6次元シンプレクティック多様体とその部分多様体のトポロジー

大場 貴裕　(大阪大学大学院 理学研究科)*

1. はじめに

幾何構造がどれほど多様体のトポロジーを制約するかは，トポロジーの研究における基本的な問いである．この問題を考える上で，幾何構造に適合する部分多様体が鍵となることがある．

本稿では，幾何構造としてシンプレクティック構造を考え，その部分多様体としては，シンプレクティック部分多様体を考える．定義を簡単に復習しておく．**シンプレクティック形式**とは，多様体 X 上の非退化かつ閉である 2-形式 ω のことで，組 (X, ω) を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ．シンプレクティック多様体 (X, ω) の部分多様体が**シンプレクティック**であるとは，それ自身，ω の制限によりシンプレクティック多様体になるときをいう．

シンプレクティック多様体の 1 つのクラスとして，射影多様体がある．その理論において，射影多様体のトポロジーと，超平面切断と呼ばれる余次元 1 の複素部分多様体のトポロジーの間には繋がりがある．例えば，Lefschetz の超平面定理は，2 つの間のホモトピー群や (コ) ホモロジー群を関連づける．また超平面切断の族を考えれば，Lefschetz ペンシル，Lefschetz ファイバー空間が得られ，射影多様体のトポロジーをより深く研究できる．

一般のシンプレクティック多様体についてはどうであろうか．これを探るため，本稿では以下の 2 つの問題を考える．

(1) (X, ω) の余次元 2 のホモロジー類 α を一つ固定したとき，どれほどのシンプレクティック部分多様体が α を代表するか？

(2) (X, ω) がある条件をみたすシンプレクティック部分多様体を含むとき，X のトポロジーにはどのような制約がかかるか？

筆者は近年，これらの問題に関し，6 次元シンプレクティック多様体とその 4 次元部分多様体の場合について研究している．この研究から得られた結果を本稿では紹介したい．

以下ではとくに断らない限り，多様体およびその間の写像はすべて滑らかであると仮定する．

2. 4 次元シンプレクティック部分多様体のトポロジー

2.1. 余次元 2 のシンプレクティック部分多様体

第 1 節の問題 (1) について考えていく．まずはシンプレクティック多様体に限らず，他の幾何構造を持った多様体でも同様の問題を考察したい．そのために以下のように問題を再設定する．

* 〒560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1
e-mail: taka.oba@math.sci.osaka-u.ac.jp

問題 2.1. n 次元多様体 X のホモロジー類 $\alpha \in H_{n-2}(X;\mathbb{Z})$ を固定したとき，α を代表する余次元 2 の連結な部分多様体は，ある同値関係のもとでは有限個か？

本稿では部分多様体の同値関係として，微分同相と (滑らかな) アイソピーを考える．

n 次元多様体 X と $\alpha \in H_{n-2}(X;\mathbb{Z})$ に対し，α を代表する連結な部分多様体が 1 つ存在したとする．すると，局所的に連結和を繰り返すことで，無限個の微分同相でない部分多様体が α を代表する．微分同相でない部分多様体はもちろんアイソトピーで移り合わないので，無限個の互いにアイソトピックでない代表元が取れる．

次に，幾何構造付きの状況で考える．例えば，X をコンパクトで単連結な Kähler 多様体とする．すると，α を代表する複素部分多様体は，実はすべてアイソトピックになることが知られている．とくに部分多様体は微分同相になる．

幾何構造を弱め，X にシンプレクティック構造を与えるとどうだろうか．$\dim X = 4$ のときは，$\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$ を代表するシンプレクティック曲面は，随伴公式から，微分同相類はただ 1 つである．そこで，区別の仕方を微分同相からアイソトピーに変える．すると，ホモロガスなシンプレクティック曲面の無限族で，互いにアイソピックでないものが，Fintushel と Stern [FS] により最初に構成され，現在では様々な構成例がある ([Smi], [EP] など)．

シンプレクティック多様体の次元を上げると，4 次元の場合の結果を用いて，互いにホモロガスであるが，アイソトピックでないシンプレクティック部分多様体の無限族は簡単に構成できる．しかし，今度は微分同相類の問題が非自明になる．例えば，(X,ω) や α の取り方によっては，代表元の微分同相類がただ 1 つになる (第 2.4 節を見よ)．一般のシンプレクティック多様体に対しても，このように微分同相類は有限個になるだろうか．

以上をまとめると下の表のようになる．この表で残った部分に対する答えが，この節での主結果である．

		微分同相	アイソトピー
滑らかな多様体		NO	NO
(コンパクト単連結) Kähler 多様体		YES	YES
シンプレクティック多様体	$\dim = 4$	YES	NO
	$\dim > 4$	??	NO

表 1: 問題 2.1 への答えのまとめ．

定理 2.2 (大場 [Oba])**.** 単連結なシンプレクティック 6 次元閉多様体 (X,ω) と，4 次元シンプレクティック部分多様体の無限族 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在し，以下をみたす：

- Y_n たちはすべてホモロガスである；
- Y_n たちは互いにホモトピー同値でない．とくに互いに微分同相でない．

2.2. Lefschetz ファイバー空間

定理 2.2 のシンプレクティック多様体とその部分多様体の構成には，Lefschetz ファイバー空間を用いる．このファイバー構造ついて，ここでは復習する．

まず Y を向きづけられた 4 次元閉多様体とする．S^2 を 2 次元球面とし，標準的な向きを入れておく．

定義 2.3. 写像 $f\colon Y \to S^2$ が **Lefschetz ファイバー空間**であるとは，次をみたすときをいう：

(i) 写像 f の臨界点集合 $\mathrm{Crit}(f)$ 上で，f は単射である；

(ii) 各臨界点 $p \in \mathrm{Crit}(f)$ と，それに対応する臨界値 $f(p)$ の周りで向きに適合する複素座標 (z_1, z_2)，w がそれぞれ取れ，f は以下のように書ける：

$$w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2;$$

(iii) 各ファイバーは自己交叉が -1 の球面を含まない．

臨界値上のファイバーのことを**特異ファイバー**，それ以外のファイバーを**正則ファイバー**と呼ぶ．

例 2.4. 球面 S^2 を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなし，写像

$$(S^2 \times S^2) \setminus \{(0,0), (\infty,\infty)\} \to S^2, \quad (z, w) \mapsto w/z$$

を考える (図 1 の左側)．これはいわゆる Lefschetz ペンシルであり，正則ファイバーは S^2 に同相で，特異ファイバーは 0 と ∞ の上にある．2 点 $(0,0)$ と (∞,∞) でブローアップすることにより，正則ファイバーが S^2 に同相な Lefschetz ファイバー空間が得られる (図 1 の右側)．この例は第 3 節の考察において鍵になる．

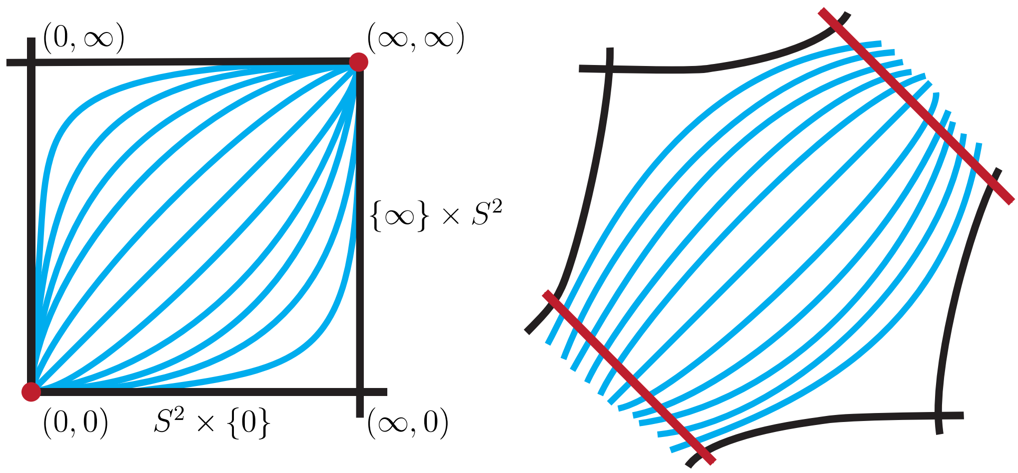

図 1: $S^2 \times S^2$ 上の Lefschetz ペンシル (左) とそのブローアップ上の Lefschetz ファイバー空間 (右)．

例 2.4 においては，$S^2 \times S^2$ を複素多様体とみなし，その構造を利用して Lefschetz ファイバー空間を構成した．組合せ的な方法でも Lefschetz ファイバー空間を作ることができる．実際，定理 2.2 の証明にもこちらを用いる．そこで，次にその方法について概説する．

各特異ファイバーは，正則ファイバー上のある単純閉曲線を 1 点につぶすことで得られる．このような単純閉曲線を**消滅サイクル**という．対応する消滅サイクルが分離型の単純閉曲線である特異ファイバーのことを，**分離型**と呼ぶことにする；消滅サイクル

が非分離型のときは，特異ファイバーを**非分離型**と呼ぶことにする．Lefschetz ファイバー空間が与えられたとき，そこから各特異ファイバーに対応する消滅サイクルを並べることで，消滅サイクルの (有限) 列ができる．逆に，ある条件をみたす単純閉曲線の列 $(c_1, \ldots, c_n)$ を取ると，各 c_i を消滅サイクルとする特異ファイバーを持つ Lefschetz ファイバー空間が構成できる．

例 2.5. まず種数 2 の閉曲面を考え，$c_1, \ldots, c_4$ を図 2 のような単純閉曲線とする．単純閉曲線の列

$$(c_1, \ldots, c_4, c_1, \ldots, c_4)$$

を考える．この列を消滅サイクルの列とする Lefschetz ファイバー空間 $f_0\colon M_0 \to S^2$ が構成できる．この f_0 は松本幸夫氏 [Mat] により構成された $(S^2 \times T^2)\#4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の種数 2 の Lefschetz ファイバー空間に他ならない．

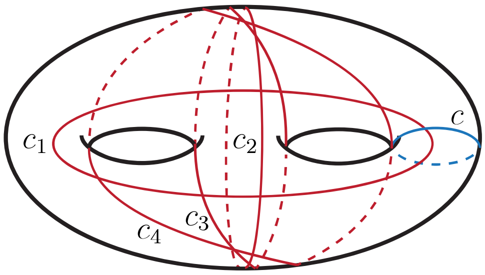

図 2: 単純閉曲線 c_1, c_2, c_3, c_4, c.

Lefschetz ファイバー空間 $f\colon Y \to S^2$ が**超楕円的**であるとは，各特異ファイバーの消滅サイクルに沿う Dehn ツイストが，正則ファイバーの超楕円的写像類群の元であるときをいう．上の例はどちらも超楕円的 Lefschetz ファイバー空間である．

超楕円的 Lefschetz ファイバー空間は，S^2 上の S^2 バンドルの二重分岐被覆空間と相性がいい．

定理 2.6 (Siebert–Tian [ST], Fuller [Ful]). 任意の超楕円的 *Lefschetz* ファイバー空間 $f\colon M \to S^2$ に対し，S^2 上の S^2 バンドル S が存在し，X のあるブローアップ $\widetilde{M}$ が S のあるブローアップ $\widetilde{S}$ の二重分岐被覆となる．

この定理における X のブローアップは，$f\colon M \to S^2$ の分離型の特異ファイバーの特異点で行っている．とくに，f が非分離型の特異ファイバーしか持たない場合，ブローアップは必要ない．

2.3. Lefschetz ファイバー空間に付随する 6 次元多様体とその部分多様体

以下は定理 2.2 の証明の鍵になる．

補題 2.7. 任意の超楕円的 *Lefschetz* ファイバー空間 $f\colon M \to S^2$ に対し，6 次元閉シンプレクティック多様体 (X, ω) とその 4 次元シンプレクティック部分多様体 Y で次をみたすものが存在する：

- X は S^2 上のある $\mathbb{CP}^2$ バンドルをブローアップさせて得られる多様体に微分同相である；
- Y は X をブローアップさせて得られる多様体に微分同相である．

定理 2.2 の証明の概略． 部分多様体の族 $\{Y_n\}$ を構成するため，まずは超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の族を与える．任意の $n \in \mathbb{Z}_{n\geq 0}$ に対し，種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $g_n\colon M_n \to S^2$ で，以下を消滅サイクルの列とするものを考える：

$$(c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4,$$
$$\tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4), \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4), \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4), \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4)).$$

ここで，$c_1, \dots, c_4, c$ は図 2 にある単純閉曲線で，τ_c は c に沿う右手 Dehn ツイストを表す．この g_n は，例 2.5 で考察した $f_0\colon M_0 \to S^2$ の 4 つのコピーを取り，それらのファイバー和 $(f_0 \#_{\mathrm{id}} f_0) \#_{\tau_c^n} (f_0 \#_{\mathrm{id}} f_0)$ として理解できる．正則ファイバーの種数が 2 であることから，g_n は超楕円的であることに注意しておく．

Lefschetz ファイバー空間 g_0 に補題 2.7 を適用して，まず 6 次元シンプレクティック多様体 (X, ω) とその中の 4 次元シンプレクティック部分多様体 Y_0 を得る．残りの g_n に対しても，補題 2.7 を適用すれば定理の証明が完了しそうであるが，そうはいかない．例えば，補題 2.7 を適用して得られた 6 次元多様体たちがシンプレクティック同相であるかはわからないし，たとえそうであったとしても，ホモロジー類が同じかも補題からすぐにはわからない．そこで，“twisting operation” と呼ばれる操作を用いる．この操作はやや複雑なので，詳しい説明は避けるが，ファイバー和と相性のいい操作で，(X, ω) やシンプレクティック部分多様体のホモロジー類は変えずに，この部分多様体をファイバー和に合わせて改変するものである（詳しくは [Oba, Section 4.1] を参照されたい）．

シンプレクティック部分多様体 Y_0 に twisting operation を施す．すると，Y_0 は (X, ω) 内で改変され，各 $g_n\colon M_n \to S^2$ $(n \geq 1)$ に対応する (X, ω) のシンプレクティック部分多様体 Y_n が得られる．構成から，各 Y_n は Y_0 にホモロガスである．また，Y_n は M_n のブローアップに微分同相である．$\pi_1(M_n) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ であることから，

$$\pi_1(Y_n) \cong \pi_1(M_n) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

となり，Y_n たちが互いに微分同相でないことがわかる．以上から定理が得られる． □

注意 2.8. 上の証明で与えた $g_n\colon M_n \to S^2$ は Ozbagci と Stipsicz [OS] の構成例から着想を得たものである．彼らと同じ方法で，$n \geq 1$ のとき，全空間 M_n とそのブローアップ Y_n は複素構造を許容しないことが証明できる．

2.4. 射影空間 $\mathbb{CP}^3$ のシンプレクティック部分多様体

この節では，Fubini–Study 形式 ω_{FS} を持った $\mathbb{CP}^3$ のシンプレクティック部分多様体の微分同相類について，結果のみ述べる (結果自体はフォークロアだと思われるが，筆者の知る限り，証明込みで明示的に書かれた文献はない)．定理を述べるために，言葉を 1 つ定義しておく．$\mathbb{CP}^3$ の 4 次元部分多様体 Y に対し，$[Y] = d[\mathbb{CP}^2] \in H_4(\mathbb{CP}^3; \mathbb{Z})$ をみたす整数 d が存在する．この d を Y の**次数**と呼ぶことにする．

定理 2.9. $(\mathbb{CP}^3, \omega_{\mathrm{FS}})$ のシンプレクティック 4 次元部分多様体 Y の次数 d が $1, 2, 3$ のいずれかであるとき，Y は次数 d の斉次多項式で定義される $\mathbb{CP}^3$ 内の滑らかな複素超曲面に微分同相である．すなわち，

$$Y \approx \begin{cases} \mathbb{CP}^2 & (d=1), \\ S^2 \times S^2 & (d=2), \\ \mathbb{CP}^2 \# 6\overline{\mathbb{CP}}^2 & (d=3). \end{cases}$$

ただし，$\approx$ は微分同相を表す．

証明は [Oba, Appendix A] を参照されたい．

3. 6次元シンプレクティック多様体のトポロジー

3.1. 部分多様体によるトポロジカルな制約

ここからは初めのページにあった問題(2)を考えていく：

(2) (X,ω) がある条件をみたすシンプレクティック部分多様体を含むとき，X のトポロジーにはどのような制約がかかるか？

この問題について，例えば，4次元の場合は次のことが知られている．

定理 3.1 (McDuff [McD1])**.** 連結な4次元閉シンプレクティック多様体 (X,ω) が，S^2 に同相なシンプレクティック部分多様体 Y を含むとする．Y の自己交叉数が非負であれば，Y は $(\mathbb{CP}^2, k\omega_{\mathrm{FS}})$（$k>0$ はある定数），またはあるシンプレクティック S^2 バンドルのブローアップにシンプレクティック同相である．

6次元以上の場合を考えると，シンプレクティック部分多様体について，自己交叉数や法バンドルに条件を課しただけの定理3.1の一般化は，筆者の知る限り，まだ示されていない．そこで，問題を少し考えやすくするため，次の概念を導入する．

定義 3.2. (X,ω) を閉シンプレクティック多様体とし，$[\omega]\in H^2(X;\mathbb{Z})$ をみたすとする．余次元2のシンプレクティック部分多様体 Y が**シンプレクティック超平面切断**であるとは，$\mathrm{PD}[\omega]=[Y]$ をみたし，$X\setminus Y$ が Weinstein 構造を許容するときをいう．

Weinstein 構造の定義をここでは説明しないが，このような構造を $X\setminus Y$ が持つとき，指数が次元の半分以下のハンドルのみでハンドル分解されることが知られている (この事実については，例えば，[CE] を参照されたい)．また，Weinstein 構造に関する条件は人工的に思われるかもしれないが，複素幾何の範疇で超平面切断を考えれば，その補空間には自然に Weinstein 構造が入ることから，それほど不自然ではない．

シンプレクティック超平面切断に問題を制限すると，その補空間についての既存の結果 ([McD2]，[PP] など) を用いることができる．例えば，$(\mathbb{CP}^2, k\omega_{\mathrm{FS}})$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ にシンプレクティック同相なシンプレクティック超平面切断を含む6次元シンプレクティック多様体 (X,ω) を考えると，$k=1$ のとき，X は $\mathbb{CP}^3$ に微分同相であり，$k>1$ のとき，このような (X,ω) はそもそも存在しないことがわかる．$S^2\times S^2$ の場合はどうだろうか．$a,b>0$ に対し，$S^2\times S^2$ 上のシンプレクティック構造 $\omega_{a,b}$ を

$$\omega_{a,b} = a\,\mathrm{pr}_1^*\omega_{\mathrm{FS}} + b\,\mathrm{pr}_2^*\omega_{\mathrm{FS}}$$

で定義する．ただし，$\mathrm{pr}_i\colon S^2\times S^2\to S^2$ は，第 i 成分への射影である．例えば，任意の $a\in\mathbb{Z}_{>0}$ について，$(S^2\times S^2, \omega_{a,1})$ をシンプレクティック超平面切断として含むシンプレクティック多様体は具体的に構成できる．とくに $a=1$ の場合，$(S^2\times S^2,\omega_{1,1})$ をシンプレクティック超平面切断として含むのは，$\mathbb{CP}^4$ の2次超曲面 $(Q^3, \omega_{\mathrm{FS}}|_{Q^3})$ である．ただし，

$$Q^3 = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4)\in\mathbb{CP}^4 \mid z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0\}.$$

このようなシンプレクティック多様体は $(Q^3,\omega_{\mathrm{FS}}|_{Q^3})$ のみだろうか．微分同相類について，この問いの答えが以下の結果である．

定理 3.3 (Kwon–大場 [KO2]). 6次元閉シンプレクティック多様体 (X,ω) が，$(S^2 \times S^2, \omega_{1,1})$ にシンプレクティック同相なシンプレクティック超平面切断を含むとする．このとき，X は Q^3 に微分同相である．

注意 3.4. すべての組 (a,b) について，$(S^2 \times S^2, \omega_{a,b})$ がシンプレクティック超平面切断として実現される訳ではない．例えば，Kwon 氏と筆者は次の結果を示した [KO1]：a を 5 以上の奇数とすると，$(S^2 \times S^2, \omega_{a,2})$ をシンプレクティック超平面切断として含む 6次元閉シンプレクティック多様体は存在しない．

3.2. 擬正則球面のモジュライ空間

定理3.3の証明では擬正則球面のモジュライ空間を用いる．そこでまずは，擬正則球面の定義を復習する．(X,J) を概複素多様体とする．写像 $u\colon \mathbb{CP}^1 \to X$ が**擬正則**または **J-正則**であるとは，$du \circ \mathrm{i} = J \circ du$ が成り立つときをいう．ここで，i は $\mathbb{CP}^1$ 上の標準的な複素構造である．

さて，いま (X,ω) を，6次元閉シンプレクティック多様体で，$(S^2 \times S^2, \omega_{1,1})$ をシンプレクティック超平面切断 Y として含むものとする．(X,ω) の中の擬正則球面を考えるために，概複素構造を取るのだが，一工夫必要である．$Y \cong S^2 \times S^2$ の X における法バンドルの第1 Chern 類が $[\omega_{1,1}]$ に一致することから，このバンドルは $\mathcal{O}(1,1) := \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_{S^2}(1) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_{S^2}(1)$ に同型であることがわかる．後者を正則直線バンドルと思うと，全空間の可積分な概複素構造と一致するように，Y の近傍で概複素構造が取れる．この概複素構造を全体に拡張し，X 上の ω-tame な概複素構造 J が構成できる．また，$A, B \in H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$ を

$$A = [S^2 \times \{\mathrm{pt}\}], \quad B = [\{\mathrm{pt}\} \times S^2]$$

で定義し，$H_2(X;\mathbb{Z})$ の中の対応する元も，同じ A と B を用いる．さらに，Y から相異なる2点 p_0, p_∞ をとる．

モジュライ空間を定義していく．X の中の J-正則球面のモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}$ を，

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \left\{(u, z_0, z_\infty) \mid u\colon \mathbb{CP}^1 \to X \text{ は } J\text{-正則}, [u(\mathbb{CP}^1)] = A + B, u(z_i) = p_i \ (i = 0, \infty)\right\}$$

で定める．$\mathbb{CP}^1$ の自己同型写像からなる群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)(= \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))$ は，このモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}$ に次のような自由な作用を持つ：$\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ と $(u, z_0, z_\infty) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ に対し，

$$\phi \cdot (u, z_0, z_\infty) = (u \circ \phi^{-1}, \phi(z_0), \phi(z_\infty)).$$

$\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{CP}^1$ にも同様に G が作用する．これでようやく，われわれが考えるべきモジュライ空間が定義できる：

$$\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}}/\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1), \quad \mathcal{M}_z = (\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{CP}^1)/\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1).$$

よく知られた議論から，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_z$ は多様体になる．

命題 3.5. J をジェネリックにとると，モジュライ空間 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_z$ はそれぞれ，(滑らかな) $2n-2$，$2n$ 次元多様体である．

2つのモジュライ空間を観察してみる．まず，$[u, z_0, z_\infty] \in \mathcal{M}$ をとると，これは p_0 と p_∞ を通る X の中の J-正則球面である．Y が J-正則な部分多様体であることから，交

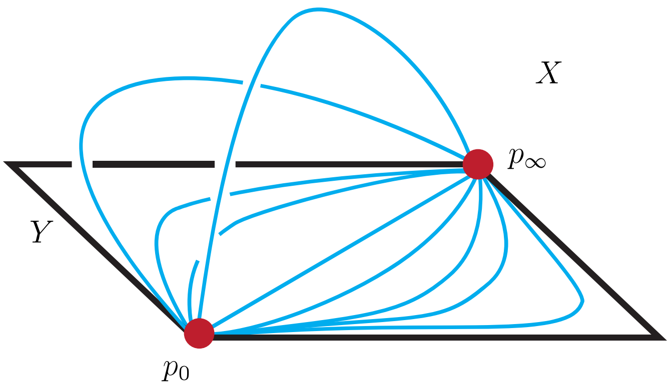

図 3: 擬正則球面の像の様子

叉の正値性により，u と Y の交叉する点での代数的交叉数は常に正であることがわかる．u と Y の代数的交叉数は 2 であることも考慮に入れると，p_0，p_∞ 以外の点で u が Y と交わると，u の像はすべて Y に含まれることがわかる．また，このような J-正則球面を考えると，Lefschetz ファイバー空間で見たところの図と同じようなものが Y 上に現れている (図 3)．実は，この J-正則球面たちは $S^2 \times S^2$ の Lefschetz ペンシルを与える．この事実からわかる重要なことは，J-正則球面の列で，$\mathcal{M}$ の中では収束しないものが存在することである．つまり，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_z$ は**コンパクトでない**．

これまでの擬正則球面のモジュライ空間を用いたシンプレクティック多様体のトポロジーの研究では，モジュライ空間のコンパクト性は不可欠であった．その理由の一つとしては，例えば，モジュライ空間から閉多様体 X への評価写像 $\mathrm{ev}\colon \mathcal{M}_z \to X$, $\mathrm{ev}([u, z_0, z_\infty, z]) = u(z)$ の写像度を考えたいからである．モジュライ空間 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}_z$ の "Gromov" コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}$，$\overline{\mathcal{M}}_z$ がそれぞれ取れる．だが今度は，このコンパクト化が多様体の構造を持つかどうかが一般にはわからない．われわれのモジュライ空間のコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}$，$\overline{\mathcal{M}}_z$ については実は以下のことがわかる．

命題 3.6. モジュライ空間のコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}$ と $\overline{\mathcal{M}}_z$ は位相多様体の構造を持つ．

この命題の証明は [GN] から着想を得ており，ポイントは 2 つある．まずは $\mathcal{M}^{\mathrm{red}} := \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$ の元 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}]$ について，$\boldsymbol{u}$ は 2 つの既約成分しか持たないという点である．さらに，各 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}] \in \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$ に対し，Y の摂動 Y' が存在し，$\boldsymbol{u}$ の各既約成分が Y' とちょうど 2 点，$\boldsymbol{u}$ とは合計で (相異なる) 4 点で交わるものが存在する点である．これらの事実から，擬正則球面のよく知られた貼り合わせの手法を用いて，$\mathcal{M}^{\mathrm{red}}$ の各点のまわりの座標近傍を構成する．

3.3. 定理 3.3 の証明

定理の証明の鍵となるのは，以下の補題である．

補題 3.7. 評価写像 $\mathrm{ev}\colon \overline{\mathcal{M}}_z \to X$ の写像度は 1 である．

補題が成り立つ理由を簡単に説明する．$q_0 \in Y \setminus \{p_0, p_\infty\}$ を任意に取ると，p_0, p_∞, q_0 を通る $\overline{\mathcal{M}}$ の擬正則球面の像は Y に含まれてしまうのであった．いま q_0 を，$\mathrm{ev}(\mathcal{M}^{\mathrm{red}}) \cap Y$ 以外のところからとれば，実は 3 点 p_0, p_∞, q_0 を通る $\overline{\mathcal{M}}$ の元は 1 つしかなく，しかも $\mathcal{M}$ の元である．q_0 に十分近い任意の点 q でも同様に，p_0, p_∞, q を通る $\overline{\mathcal{M}}$ の元がただ 1 つ存在し，それは $\mathcal{M}$ の元であることがわかる．ゆえに，q_0 の X における近傍 U が存在

し，$\mathrm{ev}^{-1}(U) \subset \mathcal{M}_z$ で，$\mathrm{ev}|_U$ は単射になる．U 内に $\mathrm{ev}|_{\mathcal{M}_z}$ の正則値が存在することから，ev の写像度が 1 とわかる．

命題 3.8. シンプレクティック多様体 (X, ω) は単連結である．

証明の概略. 評価写像 $\mathrm{ev}\colon \overline{\mathcal{M}}_z \to X$ は写像度が 1 であるから，基本群への誘導準同型 ev_* は全射である．これより，ev_* が自明な写像であることを示せば命題が証明できる．

モジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_z$ の任意のループ $\ell(t)$ をとる．すると，$\mathcal{M}_z^{\mathrm{red}} = \overline{\mathcal{M}}_z \backslash \mathcal{M}_z$ や $\mathrm{ev}^{-1}(p_0)$，$\mathrm{ev}^{-1}(p_\infty)$ は余次元が 2 であるから，必要なら少し摂動することで，$\ell(t)$ はこれらと交叉を持たないとしてよい．いま，

$$\ell(t) = [u_t, 0, \infty, 1] \in \mathcal{M}_z \subset \overline{\mathcal{M}}_z$$

と書ける．$\mathrm{ev}_*(\ell(t)) = u_t(1)$ であり，これは，定値ループ $t \mapsto u_t(0) = p_0$ とホモトピックである．ゆえに，$\mathrm{ev}_*([\ell]) = [u_t(0)] = 1 \in \pi_1(X)$ となることがわかる． □

上の証明の議論では，$\overline{\mathcal{M}}$ や $\overline{\mathcal{M}}_z$ がコンパクトであることを主に利用した．$\mathcal{M}$ や $\mathcal{M}_z$ が非コンパクトであること，言い換えると，コンパクト化で付け加えられた部分 $\mathcal{M}_z$，$\mathcal{M}_z^{\mathrm{red}}$ にも重要な情報がある．これを用いて以下の補題が得られる．

補題 3.9. (X, ω) のホモロジーに関して以下が成り立つ．

1. $H_3(X; \mathbb{Z}) = 0$;
2. $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で，A により生成される．

証明は省略するが，例えば $H_3(X; \mathbb{Z}) = 0$ は，$\mathcal{M}^{\mathrm{red}}$ が単連結であることを示すことで得られる．モジュライ空間の非コンパクト性を本質的に用いているのである．

定理 3.3 の証明の概略. Wall [Wal] と Jupp [Jup] の結果によれば，向きづけられた滑らかな単連結 6 次元多様体で，ホモロジーに捩れがない場合，その微分同相類は以下で決まることが知られている：ホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z})$，$H^3(X; \mathbb{Z})$；3 重カップ積 $\mu\colon H^2(X; \mathbb{Z})^{\otimes 3} \ni a \otimes b \otimes c \mapsto (a \smile b \smile c)[X] \in \mathbb{Z}$；第 2 Stiefel–Whitney 類 $w_2(TX)$; 第 1 Pontryagin 類 $p_1(TX)$.

さて，命題 3.8 より，X は単連結である．さらに，補題 3.9 と，Poincaré 双対，普遍係数定理を合わせることで，任意の k に対し，$H^k(X; \mathbb{Z}) \cong H^k(Q^3; \mathbb{Z})$ がわかる．

この同型を示すことで，実は $H^2(X; \mathbb{Z})$ や $H_2(X; \mathbb{Z})$，$H_4(X; \mathbb{Z})$ の生成元がわかる．これらは，それぞれ，$[\omega]$，$A = (i \circ j)_*[S^2]$，$[Y]$ で生成されている．ただし，$i\colon S^2 \times S^2 \cong Y \hookrightarrow X$，$S^2 = S^2 \times \{\mathrm{pt}\} \overset{j}{\hookrightarrow} S^2 \times S^2$ は包含写像である．これより，$H^2(X; \mathbb{Z})^{\otimes 3}$ の生成元が $[\omega]^{\otimes 3}$ とわかり，3 重カップ積が X と Q^3 で一致することがわかる．さらに，Y の法バンドルが $\mathcal{O}(1, 1)$ に同型であったことから，i^*TX，$(i \circ j)^*TX$ は Q^3 の場合のバンドルと同型であることがわかる．以上から，$w_2(TX)$ と $p_1(TX)$ も Q^3 のものと一致する． □

謝辞

「第70回トポロジーシンポジウム」にお招きくださいました，世話人の小林毅先生 (奈良女子大学)，鎌田聖一先生 (大阪大学)，茂手木公彦先生 (日本大学)，山下靖先生 (中央大学)，張娟姫先生 (奈良女子大学)，村井紘子先生 (奈良女子大学) に心より御礼を申し上げます．本稿で紹介した研究は科研費 (課題番号: 20K22306，22K13913) の助成を受けています．

参考文献

[CE] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, Symplectic geometry of affine complex manifolds.

[EP] Tolga Etgü and B. Doug Park, *Non-isotopic symplectic tori in the same homology class*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 9, 3739–3750.

[FS] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, *Symplectic surfaces in a fixed homology class*, J. Differential Geom. **52** (1999), no. 2, 203–222.

[Ful] Terry Fuller, *Hyperelliptic Lefschetz fibrations and branched covering spaces*, Pacific J. Math. **196** (2000), no. 2, 369–393.

[GN] Paolo Ghiggini and Klaus Niederkrüger-Eid, *On the symplectic fillings of standard real projective spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **24** (2022), no. 2, Paper No. 37, 18.

[Jup] P. E. Jupp, *Classification of certain* 6*-manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973), 293–300.

[KO1] Myeonggi Kwon and Takahiro Oba, *Rational ruled surfaces as symplectic hyperplane sections*, Trans. Amer. Math. Soc. **376** (2023), no. 7, 4811–4833.

[KO2] M. Kwon and T. Oba, *Symplectic fillings of unit cotangent bundles of spheres and applications*, in preparation.

[Mat] Yukio Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach*, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, pp. 123–148.

[McD1] Dusa McDuff, *The structure of rational and ruled symplectic* 4*-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 679–712.

[McD2] Dusa McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 651–671.

[Oba] Takahiro Oba, *Symplectic submanifolds in dimension* 6 *from hyperelliptic lefschetz fibrations*, preprint arXiv:2302.12146 (2023).

[OS] Burak Ozbagci and András I. Stipsicz, *Noncomplex smooth* 4*-manifolds with genus-*2 *Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 10, 3125–3128.

[PP] Patrick Popescu-Pampu, *On the cohomology rings of holomorphically fillable manifolds*, Singularities II, Contemp. Math., vol. 475, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 169–188.

[Smi] Ivan Smith, *Symplectic submanifolds from surface fibrations*, Pacific J. Math. **198** (2001), no. 1, 197–205.

[ST] Bernd Siebert and Gang Tian, *On hyperelliptic C^∞-Lefschetz fibrations of four-manifolds*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), no. 2, 255–280.

[Wal] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology. V. On certain* 6*-manifolds*, Invent. Math. **1** (1966), 355–374; corrigendum, ibid. **2 (1966), 306**.