

Twisted Alexander vanishing order of knots

鈴木 正明 (明治大学)*

1 イントロダクション

結び目の不変量である Alexander 多項式は基本的かつ重要な不変量でこれまで様々な研究がされてきた。結び目 K に対して Alexander 多項式を $\Delta_K(t)$ と表すとき、 $\Delta_K(t) = 1$ となる結び目は自明な結び目以外に Conway 結び目や Kinoshita-Terasaka 結び目などがあり、特に Alexander 多項式は完全な不変量ではないことが知られている。しかしながら、 $\Delta_K(1) = \pm 1$ となることから、Alexander 多項式が消える、すなわち $\Delta_K(t) = 0$ となる結び目は存在しないことが古くから知られている。では、ねじれ Alexander 多項式は同じくゼロになることはないか、ということを考えるのは自然な問いである。

ねじれ Alexander 多項式は結び目に対して Lin[23] が、有限表示可能な群に対して Wada[29] が導入した不変量で、通常の Alexander 多項式の拡張になっている。Alexander 多項式は結び目に対して定義されるが、ねじれ Alexander 多項式は結び目とその結び目群の表現の組に対して定義される。これまでねじれ Alexander 多項式について多くの研究があり、全てを述べることはできないが、Alexander 多項式では決定できなかった結び目の性質を捉えることができることが知られている。たとえば、結び目がファイバー結び目かを決定できることが示されている [10]。

有限群 G に対して、結び目群 $G(K)$ の全射準同型 $f: G(K) \rightarrow G$ が存在するとき、 G の正則表現 $\rho: G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ との合成 $\rho \circ f: G(K) \rightarrow G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ は結び目群の表現となるので、この表現を用いてねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K^{\rho \circ f}(t)$ を考えることができる。本研究では常に有限群の正則表現を経由した結び目群の表現を考えるので、これを有限群への全射準同型に付随した結び目のねじれ Alexander 多項式と呼ぶことにする。この設定の下で、ねじれ Alexander 多項式がゼロになることがあるかという前述の問いに対して、Friedl-Vidussi は次のような驚くべき定理を与えている。

定理 1.1 (Friedl-Vidussi [11]) 結び目 K が非ファイバー結び目である必要十分条件は、ある有限群 G と全射準同型 $f: G(K) \rightarrow G$ が存在し、 f に付随した結び目 K のねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K^{\rho \circ f}(t)$ がゼロになることである。

* 〒164-8525 東京都中野区中野 4-21-1 明治大学 総合数理学部
本研究は科研費 (課題番号:20K0396) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 57K14, 57K10

キーワード: ねじれ Alexander 多項式, TAV 群, TAV 位数, 非ファイバー結び目, p -群

この定理により、Alexander 多項式とねじれ Alexander 多項式ではゼロになるか否かという点において、完全に異なった様相を呈することが分かる。またこの定理により、ねじれ Alexander 多項式がゼロになる有限群の特徴を考えると、非ファイバー結び目に対して、ねじれ Alexander 多項式がゼロになる有限群を具体的に見つけること、それらの中で一番位数の小さい有限群を決定することなどが次に問題となる。

本研究は京都大学の石川勝巳氏と慶応義塾大学の森藤孝之氏との共同研究によるものである。

2 有限群の正則表現

有限群 G が n 次元 (複素) 線型空間 V に作用し、 V の自己同型写像による群 $GL(V)$ と $GL(n, \mathbb{C})$ を同一視するとき、この作用による G の準同型 $\rho: G \rightarrow GL(V) \simeq GL(n, \mathbb{C})$ を G の (n 次元) 表現と呼ぶ。さらにこの作用を保つ V の真部分空間が存在しないときに、この表現は既約であるという。たとえば、有限アーベル群の既約表現は全て 1 次元表現であることが知られている。

有限群 G に対して、各 $g \in G$ に対応する元 e_g で生成される線型空間 V を考える。自然に G はこの V に作用するので、 G の $|G|$ 次元表現 $\rho: G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ を得る。ここで $|G|$ は G の位数を表す。この表現を有限群 G の正則表現と呼ぶ。すなわち、 G の積を G 自身への作用として見なすことで得られる表現である。正則表現の (\mathbb{C} 上の) 既約分解はその有限群の既約表現を全て含んでいる。より正確には次のような性質を持つ。

補題 2.1 有限群 G の既約表現を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ とし、 $\dim \rho_i$ で ρ_i の次元を表すとすると、このとき、 G の正則表現 $\rho: G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z}) \subset GL(|G|, \mathbb{C})$ は基底を取り換えることにより、 $\bigoplus_{i=1}^k \rho_i^{\oplus \dim \rho_i}$ と表すことができる。

このことから、正則表現は有限群の最も重要な有限次元表現と言える。

3 ねじれ Alexander 多項式と TAV 位数

結び目 $K(\subset S^3)$ に対して、 $G(K)$ で K の結び目群を表す。すなわち、 $G(K)$ は K の補空間の基本群で定義される。結び目群は Wirtinger 表示と呼ばれる、結び目の図式から得られる群表示を持つ。結び目 K が m 交点をもつ図式を許容すると、

$$G(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid r_1, r_2, \dots, r_{m-1} \rangle$$

と表すことができる。ここで生成元 x_i は図式の弧に対応し、互いに共役である (メリディアンと呼ばれる)。関係子 r_j は交点に対応するが、それらのうち任意の一つは他の関係子の帰結で得られることが知られているので、関係子の個数は交点数より一つ少なくできる。結び目群のアーベル化 $\phi: G(K) \rightarrow \mathbb{Z} \simeq \langle t \rangle$ は、各 x_i に対して $\phi(x_i) = t$ で得られる。

定義 3.1 結び目 K の Alexander 多項式は結び目群 $G(K)$ の表示が上記で与えられるとき、

$$\Delta_K(t) = \det \left(\phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq m-1}$$

と定義される。ここで $\frac{\partial}{\partial x_j}$ は Fox 微分を表す。

Alexander 多項式の定義は、他にもスケイン関係式やザイフェルト行列を用いて定義される方法もあるが、それらは等価である。本研究ではねじれ Alexander 多項式への拡張を念頭に、上記のように結び目群と Fox 微分による定義を用いる。

さらに以下のようにねじれ Alexander 多項式を定義する。(Wada は一般の有限表示可能な群に対してねじれ Alexander 多項式を定義しているが、本研究では結び目に対してのみ考察するので、結び目群に特化した定義を述べる。詳しいことについては Wada の原論文 [29] とねじれ Alexander 多項式について詳細に書かれている日本語の文献 [20] を参考文献として挙げる。)

定義 3.2 結び目 K のねじれ Alexander 多項式は結び目群 $G(K)$ の表示が上記で与えられ、さらに $G(K)$ の表現 $\rho: G(K) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ が与えられているとき、

$$\Delta_K^\rho(t) = \frac{\det \left(\rho \otimes \phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq m-1}}{\det (\rho \otimes \phi (x_m - 1))}$$

と定義される。

二点だけ注意を述べておくと、ねじれ Alexander 多項式は一般には多項式ではなく有理式であり、結び目だけでなく結び目群の表現にも依存する。本来であれば他にも定義の注意として述べるべき点があるが、それらは同じく [29] や [20] の説明に任せることにする。この定義において、ねじれ Alexander 多項式の分子に現れる行列は $n(m-1)$ 次正方行列となり、その行列式を求める必要があることから、結び目の交点数や表現の次元が大きいとかなり大変な計算を要することが想像できる。

例 3.3 結び目群 $G(K)$ の表現として、 n 次元自明表現 $\mathbf{1}: G(K) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$ を考える。すなわち、各 x_i に対して $\mathbf{1}(x_i)$ を n 次単位行列とすると、定義から

$$\Delta_K^{\mathbf{1}}(t) = \left(\frac{\Delta_K(t)}{t-1} \right)^n$$

となることが分かる。

この例より、結び目群の表現として自明表現を考えると、ねじれ Alexander 多項式は通常の Alexander 多項式と本質的に等価である。一方、自明でない表現を考えると一般にはねじれ Alexander 多項式は Alexander 多項式では表せず (c.f. [26])、ねじれ Alexander 多項式は通常の Alexander 多項式よりも豊富な情報を含んでいることが知られている。

本研究では以下のような設定を考える。有限群 G に対して、結び目 K の結び目群 $G(K)$ から G に全射準同型 $f: G(K) \rightarrow G$ が存在すると仮定する。この全射準同型と G の正則表現の合成 $\rho \circ f: G(K) \rightarrow G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ は結び目群の表現となるので、ねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K^{\rho \circ f}(t)$ を考えることができる。

二つの表現の直和表現に対してねじれ Alexander 多項式はそれぞれの表現によるねじれ Alexander 多項式の積になるので、補題 2.1 により次の命題を得る。

命題 3.4 上記の記号の下で次の等式が成立する。

$$\Delta_K^{\rho \circ f}(t) = \prod_{i=1}^k \left(\Delta_K^{\rho_i \circ f}(t) \right)^{\dim \rho_i}$$

イントロダクションで述べたように、この設定の下でねじれ Alexander 多項式がゼロになるかを考察する。

定義 3.5 TAV (twisted Alexander vanishing) 群と TAV 位数を次のように定義する。

- (i) 結び目 K に対して、その結び目群から有限群への全射準同型が存在し、それに付随した結び目 K のねじれ Alexander 多項式がゼロになるとき、その有限群を K の TAV 群と呼ぶ。
- (ii) 有限群がある結び目の TAV 群となっているとき、単にその有限群は TAV 群であるという。
- (iii) 結び目 K の TAV 群が存在するとき、 K の TAV 群の中で位数が一番小さい有限群の位数を K の TAV 位数 $\mathcal{O}(K)$ と呼ぶ。 K の TAV 群が存在しないときは、 $\mathcal{O}(K) = +\infty$ と定義する。

この定義により、結び目の集合を \mathcal{K} とすると、TAV 位数は写像 $\mathcal{O}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ とみなすことができる。定理 1.1 より $\mathcal{O}(K) = +\infty$ となるのは K がファイバー結び目のときで、またそのときに限るので、非ファイバー結び目の集合を $\mathcal{N} (\subset \mathcal{K})$ とすると、TAV 位数による写像 \mathcal{O} を非ファイバー結び目に制限した $\mathcal{O}|_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を得る。

4 主定理

結び目群から有限群への全射準同型が存在する必要十分条件は、その有限群が 1 元で正規的に生成される (weight one という) ということであることが [14] で示されている。これによりたとえば、結び目群から全射準同型が存在するアーベル群は巡回群に限ることや、どのような結び目群からも位数 $4n$ の二面体群 D_{2n} への全射準同型は存在しないと分かる。逆に weight one である有限群には必ずある結び目群から全射準同型が存在するが、ねじれ Alexander 多項式がゼロになるか、すなわち TAV 群であるかは分からない。weight one である有限群が TAV 群であるかについて次の定理が得られた。

定理 4.1 ([18]) weight one である有限群が TAV 群である必要十分条件はその有限群の交換子部分群が p 群でないことである。

これによりたとえば、巡回群や位数 $2p$ (p :素数) の二面体群 D_p は weight one だが TAV 群ではないことが分かる。定理 4.1 を用いて位数の小さい有限群が TAV 群かを調べると以下が得られる。

系 4.2 位数 191 以下の有限群のうち、その群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式がゼロになりえる群の位数は

$$24, 30, 42, 48, 60, 66, 70, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 110, 114, 120, 126, 130, \\ 132, 138, 140, 144, 150, 154, 156, 160, 168, 170, 174, 180, 182, 186, 190$$

に限られる。特に位数 24 未満の有限群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式はゼロにならない。

定理 4.3 ([18]) TAV 位数 $\mathcal{O}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ は次の性質をもつ。

- (i) 全ての結び目 $K \in \mathcal{K}$ に対して、 $\mathcal{O}(K) \geq 24$ が成り立つ。
- (ii) TAV 位数による写像 \mathcal{O} を非ファイバー結び目に制限した $\mathcal{O}|_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は非有界な写像になる。
- (iii) もし全射準同型 $\varphi: G(K_1) \rightarrow G(K_2)$ が存在するならば、 $\mathcal{O}(K_1) \leq \mathcal{O}(K_2)$ が成り立つ。
- (iv) 結び目 K_1, K_2 の連結和 $K_1 \# K_2$ に対して、 $\mathcal{O}(K_1 \# K_2) = \min\{\mathcal{O}(K_1), \mathcal{O}(K_2)\}$ が成り立つ。

定理 4.3 (iii) より、 K_1 が周期結び目で K_2 がその商として現れる結び目のときや、 K_1 の補空間から K_2 の補空間へ degree one map が存在するとき、 $\mathcal{O}(K_1) \leq \mathcal{O}(K_2)$ が成立する。

いくつかの結び目に対しては [25],[18] とその後の研究において、次の定理のように具体的に TAV 位数を決定している。

定理 4.4 ([25], [18]) 10 交点以下の素な結び目に対して、TAV 位数は次のようになる。

- (i) $\mathcal{O}(K) = 24$, if $K = 9_{35}, 9_{46}$
- (ii) $\mathcal{O}(K) = 60$, if $K = 10_{67}, 10_{120}, 10_{146}$
- (iii) $\mathcal{O}(K) = 96$, if $K = 10_{166}$
- (iv) $\mathcal{O}(K) = 120$, if $K = 8_{15}, 9_{25}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}, 10_{58}$
- (v) $\mathcal{O}(K) = 168$, if $K = 7_4, 8_3$
- (vi) $\mathcal{O}(K) \geq 192$, otherwise

たとえば全射準同型 $f: G(9_{35}) \rightarrow S_4$ に付随するねじれ Alexander 多項式はゼロになり、一方で位数 24 未満のどの有限群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式もゼロにはならない。よって $\mathcal{O}(9_{35}) = 24$ が示される。また、定理 4.4 で挙げられた結び目以外にも 5_2 の位数 336 の群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式はゼロになるので $\mathcal{O}(5_2) \leq 336$ などと、TAV 位数の上限が分かっている結び目がいくつかある [18]。

定理 4.5 系 4.2 で挙げた TAV 群の位数のうち、実際に TAV 位数が

24, 30, 42, 60, 66, 70, 78, 96, 102, 110, 114, 120, 130, 138, 154, 168, 170, 174, 182, 186, 190

となる結び目が存在する (ex: $\mathcal{O}(9_{35}) = 24$)。一般に、素数 p, q に対して、 $\mathcal{O}(K) = 2pq$ となる結び目が存在する。

上記のことを 2 橋結び目に制限して考えると、すべての結び目を対象にするときとは違った結果が得られる。

まず有限群が weight one であっても、共役な 2 元で生成されない有限群へはどんな 2 橋結び目からも全射準同型は存在しない。すなわち、2 橋結び目の TAV 群にはなり得ない。たとえば、位数 72 の有限群 $C_3 \times S_4$ は TAV 群だが、共役な 2 元で生成されないので 2 橋結び目の TAV 群ではない。また、 S_4 への全射準同型が存在する 2 橋結び目は多数あるが、 S_4 への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式がゼロになる 2 橋結び目は存在しないことが示される。これにより、2 橋結び目の TAV 位数は必ず 24 よりも大きいことが分かる。

5 今後の課題

問題 5.1 以下の問題は今後の課題である。

- (i) 10 交点以下の素な結び目に対して TAV 位数を決定せよ。
- (ii) $\mathcal{O}(K) = 48, 72, \dots$ となる結び目 K は存在するか?
- (iii) TAV 群に対して、その群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式がゼロになる結び目を構成せよ。
- (iv) 2 橋結び目に対する TAV 群を特徴づけよ。
- (v) 2 橋結び目の TAV 位数の最小値はいくつか? またそれを実現する 2 橋結び目は何か?

参考文献

- [1] H. Boden and S. Friedl, *Metabelian $SL(n, \mathbb{C})$ representations of knot groups IV: twisted Alexander polynomials*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 81–97.

- [2] G. Burde, H. Zieschang and M. Heusener, *Knots*, Third, fully revised and extended edition. De Gruyter Studies in Mathematics, 5. De Gruyter, Berlin, 2014. xiv+417 pp.
- [3] J. C. Cha, *Fibred knots and twisted Alexander invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4187–4200.
- [4] J. C. Cha and M. Suzuki, *Non-meridional epimorphisms of knot groups*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), 1135–1155.
- [5] J. Cho, *Connected sum of representations of knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015) 18, 1550020. Erratum: J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), 1692001, 2 pp.
- [6] R. Fox, *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad. J. Math. **22** (1970), 193–201.
- [7] S. Friedl and T. Kim, *The Thurston norm, fibered manifolds and twisted Alexander polynomials*, Topology **45** (2006), 929–953.
- [8] S. Friedl and M. Powell, *An injectivity theorem for Casson-Gordon type representations relating to the concordance of knots and links*, Bull. Korean Math. Soc. **49** (2012), 395–409.
- [9] S. Friedl and S. Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, The Mathematics of Knots: Theory and Application (Contributions in Mathematical and Computational Sciences), eds. Markus Banagl and Denis Vogel (2010), 45–94.
- [10] S. Friedl and S. Vidussi, *Twisted Alexander polynomials detect fibered 3-manifolds*, Ann. of Math. **173** (2011), 1587–1643.
- [11] S. Friedl and S. Vidussi, *A vanishing theorem for twisted Alexander polynomials with applications to symplectic 4-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. **15** (2013), 2027–2041.
- [12] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*. A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer, New York etc., 1991.
- [13] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), 51–61.
- [14] F. González-Acuña, *Homomorphs of knot groups*, Ann. of Math. **102** (1975), 373–377.
- [15] K. W. Gruenberg, *The residual nilpotence of certain presentations of finite groups*, Arch. Math. **13** (1962), 408–417.
- [16] M. Hirasawa and K. Murasugi, *Twisted Alexander polynomials of 2-bridge knots associated to metacyclic representations*, arXiv:0903.0147.
- [17] M. Hirasawa, K. Murasugi, and D. S. Silver, *When does a satellite knot fiber?*, Hiroshima Math. J. **38** (2008), 411–423.
- [18] K. Ishikawa, T. Morifuji, and M. Suzuki, *Twisted Alexander vanishing order of knots*, preprint, arXiv:2310.10936.
- [19] D. Johnson, *Homomorphs of knot groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 135–138.
- [20] 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之, ねじれ Alexander 不変量, 数学メモアール **5** (2006).
- [21] T. Kitano and M. Suzuki, *A partial order in the knot table. II*, Acta Math. Sin. **24** (2008), 1801–1816.
- [22] T. Kitano, M. Suzuki, and M. Wada, *Twisted Alexander polynomials and surjectivity of a group homomorphism*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 1315–1324. Erratum: Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), 2937–2939.

- [23] X.-S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin.(Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380.
- [24] T. Morifuji, *Representations of knot groups into $SL(2, \mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials*, Handbook of Group Actions. Vol. I, Adv. Lect. in Math. (ALM) **31**, Int. Press, Somerville, MA, 2015, 527–576.
- [25] T. Morifuji and M. Suzuki, *On a theorem of Friedl and Vidussi*, Internat. J. Math. **33** (2022), 2250085, 14pp.
- [26] T. Morifuji and M. Suzuki, *Twisted Alexander polynomials of knots associated to the regular representations of finite groups*, preprint, arXiv:2311.15484.
- [27] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc. Berkeley, Calif. (1976).
- [28] V. Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsions*, Birkhäuser, Basel (2001).
- [29] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), 241–256.