佐々木多様体の非可換Hodge対応とUniformization

糟谷　久矢　(大阪大学)*

概　要

1. Introduction

負のオイラー数を持つコンパクトリーマン面は上半平面 H(単位円盤 B) の $PSL_2(\mathbb{R})$ ($PSU(1,1)$) の離散群商 $\Gamma\backslash H$ ($\Gamma\backslash B$) で表される．この古典的な一意化定理 (Uniformmization) の Higgs 束を用いた別証明が Hitchin[7] により与えられている．Hitchin の方法により一意化される流れについて概観しよう．コンパクトリーマン面 M 上の正則ベクトル束 $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ 上に恒等写像 $T^{1,0}M \to T^{1,0}M$ から定まる Higgs 場 θ を与える．この Higgs 束 (E,θ) が安定であることと M のオイラー数が負であることは同値である．この時, 安定な Higgs 束は M の基本群 $\pi_1(M)$ の $SU(1,1)$ 表現に対応する (非可換 Hodge 対応 [10, 12])．この対応する表現 $\pi_1(M) \to SU(1,1)$ が一意化 $M = \Gamma\backslash B$ を与える．

もう少し Hitchin の構成について詳しくみよう．Hitchin の定理 [7](より一般に Simpson の Higgs 束の小林-Hitchin 対応 [10]) により, 上記 Higgs 束 (E,θ) が安定 ($\Leftrightarrow$ オイラー数が負) であれば E にはエルミート計量が存在して, Hitchin の (自己双対) 方程式

$$R^2 + \left[\theta, \overline{{}^t\theta}\right] = 0$$

$$\bar\partial_E\theta + \theta\bar\partial_E = 0$$

を満たす (R はエルミート計量から定まる曲率).

さらに, (E,θ) の S^1 対称性からエルミート計量は $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ を直交とするものであり, さらに Hitchin の方程式は

$$R^2 + \left[\theta, \overline{{}^t\theta}\right] = 0$$

$$D\theta + \theta D = 0$$

と書くことができる (D はエルミート計量から定まる接続)．これらの式は $SU(1,1)$ を構造群とする Maurer-Cartan 方程式と見ることができて, その Monodromy 表現として表現 $\pi_1(M) \to SU(1,1)$ が得られる．

話を (実)2 次元から 3 次元に持ち上げてみよう．リーマン面 M にエルミート計量を取り, それに関する単位円周束を $S(M)$ とする．この時, M の正則接束を $S(M)$ に引き戻した $S(M)$ 上の複素線束は, $(v,v) \in S(M) \times T^{1,0}M$ が大域的なフレームとなり $\mathcal{C}^\infty$ 自明化される．この自明化より, M の Levi-Civita 接続の接続形式は $S(M)$ 上大域的に定義された実微分形式 η を定める．また考えていた Higgs 場 θ は $S(M)$ 上の複素微分形式 w を定める．これに関して, 上記 Hitchin の構成を考える．得られたエルミート計量は $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ を直交としているため, $K^{-1/2}$ にエルミート計量を定めていることになり

本研究は科研費 (課題番号:19H01787, 24K00524) の助成を受けたものである。
* 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: kasuya@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: https://sites.google.com/site/hisashikasuyamath/home

$T^{1,0}M = \left(K^{-1/2}\right)^2$ に (つまり M に) エルミート計量を定める．Hitchin の方程式から得られた方程式

$$R^2 + \left[\theta, \overline{{}^t\theta}\right] = 0$$

$$D\theta + \theta D = 0$$

はこの M のエルミート計量から定まる $S(M)$ 上の自明化を考えることによって, $S(M)$ 上の微分形式に関する方程式

$$\sqrt{-1}d\eta + w \wedge \bar{w} = 0$$

$$dw + 2\sqrt{-1}\eta \wedge w = 0$$

と表すことができる．この式は Lie 代数 $\mathfrak{su}(1,1)$ の構造関係式である．これによって, $S(M)$ がコンパクトであることから, $S(M)$ は $\widetilde{SU(1,1)}$($SU(1,1)$ の普遍被覆群) を普遍被覆に持つことがわかる．つまり, $S(M)$ は幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ を持つ 3 次元多様体である [9].

このような議論を 2 次元（複素 1 次元) から出発せずに 3 次元多様体上の幾何学として展開することが今回発表する理論の基本的発想である.

本稿のねらい

本稿では, 佐々木多様体の非可換 Hodge 対応と Uniformization に関して, 一般論を展開することよりも, トポロジー的に特に興味深いと思われる 3 次元佐々木多様体の場合にフォーカスしてより具体的に理解することを目指す. 同テーマについて, 次元の高い場合も含めたより概説的な記事, “ 佐々木多様体の Higgs 束、現状とこれから ”(2024 年日本数学会特別講演予稿) を Reseachmap で公開しているので, そちらも参照されたい.

2. 3次元佐々木多様体:定義と例

ここでは, 3 次元の場合に限定して佐々木多様体について考える．一般の場合については Boyer-Galicki のテキスト [5] を参照されたい．M を実 3 次元可微分多様体とする．M の接触形式とは M 上の一次微分形式 η であって, $\eta \wedge d\eta$ が M の各点で 0 ではないものである．接触形式 η に対し M のベクトル場 ξ であって, $\eta(\xi) = 1$ かつ $\iota_\xi d\eta = 0$ を満たすものが一意に定まる (Reeb ベクトル場)．この時, $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker\eta$ である．佐々木構造 $(\eta, T^{1,0})$ とは, 接触形式 η と複素ベクトル束 $\ker\eta \otimes \mathbb{C}$ の複素部分線束 $T^{1,0} \subset \ker\eta \otimes \mathbb{C}$ で $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}}$ とおくと $T^{1,0} \cap T^{0,1} = 0$ となるもの (CR 構造) でありさらに以下を満たす:

- $T^{1,0} \ni \forall W \neq 0,\ \sqrt{-1}d\eta(W, \overline{W}) > 0$;
- $[\xi, \Gamma(T^{1,0})] \subset \Gamma(T^{1,0})$.

M のリーマン計量であって, $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker\eta$ は直交であり, ξ の長さは 1 かつ $\ker\eta$ 上では $d\eta$ から定まるエルミート計量となるものを考える．この計量は佐々木計量と呼ばれる．佐々木計量は計量錐をとるとケーラー計量になる．このような性質のリーマン計量として佐々木構造を定義することも可能である．

例 1 (標準的佐々木多様体) $M = \mathbb{R}^3$ とする．座標 $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\eta = dt + xdy$ とすると $\mathbb{R}^3$ の接触形式である．Reeb ベクトル場は ∂t である．$w = dx + \sqrt{-1}dy$ とおくと,

$$d\eta = \frac{\sqrt{-1}}{2} w \wedge \bar{w}.$$

$$dw = 0$$

が成立する. $T\mathbb{R}^{3*} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}w \oplus \mathbb{C}\bar{w}$ について, $\mathbb{C}w$ が双対になるように, $T^{1,0}$ を定めれば, $(\eta, T^{1,0})$ は $\mathbb{R}^3$ の佐々木構造である. (注: $T^{1,0} \neq \mathbb{C}\left(\partial x - \sqrt{-1}\partial y\right)$)

例 2 (Moving frame) Σ をリーマン面とする. Σ は各点で曲率が 0 にならないエルミート計量を持つとし, その単位円周束 $S(\Sigma)$ を考える. 正則接束を $S(\Sigma)$ に引き戻した $S(\Sigma)$ 上の複素線束は, $(v, v) \in S(\Sigma) \times T^{1,0}\Sigma$ が大域的なフレームとなり $\mathcal{C}^\infty$ 自明化される. この自明化より, Σ の Levi-Civita 接続の接続形式は $S(\Sigma)$ 上大域的に定義された実微分形式 η を定める. $d\eta$ は Σ の曲率である. (v, v) の双対となる $S(\Sigma)$ 上の複素微分形式を w とすると, 構造方程式

$$dw = -\sqrt{-1}\eta \wedge w,$$

$$d\eta = -\frac{\sqrt{-1}}{2} K w \wedge \bar{w}$$

を満たす (K はガウス曲率). よって, $\pm\eta$ と w によって $S(\Sigma)$ の佐々木構造が与えられる. Σ がケーラーであることから, Σ がコンパクトかつ第一 Chern 類 $c_1(\Sigma)$ が非自明ならば常にこのような構成によって佐々木多様体 $S(\Sigma)$ が得られる.

例 3 (Seifert ファイバー空間) Σ をコンパクトオービフォールドリーマン面とする. 通常のリーマン面の場合と同様にして, オービフォールドエルミート計量に対し, 単位円周束 $S(\Sigma)$ を考えると. $S(\Sigma)$ は Σ 上の Seifert 円周束であり, 滑らかな 3 次元多様体である. 第一 Chern 類 $c_1(\Sigma)$ が非自明ならば通常のリーマン面同様適切なエルミート計量によって $S(\Sigma)$ に佐々木構造が定まる.

例 4 (3 次元 Lie 群) 実 3 次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその双対 $\mathfrak{g}^*$ を考える. $\mathfrak{g}$ の佐々木構造は $\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\eta \oplus w \oplus \bar{w}$, $\eta \in \mathfrak{g}^*$ および構造方程式

$$d\eta = -\sqrt{-1} w \wedge \bar{w},$$

$$dw = C\eta \wedge w$$

により特徴づけられる. $\mathfrak{g}$ が佐々木構造を持つ時, $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするリー群 G は左不変佐々木構造を持つ. $\Gamma \subset G$ を離散群とすると $\Gamma \backslash G$ は佐々木多様体である. 佐々木構造を持つ Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は以下の三種に限られる.

($\mathfrak{n}_3$) abel ではない 3 次元冪零 Lie 代数 (3 次元 Heisenberg algebra)$\mathfrak{n}_3$ には

$$d\eta = \frac{\sqrt{-1}}{2} w \wedge \bar{w},$$

$$dw = 0$$

により佐々木構造が入る. 3 次元 Heisenberg 群 N_3 が対応する Lie 群である. N_3 の左不変佐々木構造を入れたものは3-次元ユークリッド空間に標準佐々木構造を入れたものである. 佐々木計量を考えると, 幾何 Nil_3 に対応する.

($\mathfrak{su}_{1,1}$) $\mathfrak{s}u_{1,1} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ には

$$d\eta = \sqrt{-1} w \wedge \bar{w},$$

$$dw = -2\sqrt{-1}\eta \wedge w$$

により佐々木構造が入る. $PSU(1,1)$, $SU(1,1)$ およびこれらの普遍被覆群 $\widetilde{SU(1,1)}$ は対応するリー群である. 佐々木計量を考えると, 幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ に対応する.

($\mathfrak{su}(2)$) $\mathfrak{su}(2)$ には

$$d\eta = \sqrt{-1}w \wedge \bar{w},$$
$$dw = \sqrt{-1}\eta \wedge w$$

により佐々木構造が入る. $SU(2)$, $SO(3)$ は対応するリー群である. 佐々木計量を考えると, 幾何 S^3 に対応する. $SU(2)$ の $\mathbb{C}^2$ への線形作用の軌道を考えることにより, $SU(2)$ は S^3 と同一視できる.

$(M, \eta, T^{1,0})$ をコンパクト3次元佐々木多様体とする. $\mathfrak{g}$ を上記三種のいづれかとする. 佐々木構造が $\mathfrak{g}$-構造であるとは $T^{1,0*}$ の大域フレーム w であって, η, w が上記の $\mathfrak{g}$ に対応する構造方程式を満たすことである. この時, Frobenius の定理より, M は佐々木多様体として $\Gamma\backslash G$ と表される. Σ をコンパクトリーマン面とする.

- Σ が正定曲率計量を持てば, 円周束 $S(\Sigma)$ は $\mathfrak{su}(2)$-構造を持ち,
- Σ が負定曲率計量を持てば, 円周束 $S(\Sigma)$ は $\mathfrak{su}(1,1)$-構造を持つ. (Introduction の議論を参照)

Σ が0曲率計量を持つ場合, $T^{1,0*}$ の円周束 $S(\Sigma)$ 自明となり佐々木多様体にはならない. この場合, 非自明な複素線束に関する単位円周束が $\mathfrak{n}_3$-構造を持つ.

3. 佐々木多様体のベクトル束とHiggs束

$(M, \eta, T^{1,0})$ を3次元佐々木多様体とする. ξ をその Reeb ベクトル場とする. $(A^*(M), d)$ を M の de Rham 複体とする. 微分形式 α が

$$\iota_\xi \alpha = \iota_\xi d\alpha = 0$$

を満たす時, basic であるといい, basic な微分形式がなす $A^*(M)$ の部分空間を $A_B^*(M)$ で表す. $(A_B^*(M), d)$ は $(A^*(M), d)$ の部分複体である. そのコホモロジーを $H_B^*(M)$ で表し, basic コホモロジーと呼ぶ.

ξ が生成するフローを考えると, $T^{1,0}$ によって横断的正則 foliation が定まる. 本稿では $TM_{\mathbb{C}}$ の部分束 $\mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0}$ を佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ の正則構造と考える. 例えば, 正則関数 f とは $\xi(f) = \overline{Z}(f) = 0$ $(\forall \overline{Z} \in T^{0,1})$ を満たす複素関数であり, 特に $f \in A_B^0(M)$ である. 正則一次微分形式 φ とは, $\varphi(\xi) = \varphi(\overline{Z}) = \iota_\xi d\varphi = \iota_{\overline{Z}} d\varphi = 0$ を満たす複素一次微分形式であり, 特に $\varphi \in A_B^1(M)$ である.

(E, h) を M 上の $\mathcal{C}^\infty$ エルミート束とし, ∇ をそのユニタリ接続とする. (E, h, ∇) が正則エルミート束であるとは, ∇ の曲率 R が

$$\forall \overline{Z} \in T^{0,1}, R(\xi, \overline{Z}) = 0$$

を満たすことである. この時 ∇_ξ について平行な局所フレームを取ることによって, $TrR \in A_B^*(M)$ がわかる. basic Chern 類

$$c_{B,1}(E) = \left[-\frac{TrR}{2\pi\sqrt{-1}} \right] \in H_B^2(M)$$

が定まる．M がコンパクトならば, $H_B^2(M) = \langle [d\eta] \rangle$ である．よって, この時, 実数 C によって, $c_{B,1}(E) = C[d\eta]$ と書ける．

正則エルミート束 (E, h, ∇) に対し, ∇ から定まる $\langle \xi \rangle \oplus T^{0,1}$ についての偏微分接続 ∇'' を E の正則構造 (Dolbeault 作用素) と呼ぶ．佐々木多様体の正則ベクトル束は (エルミート計量とは無関係に) ベクトル束と平坦な偏微分接続の組みとして定義できるが, 複素多様体の正則ベクトル束とは異なり, すべての正則ベクトル束が正則エルミート束の構造を持つわけではない．

例 5 C を実定数とする．$L_C = (M \times \mathbb{C}, h = 1, \nabla = d - 2C\pi\sqrt{-1}\eta)$ は正則エルミート束であり, $c_{B,1}(L_C) = C[d\eta] \in H_B^2(M)$ が成り立つ．

正則エルミート束 (E, h, ∇) に対し, 適切な C で L_C と E のテンソル積を取ることで, basic Chern 類を自明にすることができる．

正則ベクトル束 (E, ∇'') に対し, $\theta \in A^1(M, \mathrm{End}(E))$ が Higgs 場であるとは,

$$\theta(\xi) = \theta(\overline{Z}) = 0 \qquad \forall \overline{Z} \in T^{0,1},$$

$$(\nabla''\theta + \theta\nabla'')(\xi, X) = (\nabla''\theta + \theta\nabla'')(\overline{Z}, X) = 0 \qquad \forall \overline{Z} \in T^{0,1}, \forall X \in TM$$

を満たすことである．正則ベクトル束 (E, ∇'') と Higgs 場 θ の組 (E, θ) を Higgs 束と呼ぶ．

正則エルミート束 (E, h, ∇) で $c_{B,1}(E) = 0$ となるものを考える．Higgs 束 (E, θ) が stable であるとは, θ によって保たれる真の正則部分束 $F \subset E$ が常に $c_{B,1}(E) = -C[d\eta]$ $(C > 0)$ を満たすことである．Corlette-Simpson による非可換 Hodge 対応 [6, 10, 12] の佐々木版が Biswas-Kasuya[2, 3] によって与えられているので, それの 3 次元の場合について述べる．

定理 1 (佐々木多様体の非可換 Hodge 対応, Biswas-Kasuya[2, 3]**)** 3 次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ 上で, 単純平坦複素ベクトル束と (上記の意味で)stable な Higgs 束 (E, θ) は 1 対 1 に対応する．

例 6 佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ の実接束 TM は以下の性質を満たす接続 ∇^{TW} を一意に持つことが知られている (Tanaka-Webster 接続 [13, 14])

1. ∇^{TW} は $T^{1,0}$ を保つ．

2. $\nabla^{TW} d\eta = \nabla^{TW}\eta = \nabla^{TW}\xi = 0.$

3. ∇^{TW} のトーションを T^{TW} とすると,

$$T^{TW}(X, Y) = -d\eta(X, Y)\xi.$$

∇^{TW}, $d\eta$ によって, $T^{1,0}$ は正則エルミート束となる．

正則エルミート束 $T^{1,0} \oplus \mathbb{C}$ に対し, $T^{1,0}M \to T^{1,0}M$ から定まる Higgs 場 θ を与える．$c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ とすると, $E = (T^{1,0} \oplus \mathbb{C}) \otimes L_{C/2}$ とおけば $c_{B,1}(E) = 0$. Higgs 束 (E, θ) の θ によって保たれる正則部分束は $T^{1,0} \otimes L_{C/2}$ であるので, Higgs 束 (E, θ) が stable であることと $C > 0$ は同値である．よってこの時, 非可換 Hodge 対応により, M の単純複素平坦束, よって基本群の単純線形表現が得られる．

さて, Introduction での議論を思い出して, 上記例の Higgs 束 (E,θ) の非可換 Hodge 対応による3次元佐々木多様体の一意化を考えよう. 定理を述べる前に準備をする.

佐々木多様体 $(M,\eta,T^{1,0})$ において, 佐々木構造の変形とは佐々木構造 $(\eta',T'^{1,0})$ であって, η,η' は定数倍を除いて同じ Reeb ベクトル場を持ち, さらに $T'^{1,0}\subset\mathbb{C}\xi\oplus T^{1,0}$ となるものである. ここで, $\mathbb{C}\xi\oplus T^{1,0}=\mathbb{C}\xi\oplus T'^{1,0}$ であることに注意するとこの変形によって正則構造は変化していないことがわかる (この点で Kodaira-Spencer の変形とは異質なものである). $(M,\eta,T^{1,0})$ 上の正則ベクトル束や Higgs 束であることと $(M,\eta',T'^{1,0})$ の正則ベクトル束や Higgs 束であることは同じである.

定理 2 (佐々木多様体の一意化定理 Kasuya-Miyatake[8]) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M,\eta,T^{1,0})$ が $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ $(C>0)$ を満たすとすると, 適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{su}(1,1)$ 構造に変形可能である. よって, 特に3次元多様体 M は幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ を持つ.

定理の詳細を概観しよう. $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ という仮定から, M 上に ξ のフローが S^1 作用を生成することがわかる. また, 同変コホモロジーを用いると, $T^{1,0}$ は S^1-同変束として, L_{-C} に同型とみなせる. (ただしトーション線束を除くため, M は適切な有限被覆にとりかえる必要がある.) 特に $T^{1,0}$ は大域自明化できる. Higgs 束 (E,θ) は stable より, 非可換 Hodge 対応より, Hitchin の方程式

$$R^2+\left[\theta,\overline{{}^t\theta}\right]=0$$

を与える正則エルミート束 (E,h,∇) が得られる. (E,θ) は S^1 について対称性があることから, $T^{1,0}\otimes L_{C/2}$ に (よって $T^{1,0}$ に) エルミート計量が定まる. $T^{1,0}$ について, このエルミート計量による単位ベクトル W によって, $T^{1,0}$ を S^1-同変束として L_{-C} に同型となるように自明化する. W に対応する微分形式 w と接続形式 η' を考えると, Hitchin の方程式は行列値微分形式についての式となり, $\mathfrak{su}(1,1)$ の構造関係式

$$\sqrt{-1}d\eta'+w\wedge\bar{w}=0$$

$$dw+2\sqrt{-1}\eta'\wedge w=0$$

を導く. ここで, η' は接触構造であり, 元の η にしかるべき Rescaling をすることで $\eta-\eta'\in A^1_B(M)$ となる. $w\in T^{1,0*}$ より, $\mathfrak{su}(1,1)$-構造から定まる M の佐々木構造は元の佐々木構造の変形となっていることがわかる.

注意 1 (リーマン面) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M,\eta,T^{1,0})$ が, リーマン面 Σ 上の円周束 $S(\Sigma)$ とする. この時, $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ $(C>0)$ は $c_1(\Sigma)$ 負であることと同値でありつまり Σ のオイラー数が負 $2-2g<0$ であることと同値である. ここで g は位相的種数. M を一意化する際に, 上で考えている Higgs 束 (E,θ) は $(K^{-1/2}\oplus K^{1/2},\theta)$ を引き戻したもの "ではない" ことに注意. 実際 $\Gamma\subset PSU(1,1)$ の "$SU(1,1)$ への自然なリフト" が (E,θ) に非可換 Hodge 対応する単純平坦束のモノドロミー表現である. つまり, その像は Γ ではなく, $\mathbb{Z}_2\times\Gamma$ に同型である. Γ の $SU(1,1)$ リフトの分解 $\mathbb{Z}_2\times\Gamma$ の取り方は 2^{2g} 個あり, 標準束のルート $K^{1/2}$ を取ることに対応している. ここで, $M=S(\Sigma)$ の基本群は $\Gamma\subset PSU(1,1)$ のリフト $\widetilde{\Gamma}\subset\widetilde{PSU(1,1)}$ であり, Γ の $\mathbb{Z}$ による中心拡大と同型である.

注意 2 (オービフォールド) 3次元コンパクト佐々木多様体$(M, \eta, T^{1,0})$が, オービフォールドリーマン面Σ上のSeifert円周束$S(\Sigma)$とする．この時, Σ上のオービフォールドde Rham複体はM上の$A^*_B(M)$に引き戻すことができ, $H^2_B(M)$は$H^2(\Sigma, \mathbb{R})$に同型である．Σ上の正則ベクトル“V”束はM上の正則エルミート束に引き戻すことができる．Σ上の正則Higgs“V”束はリーマン面上の特異的Higgs束であるRegular Filtered Higgs束([11])の一種である．

$T^{1,0}$はΣの正則接ベクトル“V”束$T^{1,0}\Sigma$を引き戻したものである．$c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ $(C > 0)$は$T^{1,0}\Sigma$のオービフォールドChern類が負であることと同値であり, よってオービフォールドEuler数が負

$$2 - 2g - n - \sum_i^n \frac{1}{p_i} < 0$$

であることに同値である．gは位相的な種数, nはオービフォールド点の数, p_iは各オービフォールド点の次数.

注意 3 (3次元佐々木多様体の分類) 上記一意化定理の主張は, Belgun[1]による3次元佐々木多様体の分類定理,“3次元コンパクト佐々木多様体は適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{n}_3, \mathfrak{su}(1,1), \mathfrak{su}_3$のいずれか一つの構造に変形できる”から導くことができる．Belgunの証明は複素曲面のEnriques-Kodairaの分類を用いている．今回の証明は, 他の分類定理に依存しないものであり高次元化が可能である．$\mathfrak{n}_3$-構造に変形される場合に関しても, このような証明が可能であり高次元化もできる(Biswas-Kasuya[4]).

定理 3 (Biswas-Kasuya[4]) 3次元コンパクト佐々木多様体$(M, \eta, T^{1,0})$が$c_{B,1}(M) = 0$を満たすとすると, 適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{n}_3$構造に変形可能である．よって, 特に3次元多様体Mは幾何Nil_3を持つ.

4. 3次元佐々木多様体のTeichmüller 空間論(今後の課題)

コンパクト3次元佐々木多様体$(M, \eta, T^{1,0})$が$\mathfrak{su}(1,1)$構造

$$\sqrt{-1}d\eta + w \wedge \bar{w} = 0$$

$$dw + 2\sqrt{-1}\eta \wedge w = 0$$

から定まっているとする．この時, $T^{1,0} = L_{-1/\pi}$である．$E = L_{-1/2\pi} \oplus L_{1/2\pi}$とする, $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} w$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}^\infty(M))$とおくと, θがHiggs場であるための必要十分条件は以下等式を満たすことである:

$$\xi(\alpha) - 2\sqrt{-1}(\alpha) = \overline{W}(\alpha) = 0 \qquad (\text{正則一次微分}),$$

$$\xi(\beta) = \overline{W}(\beta) = 0 \qquad (\text{正則関数}),$$

$$\xi(\gamma) - 4\sqrt{-1}(\gamma) = \overline{W}(\gamma) = 0 \qquad (\text{正則二次微分}).$$

Mはコンパクトなのでβは定数である．Higgs束(E, θ)がstableとなる必要十分条件は$\beta \neq 0$である.

$\alpha = 0$, $\beta = 1$と仮定する．(E, θ)の非可換Hodge対応を考える．M上の正値関数hを

$$h^4|\gamma|^2 - h^{-4} + 1 = 0$$

を満たすものとして定めると, $\eta^{'} = \eta + d\log(h)$, $w^{'} = h^{-2}w + h^{2}\bar{\gamma}\bar{w}$ とすると, $D^{'} = d + \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\eta^{'} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\eta^{'} \end{pmatrix}$, $\theta^{'} = \begin{pmatrix} 0 & w^{'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, Hitchinの方程式

$$R^{'2} + \left[\theta^{'}, \overline{{}^{t}\theta^{'}}\right] = 0$$

が得られる. よって, 新たに $\mathfrak{su}(1,1)$ 構造

$$\sqrt{-1}d\eta^{'} + w^{'} \wedge \overline{w^{'}} = 0$$

$$dw^{'} + 2\sqrt{-1}\eta^{'} \wedge w^{\,'} = 0$$

が得られる.

よって, 正則二次微分に対し, $\mathfrak{su}(1,1)$ 構造を対応づけることができた. この対応によって, Hitchin[7] による Teichmüller 空間の構成の佐々木版が期待される.

予想 1 正則二次微分がなす空間と佐々木構造の変形同値類の空間は上記対応によって微分同相である.

参考文献

[1] F. A. Belgun, Normal CR structures on compact 3-manifolds, *Math. Zeit.* **238** (2001), 441–460.

[2] I. Biswas and H. Kasuya, Higgs bundles and flat connections over compact Sasakian manifolds, *Comm. Math. Phys.* **385** (2021), 267–290.

[3] I. Biswas and H. Kasuya, Higgs bundles and flat connections over compact Sasakian manifolds, II: quasi-regular bundles, arXiv:2110.10644. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (to appear).

[4] I. Biswas and H. Kasuya, Sasakian geometry and Heisenberg groups, arxiv-2310.12588.

[5] C. P. Boyer and K. Galicki, *Sasakian geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[6] K. Corlette, Flat G-bundles with canonical metrics, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 361–382.

[7] N. J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987), 59–126.

[8] H. Kasuya and N. Miyatake, Uniformizations of compact Sasakian manifolds, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2024, Issue 10, May 2024, Pages 8313–8328

[9] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 401–487.

[10] C. T. Simpson, Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 867–918.

[11] C. T. Simpson, Harmonic bundles on noncompact curves., *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1990), 713–770.

[12] C. T. Simpson, Higgs bundles and local systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **75** (1992), 5–95.

[13] N. Tanaka, A Differential Geometric Study on strongly pseudoconvex CR manifolds, Lecture Notes in Math., **9**, Kyoto University, 1975.

[14] S. Webster, Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface, *J. Differential Geom.* **13** (1978), 25–41.