

低次元ホモロジー球面上の有限群作用による 不動点集合のオイラー標数について

田村 俊輔 (津山工業高等専門学校)¹

1 序論

変換群論にの分野において「多様体 M の部分多様体 F が M 上のある群作用の不動点集合として実現できるか？」という基本的な問題がある．群作用をもつ多様体が球面，ユークリッド空間，円板などの場合であっても不動点集合として実現できる多様体の決定は容易ではなく，現在でも研究が行われている．² 本講演では，球面上の群作用による不動点集合に関する Montgomery-Samelson の予想について，現在までの研究の変遷を紹介し，最後に関連する低次元ホモロジー球面上の有限群作用の不動点集合に関して講演者が得た最近の進展 [30, 31] について報告する．

本稿を通して， G は非自明な有限群を表し，断らない限り多様体と多様体上の群作用は全て滑らかなものとする．

1.1 基本事項

初めに，本稿で必要となる変換群論の基本知識や登場する定義を紹介する．

多様体 M 上の滑らかな G -作用とは，群の準同型 $\Phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ のことをいい，自己微分同相群 $\text{Diff}(M)$ が自己同相群 $\text{Homeo}(M)$ である場合，**位相的な G -作用**と呼ばれる．また，核 $\ker \Phi$ が自明であるとき，その作用は**効果的**であるという． H を G の部分群， M を G -作用 Φ をもつ多様体とする． M の H -**不動点集合** M^H とは，

$$M^H = \{ x \in M \mid \Phi(h)(x) = x, \forall h \in H \}$$

で与えられる M の部分集合である． M^H は M の部分多様体となり， M が閉多様体ならば M^H も閉多様体である ([5, Corollary 2.5, p.309])．部分群 H が G の正規部分群である場合， H -不動点集合 M^H は (M 上の G -作用から誘導される) G/H -作用をもち， $M^G = (M^H)^{G/H}$ が成立する． M^G が空でないとき， $x \in M^G$ における接空間 $T_x(M)$ は $\mathbb{R}[G]$ -加群の構造をもち，これを $x \in M^G$ での**接空間加群**という． M が向きづけ可能である場合に，各 $g \in G$ から定まる微分同相写像 $\Phi(g) : M \rightarrow M$ が向きを保つとき，その G -作用は **M の向きを保つ**といい，向きを保たない微分同相写像 $\Phi(g)$ が存在するとき，その G -作用は**向きを保たない**という． M が向きを保つ効果的な G -作用をもつとき，接空間加群 $T_x(M)$ も向きを保つ効果的な G -作用をもつ．

R を単位元をもつ可換環とする．本稿では， **R -ホモロジー n -球面** (resp. **ホモトピー n -球面**) とは，標準 n -球面 S^n と同じ R -係数のホモロジー群 (resp. ホモトピー群) をもつ n 次元閉多様体を意味する．また， R が整数環 $\mathbb{Z}$ であるとき，単に**ホモロジー球面**と呼ぶことにする．

¹〒 708-8509 岡山県津山市沼 624-1 津山工業高等専門学校 総合理工学科
e-mail: tamura.s@tsuyama.kosen-ac.jp

²円板とユークリッド空間の場合，それらの次元を問わなければ，不動点集合として実現できる多様体は分類されている [24]．

1.2 問題の背景と主定理

球面や円板上の群作用による不動点集合として実現できる多様体について考えるとき、特別な場合として不動点集合が孤立点である (孤立点の個数が0個の場合も含める) 場合に、その個数を調べることを考える. 例えば、球面 (resp. 円板) 上の G -作用が線形ならば、孤立不動点の個数は0または2 (resp. 1) である. さらに、 G が巡回群である場合には Lefschetz 不動点定理より、また G が p -群である場合には Smith の定理より、不動点の個数は線形作用の場合と同様に0または2 (resp. 1) であることが示される. Montgomery-Samelson は、球面上の不動点をもつコンパクトリー群の作用は不動点を2点以上もつのではないかと期待していた ([15], Section 7). 彼らの期待から球面上の不動点集合が1点集合である作用の存在性の研究が始まった. G -不動点集合がちょうど1点集合である G -作用を **one-fixed-point G -action** と呼び、 G -不動点集合が空集合である G -作用を **fixed-point-free G -action** と呼ぶことにする.

最初のブレイクスルーは、Floyd-Richardson [8] によって発見された円板上の fixed-point-free A_5 -action である. 円板上の fixed-point-free G -action が与えられたとき、円板の境界を同一視することにより、球面上の位相的な one-fixed-point G -action を得ることができるため、滑らかな作用も存在するのではないかと期待された. 次に、Oliver [23] は、ある円板上に fixed-point-free G -action をもつ有限群 G を完全に決定した. ここで決定された有限群は **Oliver 群** と呼ばれる. 球面上の one-fixed-point G -action が存在するならば、その不動点周りの G -スライス開近傍を取り除くことによって、円板上の fixed-point-free G -action を得ることができる. 故に、有限群 G が Oliver 群であることは球面上の one-fixed-point G -action が存在するための必要条件である.³ 球面上の one-fixed-point G -action を初めて発見したのは Stein [28] であり、彼は手術理論を用いて、 S^7 上の one-fixed-point $SL(2, 5)$ -action を構成した. その後、Petrie [25, 26] は、同変手術理論を開発し、奇数位数の可換 Oliver 群、 $PSL(2, F)$, $SL(2, F)$ (F は3を除く奇数位数の有限体) の有限群が、ある高次元のホモトピー球面上に one-fixed-point action をもつことを示した.

次に one-fixed-point G -action が存在する球面の次元に関する研究を紹介する. 非負整数 m に対して、多様体 M 上の G -作用が **m -pseudofree** であるとは、任意の非自明な $g \in G$ に対して、 $\langle g \rangle$ -不動点集合 $M^{(g)}$ の各々の連結成分の次元が m 以下であるときをいう. Laitinen-Traczyk [13] は、5次元以上のホモトピー球面が 2-pseudofree な one-fixed-point G -action を許容するならば、その作用は S^6 上の one-fixed-point A_5 -action に限ることを示した. その後、森本 [16] によって、 S^6 上の 2-pseudofree な one-fixed-point A_5 -action が実際に存在することが示された.⁴ この結果を受けて、5次元以下の球面上の one-fixed-point G -action の存在性についての研究が行われた. その先駆けとして、古田 [9] はゲージ理論を用いて、ホモトピー 4-球面が向きを保つ one-fixed-point G -action を許容しないことを示した. 同時期に、DeMichelis [7] は変換群論の手法を用いて、ホモロジー 4-球面上の向きを保つ局所的に滑らか⁵で効果的な G -作用の不動点集合は空集合であるか2次元以下の球面であることを示した. 最終的に、ホモトピー 3-球

³後に、必要十分条件であることが示されている [12].

⁴実は、6次元以上の球面は one-fixed-point A_5 -action を許容する [10, 2, 17, 18].

⁵ m 次元閉多様体 M 上の位相的な G -作用が**局所的に滑らか**であるとは、任意の $x \in M$ に対して、 x の固定部分群 $G_x = \{g \in G \mid \Phi(g)(x) = x\}$ で不変な x の M における近傍 U_x が存在して、線形な G_x -作用をもつ $\mathbb{R}^m$ と U_x が G_x -同相であるときをいう.

面とホモロジー 5-球面が局所的に滑らかな one-fixed-point G -action を許容しないことが Buchdahl-Kwasik-Schultz [6] によって示され, one-fixed-point G -action を許容する球面の最低次元は 6 であることが結論づけられた. しかしながら, どんな Oliver 群でも S^6 上に効果的な one-fixed-point G -action をもつわけではない. 実際, Borowiecka-Mizerka [4] は 6 次元ホモロジー球面上に効果的な one-fixed-point G -action をもたない位数 216 以下の Oliver 群を例示している.

最近, 森本は S^6 上の one-fixed-point G -action に関する次の結果を得た.

定理 1.1 (森本 [20]). n を 6 以上の偶数とする. ホモトピー n -球面 S 上の 3-pseudofree な G -作用について以下が成立する.

1. $|S^G| \geq 2$ ならば, S^G は 3 次元以下の $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面である.
2. $|S^G| = 1$ ならば, G は A_5 , S_5 , $A_5 \times C_2$ のいずれかに同型であり, S は S^6 と微分同相である.

逆に, G が A_5 , S_5 , $A_5 \times C_2$ のいずれかに同型ならば, S^6 上の 3-pseudofree な one-fixed-point G -action が存在する.

定理 1.1 の結果から森本は次のような問題を考えた. この問題が本研究のモチベーションである.

問題 1. 6 次元球面 S^6 上の効果的な one-fixed-point G -action をもつ有限群 G は A_5 , S_5 , $A_5 \times C_2$ のいずれかに同型であろう.

本研究では, one-fixed-point G -action の一般化として, G -不動点集合のオイラー標数が奇数となる G -作用である **odd-Euler-characteristic G -action** を導入し, ホモロジー 6-球面上の odd-Euler-characteristic G -action に関する以下の 2 つの定理を得た.

主定理 1.2 ([30]). ホモロジー 6-球面 Σ が向きを保つ効果的な odd-Euler-characteristic G -action をもつならば, その G -作用は 2-pseudofree な one-fixed-point A_5 -action である.

ホモロジー 6-球面 Σ が向きを保たない効果的な odd-Euler-characteristic G -action をもつ場合を考える. Σ 上の向きを保つ微分同相 $\Phi(g)$ 全体のなす集合 H は G の指数 2 の部分群である. $|G/H| = 2$ であるので, $\chi(\Sigma^G) \equiv \chi(\Sigma^H) \equiv 1 \pmod{2}$ が成り立ち, 定理 1.2 より, $H \cong A_5$ かつ $\Sigma^H = \{x\}$ が得られる. したがって, G は S_5 あるいは $A_5 \times C_2$ と同型で, $\Sigma^G = \Sigma^H = \{x\}$ である. このような Σ 上の G -作用が 3-pseudofree G -action でなければならないことを認めることで, もう一つの定理を得ることができる.

主定理 1.3. ホモロジー 6-球面 Σ が向きを保たない効果的な odd-Euler-characteristic G -action をもつならば, その G -作用は S_5 あるいは $A_5 \times C_2$ の 3-pseudofree な one-fixed-point action である.

主定理 1.2 と 1.3 は, ホモロジー 6-球面上の効果的な odd-Euler-characteristic G -action が効果的な one-fixed-point G -action に限ること, 作用する有限群 G が A_5 , S_5 , $A_5 \times C_2$ のいずれかに同型でなければならないことを示している. したがって, 問題 1 を肯定的に解決したことになる.

定理 1.2 の証明と同様の手法を用いて, 次の定理も得ることができる.

主定理 1.4 ([B1]). 任意の $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー 5-球面上の G -作用による G -不動点集合のオイラー標数は偶数である.

本研究の主定理と上記に紹介した 4 次元以下のホモロジー球面上の有限群作用の不動点集合に関する事実を合わせることによって, 6 次元以下のホモロジー球面上の odd-Euler-characteristic G -action に関する次の結果を得ることができる.

定理 1.5. 6 次元以下のホモロジー球面が向きを保つ効果的な G -作用をもつならば, 以下の 2 つの場合を除いて, G -不動点集合のオイラー標数は偶数である.

1. その G -作用はホモロジー 3-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である.
2. その G -作用はホモロジー 6-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である.

最後に関連する先行研究として, ホモロジー球面上の odd-fixed-point G -action (奇数個の G -不動点をもつ G -作用) の研究について紹介する. Borowiecka [3] の結果の一般化として, 森本-筆者 [22] は, S_5 と $SL(2, 5)$ に対して, これらの群の効果的な odd-fixed-point action を許容しないホモロジー球面の次元を提示した.⁶ 同様の結果として, 筆者 [29] は A_6 について, Mizerka [14] と森本 [19] は $TL(2, 5)$ (S_5 の非自明な 2 重被覆群の 1 つ) について, 効果的な odd-fixed-point G -action を許容しないホモロジー球面の次元を提示している. 今現在, これらのホモロジー球面の次元について, $G = S_5$ の場合を除いて, 最良の結果であるかはわかっていない. 本稿で紹介する命題 3.6 の証明はこれらの先行研究からアイデアを得たものである.

2 有限群の性質によるホモロジー球面の不動点集合への制約

この節では, 有限群 G が球面や円板に作用しているとき, 有限群 G の性質が与える不動点集合のオイラー標数への制約について紹介する. 球面や円板上の有限群作用による不動点集合の制約の最も基本的な結果として, 次の Smith の定理が知られている.

定理 2.1 (Smith の定理 [27] cf. [5, Theorem 4.3, Theorem 5.1]). G を素数 p -冪位数の群, X を有限 G -CW-複体⁷ とする. このとき,

$$\chi(X) \equiv \chi(X^G) \pmod{p}$$

が成立する. 特に, X が $\mathbb{Z}_p$ -ホモロジー球面 (*resp.* $\mathbb{Z}_p$ -非輪状) であるならば, その不動点集合 X^G も $\mathbb{Z}_p$ -ホモロジー球面 (*resp.* $\mathbb{Z}_p$ -非輪状) である.

p と q を素数あるいは 1 ($p = q$ でも良い) とする. P が p -群, H/P が巡回群, G/H が q -群である正規鎖 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ をもつ有限群 G の族を $\mathcal{G}_p^q$ で表す. ここで, $p = 1$, $q = 1$ はそれぞれ $|P| = 1$, $|G/H| = 1$ を意味する. p と q が素数すべてを渡ったときの $\mathcal{G}_p^q$ の和集合 $\bigcup_{p,q} \mathcal{G}_p^q$ を $\mathcal{G}$ で表す. Oliver は $\mathbb{Z}_p$ -非輪状な有限 G -CW-複体の不動点集合に次のような制約が与えられることを示した.

⁶ S_5 の場合には, ここで提示されたホモロジー球面の次元が最良であることが証明されている [21].

⁷ コンパクト G -多様体は有限 G -CW-複体の構造をもつことが知られている [10].

命題 2.2 (Oliver [23, Proposition 2]). p と q を素数とし, X を $\mathbb{Z}_p$ -非輪状な有限 G -CW-複体とする. G が $\mathcal{G}_p^q$ に属するならば, $\chi(X^G) \equiv 1 \pmod{q}$ が成り立つ.

証明. G は $\mathcal{G}_p^q$ に属するので, 正規鎖 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ であって, P が p -群, H/P が巡回群, G/H が q -群となるものが取れる. また, $X^G = ((X^P)^{H/P})^{G/H}$ が成り立つことに注意する. Smith の定理より, X^P は $\mathbb{Z}_p$ -非輪状である. H/P は巡回群なので, Lefschetz 不動点定理より, $\chi(X^H) = 1$ である. G/H は q -群であるので,

$$\chi(X^G) \equiv \chi(X^H) = 1 \pmod{q}$$

が成立する. □

Oliver は [23] にて, $\mathcal{G}$ に属さないような有限群 G に対して, ある高次元の円板上の fixed-point-free G -action が存在することを示している. したがって, 有限群 G が Oliver 群であることの必要十分条件は G が $\mathcal{G}$ に属さないことである.

実は, 上記の円板の場合と同様の結果が滑らかな作用をもつ球面の場合にも成り立つ.

命題 2.3. p と q を素数とし, Σ を G -作用をもつ $\mathbb{Z}_p$ -ホモロジー球面とする. G が $\mathcal{G}_p^q$ に属するならば, $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{q}$ が成り立つ. 特に, G が $\mathcal{G}_p^2$ に属するならば, $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ が成立する.

証明. $\Sigma^G = \emptyset$ の場合は明らかであるので, $\Sigma^G \neq \emptyset$ の場合を考える. Σ における $x \in \Sigma^G$ の G -スライス円板近傍を D とし, $X = \Sigma \setminus \text{Int}(D)$ とすると, X はコンパクトで $\mathbb{Z}_p$ -非輪状な G -多様体である. $\Sigma^G = X^G \cup_{\partial} D^G$ であるので,

$$\chi(\Sigma^G) = \chi(X^G) + (-1)^k$$

が成り立つ. ここで, $k = \dim D^G$ である. したがって, 命題 2.2 を用いると,

$$\chi(\Sigma^G) \equiv 1 + (-1)^k \pmod{q}$$

が得られる. □

命題 2.3 より, G が Oliver 群でない場合には, 孤立不動点をもつような球面上の G 作用を考えたとき, その個数には制約が与えられる. しかしながら, G が Oliver 群の場合には, 球面の次元が十分に高い場合, その個数に制約が与えられないことが知られている.

定理 2.4 (Laitinen-森本 [12]). 任意の Oliver 群 G と非負整数 m に対して, ちょうど m 個の不動点をもつような高次元球面上の G -作用が存在する.

序論でもみたように, 上記の定理は球面の次元が低い場合 (例えば 4 次元以下の場合) には成立しない. 次の節では 6 次元以下の球面の場合にどのような制約が与えられるかを紹介する.

3 ホモロジー球面の次元による不動点集合の制約

この節では、ホモロジー球面の次元が6以下の場合に不動点集合へ与えられる制約について論じ、主定理の証明に用いた命題を紹介する。

有限群 G が**特性的に単純**であるとは、 G が単純群であるか、 G がいくつかの互いに同型な単純群の直積と同型であるときをいい、有限群の任意の極小正規部分群は特性的に単純であることが知られている。有限群 G の唯一つの極大冪零正規部分群 $F(G)$ を **Fitting 部分群**といい、唯一つの極大正規 p -部分群 $O_p(G)$ を p -**核**という。任意の非自明な有限群 G は、非可換な極小正規部分群をもつか、 $F(G)$ が非自明であるか、のいずれかを満たしているので、定理 3.5 は次の2つの補題から得られる。

補題 3.1. 6次元以下のホモロジー球面が向きを保つ効果的な G -作用をもつとする。 G が非可換な極小正規部分群をもつならば、以下の2つの場合を除いて、 G -不動点集合のオイラー標数は偶数である。

1. その G -作用はホモロジー 3-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である。
2. その G -作用はホモロジー 6-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である。

補題 3.2. 6次元以下のホモロジー球面が向きを保つ効果的な G -作用をもち、 $F(G)$ が非自明ならば、 G -不動点集合のオイラー標数は偶数である。

注意 3.3. 補題 3.2 は、7次元以上のホモロジー球面に対して成立するとは限らない。実際、 S^7 上の向きを保つ効果的な *one-fixed-point $SL(2, 5)$ -action* が存在し、高次元の球面上の向きを保つ効果的な可換 *Oliver 群* の *one-fixed-point action* が存在する。

2次元以下のホモロジー球面上の G -作用の不動点集合は、Smith の定理より、2次元以下の球面あるいは空集合となることが直ちにわかる。このことから、ある G の正規部分群 H に対して、その H -不動点集合が2次元以下の球面であるならば、 G -不動点集合も2次元以下の球面となることがわかる。次に、3, 4次元のホモロジー球面の場合に定理 3.5 の証明を行う。5次交代群 A_5 は部分群の共役類を9つもち、(同型なものを除いて) 4つの非自明な既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群をもつ。以下の表は既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群の部分群による不動点集合の次元を与えたものである。

	E	C_2	C_3	C_5	D_4	D_6	D_{10}	A_4	A_5
$U_{3.1}$	3	1	1	1	0	0	0	0	0
$U_{3.2}$	3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_4	4	2	2	0	1	1	0	1	0
U_5	5	3	1	1	2	1	1	0	0

表 1: 非自明な既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群と部分群による不動点集合の次元 (参照 [22, Table 3.1])

命題 3.4. $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー 3-球面 Σ が向きを保つ効果的な *odd-Euler-characteristic G -action* をもつならば、その G -作用は *one-fixed-point A_5 -action* である。

証明. V をある G -不動点での接空間加群とする. V 上の G -作用は向きを保ち効果的なので, G は $SO(3)$ の部分群であるとして良い. A_5 と同型でない $SO(3)$ の部分群 G に対して, $G \in \mathcal{G}_2^2$ であるので, 命題 2.3 より $\chi(\Xi^G) \equiv 0 \pmod{2}$ が成立する. $G \cong A_5$ であるとき, V は 3 次元の既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群に同型である. 表 1 より, $\dim V^{D_4} = 0$ であるので, Smith の定理より, $|\Xi^{D_4}| = 2$ となる. $\Xi^{A_5} \subset \Xi^{D_4}$ であるので, $|\Sigma^{A_5}| = 1$ でなければならない. $\square$

ホモトピー 3-球面上の one-fixed-point G -action は存在しないが, いくつかのホモロジー 3-球面上には one-fixed-point A_5 -action が存在することが知られている [10].

命題 3.5 (DeMichelis [7], cf. [6, Theorem II.1]). ホモロジー 4-球面 Σ 上の向きを保つ効果的な G -作用による空でない不動点集合は 2 次元以下の球面である.

証明. V をある G -不動点での接空間加群とする. ある G の正規部分群 H に対して, Σ^H が 2 次元以下の球面となることを示せば良い. $F(G)$ が非自明である場合, ある p -核 $O_p(G)$ は非自明である. V 上の $O_p(G)$ -作用は向きを保つので, $\dim V^{O_p(G)} \leq 2$ が成立する. Smith の定理より, $\Sigma^{O_p(G)}$ は 2 次元以下の球面である. $F(G)$ が自明であるとき, G は非可換な極小正規部分群 H をもつが, $H \cong A_5$ であることがわかる. 以下, H と A_5 を同一視する. 表 1 より, 接空間加群の制限 $\text{Res}_H^G V$ は $\mathbb{R} \oplus U_{3,i}$ ($i = 1, 2$) あるいは U_4 のいずれかに同型である. ここで, $\mathbb{R}$ は 1 次元の自明な $\mathbb{R}[A_5]$ -加群を表している. 前者の場合, $\dim V^{A_5} = \dim V^{D_4} = 1$ が成り立つので, Smith の定理より, $\Sigma^{A_5} = \Sigma^{D_4}$ は S^1 である. 後者の場合,

$$\Sigma^{C_5} \cong S^0, \Sigma^{C_2} \cong S^2, \Sigma^{D_4} \cong S^1, \Sigma^{D_6} \cong S^1$$

が成立する. $\Sigma^{A_5} \subset \Sigma^{C_5}$ より, $1 \leq |\Sigma^{A_5}| \leq 2$ であり, $\langle D_4, D_6 \rangle = A_5$ より, $\Sigma^{D_4} \cap \Sigma^{D_6} = \Sigma^{A_5}$ である. Σ^{C_2} における Σ^{D_4} と Σ^{D_6} の $\mathbb{Z}_2$ -交差数は自明なので, $|\Sigma^{A_5}| = 2$ であることがわかる. $\square$

5, 6 次元のホモロジー球面の場合の証明は, 場合分けが多少煩雑であるため, ホモロジー 6-球面の場合 (定理 1.2) に限り, その証明の方針のみを述べることにする. $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー 5-球面 (定理 1.4) の場合もほぼ同様である.

以下, Σ は向きを保つ効果的な G -作用をもつホモロジー 6-球面を表す. まずは, 作用する有限群 G が非可換な極小正規部分群をもつ場合 (補題 3.1) の証明に必要な命題を紹介する.

命題 3.6. V を $V^G = \{0\}$ を満たす有限次元 $\mathbb{R}[G]$ -加群とする. G の部分群の 3 つ組 (H, K, P_2) であって, 次の 4 つの条件を満たすものが存在すると仮定する.

- (1) H と K は G を生成する.
- (2) P_2 は 2-群であり, H と K に含まれる.
- (3) $\dim V^H + \dim V^K = \dim V^{P_2}$ が成り立つ.
- (4) $\dim V^H = 0$ (resp. $\dim V^K = 0$) ならば, $K \in \mathcal{G}$ (resp. $H \in \mathcal{G}$) が成り立つ.

このとき、 G がホモロジー球面 X に作用していて、ある G -不動点 x での接空間加群 $T_x(X)$ が $\mathbb{R}[G]$ -加群として V と同型ならば、 X^G は 1 点集合になり得ない。特に、ある部分群 Q に対して、 $|X^Q| = 2$ であるとき、 $X^G \cong S^0$ である。

G が Σ に向きを保って効果的に作用し、 G -不動点をもつとき、 G は $SO(6)$ の部分群であるとして良い。 $SO(6)$ の非可換で特性的な有限単純部分群 G は

$$A_5, A_6, A_7, PSL(2, 7), PSU(4, 2) \text{ あるいは } A_5 \times A_5.$$

のいずれかに同型である (参照 [13, p.156]). これらのうち、 A_5 と A_6 の同型でないものに対して、命題 3.6 を適用することができ、次の結果を得る。

命題 3.7. G が $A_7, PSL(2, 7), PSU(4, 2), A_5 \times A_5$ のいずれかと同型なとき、 G がホモロジー 6-球面 Σ に G -不動点をもって効果的に作用するならば、どのような接空間加群 V も命題 3.6 の条件を満たす。特に、 $\Sigma^G \cong S^0$ である。

G が A_5 と A_6 に同型な正規部分群をもつ場合は個別に調べることにし、命題 3.7 と合わせると、ホモロジー 6-球面の場合の補題 3.1 を示すことができる。有限群 G が非可換な極小正規部分群をもつ場合の証明は完了したとし、 G が非可換な極小正規部分群をもたない場合を考える。この場合、 $F(G)$ が非自明となることを用いて証明を進める。

V を有限次元の $\mathbb{R}[G]$ -加群とし、 G -不変な内積をもつとする。 $F(G)$ は G の正規部分群であるので、 $V^{F(G)}$ は V の $\mathbb{R}[G]$ -部分加群となる。 V における $V^{F(G)}$ の直交補空間を $V_{F(G)}$ で表す。

補題 3.2 の証明の鍵となる命題の一つは次である。

命題 3.8. V を n 次元の忠実な $\mathbb{R}[G]$ -加群とし、 $\mathbb{R}[G]$ -部分加群 $V_{F(G)}$ の次元を m とする。もし G が非可換な極小正規部分群をもたないならば、 G は $O(m)$ のある有限部分群と同型である。

証明. $V_{F(G)}$ 上の G -作用の核を K とする。 Fitting の定理より⁸、積 $F(G) \cdot F(K)$ は G の冪零正規部分群であるので、 $F(G) \cdot F(K) = F(G)$ が成立する。 V 上の G -作用は効果的なので、 $F(G) \cap K = E$ である。したがって、 $F(K)$ は自明でなければならない。 G が非可換な極小正規部分群をもたないという仮定より、 K も非可換な極小正規部分群をもたないので、 K は自明でなければならない。したがって、 $G \cong G/K$ は $O(m)$ のある有限部分群と同型である。 $\square$

最後に、今までに用意した結果を用いて、主定理 1.2 の証明の方針を与える。

定理 1.2 の証明の方針.

ある G -不動点での接空間加群を V とする。 V は 6 次元の忠実な $\mathbb{R}[G]$ -加群で、向きを保つ G -作用をもっているため、作用する有限群 G は $SO(6)$ の部分群であるとして良い。さらに、 G は非可換な極小正規部分群をもたないと仮定する。このとき、 $F(G)$ は非自明であり、向きを保って V に作用するので、 $\dim V^{F(G)} \leq 4$ が成り立つ。ここでは、 $\dim V^{F(G)} = 3, 4$ の場合にのみ、 $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ になることを確認しよう。

Case 1. $\dim V^{F(G)} = 4$ のとき。

⁸有限群 G の冪零正規部分群 H と K の積 $H \cdot K$ もまた G の冪零正規部分群である。

命題 2.8 より, G は $O(2)$ の有限部分群と同型なので, G は巡回群か二面体群のいずれかである. このとき, G は $\mathcal{G}_1^2$ に属するため, 命題 2.3 から $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ がしたがう.

Case 2. $\dim V^{F(G)} = 3$ のとき.

命題 2.8 より, G は $O(3)$ の有限部分群と同型である. G が非可換な極小正規部分群をもたないので, G が可解群であり, $\mathcal{G}_2^2$ に属することがわかる. したがって, 命題 2.3 より, $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ がしたがう.

$\dim V^{F(G)} \leq 2$ の場合も, p -核 $O_p(G)$ の不動点集合を調べたりすることによって, 全ての場合に $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ を示すことができる.

謝辞

第71回トポロジーシンポジウムでの講演の機会を与えてくださった宮澤康行先生(山口大学), 茂手木公彦先生(日本大学), 佐藤進先生(神戸大学)に心より感謝申し上げます. また, 本原稿にコメントをくれた同僚の浅野喜敬氏に感謝します.

参考文献

- [1] A. Bak and M. Morimoto: *Equivariant surgery and applications*, in: Proc. of Conf. on Topology in Hawaii 1990, K.H. Dovermann (ed.), World Scientific Publ., Singapore, (1992), 13–25.
- [2] A. Bak and M. Morimoto: *The dimension of spheres with smooth one fixed point actions*, Forum Math. **17** (2005), 199–216.zw
- [3] A. Borowiecka: *$SL(2, 5)$ has no smooth effective one-fixed-point action on S^8* , Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **64** (2016), 85–94.
- [4] A. Borowiecka and P. Mizerka: *Nonexistence of smooth effective one fixed point actions of finite Oliver groups on low-dimensional spheres*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **66**, No.2, (2018), 167–177.
- [5] G. E. Bredon: *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.
- [6] N. P. Buchdahl, S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point action on low-dimensional spheres*, Invent. Math. **102** (1990), 633–662.
- [7] S. Demichelis: *The fixed point set of a finite group action on a homology four sphere*, L'Enseign. Math. **35** (1989), 107–116.
- [8] E. E. Floyd and R. W. Richardson: *An action of a finite group on an n -cell without stationary points*, Bull. Amer. Math. Soc. **65**, No.2, (1959), 73–76.
- [9] M. Furuta: *A remark on a fixed point of finite group action on S^4* , Topology **28** (1989), 35–38.
- [10] S. Illman: *The Equivariant Triangulation Theorem for Actions of Compact Lie Groups*, Math. Ann. **262**, (1983), 487–502.
- [11] S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point actions and homology 3-spheres*, Amer. J. Math. **117**, No.3, (1995), 807–827.

- [12] E. Laitinen and M. Morimoto: *Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres*, Forum Math. **10** (1998), 479–520.
- [13] E. Laitinen and P. Traczyk: *Pseudofree representations and 2-pseudofree actions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 151–157.
- [14] P. Mizerka: *Exclusions of smooth actions on spheres of the non-split extension of C_2 by $SL(2, 5)$* , Osaka J. Math. **60**, No.1, (2023), 1–14.
- [15] D. Montgomery and H. Samelson: *Fiberings with singularities*, Duke Math. J. **13**, No.1, (1946), 51–56.
- [16] M. Morimoto: *On one fixed point actions on spheres*, Proc. Japan Acad. **63** Ser.A (1987), 95–97.
- [17] M. Morimoto: *Most of the standard spheres have one fixed point actions of A_5* , in: Proc. Conf. Transformation Groups, Osaka 1987, ed. K. Kawakubo, Lect. Notes in Math. **1375**, 240–258, Springer Verlag, Heidelberg, 1989.
- [18] M. Morimoto: *Most standard spheres have one fixed point actions of A_5 .II*, K-Theory **4** (1991), 289–302.
- [19] M. Morimoto: *Appendix to P. Mizerka’s theorem*, Osaka J. Math. **60**, No.2, (2023), 377–383.
- [20] M. Morimoto: *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups I*, Osaka J. Math. **60**, No.3, (2023), 493–525.
- [21] M. Morimoto: *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups II*, accepted by J. Math. Soc. Japan.
- [22] M. Morimoto and S. Tamura: *Spheres not admitting smooth odd-fixed-point actions of S_5 and $SL(2, 5)$* , Osaka J. Math. **57**, No.1, (2020), 1–8.
- [23] R. Oliver: *Fixed point sets of group actions on finite acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–178.
- [24] R. Oliver: *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidian spaces*, Topology, **35**, (1996), 583–615.
- [25] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres I*, Adv. Math. **46** (1982), 3–14.
- [26] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres II*, Adv. Math. **46** (1982) 15–70.
- [27] P. A. Smith: *Transformations of finite period*, Ann. of Math. **39**, No.1, (1938), 127–164.
- [28] E. Stein: *Surgery on products with finite fundamental group*, Topology **16** (1977), 473–493.
- [29] S. Tamura: *Remarks on dimension of homology spheres with odd numbers of fixed points of finite group actions*, Kyushu Journal of Mathematics **74**, No.2, (2020), 255–264.
- [30] S. Tamura: *Smooth finite group actions on homology six-spheres with odd Euler characteristic fixed point sets*, arXiv:2407.07363.
- [31] S. Tamura: *Fixed point sets of finite group actions on $\mathbb{Z}_2$ -homology five-spheres have even Euler characteristics*, preprint.