  $\Gamma$  の無向辺全体の和集合とする。

- $t \in I_4 \setminus \{t_0, \dots, t_{m+1}\}$  に対して、 $I_3 \times \{t\}$  は  $\Gamma$  の頂点を含まず、かつ  $\Gamma$  の辺とは横断的に交わる。

$\Gamma$  と  $I_3 \times \{t\}$  の交わりをもとに、 $D^2 \times I_3 \times \{t\}$  内のニットを定義する。各  $t \in I_4 \setminus (\bigcup_{i=1}^m [t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon])$  について、図6のようにして、 $\Gamma$  と  $I_3 \times \{t\}$  の交叉を元に、有向



辺は  $\sigma_i$ 、無向辺には  $\tau_i$  を対応させることでニットモノイド  $D_n$  の生成元からなる交叉語を定める。ここで  $i$  は辺のラベルであり、有向辺に対応する  $\sigma_i$  の符号は辺の向きに従って割り当てる。そしてこの交叉語をもとに図 3 にあるニットを繋ぎ合わせることで  $\beta_t$  を定める。

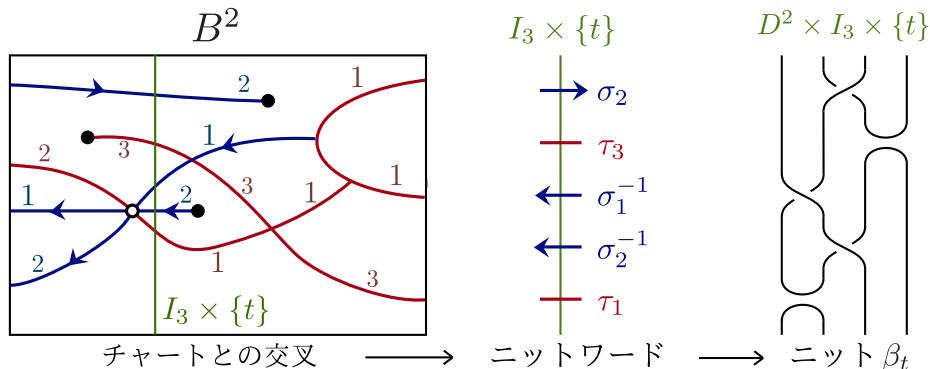


図 6 交叉語からニット  $\beta_t$  を構成するプロセス

各  $t_k \in \{t_1, \dots, t_m\}$  について場合分けを行う。  $I_3 \times \{t_k\}$  上に  $\Gamma$  の黒頂点または  $\tau$ -3 価頂点がある場合、もしくは  $\Gamma$  の辺が接している場合は、図 7 もしくは図 8 のモーションピクチャーによって  $\{\beta_t\}_{t \in [t_k - \epsilon, t_k + \epsilon]}$  を定める。ここで無向辺の接点に対応するモーションピクチャー (図 8-右) は  $\tau$ -黒頂点と  $\tau$ -3 価頂点を繋げて得られるモーションピクチャーに等しい。そして、  $I_3 \times \{t_k\}$  上に黒頂点及び  $\tau$ -3 価頂点以外の頂点がある場合、このとき  $\beta_{t_k - \epsilon}$  と  $\beta_{t_k + \epsilon}$  は同値なニットとなる。そこで  $\{\beta_t\}_{t \in [t_k - \epsilon, t_k + \epsilon]}$  をこの同値が誘導するニットの変形として定める。以上により  $D^2 \times B^2$  内の曲面  $S(\Gamma)$  のモーションピクチャー  $\{\beta_t\}_{t \in I_4}$  が得られる。このモーションピクチャーは同時に  $S(\Gamma)$  のペアリングを誘導するため、これにより  $S(\Gamma)$  はニット状曲面となる。さらに次が成り立つ。

**定理 4.1** 全てのニット状曲面はあるチャート  $\Gamma$  が与えるニット状曲面  $S(\Gamma)$  と同値である。

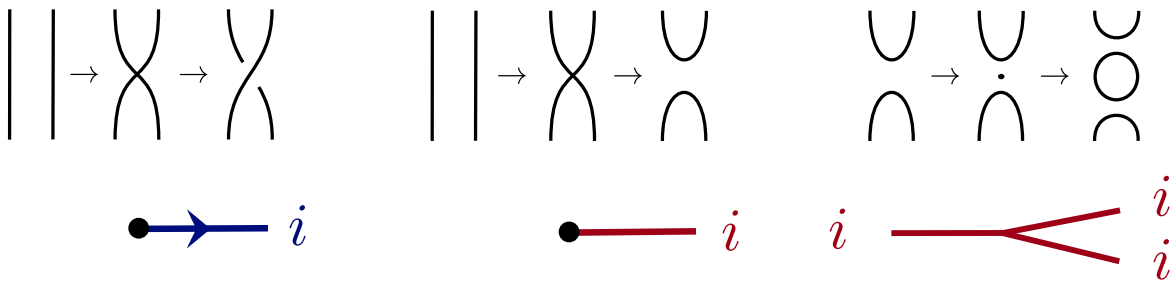


図 7 黒頂点及び  $\tau$ -3 価頂点に関するモーションピクチャー

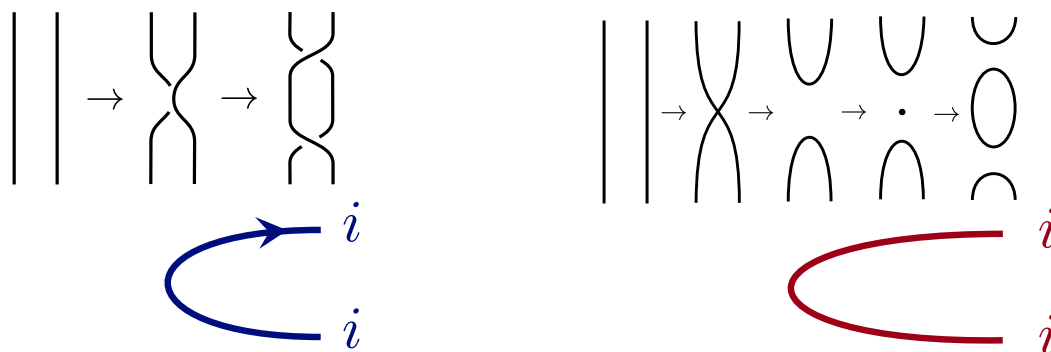


図8  $\Gamma$  と  $I_3 \times \{t_k\}$  の接点に関するモーションピクチャー

## 参考文献

- [1] Joan S. Birman and Hans Wenzl. Braids, link polynomials and a new algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(1):249–273, 1989.
- [2] J. Scott Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10):3947–3989, 2003.
- [3] Mark C. Hughes. Braiding link cobordisms and non-ribbon surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 15(6):3707–3729, 2015.
- [4] Seiichi Kamada. Surfaces in  $\mathbf{R}^4$  of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.
- [5] Seiichi Kamada. Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.
- [6] Seiichi Kamada. A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space. *Topology*, 33(1):113–122, 1994.
- [7] Seiichi Kamada. On braid monodromies of non-simple braided surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 120(2):237–245, 1996.
- [8] Seiichi Kamada. *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [9] Seiichi Kamada and Takao Matumoto. Chart descriptions of regular braided surfaces. *Topology and its Applications*, 230:218–232, 2017.
- [10] Seiichi Kamada, Shin Satoh, and Manabu Takabayashi. The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358:5425–5440, 12 2006.
- [11] Jun Murakami. The Kauffman polynomial of links and representation theory. *Osaka J. Math.*, 24(4):745–758, 1987.
- [12] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.
- [13] O.Ya. Viro. Lecture given at osaka city university. September 1990.
- [14] Jumpei Yasuda. A plat form presentation for surface-links. *arXiv:2105.08634*, 2021.
- [15] Jumpei Yasuda. Computation of the knot symmetric quandle and its application to the plat index of surface-links. *J. Knot Theory Ramifications*, 33(03):2450005, 2024.