

# Riemann surfaces, uniformization theorems, and $\mathbb{C}P^1$ -structures

馬場伸平 (大阪大学大学院理学研究科)\*

## 目 次

1. 導入	1
1.1. Riemann 面の一意化定理と Teichmüller 空間 . . . . .	1
1.2. Bers' simultaneous uniformization theorem . . . . .	2
1.3. 非離散表現と Riemann 面の構造の対応への一般化 . . . . .	2
2. $\mathbb{C}P^1$ 構造	2
2.1. 定義 . . . . .	3
2.1.1. $\mathbb{C}P^1$ 構造の例 . . . . .	3
2.2. $\mathbb{C}P^1$ 構造と変形空間 . . . . .	3
3. Holonomy を共有する $\mathbb{C}P^1$ 構造の組	4
4. 準備	5
4.1. Schwarzian parametrization . . . . .	5
4.2. 2次正則微分と特異点付きの Euclid 構造 . . . . .	5
5. 有界性	6
5.1. Grafting cocycle の近似 . . . . .	6
5.2. Grafting cocycle の構成法 . . . . .	7
5.2.1. Compatible な $\mathbb{C}P^1$ 構造の分解 . . . . .	7
5.3. Grafting cocycle の例 . . . . .	8

本講演では、Riemann 面の構造と曲面の基本群の  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  への準同型写像の関係について話す。特に、準同型写像の空間内の滑らかな部分多様体の交わりを理解することによって、これらの関係を理解する。

## 1. 導入

### 1.1. Riemann 面の一意化定理と Teichmüller 空間

Riemann 面の一意化定理は、20世紀初頭に Poincaré と Koebe によって独立に証明された。この一意化定理により Riemann 面の普遍被覆は、複素平面  $\mathbb{C}$ , 上半平面  $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ , または  $\mathbb{C}P^1$  のいずれかと双正則になっている。また Riemann 面の Euler 標数により、どの曲面と双正則かが定まる。複素平面  $\mathbb{C}$  はと Euclid 平面と、上半平面は双曲平面  $\mathbb{H}^2$  と、 $\mathbb{C}P^1$  は 2次元球面  $S^2$  と等角になっており、被覆変換はそれぞれ曲面の等長変換である。

$S$  を向き付け可能な閉曲面とする。このとき  $S$  上の Riemann 面の構造を  $S$  の isotopy で同値関係を入れたものを、印付き Riemann 面といい、以下そのような Riemann 面の構造を考える。さらに、 $S$  の種数を 2 以上とすると、Euler 標数は負となり、上の関係で、 $S$  上の双曲構造と対応している。双曲平面の向き付けを保つ等長変換群は  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  であるから、以下の微分同相な対応を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ 上の全ての} \\ \text{Riemann 面の構造全体} \end{array} \right\} \xleftarrow{\text{diffeo.}} \left\{ \begin{array}{l} \text{離散で忠実な準同型写像} \\ \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ 全体} \end{array} \right\} / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \quad (1)$$

本研究は科研費 (課題番号:20K03610) の助成を受けたものである。

\* e-mail: [baba@math.sci.osaka-u.ac.jp](mailto:baba@math.sci.osaka-u.ac.jp)

web: <http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~baba/>

ここでは、右側表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  に対して、双曲曲面  $\mathbb{H}^2 / \mathrm{Im} \rho$  が対応する。この対応により、Riemann 面の理論が大きく発展した。

左の Riemann 面の空間は、**Teichüller** 空間と呼ばれ、右側の空間は Fricke 空間と呼ばれるが、この対応により同一視され区別されないことが多い。この講演では  $S$  の向き付けを固定していないので、Teichmüller 空間は 2 つの連結成分をもち、 $T \sqcup T^*$  で表す。 $T$  と  $T^*$  はそれぞれ  $\mathbb{R}^{6g-6}$  と微分同相であり、複素多様体としては、 $T$  と  $T^*$  は反正則になっている。また忠実離散表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  は **Fuchs 表現** と呼ばれる。

### 1.2. Bers' simultaneous uniformization theorem

次に、(1) を複素化した関係を説明する。忠実で離散な準同型写像  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  は、離散群  $\mathrm{Im} \rho$  の作用で普遍的な Jordan 曲線  $\Lambda$  が  $\mathbb{C}P^1$  に存在するとき、**擬 Fuchs 表現** と呼ばれる。幾何群論的には、quasi-isometric embedding になっていることと同値である。よって擬 Fuchs 表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  が与えられたとき、 $\mathbb{C}P^1 \setminus \Lambda$  は位相的には 2 つの開円盤であるから、 $\mathbb{C}P^1 \setminus \Lambda = \Omega^+ \sqcup \Omega^-$  とおく。このとき、離散群  $\mathrm{Im} \rho$  の開円盤  $\Omega^+, \Omega^-$  それぞれの作用は、固定点をもたず真性不連続に作用している。よって  $\Omega^+ / \mathrm{Im} \rho, \Omega^- / \mathrm{Im} \rho$  は向き付けの異なる 2 つの Riemann 面となる。Bers によって 1960 年に証明された同時一意化定理は、以下の複素同型写像を与える ([Ber60])。

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ と同相な向き付けの異なる} \\ \text{Riemann 面の組み} \end{array} \right\} \xleftarrow{\text{bihol.}} \left\{ \begin{array}{l} \text{擬 Fuchs 表現} \\ \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \text{ 全体} \end{array} \right\} / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \quad (2)$$

左側の Riemann 面の組みの空間は、 $T \times T^*$  であり、右側の空間は、**擬 Fuchs 空間**  $QF$  と呼ばれる。21 世紀になって解かれた Density Theorem により、 $QF$  は  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  忠実離散な表現全体の内点集合になっており、その意味で典型的な忠実離散表現と言ってよい。Bers の定理はその後 Thurston によって革命的に発展した 3 次元双曲幾何の重要な基礎となり、ひいては 3 次元の多様体のトポロジーの分類つながっている。

### 1.3. 非離散表現と Riemann 面の構造の対応への一般化

§1.2 の Bers の定理は、measurable Riemann mapping Theorem からの帰結であり、その証明には表現が離散であること、および Riemann 面の向き付けが異なることが本質的に必要である。本講演では、私のプレプリント [Bab21] を元に「離散かつ忠実」という条件、および、「向き付けの異なる」という条件を除いた、対応の設定を導入し、部分的な一般化を与える。

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ と同相な} \\ \text{印付き Riemann 面の組み} \end{array} \right\} \xleftarrow{??} \left\{ \begin{array}{l} \text{準同型写像} \\ \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ 全体} \end{array} \right\} // \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \quad (3)$$

曲面  $S$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造は、Riemann 面上の 2 次正則微分の構造をもち (3) の左側に対応し、またその holonomy は離散とは限らない  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  であり右側に対応する。よって  $\mathbb{C}P^1$  構造を用い上の対応の設定を以下で説明する。

## 2. $\mathbb{C}P^1$ 構造

( $\mathbb{C}P^1$  構造一般の参考文献 [Dum09], [Kap01, §7].)

## 2.1. 定義

リー群  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  は、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  の自己同型群であり、線形分数変換  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

で与えられる。 $F$  を連結な向き付可能で連結な曲面とする。 $F$  上の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造とは  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$  構造である。つまり、 $F$  の開集合を  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  に埋め込む極大の局所座標系であり、座標変換が  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  への作用の制限になっているものである。特に、各の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造は Riemann 面の構造を持つ。

$\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造の同値な定義を大域的な観点から与える。 $\tilde{F}$  を  $F$  の普遍被覆とすると、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造は

- 局所同相写像  $f: \tilde{F} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  と
- 準同型写像  $\rho: \pi_1(F) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$

の組で、 $f$  は  $\rho$ -同変なものである。つまり、任意の  $\gamma \in \pi_1(F)$  に対して  $f\gamma = \rho(\gamma)f$  がなりたつ ([Thu97])。同値類は曲面の isotopy と  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  によって与えられる (つまり、任意の  $\alpha \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  に対して、 $(f, \rho) \sim (\alpha f, \alpha^{-1}\rho\alpha)$ )。局所同相写像  $f$  は **developing map** と呼ばれ、準同型写像  $\rho$  は **holonomy 表現** と呼ばれる。

以下 (§2.1.1) に述べる例では、基本的に developing map が埋め込みまたは、像への被覆写像になっており、また holonomy 表現の像が離散になっている。但し、一般には developing map や holonomy 表現は、そのような性質を持つとは限らない。

### 2.1.1. $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 構造の例

曲率一定の曲面の構造は、自然に  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造を持つ。Euclid 平面  $\mathbb{E}^2$  は  $\mathbb{C}$  と等角に同一視され、その向き付を保つ等長変換群  $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{E}^2$  は自然に  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  の部分群である。また  $\mathbb{H}^2$  は上半平面と同一視され、その向き付を保つ等長変換群  $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{H}^2$  は  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  である。

次に  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  の開集合  $\Omega$  に  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  の離散部分群  $G$  が、固定点を持たず  $\Omega$  に作用するとき、 $\Omega/G$  は  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造を持つ。特に §1.2 で扱った擬 Fuchs 表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  に対して、 $\Omega^+/\mathrm{Im} \rho$ ,  $\Omega^-/\mathrm{Im} \rho$  は  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造を持つ。

## 2.2. $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 構造と変形空間

まず、 $S$  上の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造の空間と  $S$  上の複素構造の空間との対応を考える。 $S$  に向き付を固定してものを  $S^+$ 、その反対に向き付けられたものを  $S^-$  と呼ぶことにし、 $T$  を  $S^+$  の Teichmüller 空間、 $T^*$  を  $S^-$  の Teichmüller 空間とする。

同様に  $P$  を  $S^+$  上の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造全体の空間とする。このとき  $P$  は  $T$  の余接空間と同一視される。同様に  $P^*$  を  $S^-$  上の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造全体の空間とすると、 $P^*$  は  $T^*$  の余接空間と同一視される。ここで  $\psi: P \sqcup P^* \rightarrow T \sqcup T^*$  は、 $S$  上の  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  構造の変形空間から  $S$  上の Riemann 面への射影とすると、ベクトル束の構造を持つ。

次に表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  の空間と対応を考える。 $S$  の  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  指標多様体

$$\{\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})\} // \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$$

は、表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  全体の空間の GIT 商である。この同値類は、ここでは  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  での共役類と思って問題ないが、本講演で扱わない表現に関してはそれより強い同値類となる場合がある。この指標多様体は2つの連結成分をもち、表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  が  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  へ持ち上がるか否かで、どちらの連結成分に含まれるか判別される ([Gol88])。よって  $\chi$  を持ち上られる表現からなる連結成分をすると、 $S$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造の holonomy 表現は、 $\chi$  の滑らかな部分に含まれる。

Holonomy 写像

$$\mathrm{Hol}: P \sqcup P^* \rightarrow \chi$$

は各々の  $\mathbb{C}P^1$  構造  $C = (f, \rho)$  にの holonomy 表現  $\rho$  を与える、つまり  $f$  を忘れる写像である。この対応は局所同相写像であるが、像への被覆写像になっていない。この大域的な複雑さが  $\mathbb{C}P^1$  構造の多くの面白い問いに関連している。Hol の像は、どのような表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  が、 $\mathbb{C}P^1$  構造の holonomy 表現になるかを表している。それは Gallo-Kapovich-Marden [GKM00] によって代数的に特徴づけられ、特にほとんど全ての  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  が holonomy 表現になり、また非離散な holonomy 表現が沢山ある。

### 3. Holonomy を共有する $\mathbb{C}P^1$ 構造の組

$S$  上の同一の holonomy を持つ異なる  $\mathbb{C}P$  構造の組み全体の集合を  $B$  とする。つまり

$$B = \{(C, D) \in (P \sqcup P^*)^2 \mid \mathrm{Hol}(C) = \mathrm{Hol}(D), C \neq D\}$$

とする。このとき、 $C, D$  の順番を変える  $\mathbb{Z}_2$  の作用は、固定点を持たない。 $QF$  は  $B/\mathbb{Z}_2$  の連結成分になっており、 $B$  は  $QF$  の一般化といえる。

$\Delta$  を対角集合  $\{(X, X) \mid X \in T \sqcup T^*\}$  とし、正則写像  $\Psi: B \rightarrow (T \sqcup T^*)^2 \setminus \Delta$  を  $\Psi(C, D) = (\psi(C), \psi(D))$  で定義する。本日の主定理は  $\Psi$  の局所的性質と帯域的性質を与える。

定理 1 ([Bab21, Theorem A])

$$\Psi: B \rightarrow (T \sqcup T^*)^2 \setminus \Delta$$

は完備な局所分岐被覆写像である。

ここで、完備とは道の持ち上げが成り立つことである。局所分岐被覆写像とは、局所的には（解析的な）分岐被覆写像になっていることである。

定理 1 は Bers の定理 (2) の部分的な一般化と言える。特に (1) の完備性から、各々の  $B$  の連結成分  $Q$  に対して、 $\Psi|_Q$  は対応する  $(T \sqcup T^*)^2 \setminus \Delta$  の連結成分への全射性が言える。また、 $\Psi$  は開写像であり、各々の fiber は  $B$  の離散集合である。

Ramification locus は一般には no-where dense な解析的集合であるが、 $\Psi$  に関しては ramification locus の存在がわかっていない。よって  $\Psi$  は連結成分ごとに双正則写像になっていて Bers の定理の真の一般化を与える可能性がある。

さらに定理 1 を使い、Bers の定理の別証明を、measurable Riemann mapping theorem を使わずに与えることができる。まず以下のことがわかる。

- $QF$  は  $B/\mathbb{Z}_2$  のなかで、開かつ閉集合である。

- 対角集合  $\{(X, X^*) \mid X \in T\}$  は  $T \times T^*$  ないの次元が半分の全実部分多様体であり, Morera の定理より  $QF \rightarrow T \times T^*$  はその対角集合上、写像度 1 である。

これと、定理 1 より、 $QF$  が  $T \times T^*$  が写像度が 1 となり、 $QF \rightarrow T \times T^*$  が双正則となる。

## 4. 準備

定理 1 の証明のための予備知識を説明する。

### 4.1. Schwarzian parametrization

(例えば, [Leh87] 参照。)  $X$  を  $S$  上の Riemann 面の構造とし, その普遍被覆を上半平面と等角に同一視する。このとき  $X$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造  $C$  は, その developing map を上半平面からの正則関数と見ることによって Schwarz 微分を取り,  $X$  上の 2 次正則微分  $q$  が得られる。

$$q = \left[ \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right] dz^2.$$

このとき  $(X, q)$  を  $C$  の Schwarzian パラメーターと呼ぶ。

$X$  上の 2 次正則微分全体は複素  $3g - 3$  次元のベクトル空間のなり  $QD(X)$  で表すことにする, よって, Riemann 面  $X$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造全体の空間  $P_X$  は,  $QD(X)$  と同一視できる。Holonomy 写像  $\text{Hol } P \rightarrow \chi$  は, proper ではなく, またほとんど全ての  $\rho \in \chi$  で fiber  $\text{Hol}^{-1}(\rho)$  は加算無限集合である。一方以下の定理が成り立つ。

**定理 2** (Poincare [Poi84], Kapovich [Kap95]) 任意の  $S$  上の Riemann 面の構造  $X$  に対して,  $\text{Hol}$  の  $P_X$  への制限は, 指標多様体  $\chi$  への proper な埋め込みである。

### 4.2. 2 次正則微分と特異点付きの Euclid 構造

(例えば, [FM12] 参照)  $q = \phi dz^2$  を Riemann 面上  $X$  の 2 次正則微分とする。このとき,  $q$  は  $X$  上に特異点付きの Euclid 構造  $E$  をあたえる。 $X$  上の  $q$  の零点では無い点  $u$  を固定する。このとき  $u$  の近くの零点では無い点  $w \in X$  に対して,  $u$  から  $w$  を結ぶ道に沿っての積分

$$\eta(w) = \int_u^w \sqrt{\phi} du$$

により,  $u$  の近傍を  $\mathbb{C}$  の開集合に埋め込むことができる。 $\mathbb{C}$  を自然な Euclid 構造を入れることで,  $u$  の近傍に Euclidean 構造が入り, これを貼り合わせることで  $X$  から  $q$  の零点を除いたものに, Euclidean 構造がはいる。その完備な拡張として,  $q$  の零点  $z$  は Euclid 構造の特異点になるこのとき  $z$  の degree を  $d$  とすると,  $(d/2 + 1)\pi$  の cone angle を持つ。

複素平面  $\mathbb{C}$  は, 虚軸と平行な直線を葉とする葉層構造をもつ。また, この葉層構造に対して横断的な曲線に対して, 実方向の距離を測ることで, 測度を与えることができる。この横断方向に測度がついた葉層構造を **vertical measured foliation** と呼ぶ。

上で  $q$  の零点以外の点の小さい近傍は,  $\mathbb{C}$  の開集合と同一視された。よって,  $\mathbb{C}$  上の vertical measured foliation を引き戻し,  $(X, q)$  上に vertical measured foliation  $V$  を得る。ここで, 零点は, foliation の特異点となっており, 葉が枝分かれている。

$\mathbb{C}$  の実軸と平行な直線による  $\mathbb{C}$  の horizontal measured foliation があり, vertical measured foliation と直交している。同様に  $\mathbb{C}$  の horizontal measured foliation を引き戻すことで  $E$  上に horizontal measured foliation  $H$  がえられ,  $H$  は  $V$  と直交している。

このような特異点付きの Euclid 構造で, 直交する vertical measured foliation と horizontal 持つ曲面を **flat surface** と呼ぶことにする。

## 5. 有界性

$S$  上の Riemann 面の構造を  $X$  とすると、 $X$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造の全体の空間は  $P_X$  で表した。その Holonomy 表現全体  $\text{Hol}(P_X)$  を  $\chi_X$  とおく。このとき定理2により、 $\chi_X$  は、 $\chi$  の次元が半分の滑らかな解析的な部分多様体である。よって、このように得られる部分多様体の交わりを理解することは自然な問題である。

**定理 3** ([Bab21, Theorem 10.1]) 任意の異なる  $X, Y \in \mathcal{T} \sqcup \mathcal{T}^*$  に対して、 $\chi_X \cap \chi_Y$  の各々の連結成分はコンパクトである。

ここで  $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y$  に対して、 $Y$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造  $C_{X,\rho}$  で holonomy 表現が  $\rho$  なものと  $X$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造  $C_{Y,\rho}$  で holonomy 表現が  $\rho$  なものがある。

定理3により、定理1の局所的な性質が従う。

**系 5.1**  $\chi_X \cap \chi_Y$  は離散集合である。さらに  $\Psi$  は、局所分岐被覆である。

### 5.1. Grafting cocycle の近似

定理3の有界性を示すために以下の構成を考える。 $S$  を  $S$  上の、可縮ではない単純閉曲の isotopy 類の集合とする。 $K$  を  $\chi$  内の十分大きい有界集合とし、 $\chi_X \cap \chi_Y \setminus K$  の表現  $\rho$  に対して、整数値関数  $\Gamma_\rho: S \rightarrow \mathbb{Z}$  を幾何学的に作り  $\rho$  に関して連続になるよう構成する (§5.2)。この整数値関数は、grafting (§5.3) という、 $\mathbb{C}P^1$  構造の切り貼りとは密接に関係してとる。直感的には、 $X, Y$  の向き付けが異なる場合は、 $\Gamma_\rho$  は  $C_{X,\rho}$  と  $C_{Y,\rho}$  の「差」を表し、 $X, Y$  の向きづけが異なる場合は、 $C_{X,\rho}$  と  $C_{Y,\rho}$  の「和」をある意味で表している。正確には以下の命題のように、 $\Gamma_\rho$  は  $C_{X,\rho}$  と  $C_{Y,\rho}$  の schwarzian パラメーターから得られる vertical foliations  $V_{X,\rho}, V_{Y,\rho}$  (§4.2) を使って近似できる。

**命題 5.2**  $X, Y$  を  $S$  上の異なる印付き Riemann 面の構造とし、 $X$  と  $Y$  の向きづけが同じであると仮定する。また  $c_1, c_2, \dots, c_n$  を  $S$  上の非可縮な閉曲線とする。このとき、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、十分大きい  $\chi$  の有界集合  $K_\epsilon$  をとると、任意の  $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y \setminus K_\epsilon$  に対して、正定数  $q$  が存在して

$$(1 - \epsilon)\Gamma_\rho(c_i) - q < V_{X,\rho}(c_i) - V_{Y,\rho}(c_i) < (1 + \epsilon)\Gamma_\rho(c_i)$$

が全ての  $i = 1, \dots, n$  に対して成り立つ。

ここで、 $V_{X,\rho}(c_i) - V_{Y,\rho}(c_i)$  は  $c_i$  に与えられる transversal measure を表している。向き付けが異なる場合は符号が変化するが同様の命題がなりたつ。

**命題 5.3**  $X, Y$  を  $S$  上の異なる印付き Riemann 面の構造で向きづけが異なるとする。また  $c_1, c_2, \dots, c_n$  を  $S$  上の非可縮な閉曲線とする。任意の  $\epsilon > 0$  に対して、十分大きい  $\chi$  の有界集合  $K_\epsilon$  をとると、正定数  $q$  が存在して、任意の  $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y \setminus K_\epsilon$  に対して、

$$(1 - \epsilon)\Gamma_\rho(c_i) - q < V_{X,\rho} + V_{Y,\rho} < (1 + \epsilon)\Gamma_\rho(c_i) + q$$

が全ての  $i = 1, \dots, n$  に対して成り立つ。

$\Gamma_\rho$  は、整数値連続関数のため、 $\chi_X \cap \chi_Y$  の連結成分上、変化しない。一方、上の命題 5.2 または命題 5.1 から  $\rho_i \in \chi_X \cap \chi_Y$  が任意のコンパクト集合の外に発散するとき、 $\Gamma_{\rho_i}$  も発散する。よって、 $\chi_X \cap \chi_Y$  の各々の連結成分は有界であり、定理3が言えた。

## 5.2. Grafting cocycle の構成法

$E$  を flat surface とし、 $V$  をその vertical measured foliation,  $H$  をその horizontal measured foliation とする。 $E$  上の曲線  $\ell$  が、区分的に、 $V$  の leaf の線分または  $H$  の leaf の線分からなっていてかつ特異点を含まないとき、staircase(階段状)であるという。Flat structure を持たない曲面上の曲線であっても、このような階段状曲線と微分同相のものを位相的な階段状曲線という。

$\mathbb{R}^3$  の単位球面  $\mathbb{S}^2$  上の丸い円 (round circle) は、 $\mathbb{R}^3$  内の Affine 超平面と  $\mathbb{S}^2$  との交わりとして得られる円である。 $\mathbb{S}^2$  と  $\mathbb{C}P^1$  を等角に同一視することで、 $\mathbb{C}P^1$  に、丸い円およびその線分である円弧を定義できる。このとき  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の作用で、丸い円は円弧であることは保たれる。

$C = (f, \rho)$  を  $\mathbb{C}P^1$  曲面とする。 $C$  上の位相的な staircase 曲線  $s$  とする。 $\tilde{s}$  を  $s$  の普遍被覆として、 $s$  が以下の条件を満たすとき **circular** であるという。

- $s$  が  $\tilde{s}$  の horizontal な線分ならば、 $s$  は  $f$  により  $\mathbb{C}P^1$  上の丸い円  $c$  にはめ込まれる。
- $v$  が  $\tilde{s}$  の vertical な線分ならば、 $h_1, h_2$  を  $v$  と端点を共有する  $\tilde{s}$  の horizontal な線分とし、 $c_1, c_2$  をそれぞれ  $f(h_1), f(h_2)$  を含む  $\mathbb{C}P^1$  上の丸い円とすると
  - $c_1, c_2$  は交わりを持たず、
  - $f|v$  は、 $c_1, c_2$  を境界にもつ  $\mathbb{C}P^1$  内の circular な円筒  $A$  に含まれ、かつ  $f|v$  は  $A$  の自然な丸い円での foliation に横断的である。

### 5.2.1. Compatible な $\mathbb{C}P^1$ 構造の分解

§5.1 の grafting cocycle  $\Gamma_\rho$  は、 $C_{X,\rho}$  と  $C_{Y,\rho}$  を、比較しやすいように circular 階段状の境界を持つ曲面に分解して得られることを説明する。

$\mathcal{F}_1 = (f_1, \rho_1)$  と  $\mathcal{F}_2 = (f_2, \rho_2)$  をそれぞれ circular な階段状境界を持つ曲面  $F$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造とする。この時  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}'$  が以下の条件を満たすならば、 $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}'$  は compatible であるという。

- $\rho_1$  と  $\rho_2$  は  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元で共役 (よって  $\rho_1 = \rho_2$  仮定して良い);
- 任意の  $\mathcal{F}_1$  の境界の頂点  $p_1$  が  $\mathcal{F}_2$  の境界の頂点  $p_2$  に対応するとき、 $f_1(p_1) = f_2(p_2)$ ;
- $h_1$  と  $h_2$  が  $\partial\mathcal{F}_1$  と  $\partial\mathcal{F}_2$  の対応する horizontal な線分ならば、 $f_1(h_1)$  と  $f_2(h_2)$  は、同一の丸い円に含まれる。
- $v_1$  と  $v_2$  を  $\partial\mathcal{F}_1$  と  $\partial\mathcal{F}_2$  の対応する vertical な線分とすると、 $f_1(h_1) = f_2(h_2)$ 。

上の compatible の定義では、特に  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}'$  は同相である。 $\mathcal{F}'$  が同相だが別の階段状の曲面  $F'$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造のとき、 $\mathcal{F}_1$  の horizontal な辺が、 $\mathcal{F}_2$  の 1 点に潰れることを許し、上の条件を見たすとき、 $\mathcal{F}_1$  と  $\mathcal{F}_2$  は semi-compatible であるという。

**定義 5.4**  $S$  の曲面 **train-track** 分解とは、各辺に vertical または horizontal のラベルがついた  $S$  のグラフ  $\gamma$  に、よって  $S$  が内点が変わらない位相的な階段曲線を境界を持つ曲面  $B_1, \dots, B_n$  よって与えられる分解である。これらの階段境界曲面  $B_i$  を branch と呼ぶ。

$\mathbb{C}P^1$  構造  $C$  の曲面 train-track 分解は、各 branch の階段上境界が全て circular であるとき、**circular train-track** 分解という。

**定義 5.5**  $C, C'$  を  $S$  上の  $\mathbb{C}P^1$  構造とし,  $C, C'$  の holonomy 表現が一致すると仮定する. このとき,  $C$  の circular traintrack 分解  $\mathcal{T} = \cup \mathcal{B}_i$  が  $C'$  の circular train-track 分解と compatible  $\mathcal{T}' = \cup \mathcal{B}'_i$  であるとは, 印を保つ連続写像  $C \rightarrow C'$  が  $\mathcal{T}$  の全て branches と  $\mathcal{T}'$  の全て branches が semi-compatible に対応していることである.

**命題 5.6**  $K$  が十分大きい  $\chi$  内の有界集合ならば, 任意の  $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y$  に対して,  $C_{X,\rho}$  と  $C_{Y,\rho}$  の曲面 train-track 分解  $\mathcal{T}_{X,\rho}$  と  $\mathcal{T}_{Y,\rho}$  が存在し,  $C_{X,\rho}$  は  $C_{Y,\rho}$  に semi-compatible になる.

命題 5.6 の分解を使い, それぞれの,  $\mathcal{B}_i$  上に, 整数値の重みを持つ train-track graph を得る. これらをつなぎ合わせることで, 閉曲面  $S$  上に, 整数値の重みを持つ train-track graph を得る. がえられ, それとの幾何学的交点数として  $\Gamma_\rho: S \rightarrow \mathbb{Z}$  を得る.

### 5.3. Grafting cocycle の例

上の grafting cocycle は Goldman による Fuchsian ホロノミーをもつ  $\mathbb{C}P^1$  構造の分類 [Gol87] に密接に関連している.

Holonomy 表現を固定したときに, 対応する  $\mathbb{C}P^1$  構造全体は,  $P$  内の離散集合になっており, その特徴付けは, わかっていない部分も多い. ただ, 忠実離散表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  に対しては  $2\pi$ -grafting という, ある種の切り貼りによって,  $\mathrm{Hol}^{-1}(\rho)$  の特徴づけが完全される. この切りはりは,  $\mathbb{C}P^1$  曲面内の admissible loop と呼ばれる, 特定の性質を満たす輪に沿って, 円筒上の  $\mathbb{C}P^1$  構造を挿入して行われ,  $\mathbb{C}P^1$  は変化するが, holonomy 表現は保たれる. また, admissible loop に沿って,  $2\pi$  の正整数倍の「長さ」の円筒を挿入することができるので, grafting は admissible loop に正整数の重みをつけ表現できる.

**定理 4** (Goldman [Gol87])  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  を忠実離散表現とする. このとき,  $\rho$  を holonomy 表現とする 任意の  $\mathbb{C}P^1$  構造は, 双曲構造  $\mathbb{H}^2 / \mathrm{Im} \rho$  を正整数の重み付きの multiloop に沿って grafting することで得られる. また, この重み付き multiloop は isotopy を除き, 一意に決まる.

この定理のように, より一般に grafting は, 整数値の重みがついた admissible な輪に沿って行われる.  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  を忠実離散表現とする.  $C_1, C_2$  を holonomy が  $\rho$  である  $\mathbb{C}P^1$  構造であるとする. さらに,  $C_1, C_2$  の向きづけが同じであると仮定する. このとき,  $i = 1, 2$  に対して,  $C_i$  は双極構造  $\mathbb{H}^2 / \mathrm{Im} \rho$  を正整数の重みつき multiloop  $M_i$  に沿って grafting して得られる.  $I_{M_i}: S \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を,  $S$  上の単純閉曲線に,  $M$  との重みつき幾何学的交点数を与える関数として定義する.  $I_{M_2} - I_{M_1}: S \rightarrow \mathbb{Z}$  が  $C_1$  と  $C_2$  の差を表しており,  $\Gamma_\rho$  を実現することが適当な設定のもとで言える.

### 参考文献

- [Bab21] Shinpei Baba. Bers' simultaneous uniformization and the intersection of poincare holonomy varieties. Preprint, 2021.
- [Ber60] Lipman Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:94–97, 1960.
- [Dum09] David Dumas. Complex projective structures. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 455–508. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

第68回トポロジーシンポジウム (2021年8月：オンライン開催)

- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [GKM00] Daniel Gallo, Michael Kapovich, and Albert Marden. The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 151(2):625–704, 2000.
- [Gol87] William M. Goldman. Projective structures with Fuchsian holonomy. *J. Differential Geom.*, 25(3):297–326, 1987.
- [Gol88] William M. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93(3):557–607, 1988.
- [Kap95] Michael Kapovich. On monodromy of complex projective structures. *Invent. Math.*, 119(2):243–265, 1995.
- [Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.
- [Leh87] Olli Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*, volume 109 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Poi84] H. Poincaré. Sur les groupes des équations linéaires. *Acta Math.*, 4(1):201–312, 1884.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

# The category of quasi-Polish spaces as a represented space

Matthew de Brecht (Kyoto University)\*

## 1. Introduction

Quasi-Polish spaces are a class of well-behaved countably based  $T_0$ -spaces which include most of the countably based topological spaces that occur in usual mathematical practice, such as Polish spaces (used in functional analysis, topological algebra, probability theory, etc.),  $\omega$ -continuous domains (used in domain theory, programming language semantics, semilattice theory, etc.), and countably based spectral spaces (used in algebraic geometry, logic, duality theory for distributive lattices, etc.). Many theoretical results for these specific subclasses of spaces naturally generalize to all quasi-Polish spaces, such as the descriptive set theory for Polish spaces [2, 4], the properties and characterizations of the upper and lower powerspaces for  $\omega$ -continuous domains [8, 5], and the Stone duality and applications to logic of spectral spaces [10, 1].

Recently, there is growing interest in the effective aspects of quasi-Polish spaces [12, 9, 11, 5]. In this paper, we will go beyond individual spaces and look at the effective aspects of the whole category  $\mathbf{QPol}$  of quasi-Polish spaces. For this purpose, we will use the characterization of quasi-Polish spaces as spaces of ideals introduced in [9] and further studied in [5] to interpret the objects of  $\mathbf{QPol}$  as transitive binary relations on  $\mathbb{N}$ , and then extend this to an interpretation of  $\mathbf{QPol}$  as a represented space. We will then show how to explicitly compute products and equalizers in  $\mathbf{QPol}$ , and demonstrate the computability of several powerspace functors on  $\mathbf{QPol}$ .

## 2. Preliminaries

Quasi-Polish spaces were introduced in [2], and were shown to have multiple equivalent characterizations. For the purposes of this paper we can define quasi-Polish spaces as follows, based on the characterization from [9] (see also [5]).

**Definition 1** *Let  $\prec$  be a transitive relation on  $\mathbb{N}$ . A subset  $I \subseteq \mathbb{N}$  is an ideal (with respect to  $\prec$ ) if and only if:*

1.  $I \neq \emptyset$ , ( $I$  is non-empty)
2.  $(\forall a \in I)(\forall b \in \mathbb{N})(b \prec a \Rightarrow b \in I)$ , ( $I$  is a lower set)
3.  $(\forall a, b \in I)(\exists c \in I)(a \prec c \& b \prec c)$ . ( $I$  is directed)

*The collection  $\mathbf{I}(\prec)$  of all ideals has the topology generated by basic open sets of the form  $[n]_{\prec} = \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid n \in I\}$ . A space is quasi-Polish if and only if it is homeomorphic to  $\mathbf{I}(\prec)$  for some transitive relation  $\prec$  on  $\mathbb{N}$ . □*

We often apply the above definition to other countable sets with the implicit assumption that it has been suitably encoded as a subset of  $\mathbb{N}$ . Spaces of the form  $\mathbf{I}(\prec)$  for a computably enumerable (c.e.) relation  $\prec$  on  $\mathbb{N}$  provide an effective interpretation of quasi-Polish spaces, which were called *precomputable quasi-Polish spaces* in [9], and are equivalent to the *computable quasi-Polish spaces* in [12] (see also [11]).

---

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K11166.

\* e-mail: matthew@i.h.kyoto-u.ac.jp

Let  $\prec_S$  and  $\prec_T$  be transitive relations on  $\mathbb{N}$ . Any subset  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  can be viewed as a *code* for a partial function  $\ulcorner R \urcorner : \subseteq \mathbf{I}(\prec_S) \rightarrow \mathbf{I}(\prec_T)$  by defining

$$\ulcorner R \urcorner(I) = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in I) \langle m, n \rangle \in R\}$$

for each  $I \in \mathbf{I}(\prec_S)$ . It was shown in [5] that a total function  $f: \mathbf{I}(\prec_S) \rightarrow \mathbf{I}(\prec_T)$  is continuous (computable) if and only if there is a (c.e.) code  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  such that  $f = \ulcorner R \urcorner$ .

**Example:** Let  $(X, d)$  be a separable metric space. Fix a countable dense subset  $D \subseteq X$ , and define a transitive relation  $\prec$  on  $D \times \mathbb{N}$  as

$$\langle x, n \rangle \prec \langle y, m \rangle \iff d(x, y) < 2^{-n} - 2^{-m}.$$

Then  $\mathbf{I}(\prec)$  is homeomorphic to the completion of  $(X, d)$  (see [5]). □

Let  $\mathbb{S} = \{\perp, \top\}$  be the Sierpinski space, where the singleton  $\{\top\}$  is open but not closed.  $\mathbb{S}$  is the simplest example of a non-Hausdorff  $T_0$ -space. It is well known that every countably based  $T_0$ -space can be embedded into the product space  $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ .

**Example:** Let  $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$  denote the set of finite subsets of  $\mathbb{N}$ , and let  $\subseteq$  be the usual subset relation on  $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ . Then  $\mathbf{I}(\subseteq)$  is homeomorphic to  $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ . □

Given a topological space  $X$ , we write  $\mathbf{O}(X)$  for the set of open subsets of  $X$ . We view  $\mathbf{O}(X)$  as being a topological space by equipping it with the Scott-topology.

A *represented space* is a tuple  $(X, \delta)$ , where  $X$  is a set and  $\delta : \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$  is a partial surjective function from Baire space to  $X$ . Given represented spaces  $(X, \delta)$  and  $(Y, \rho)$ , a function  $f: X \rightarrow Y$  is *continuous* (*computable*) if there exists a continuous (computable) partial function  $F : \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  such that  $f \circ \delta = \rho \circ F$ . Every countably based space can be viewed as a represented space by equipping it with an *admissible representation*, and then a function between countably based spaces is continuous in the sense defined here if and only if it is continuous in the topological sense. In the case of a space of the form  $\mathbf{I}(\prec)$ , an admissible representation can be viewed as representing each ideal  $I \in \mathbf{I}(\prec)$  by enumerating its elements, which is formally defined as the function  $\delta : \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{I}(\prec)$  with

$$\delta(p) = I \iff I = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N}) p(m) = n\} \in \mathbf{I}(\prec).$$

See [14] for more on admissible representations, and see [13] for more on represented spaces.

### 3. The category QPol

We represent the category of quasi-Polish spaces by the tuple  $\mathbf{QPol} = (\mathbf{Obj}, \mathbf{Mor}, s, t, i, \circ)$  consisting of the following data:

- **Obj** (objects) is the  $\mathbf{\Pi}_2^0$ -subspace of  $\mathbb{S}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  of transitive relations. Each element  $\prec$  of **Obj** is interpreted as the space of ideals  $\mathbf{I}(\prec)$ .
- **Mor** (morphisms) is the represented space constructed as follows. Let  $\mathcal{M}$  be the  $\mathbf{\Pi}_1^1$ -subspace of  $\mathbb{S}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \times \mathbf{Obj} \times \mathbf{Obj}$  of all triples  $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$  such that  $\ulcorner R \urcorner : \subseteq \mathbf{I}(\prec_S) \rightarrow \mathbf{I}(\prec_T)$  is a total function, i.e.

$$(\forall I \in \mathbf{I}(\prec_S)) \ulcorner R \urcorner(I) \in \mathbf{I}(\prec_T).$$

Define an equivalence relation  $\equiv$  on  $\mathcal{M}$  as  $\langle R_1, \prec_{S_1}, \prec_{T_1} \rangle \equiv \langle R_2, \prec_{S_2}, \prec_{T_2} \rangle$  if and only if  $\prec_{S_1} = \prec_{S_2}$  and  $\prec_{T_1} = \prec_{T_2}$  and  $(\forall I \in \mathbf{I}(\prec_{S_1})) \ulcorner R_1 \urcorner(I) = \ulcorner R_2 \urcorner(I)$  (extensional equality of functions).  $\mathbf{Mor}$  is then defined to be the quotient (in the category of represented spaces) of  $\mathcal{M}$  by  $\equiv$ . For convenience, in the following our notation will treat  $\mathbf{Mor}$  as if it is  $\mathcal{M}$  since most of our constructions will respect the equivalence relation  $\equiv$  (with the notable exception of equalizers; see below). However, the formal definition as a quotient is necessary when one works with universal constructions in category theory, such as products, which requires certain morphisms to be determined uniquely.

- $s: \mathbf{Mor} \rightarrow \mathbf{Obj}$  (source) is the projection sending  $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$  to  $\prec_S$ .
- $t: \mathbf{Mor} \rightarrow \mathbf{Obj}$  (target) is the projection sending  $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$  to  $\prec_T$ .
- $i: \mathbf{Obj} \rightarrow \mathbf{Mor}$  (identity) is the function sending  $\prec$  to  $\langle =_{\mathbb{N}}, \prec, \prec \rangle$ .
- $\circ: \subseteq \mathbf{Mor} \times \mathbf{Mor} \rightarrow \mathbf{Mor}$  (composition) is the partial computable function with domain

$$\text{dom}(\circ) = \{ \langle g, f \rangle \in \mathbf{Mor} \times \mathbf{Mor} \mid s(g) = t(f) \}$$

and which is defined for  $f = \langle R_f, \prec_S, \prec \rangle$  and  $g = \langle R_g, \prec, \prec_T \rangle$  as

$$\begin{aligned} R &= \{ \langle m, n \rangle \mid (\exists p \in \mathbb{N}) [\langle m, p \rangle \in R_f \ \& \ \langle p, n \rangle \in R_g] \}, \\ g \circ f &= \langle R, \prec_S, \prec_T \rangle. \end{aligned}$$

It is easy to verify that  $\ulcorner R \urcorner(I) = \ulcorner R_g \urcorner(\ulcorner R_f \urcorner(I))$ , hence composition of total functions yields a total function.

It is straightforward to check that  $\mathbf{QPol}$  satisfies the axioms of a category:

- $s(g \circ f) = s(f)$  and  $t(g \circ f) = t(g)$ ,
- $s(i(\prec)) = \prec$  and  $t(i(\prec)) = \prec$ ,
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  when the compositions  $h \circ g$  and  $g \circ f$  are defined,
- if  $s(f) = \prec_S$  and  $t(f) = \prec_T$  then  $i(\prec_T) \circ f = f = f \circ i(\prec_S)$ .

See [1] for related work on topological groupoids. Note that  $\mathbf{Obj}$  is a quasi-Polish space but  $\mathbf{Mor}$  is not, and the fact that  $\mathbf{QPol}$  is not cartesian closed suggests there is no natural interpretation of  $\mathbf{Mor}$  as a quasi-Polish space. In the next two subsections we show how to compute products and equalizers in  $\mathbf{QPol}$ .

### 3.1. Products and coproducts

Countable products in  $\mathbf{QPol}$  can be defined as a computable map  $\Pi: \mathbf{Obj}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{Obj}$  by defining  $\Pi(\varphi)$  to be the relation  $\prec_{\Pi}$  on  $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$  defined as

$$\sigma \prec_{\Pi} \tau \iff \text{len}(\sigma) < \text{len}(\tau) \ \& \ (\forall i < \text{len}(\sigma)) \sigma(i) \prec_i \tau(i),$$

where  $\prec_i$  is the relation given by  $\varphi(i)$ . There is a uniform projection map  $p: \mathbf{Obj}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{Mor}^{\mathbb{N}}$  defined as  $p(\varphi)(i) = \langle \{ \langle \sigma, n \rangle \mid i < \text{len}(\sigma) \ \& \ \sigma(i) = n \}, \Pi(\varphi), \varphi(i) \rangle$ , which is the projection map from  $\Pi(\varphi)$  to  $\varphi(i)$ .

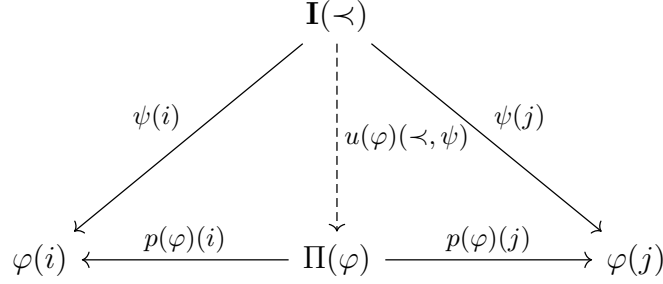
For  $\varphi \in \mathbf{Obj}^{\mathbb{N}}$ , there is a partial computable function  $u(\varphi) : \subseteq \mathbf{Obj} \times \mathbf{Mor}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{Mor}$  with domain

$$\text{dom}(u(\varphi)) = \{\langle \prec, \psi \rangle \mid (\forall i \in \mathbb{N}) [s(\psi(i)) = \prec \ \& \ t(\psi(i)) = \varphi(i)]\}$$

defined as

$$u(\varphi)(\prec, \psi) = \langle \{\langle m, \sigma \rangle \mid (\forall i < \text{len}(\sigma)) (\exists p \in \mathbb{N}) [\langle p, \sigma(i) \rangle \in \psi(i) \ \& \ p \prec m]\}, \prec, \Pi(\varphi) \rangle$$

which demonstrates the universality of the product in a uniform way<sup>1</sup>.



One can also define binary products, binary coproducts, and countable coproducts, but we leave the definitions to the reader as an exercise.

### 3.2. Equalizers

We can compute equalizers in  $\mathbf{QPol}$  as a partial multivalued function  $e : \subseteq \mathbf{Mor} \times \mathbf{Mor} \rightrightarrows \mathbf{Mor}$  with

$$\begin{aligned} \text{dom}(e) &= \{\langle f, g \rangle \in \mathbf{Mor} \times \mathbf{Mor} \mid \langle s(f), t(f) \rangle = \langle s(g), t(g) \rangle\} \\ e(f, g) &= \langle R_E, \prec_E, s(f) \rangle \end{aligned}$$

where

$$R_E = \{\langle \langle \{n\}, p \rangle, n \rangle \mid n, p \in \mathbb{N}\}$$

and for  $F, G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$  and  $p, q \in \mathbb{N}$  we set  $\langle F, p \rangle \prec_E \langle G, q \rangle$  if all of the following hold:

1.  $p < q$
2.  $F \subseteq G$
3.  $G \neq \emptyset$
4.  $(\forall m \leq p) [(\exists n \in F) m \prec_S n] \Rightarrow m \in G$
5.  $(\forall a, b \in F) (\exists c \in G) [a \prec_S c \ \& \ b \prec_S c]$
6.  $(\forall n \leq p) [(\exists m_1 \in F) \langle m_1, n \rangle \in R_f^{(p)}] \Rightarrow (\exists m_2 \in G) \langle m_2, n \rangle \in R_g$
7.  $(\forall n \leq p) [(\exists m_1 \in F) \langle m_1, n \rangle \in R_g^{(p)}] \Rightarrow (\exists m_2 \in G) \langle m_2, n \rangle \in R_f$

<sup>1</sup>For the difficult direction of the proof that  $\psi(i) = p(\varphi)(i) \circ u(\varphi)(\prec, \psi)$  for each  $i \in \mathbb{N}$ , if we choose any  $j \in \mathbb{N}$  and  $n_i \in \psi(i)(I)$  for each  $i \leq j$ , then there must exist  $p_i \in I$  with  $\langle p_i, n_i \rangle \in \psi(i)$ . Let  $m$  be a  $\prec$ -upper bound of  $\{p_i \mid i \leq j\}$  in  $I$  and set  $\sigma(i) = n_i$  for  $i \leq j$ . Then  $\langle m, \sigma \rangle \in u(\varphi)(\prec, \psi)$ , hence  $n_i \in p(\varphi)(i)(u(\varphi)(\prec, \psi)(I))$  for each  $i \leq j$ .

where  $\prec_S$  is the relation corresponding to  $s(f)$ ,  $R_f$  is a code for  $f$ , and  $R_f^{(p)}$  is the set that is enumerated within the first  $p$  time steps of a given presentation of  $R_f$  (and similarly for  $g$ ,  $R_g$ , and  $R_g^{(p)}$ ). It is straightforward to check that  $\prec_E$  is transitive. Since the relation  $\prec_E$  in  $e(f, g)$  depends on the codes  $R_f$  and  $R_g$  and their presentations, the output of  $e$  is multivalued.

There is a partial computable function  $u : \subseteq \mathbf{Mor} \rightarrow \mathbf{Mor}$  that demonstrates the universality of equalizers in a uniform way, which has domain

$$\text{dom}(u) = \{h \in \mathbf{Mor} \mid t(h) = s(f) \ \& \ f \circ h = g \circ h\}$$

and is defined as  $u(h) = \langle R, s(h), \prec_E \rangle$ , where

$$R = \{\langle m, \langle F, p \rangle \rangle \mid p \in \mathbb{N} \ \& \ (\forall n \in F)(\exists \langle m_0, n \rangle \in R_h) m_0 \prec m\}$$

and  $R_h$  is a code for  $h$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z & & & \\
 & \downarrow u(h) & \searrow h & & \\
 \mathbf{I}(\prec_E) & \xleftarrow{e(f, g)} & X & \xrightleftharpoons[f]{f} & Y
 \end{array}$$

## 4. Functors

A (computable) functor on  $\mathbf{QPol}$  is a pair  $F = (F_{\mathbf{Obj}}, F_{\mathbf{Mor}})$  of (computable) functions  $F_{\mathbf{Obj}}: \mathbf{Obj} \rightarrow \mathbf{Obj}$  and  $F_{\mathbf{Mor}}: \mathbf{Mor} \rightarrow \mathbf{Mor}$  satisfying

- $F_{\mathbf{Obj}} \circ s = s \circ F_{\mathbf{Mor}}$ ,
- $F_{\mathbf{Obj}} \circ t = t \circ F_{\mathbf{Mor}}$ ,
- $F_{\mathbf{Mor}} \circ i = i \circ F_{\mathbf{Obj}}$ , and
- $F_{\mathbf{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathbf{Mor}}(g) \circ F_{\mathbf{Mor}}(f)$  for all composable  $f, g \in \mathbf{Mor}$ .

In the following subsections we show how to construct the lower, upper, and valuation powerspace functors on  $\mathbf{QPol}$ . The double powerspace functor, which maps  $X$  to  $\mathbf{O}(\mathbf{O}(X))$ , is obtained by composing the lower and upper powerspace functors [8].

### 4.1. Lower powerspace functor

Given a topological space  $X$ , the *lower powerspace*  $\mathbf{A}(X)$  is the set of all closed subsets of  $X$  with the lower Vietoris topology, which is generated by open sets of the form

$$\diamond U = \{A \in \mathbf{A}(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$$

for open  $U \in \mathbf{O}(X)$ . Given a continuous function  $f: X \rightarrow Y$ , define  $\mathbf{A}(f): \mathbf{A}(X) \rightarrow \mathbf{A}(Y)$  as

$$\mathbf{A}(f)(A) = Cl_Y(\{f(x) \mid x \in A\})$$

for each  $A \in \mathbf{A}(X)$ , where  $Cl_Y(\cdot)$  is the closure operator of  $Y$ . It was shown in [8] that  $\mathbf{A}(\cdot)$  preserves quasi-Polish spaces, hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces.

We represent the lower powerspace functor as a computable functor  $(\mathbf{A}_{\text{Obj}}, \mathbf{A}_{\text{Mor}})$  on  $\mathbf{QPol}$  as follows. For each element  $\prec$  of  $\text{Obj}$ , define  $\prec_L$  on  $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$  as

$$A \prec_L B \iff (\forall a \in A)(\exists b \in B) a \prec b.$$

For each element  $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$  of  $\text{Mor}$ , define

$$R_L = \{ \langle F, G \rangle \mid (\forall n \in G)(\exists m \in F) \langle m, n \rangle \in R \}.$$

Finally, define the functor  $(\mathbf{A}_{\text{Obj}}, \mathbf{A}_{\text{Mor}})$  on  $\mathbf{QPol}$  as

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{Obj}}(\prec) &= \prec_L \\ \mathbf{A}_{\text{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle) &= \langle R_L, \mathbf{A}_{\text{Obj}}(\prec_S), \mathbf{A}_{\text{Obj}}(\prec_T) \rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that  $(\mathbf{A}_{\text{Obj}}, \mathbf{A}_{\text{Mor}})$  is equivalent to the lower powerspace functor. It was shown in [5] that  $\mathbf{I}(\prec_L)$  and  $\mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$  are computably homeomorphic for every transitive relation  $\prec$  on  $\mathbb{N}$ , which proves that  $\mathbf{A}_{\text{Obj}}$  behaves properly on objects. For  $F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ , the basic open subset  $[F]_{\prec_L}$  of  $\mathbf{I}(\prec_L)$  corresponds to the basic open subset  $\bigcap_{m \in F} \diamond[m]_{\prec}$  of  $\mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$ . Explicitly, there are homeomorphisms  $f_L: \mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec)) \rightarrow \mathbf{I}(\prec_L)$  and  $g_L: \mathbf{I}(\prec_L) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$  defined as

$$\begin{aligned} f_L(A) &= \{ G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid (\forall n \in G)(\exists I \in A) n \in I \} \\ g_L(J) &= \{ I \in \mathbf{I}(\prec) \mid (\forall m \in I)(\exists F \in J) m \in F \}. \end{aligned}$$

To show that  $\mathbf{A}_{\text{Mor}}$  behaves properly on morphisms, fix a code  $R$  for a total function  $\ulcorner R \urcorner: \mathbf{I}(\prec) \rightarrow \mathbf{I}(\square)$ , and we will prove  $\ulcorner R_L \urcorner = f_L \circ \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_L$ . Given  $J \in \mathbf{I}(\prec_L)$ , we clearly have  $G \in \ulcorner R_L \urcorner(J)$  if and only if

$$(\exists F \in J)(\forall n \in G)(\exists m \in F) \langle m, n \rangle \in R.$$

On the other hand,  $G \in f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J))) n \in I \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in g_L(J)) n \in \ulcorner R \urcorner(I) \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in g_L(J)) (\exists m \in I) \langle m, n \rangle \in R \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists m \in \mathbb{N}) [g_L(J) \cap [m]_{\prec} \neq \emptyset \ \& \ \langle m, n \rangle \in R] \\ &\iff (\exists F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))(\forall n \in G)(\exists m \in F) [g_L(J) \cap [m]_{\prec} \neq \emptyset \ \& \ \langle m, n \rangle \in R]. \end{aligned}$$

It follows that  $\ulcorner R_L \urcorner(J) \subseteq f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$ . Conversely, if  $G \in f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$ , then there is  $H \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$  and  $h: G \rightarrow H$  such that

$$(\forall n \in G) [g_L(J) \cap [h(n)]_{\prec} \neq \emptyset \ \& \ \langle h(n), n \rangle \in R].$$

Set  $F = \{h(n) \mid n \in H\}$ . Then  $F \in J$  by Lemma 7 of [5], and

$$(\forall n \in G)(\exists m \in F) \langle m, n \rangle \in R,$$

hence  $G \in \ulcorner R_L \urcorner(J)$ . Therefore,  $\ulcorner R_L \urcorner = f_L \circ \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_L$ .

## 4.2. Upper powerspace functor

Given a topological space  $X$ , the *upper powerspace*  $\mathbf{K}(X)$  is the set of all saturated compact subsets of  $X$  with the upper Vietoris topology, which is generated by open sets of the form

$$\square U = \{K \in \mathbf{K}(X) \mid K \subseteq U\}$$

for  $U \in \mathbf{O}(X)$ . Given a continuous function  $f: X \rightarrow Y$ , define  $\mathbf{K}(f): \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(Y)$  as

$$\mathbf{K}(f)(K) = \text{Sat}_Y(\{f(x) \mid x \in K\})$$

for each  $K \in \mathbf{K}(X)$ , where  $\text{Sat}_Y(\cdot)$  is the saturation operator of  $Y$  (i.e.,  $\text{Sat}_Y(S) = \bigcap \{U \in \mathbf{O}(Y) \mid S \subseteq U\}$  for each  $S \subseteq Y$ ). It was shown in [8] that  $\mathbf{K}(\cdot)$  preserves quasi-Polish spaces, hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces.

We represent the upper powerspace functor as a computable functor  $(\mathbf{K}_{\text{Obj}}, \mathbf{K}_{\text{Mor}})$  on  $\text{QPol}$  as follows. For each element  $\prec$  of  $\text{Obj}$ , define  $\prec_U$  on  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$  as

$$A \prec_U B \iff (\forall b \in B)(\exists a \in A) a \prec b.$$

For each element  $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$  of  $\text{Mor}$ , define

$$R_U = \{\langle F, G \rangle \mid (\forall m \in F)(\exists n \in G) \langle m, n \rangle \in R\}.$$

Finally, define the functor  $(\mathbf{K}_{\text{Obj}}, \mathbf{K}_{\text{Mor}})$  on  $\text{QPol}$  as

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{Obj}}(\prec) &= \prec_U \\ \mathbf{K}_{\text{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle) &= \langle R_U, \mathbf{K}_{\text{Obj}}(\prec_S), \mathbf{K}_{\text{Obj}}(\prec_T) \rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that  $(\mathbf{K}_{\text{Obj}}, \mathbf{K}_{\text{Mor}})$  is equivalent to the upper powerspace functor. It was shown in [5] that  $\mathbf{I}(\prec_U)$  and  $\mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$  are computably homeomorphic for every transitive relation  $\prec$  on  $\mathbb{N}$ , which proves that  $\mathbf{K}_{\text{Obj}}$  behaves properly on objects. For  $F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ , the basic open subset  $[F]_{\prec_U}$  of  $\mathbf{I}(\prec_U)$  corresponds to the basic open subset  $\square \bigcup_{m \in F} [m]_{\prec}$  of  $\mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$ . Explicitly, there are homeomorphisms  $f_U: \mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec)) \rightarrow \mathbf{I}(\prec_U)$  and  $g_U: \mathbf{I}(\prec_U) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$  defined as

$$\begin{aligned} f_U(K) &= \{G \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \mid (\forall I \in K)(\exists n \in G) n \in I\} \\ g_U(J) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid (\forall F \in J)(\exists m \in I) m \in F\}. \end{aligned}$$

To show that  $\mathbf{K}_{\text{Mor}}$  behaves properly on morphisms, fix a code  $R$  for a total function  $\ulcorner R \urcorner: \mathbf{I}(\prec) \rightarrow \mathbf{I}(\square)$ , and we will prove  $\ulcorner R_U \urcorner = f_U \circ \mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_U$ . Given  $J \in \mathbf{I}(\prec_U)$ , we clearly have  $G \in \ulcorner R_U \urcorner(J)$  if and only if

$$(\exists F \in J)(\forall m \in F)(\exists n \in G) \langle m, n \rangle \in R.$$

On the other hand,  $G \in f_U(\mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner)(g_U(J)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall I \in \mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner)(g_U(J)))(\exists n \in G) n \in I \\ &\iff (\forall I \in g_U(J))(\exists n \in G) n \in \ulcorner R \urcorner(I) \\ &\iff (\forall I \in g_U(J))(\exists n \in G)(\exists m \in I) \langle m, n \rangle \in R \\ &\iff g_U(J) \subseteq \bigcup_{m \in S} [m]_{\prec}, \text{ where } S = \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in G) \langle m, n \rangle \in R\} \\ &\iff (\exists F \in J) F \subseteq \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in G) \langle m, n \rangle \in R\} \\ &\iff (\exists F \in J)(\forall m \in F)(\exists n \in G) \langle m, n \rangle \in R, \end{aligned}$$

where the fifth equivalence follows from Lemma 9 of [5]. Therefore,  $\ulcorner R_U \urcorner = f_U \circ \mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_U$ .

### 4.3. Valuation powerspace functor

Let  $\overline{\mathbb{R}}_+$  denote the positive extended reals (i.e.,  $[0, \infty]$ ) with the Scott-topology induced by the usual order. A *valuation* on a topological space  $X$  is a continuous function  $\nu: \mathbf{O}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  satisfying:

1.  $\nu(\emptyset) = 0$ , and (strictness)
2.  $\nu(U) + \nu(V) = \nu(U \cup V) + \nu(U \cap V)$ . (modularity)

The *valuation powerspace* on  $X$  is the set  $\mathbf{V}(X)$  of all valuations on  $X$  with the *weak topology*, which is generated by subbasic opens of the form

$$\langle U, q \rangle := \{\nu \in \mathbf{V}(X) \mid \nu(U) > q\}$$

with  $U \in \mathbf{O}(X)$  and  $q \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{\infty\}$ . Given a continuous function  $f: X \rightarrow Y$ , define  $\mathbf{V}(f): \mathbf{V}(X) \rightarrow \mathbf{V}(Y)$  as

$$\mathbf{V}(f)(\nu) = \lambda U \in \mathbf{O}(Y). \nu(f^{-1}(U))$$

for each  $\nu \in \mathbf{V}(X)$ .

$\mathbf{V}(\cdot)$  preserves quasi-Polish spaces (see [6]), hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces. Every valuation on a quasi-Polish space can be extended to a Borel measure [7], and this extension is unique if the valuation is locally finite [3]. Conversely, it clear that the restriction of a Borel measure to the open sets is a valuation. In particular, there is a bijection between probabilistic valuations (i.e., valuations satisfying  $\nu(X) = 1$ ) and probabilistic Borel measures on quasi-Polish spaces.

We represent the valuation powerspace functor as a computable functor  $(\mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathbf{Mor}})$  on  $\mathbf{QPol}$  as follows. Let  $\mathcal{B}$  be the (countable) set of all partial functions  $r: \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$  such that  $\text{dom}(r)$  is finite, where  $\mathbb{Q}_{>0}$  is the set of rational numbers strictly larger than zero. For each element  $\prec$  of  $\mathbf{Obj}$ , define  $\prec_V$  on  $\mathcal{B}$  as  $r \prec_V s$  if and only if

$$\sum_{b \in F} r(b) < \sum_{c \in \uparrow F \cap \text{dom}(s)} s(c)$$

for every non-empty  $F \subseteq \text{dom}(r)$ , where  $\uparrow F = \{c \in \mathbb{N} \mid (\exists b \in F) b \prec c\}$ .

For each element  $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$  of  $\mathbf{Mor}$ , define

$$R_V = \left\{ \langle r, s \rangle \left| (\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow \sum_{a \in A_{G,r}^R} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \right. \right\}$$

where

$$A_{G,r}^R = \{a \in \text{dom}(r) \mid (\exists a_0 \in \mathbb{N})(\exists b \in G) [a_0 \prec a \ \& \ \langle a_0, b \rangle \in R]\}.$$

Finally, define the functor  $(\mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathbf{Mor}})$  on  $\mathbf{QPol}$  as

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}(\prec) &= \prec_V \\ \mathbf{V}_{\mathbf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle) &= \langle R_V, \mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}(\prec_T) \rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that  $(\mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathbf{Mor}})$  is equivalent to the valuations powerspace functor. It was shown in [6] that  $\mathbf{I}(\prec_V)$  and  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec))$  are computably homeomorphic for every transitive relation  $\prec$  on  $\mathbb{N}$ , which proves that  $\mathbf{V}_{\mathbf{Obj}}$  behaves properly on objects. Explicitly, there are homeomorphisms  $f_V: \mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec)) \rightarrow \mathbf{I}(\prec_V)$  and  $g_V: \mathbf{I}(\prec_V) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec))$

defined as

$$f_V(\nu) = \left\{ s \in \mathcal{B} \mid (\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow \nu \left( \bigcup_{b \in G} [b]_{\prec} \right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \right\},$$

$$g_V(I) = \lambda U. \bigvee \left\{ \sum_{a \in \text{dom}(r)} r(a) \mid r \in I \text{ and } \bigcup_{a \in \text{dom}(r)} [a]_{\prec} \subseteq U \right\}.$$

To show that  $\mathbf{V}_{\text{Mor}}$  behaves properly on morphisms, fix a code  $R$  for a total function  $\ulcorner R \urcorner: \mathbf{I}(\prec) \rightarrow \mathbf{I}(\sqsubset)$ , and we will prove  $\ulcorner R_V \urcorner = f_V \circ \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_V$ . Given  $I \in \mathbf{I}(\prec_V)$ , we clearly have  $s \in \ulcorner R_V \urcorner(I)$  if and only if

$$(\exists r \in I)(\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow \sum_{a \in A_{G,r}^R} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right].$$

Next we consider  $f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$ . As mentioned after the proof of Theorem 13 in [6], if  $S \subseteq \mathbb{N}$  then

$$g_V(I) \left( \bigcup_{a \in S} [a]_{\prec} \right) = \bigvee \left\{ \sum_{a \in \text{dom}(r)} r(a) \mid r \in I \text{ and } (\forall a \in \text{dom}(r))(\exists a_0 \in S) a_0 \prec a \right\}.$$

It follows that for any  $q \in \mathbb{R}$ , we have  $g_V(I) \left( \bigcup_{\substack{b \in G \\ \langle a, b \rangle \in R}} [a]_{\prec} \right) > q$  if and only if there is  $r \in I$  such that  $\sum_{a \in \text{dom}(r)} r(a) > q$  and

$$(\forall a \in \text{dom}(r))(\exists a_0 \in \mathbb{N})(\exists b \in G) [a_0 \prec a \ \& \ \langle a_0, b \rangle \in R]. \quad (1)$$

As shown in Lemma 5 of [6], if  $r \in I$  and  $A \subseteq \text{dom}(r)$ , then the restriction  $r|_A$  is also in  $I$ . In particular, for any  $r \in I$ , the restriction  $r' = r|_{A_{G,r}^R}$  is also in  $I$ , and  $r'$  automatically satisfies (1) with  $r'$  in place of  $r$ . Therefore,

$$g_V(I) \left( \bigcup_{\substack{b \in G \\ \langle a, b \rangle \in R}} [a]_{\prec} \right) > q \iff (\exists r \in I) \sum_{a \in A_{G,r}^R} r(a) > q.$$

Thus  $s \in f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)) \left( \bigcup_{b \in G} [b]_{\prec} \right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\ &\iff (\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow g_V(I) \left( \ulcorner R \urcorner^{-1} \left( \bigcup_{b \in G} [b]_{\prec} \right) \right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\ &\iff (\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow g_V(I) \left( \bigcup_{\substack{b \in G \\ \langle a, b \rangle \in R}} [a]_{\prec} \right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\ &\iff (\forall G \subseteq \text{dom}(s)) \left[ G \neq \emptyset \Rightarrow (\exists r \in I) \sum_{a \in A_{G,r}^R} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \end{aligned}$$

It immediately follows that  $\lceil R_V \rceil(I) \subseteq f_V(\mathbf{V}(\lceil R \rceil)(g_V(I)))$ .

For the other inclusion, assume  $s \in f_V(\mathbf{V}(\lceil R \rceil)(g_V(I)))$ , and for each non-empty  $G \subseteq \text{dom}(s)$  fix  $r_G \in I$  with  $\sum_{a \in A_{G,r_G}^R} r_G(a) > \sum_{b \in G} s(b)$ . Let  $r$  be an  $\prec_V$ -upper bound of the  $r_G$  in  $I$ . Let  $G \subseteq \text{dom}(s)$  be non-empty. Then the choice of  $r_G$  and assumption  $r_G \prec_V r$  implies

$$\sum_{b \in G} s(b) < \sum_{a \in A_{G,r_G}^R} r_G(a) < \sum_{a \in \uparrow A_{G,r_G}^R \cap \text{dom}(r)} r(a).$$

Since  $\uparrow A_{G,r_G}^R \cap \text{dom}(r) \subseteq A_{G,r}^R$ , we obtain

$$\sum_{b \in G} s(b) < \sum_{a \in \uparrow A_{G,r}^R} r(a),$$

hence  $s \in \lceil R_V \rceil(I)$ . Therefore,  $\lceil R_V \rceil = f_V \circ \mathbf{V}(\lceil R \rceil) \circ g_V$ .

## References

- [1] R. Chen. Borel functors, interpretations, and strong conceptual completeness for  $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ . *Transactions of the American Mathematical Society*, 372:8955–8983, 2019.
- [2] M. de Brecht. Quasi-Polish spaces. *Annals of Pure and Applied Logic*, 164:356–381, 2013.
- [3] M. de Brecht. Extending continuous valuations on quasi-Polish spaces to Borel measures. Twelfth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 2015.
- [4] M. de Brecht. A generalization of a theorem of Hurewicz for quasi-Polish spaces. *Logical Methods in Computer Science*, 14:1–18, 2018.
- [5] M. de Brecht. Some notes on spaces of ideals and computable topology. In *Proceedings of the 16th Conference on Computability in Europe, CiE 2020*, volume 12098 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 26–37, 2020.
- [6] M. de Brecht. Constructing the space of valuations of a quasi-Polish space as a space of ideals. (arXiv:2106.15780), 2021.
- [7] M. de Brecht, J. Goubault-Larrecq, X. Jia, and Z. Lyu. Domain-complete and LCS-complete spaces. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 345:3–35, 2019.
- [8] M. de Brecht and T. Kawai. On the commutativity of the powerspace constructions. *Logical Methods in Computer Science*, 15:1–25, 2019.
- [9] M. de Brecht, A. Pauly, and M. Schröder. Overt choice. *Computability*, 9:169–191, 2020.
- [10] R. Heckmann. Spatiality of countably presentable locales (proved with the Baire category theorem). *Math. Struct. in Comp. Science*, 25:1607–1625, 2015.
- [11] M. Hoyrup, C. Rojas, V. Selivanov, and D. Stull. Computability on quasi-Polish spaces. In *Descriptional Complexity of Formal Systems*, pages 171–183. Springer, 2019.
- [12] K. Margarita and K. Oleg. On higher effective descriptive set theory. In *Unveiling Dynamics and Complexity*, pages 282–291. Springer, 2017.
- [13] A. Pauly. On the topological aspects of the theory of represented spaces. *Computability*, 5(2):159–180, 2016.
- [14] M. Schröder. Extended admissibility. *Theoretical Computer Science*, 284(2):519 – 538, 2002.

# Signatures of Lefschetz fibrations and symplectic geography

浜田 法行 (University of Massachusetts Amherst/北海道大学情報科学研究所 CCB)\*

## 1. 概要

本稿では、筆者と R. İnanç Baykur 氏 (UMass Amherst) との共同研究 [BH20] を解説する。ただし、同時期に開催される研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」のために執筆した予稿と内容が大幅に重複することをあらかじめ断っておく。以下、多様体や写像は滑らかなものと仮定する。

Lefschetz ペンシルおよび Lefschetz ファイブレーションはもともと射影代数多様体のトポロジーを調べるために導入された、複素版モース理論とも言えるものであった。しかしその概念は可微分トポロジーのカテゴリーに自然に拡張することができる。特に4次元の場合、モノドロミーを通してファイバー曲面の写像類群における組合せ的な議論に落とし込めることから、4次元閉多様体を比較的簡単に構成することができ、非常に有用である。さらに1990年代後半になると、実は Lefschetz ペンシルおよびファイブレーションはシンプレクティック構造と対応することが明らかにされ、それ以来、シンプレクティック4次元多様体を研究する手段として大きく発展を続けている。

こういった背景から、過去30年ほどの間に多種多様な Lefschetz ファイブレーションの具体例が構成されてきた。ここでオイラー標数と並ぶ4次元多様体の基本的位相不変量である「符号数」に注目する。興味深いことに、これまで知られている Lefschetz ファイブレーション (の全空間) はすべて負の符号数を持つ。組合せ的手法でも、素朴な方法では非負の符号数は実現できそうにない。そこでこのことは一般に成り立つのではないかと予想されていた。

**予想 1.1** 球面上の Lefschetz ファイブレーションは常に負の符号数を持つ。

対照的に、非負の符号数を持つ Lefschetz ペンシルは (理論的には) いくらでも存在する。とくに符号数0の Lefschetz ペンシルを調べている中で、ふとしたことから符号数0の Lefschetz ファイブレーションを構成することに成功した。つまり上記の予想の最初の反例を見つけたのであるが、これをきっかけにより強い以下の定理を示すことができた。

**定理 1.1** 任意の整数  $\sigma \in \mathbb{Z}$  に対し、球面上の種数9 Lefschetz ファイブレーションで符号数  $\sigma$  を持つものが存在する。

すなわち、実際には Lefschetz ファイブレーションの符号数に制約はまったく存在しないということがわかった。

これらの発見の契機となった符号数0の Lefschetz ファイブレーションについては、さらにシンプレクティック4次元多様体の geography への応用がある。シンプレクティック geography 問題とは、複素曲面の geography 問題のアナロジーで、極小シンプレク

---

キーワード: Lefschetz fibration, Lefschetz pencil, 写像類群, 符号数

\* Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts Amherst, Lederle Graduate Research Tower, 710 N. Pleasant Street, Amherst, MA 01003-9305  
e-mail: hamada@math.umass.edu

ティック4次元多様体の正則オイラー標数  $\chi_h$  とチャーン数  $c_1^2$  の組  $(\chi_h, c_1^2)$  の取り得る値を決定することを問うものである. 符号数  $\sigma$  とオイラー標数  $e$  について,  $\chi_h = \frac{\sigma+e}{4}$ ,  $c_1^2 = 3\sigma + 2e$  という関係があるので, geography は  $(\sigma, e)$  の範囲を決定する問題とも言い換えられる. ここでは, 単連結スピンプレクティク4次元多様体の geography を考える. 我々は以下のような結果を得, 新しい  $(\sigma, e)$  を実現した.

**定理 1.2** 任意の奇数  $m \geq 23$  に対し,  $\#_m(S^2 \times S^2)$  に同相だが微分同相でないシンプレクティック4次元多様体が存在する.

ここで, 対応する geography は  $(\sigma, e) = (0, 2m + 2)$  である. これまでに知られている最良の結果が  $m = 175$  なので, 大きく改良できた.

記号: 本稿では次の記号を使う.

- $\Sigma_g^k$ : 境界成分を  $k$  個持つ種数  $g$  の有向コンパクト曲面. また  $\Sigma_g = \Sigma_g^0$ .
- $\text{Mod}(\Sigma_g^k)$ :  $\Sigma_g^k$  の (境界成分を pointwise に固定した) 写像類群.
- $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ :  $\Sigma_g^k$  の異なる境界成分 (もしくは境界成分に平行な単純閉曲線).

## 2. 基礎理論

### 2.1. Lefschetz ファイブレーションとペンシルの定義

まず, 今回の主役となる Lefschetz ファイブレーションを定義する.

**定義 2.1** 向き付けられた閉4次元多様体  $X^4$  から有向曲面  $\Sigma$  への写像  $f: X^4 \rightarrow \Sigma$  が **Lefschetz ファイブレーション** であるとは, 各臨界点  $p \in X$  と特異値  $q = f(p) \in \Sigma$  の周りで, それぞれ向きと適合する局所複素座標系  $(z_1, z_2)$  と  $w$  が存在し,  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示されるときをいう. さらに, 各特異ファイバー (すなわち特異値の逆像) には, (1) 臨界点はただ1つだけ含まれること, (2) 自己交差数が  $-1$  の球面を含まないこと (相対極小性), を通常仮定する. 付け加えてここでは, 臨界点が少なくとも1つ存在することを仮定する (非自明な Lefschetz ファイブレーションともよばれる). 一般ファイバー (すなわち正則値の逆像) は有向閉曲面になり, その種数を Lefschetz ファイブレーションの種数とよぶ.

**注意 2.1** 我々の興味の中心は  $\Sigma = S^2$ , すなわち球面上の Lefschetz ファイブレーションであるが, geography への応用において  $\Sigma = T^2$  の場合も扱う.

一般ファイバー  $F = f^{-1}(q_0)$  を一つ固定すると, それぞれの特異ファイバー  $F_i = f^{-1}(q_i)$  に応じて消滅サイクルとよばれる  $F$  上の単純閉曲線  $c_i$  が定まり, 特異ファイバー  $F_i$  は一般ファイバー  $F$  から消滅サイクル  $c_i$  を縮めて一点につぶすことにより得られる. また  $F_i$  のまわりの局所モノドロミーは  $c_i$  に沿った右手デーンツイスト  $t_{c_i}$  となる.

次に定義する Lefschetz ペンシルは Lefschetz ファイブレーションの生みの親であるが, 今回は補助的な役割を担う.

**定義 2.2** 向き付けられた閉4次元多様体  $X^4$  とその空でない有限部分集合  $B \subset X$  について, 写像  $f: X^4 \setminus B \rightarrow S^2$  が **Lefschetz ペンシル** であるとは, Lefschetz ファイブレーションと同じタイプの臨界点を持ち, さらに各  $b \in B$  の周りで, 向きと適合する局所複素座標系  $(z_1, z_2)$  と向きを保つ微分同相  $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$  を用い  $f$  と射影化  $(z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$  を同一視できるときをいう. このとき,  $B$  の各点を

base point とよぶ. また正則値の逆像の閉包を一般ファイバーとよぶが, それは有向閉曲面になり, その種数を Lefschetz ペンシルの種数とよぶ. 写像  $f$  は有理型写像の記号を借りて,  $f: X \dashrightarrow S^2$  と書くこともある.

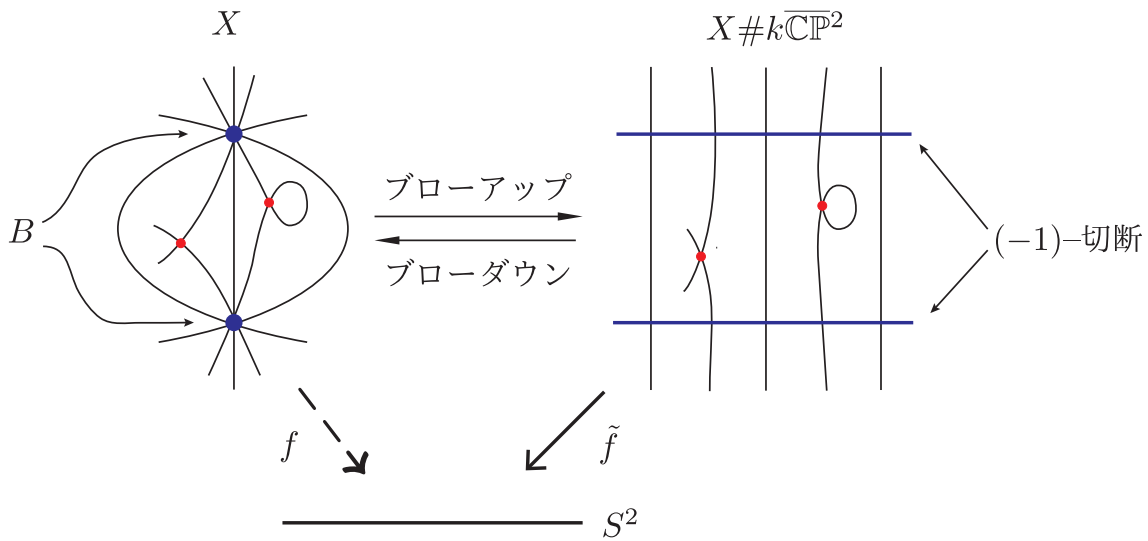


図 1: Lefschetz ペンシルと Lefschetz ファイブレーションの概念図. ここで曲面は次元を落として曲線で表現している.

Lefschetz ペンシルの各 base point でブローアップすることで, 自然に Lefschetz ファイブレーション  $\tilde{f}: X \# k\overline{\mathbb{C}P}^2 \rightarrow S^2$  を得ることができる ( $k = |B|$ ). 図 1 に概念図を示してある. このとき, ブローアップに伴う例外球面  $s_j$  は Lefschetz ファイブレーションの切断となり, 当然その自己交差数は  $-1$  となる ( $(-1)$ -切断とよぶ). 逆に, Lefschetz ファイブレーションが  $(-1)$ -切断を持つと, ブローダウンすることにより, Lefschetz ペンシルを得ることができる. しかしながら, 一般には Lefschetz ファイブレーションは Lefschetz ペンシルに由来するとは限らない ( $(-1)$ -切断を持つとは限らない) ことにも注意する.

## 2.2. モノドロミー分解

Lefschetz ファイブレーションの特異ファイバーの局所モノドロミーは消滅サイクルに沿ったデーンツイスト  $t_{c_i}$  であることは述べた. さらにグローバルモノドロミーを考えることにより, モノドロミー分解とよばれる次の形の関係式がえられる:

$$t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_n} = 1. \quad (1)$$

ここで,  $c_i$  は各特異ファイバーに対応する消滅サイクル,  $n$  は特異ファイバーの本数であり, この式は一般ファイバー  $F \cong \Sigma_g$  の写像類群  $\text{Mod}(\Sigma_g)$  において成り立つ関係式である. 逆にこの形の関係式があれば, それをモノドロミー分解として持つ Lefschetz ファイブレーションを構成することができる. モノドロミー分解は Lefschetz ファイブレーションの設計図であり, 理論的にはすべての情報を持っている.

Lefschetz ファイブレーションが  $(-1)$ -切断を持つ場合, その情報もモノドロミー分解に組み込むことができる. したがって, Lefschetz ペンシルもモノドロミー分解を通じて理解することが可能である. 一般ファイバーから  $(-1)$ -切断の近傍を取り除くと,

境界付き曲面  $\Sigma_g^k$  が得られる. ここで  $k$  は考えている  $(-1)$ -切断の個数である. すると消滅サイクルはこの  $\Sigma_g^k$  に描かれるが, それらを  $\tilde{c}_i$  とする. 境界を円盤で埋めなおすと  $\tilde{c}_i$  はもとの消滅サイクル  $c_i$  に戻る (アイソトピック) ことに注意する. このとき, モノドロミー分解は

$$t_{\tilde{c}_1} t_{\tilde{c}_2} \cdots t_{\tilde{c}_n} = t_{\delta_1} t_{\delta_2} \cdots t_{\delta_k} \quad (2)$$

という形の  $\text{Mod}(\Sigma_g^k)$  における関係式にリフトする. ここで  $\delta_j$  は境界成分に平行な曲線である. 逆にこの形の関係式から  $(-1)$ -切断を構成することもできる.

要約すると, (1) 型の関係式とそれに対応する Lefschetz ファイブレーションは同一視され, (2) 型の関係式とそれに対応する Lefschetz ペンシルは同一視される. しかし, (1) と (2) を区別する短い呼び方がないので, 本稿では (1) 型の関係式を **LF 型関係式**, (2) 型の内容を **LP 型関係式** と一時的に呼ぶことにする.

我々の目標はあくまで Lefschetz ファイブレーション, つまり LF 型関係式の構成であるが, そのビルディングブロックとしては LP 型関係式を多用することになる.

### 2.3. シンプレクティック多様体との対応

ここで Lefschetz ペンシルと Lefschetz ファイブレーションが精力的に研究される契機となったシンプレクティック多様体との関係を述べておく.

**定理 2.1 (Donaldson, Gompf)** 任意のシンプレクティック 4次元閉多様体  $X$  に対して, 全空間が  $X$  であるような Lefschetz ペンシルが存在する. 逆に, Lefschetz ペンシルおよび (非自明な) Lefschetz ファイブレーションの全空間にはシンプレクティック構造が入る.

### 2.4. 符号数の計算

4次元多様体の符号数とはその 2次元コホモロジー群上の交差形式の符号数のことである. Lefschetz ファイブレーションの符号数とはその全空間の符号数を意味する.

Lefschetz ファイブレーションの符号数を計算する方法はいくつか知られているが, 組合せ的観点から扱いやすいのは遠藤久顕氏と永見誠二氏による写像類群の関係子の符号数の理論である [EN05]. ここでは紙数の都合と解説が煩雑になることを避けるため正確な定式化はしないが, おおまかに言って次のようなものである.

- すべてのデーントツイストを生成系とする写像類群の群表示において, 任意の関係子には符号数とよばれる整数が割り当てられる.
- 任意の関係子は, ランタン関係子と 2-チェイン関係子とよばれる原始的な関係子から生成される.
- ランタン関係子の符号数は  $+1$ , 2-チェイン関係子の符号数は  $-7$  である.
- 任意の関係子の符号数は, それを生成するために使われるランタン関係子と 2-チェイン関係子の符号数の代数的な和である.
- Lefschetz ファイブレーションおよびペンシルの符号数はそのモノドロミー分解の符号数に一致する.

今回最重要となる符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの構成には符号数 0 の関係式しか使わないので, そこでの計算は自明である.

## 2.5. ファイバー和とモノドロミーの置き換え

Lefschetz ファイブレーションの基本的な構成法として2つの方法を紹介する.

**定義 2.3** 同じ種数の2つの Lefschetz ファイブレーション  $f_1, f_2$  について, それらに対応する LF 型関係式を  $P_1 = 1, P_2 = 1$  とする. このとき, それらを並べると  $P_1 P_2 = 1$  という新しい LF 型関係式が得られる. この新しい Lefschetz ファイブレーションを  $f_1$  と  $f_2$  のファイバー和とよぶ. 幾何的には,  $f_1, f_2$  それぞれの一般ファイバーの近傍を取り除いて, お互いに貼りなおすという操作に対応する.

**定義 2.4** ある Lefschetz ファイブレーションが  $PQR = 1$  という形の LF 型関係式を持つとする. ここで  $P, Q, R$  はそれぞれ右手デーンツイストの積である. さらに別の右手デーンツイストの積  $W$  について, 関係式  $Q = W$  が成り立つとする. このとき,  $PWR = 1$  という新しい LF 型関係式が得られる. この操作をモノドロミーの置き換えとよぶ.

置き換えに用いられる関係式はほとんどの場合, LP 型関係式である.

今回の結果以前に知られていた Lefschetz ファイブレーションの例はすべて負の符号数を持っている. 符号数はファイバー和に関して加法的なので, それらの例をいくらファイバー和しても非負の符号数は得られない. またモノドロミーの置き換えに関しては, 符号数を大きくする置き換えはかなり特殊な消滅サイクルの配置を必要とするものしか知られていない. したがって, これらの素朴な方法で非負の符号数を実現するのはほぼ絶望的である.

## 3. 主結果

ここで我々の主結果を (多少簡略化した形で) 述べる. 概要で述べたように, 最初に構成した符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションがすべてのきっかけであり, 最も重要である.

**定理 3.1** 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 0 を持つものが存在する.

符号数 0 が実現できると, ファイバー和やモノドロミーの置き換え (substitution) といった素朴な操作により, 他の任意の符号数も容易に実現できる.

**定理 3.2** 任意の整数  $\sigma \in \mathbb{Z}$  に対し, 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数  $\sigma$  を持つものが存在する.

この符号数の実現問題のバリエーションとして, スピン Lefschetz ファイブレーションの符号数を考えることも自然である. スピン 4 次元多様体の場合, 符号数は 16 で割り切れきるという基本的な制約がある (ロホリンの定理). スピン Lefschetz ファイブレーションは消滅サイクルに制限を加えるが, 幸運にも, 我々の構成した符号数 0 Lefschetz ファイブレーションはその条件を満たしていた. さらに符号数を上げ下げする操作もうまくいき, 結局この実現問題も以下のように解決した.

**定理 3.3** 任意の 16 の倍数  $\sigma \in 16\mathbb{Z}$  に対し, 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで全空間がスピンかつ符号数  $\sigma$  を持つものが存在する.

すなわち, スピン Lefschetz ファイブレーションの符号数にはロホリンの定理以外に制約は存在しない.

ここにあげた定理で示した例はすべて単連結，極小なものとして実現でき，また被覆空間をとることによりファイバーの種数も任意に高くすることができる．さらに，ファイバー和をとることで底空間も任意の有向曲面にすることができる．

概要で述べたように次のような geography 問題への応用もある．

**定理 3.4** 任意の奇数  $m \geq 23$  に対し，  $\#_m(S^2 \times S^2)$  に同相だが微分同相でないシンプレクティック4次元多様体が存在する．

これらは符号数 0 のスピン Lefschetz ファイブレーションを利用して作られる．

#### 4. Breeding

**Breeding** とは，低い種数の LP 型関係式を高い種数の写像類群に複数埋め込み，その際現れる負のデーントツイストを正のデーントツイストでキャンセルし，新しい LP 型関係式もしくは LF 型関係式を得る手法である．

正負のデーントツイストのキャンセルングペアをうまく作らないといけないので難しく，工夫や経験が必要なテクニックである．ただ今回の結果のように，うまくいくとファイバー和やモノドロミーの置き換えといった従来の手法の限界を超えることも可能である．

#### 5. 符号数0の Lefschetz ペンシル

目的の符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの構成のための，ビルディングブロックとして使われる Lefschetz ペンシル (LP 型関係式) を2つ紹介する．

1つ目は，松本幸夫氏によって構成されたある種数 2 Lefschetz ファイブレーションがよく知られているが，その LF 型関係式のリフトとしての LP 型関係式である [Ha16, BH20]．図 2 にその消滅サイクルを描いてあり，モノドロミー分解は

$${}^t B_0 {}^t B_1 {}^t B_2 {}^t C {}^t C' {}^t B_2' {}^t B_1' {}^t B_0' = {}^t \delta_1 {}^t \delta_2 {}^t \delta_3 {}^t \delta_4 \quad (3)$$

で与えられる．ペンシルの base locus は4点あり，全空間は  $T^2 \times S^2$  である．したがって，符号数は 0 であり，スピンでもある．構成では，6-holed torus 関係式とよばれる種数 1 の LP 関係式に2つのランタン関係式を breeding する．

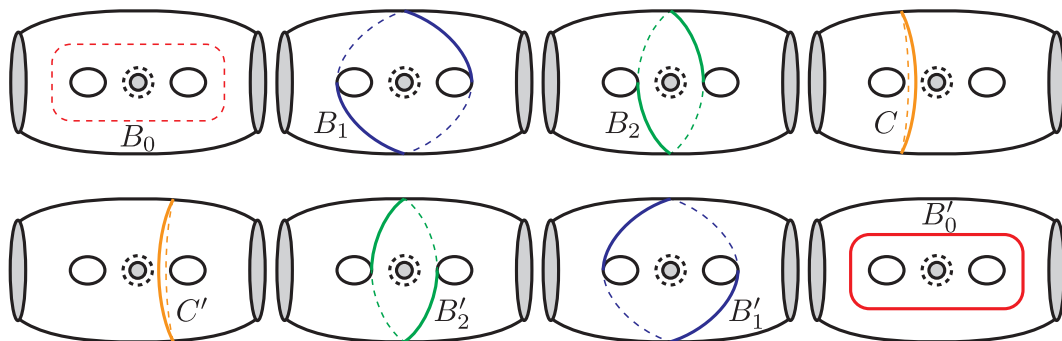


図 2: 種数 2 Lefschetz ペンシルの消滅サイクル．ここで曲面は  $\Sigma_2^4$  で，境界成分4つのうち3つは灰色で埋められた曲線で表わされ，もう1つは曲面の中央裏側に位置し点線で表されている．

2つ目は，上の LP 関係式 (3) のコピーを2つ用意し，それらを分離曲線  $C, C'$  がキャンセルされるように breeding することによって得られる種数 3 のペンシルであ

る [Ba15, HH18, BH20]. 消滅サイクルは図 3 に描かれ, モノドロミー分解は

$$t_a t_{a'} t_x t_b t_{b'} t_y t_c t_{c'} t_z t_d t_{d'} t_w = t_{\delta_1} t_{\delta_2} t_{\delta_3} t_{\delta_4}. \quad (4)$$

で与えられる. これは Smith によって構成された 4次元トーラス  $T^4$  上の正則 Lefschetz ペンシルに同型であることがわかっている. よって, 符号数は 0 であり, スピンである. このペンシル, 特にそのモノドロミー分解 (4) が特別なのは, 12本ある消滅サイクル

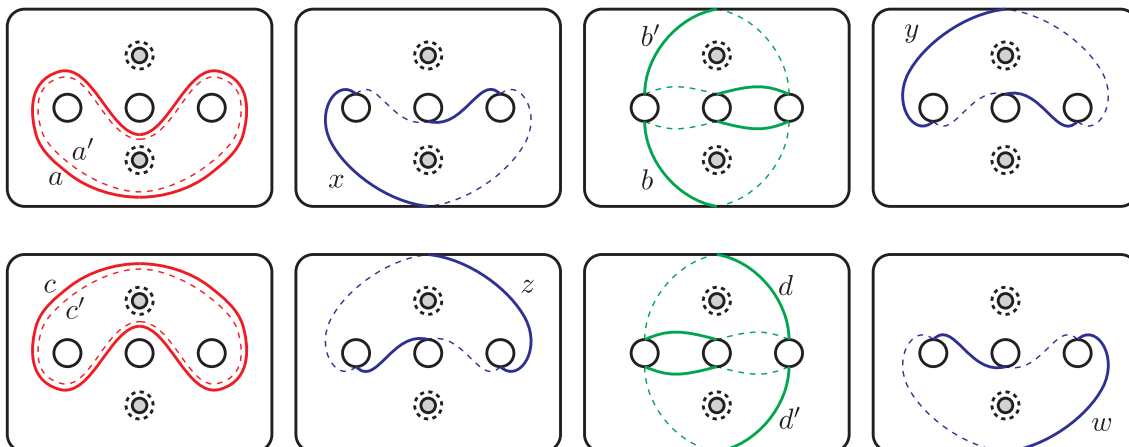


図 3: 種数 3 Lefschetz ペンシルの消滅サイクル. 曲面は  $\Sigma_3^4$ .

のうち 8本までが 4つの bounding pair をなすということである. その 4つの bounding pair は,  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ ,  $(c, c')$ , そして  $(d, d')$  である. それぞれ曲面  $\Sigma_3^4$  を 2つの  $\Sigma_1^4$  に分ける. この bounding pair を多く持つということが, breeding を行う自由度を上げ, 最終的に符号数 0 Lefschetz ファイブレーションの構成を可能にした.

## 6. 符号数 0 の Lefschetz ファイブレーション

目的の符号数 0 の LF 型関係式を作るには, 種数 9 閉曲面  $\Sigma_9$  に種数 3 LP 型関係式 (4) を 6つ埋め込んで breeding を行い, LF 型関係式を構成する. その breeding の過程では, 72個の正のデーツイストおよび 24個の負のデーツイストが現れるが, それらをすべてキャンセルするように正負のデーツイストを配置することが肝要であり, 技術的にもっとも難しい部分であった. 残りの 48個の正のデーツイストが最終的な LF 型関係式を与える. 図 4に得られた消滅サイクルを描いた. モノドロミー分解は

$$t_{w_3} t_{a_3} t_{a'_3} t_{x_3} t_{b_3} t_{b'_3} t_{y_3} t_{c_3} t_{c'_3} t_{z_3} t_{x_1} t_{x_2} t_{w_4} t_{a_4} t_{a'_4} t_{x_4} t_{b_4} t_{b'_4} t_{y_4} t_{c_4} t_{c'_4} t_{z_4} t_{y_1} t_{y_2} \\ \cdot t_{w_5} t_{a_5} t_{a'_5} t_{x_5} t_{b_5} t_{b'_5} t_{y_5} t_{c_5} t_{c'_5} t_{z_5} t_{z_2} t_{z_1} t_{w_6} t_{a_6} t_{a'_6} t_{x_6} t_{b_6} t_{b'_6} t_{y_6} t_{c_6} t_{c'_6} t_{z_6} t_{w_1} t_{w_2} = 1$$

となる. 用いた種数 3 LP 型関係式 (4) の符号数は 0 なので, 得られる Lefschetz ファイブレーションの符号数は 0 であると結論できる.

## 7. 任意の符号数を持つ Lefschetz ファイブレーション

符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの存在が一旦示されれば, 任意符号数はファイバー和とランタン関係式によるモノドロミーの置き換えにより実現できる. 符号数 0 を持つ種数 9 の LF 型関係式を  $t_x P = 1$  とする. ここで  $x$  は (非分離型の) 消滅サ

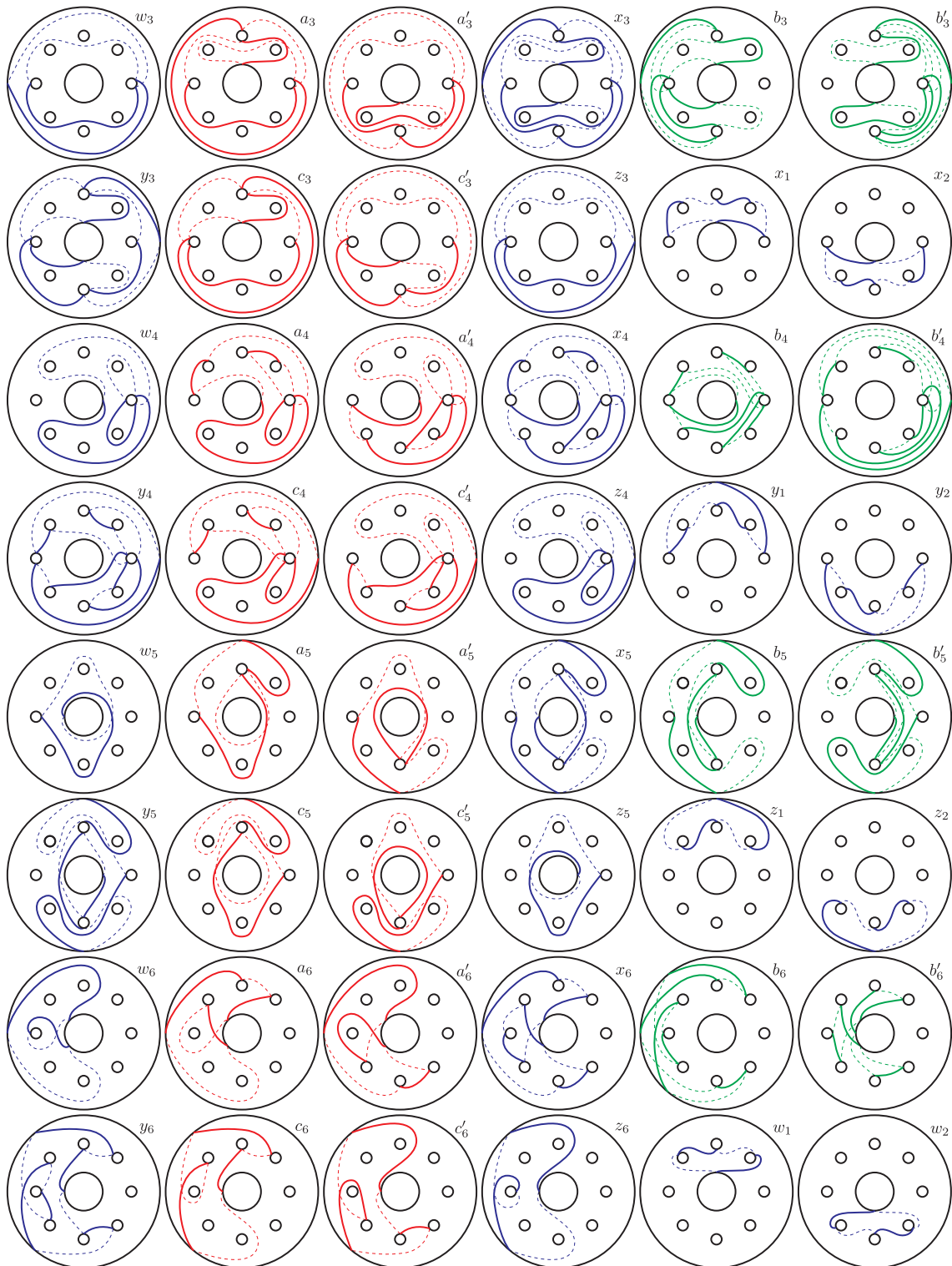


図 4: 符号数 0 を持つ Lefschetz ファイブレーションの消滅サイクル.

イクルの一つで  $P$  はモノドロミー分解の残りである．ランタン関係式は  $\text{Mod}(\Sigma_9)$  に次の形で埋め込むことができる：

$$t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4} = t_a t_b t_c. \quad (5)$$

ここで、 $d_1, d_2, d_3, d_4, a, b, c$  は  $\Sigma_9$  内のある特別な配置をした非分離曲線である．さて、消滅サイクル  $x$  はある微分同相  $\phi: \Sigma_9 \rightarrow \Sigma_9$  により  $d_1$  に写すことができる．このとき、LF 型関係式  $t_x P = 1$  に一齐に  $\phi$  で共役をとると、 $t_{d_1} P_1 = 1$  という形の LF 型関係式が得られる．これは幾何的には、一般ファイバーの  $\Sigma_9$  への同一視写像の取り換えにすぎず、Lefschetz ファイブレーションとしては全く同じものである．同様のやりかたで、 $t_{d_2} P_2 = 1, t_{d_3} P_3 = 1, t_{d_4} P_4 = 1$  という LF 型関係式が得られる．これらのファイバー和をとると

$$t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4}P_4P_3P_2P_1 = 1$$

という LF 型関係式を得る．この時点ではまだ符号数は 0 であるが、ここでランタン関係式 (5) でモノドロミーの置き換えを行うと、

$$t_a t_b t_c P_4 P_3 P_2 P_1 = 1$$

となり、符号数が 1 だけ上がる．したがって、出来上がった Lefschetz ファイブレーションの符号数は 1 となる．同様のアイディアで、 $t_x P = 1$  のファイバー和により  $t_a t_b t_c$  という積を作り、ランタン関係式を逆の方向に置き換えれば、符号数  $-1$  の Lefschetz ファイブレーションも作れる．符号数  $1, -1$  を実現したので、これらのファイバー和をとれば任意の符号数も実現できる．

## 8. スピン構造

スピン Lefschetz ファイブレーションに関しては、Stipsicz による特徴づけが基本的である．ただし、Lefschetz ファイブレーション  $f: X \rightarrow S^2$  に対し、その一般ファイバー  $F$  が原始的である、すなわちある  $S \in H_2(X; \mathbb{Z})$  が存在して  $F \cdot S = 1$  となる、ことを仮定する必要がある．このような  $S$  を  $F$  の双対という．

**定理 8.1 (Stipsicz [St01])** 種数  $g$  Lefschetz ファイブレーション  $f: X \rightarrow S^2$  のモノドロミー分解を  $t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_n} = 1$  とする．一般ファイバー  $F$  は原始的であり、双対  $S$  を持つと仮定する．このとき、 $X$  がスピン構造を許容することと、

1. 交差形式に関するある二次形式  $q: H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  が存在し  $q(c_i) = 1$  がすべての消滅サイクル  $c_i$  について成り立ち、
2.  $S$  の自己交差数が偶数である、

こととは同値である．

我々の符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションについては、図 4にあるの消滅サイクルに対して定理の条件を満たす二次形式が存在することが確かめられる．さらに、一般ファイバーが原始的であること、双対の自己交差数が偶数であることも最終的に確かめられたが、(切断を作れなかったことにより) 技術的に努力を要した部分である．

他の符号数 (16 の倍数) については、ファイバー和と 5-チェーン関係式とよばれる LP 型関係式によるモノドロミーの置き換えをスピン構造を壊さないような形で施し、

まず符号数 16 を実現する. 負の符号数を持つスピン Lefschetz ファイブレーションは既知のものがあリ, それと今作った符号数 16 のもののファイバー和をとれば, 任意の 16 の倍数もスピン Lefschetz ファイブレーションの符号数として実現できる.

## 9. シンプレクティック geography

前節で述べたように, 我々の構成した符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションはスピンである. しかしながら, 単連結ではない. そこで, このファイブレーションを  $\sigma = 0$ , スピン, シンプレクティックという条件を保ったまま改変して, 単連結な多様体を作りたい. その際トポロジーが小さくなる (オイラー標数が小さくなる) とおよい. これがうまくいくと,  $\#_m(S^2 \times S^2)$  に同相なシンプレクティック多様体ができる. ここで,  $\#_m(S^2 \times S^2)$  にはシンプレクティック構造は入らないので, この新しい多様体とは微分同相ではない. この方針で最も効果的だったのが, 次のような操作である.

まず符号数 0 の種数 9 スピン Lefschetz ファイブレーションの底空間は  $S^2$  であるが, 直積  $T^2 \times \Sigma_g$  をファイバー和することにより,  $T^2$  上のファイブレーションに拡張する. これによってオイラー標数は増えてしまうが, 互いに交わらない Lagrangian トーラスを大量に見つけられるという利点がある. これらの Lagrangian トーラスについて Luttinger 手術というシンプレクティック構造を壊さない手術を行うのであるが, このとき元のファイブレーションの基本群の生成元がすべて消えるように Lagrangian トーラスを選ぶことができる. 同時に, 交差形式を偶形式のままに保つことができる. こうしてできた単連結シンプレクティック多様体は  $\sigma = 0$ ,  $e = 48$  (=消滅サイクルの個数) を持ち, 交差形式は偶形式である. 単連結 4次元多様体については, スピンであることと偶交差形式をもつことは同値であるため, 上のようにして作った多様体はスピンであることがわかる. 結果として,  $\#_{23}(S^2 \times S^2)$  と同相になる.

**注意 9.1** 上で行った Luttinger 手術はファイブレーションの構造を壊してしまうため, 最終的にできあがった多様体は Lefschetz ファイブレーションの構造を持っているとは限らない. ファイブレーションを壊さない形で  $\#_m(S^2 \times S^2)$  を作ることもできるが, そうすると  $m$  を小さくすることは難しい.

## 参考文献

- [Ba15] R. I. Baykur, *Small symplectic Calabi-Yau surfaces and exotic 4-manifolds*, preprint; earlier version is available at arXiv:1511.05951 (2015).
- [BH20] R. I. Baykur, N. Hamada, *Lefschetz fibrations with arbitrary signature*, preprint; available at arXiv:2010.11916 (2020).
- [EN05] H. Endo, S. Nagami, *Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations*, Trans. Am. Math. Soc. 357 (8), 3179-3199 (2005).
- [Ha16] N. Hamada, *Sections of the Matsumoto-Cadavid-Korkmaz Lefschetz fibration*, preprint; available at arXiv:1610.08458 (2016).
- [HH18] N. Hamada, K. Hayano, *Topology of holomorphic Lefschetz pencils on the four-torus*, Algebr. Geom. Topol. 18, no. 3, 1515-1572 (2018).
- [St01] A. Stipsicz, *Spin structures on Lefschetz fibrations*, Bull. London Math. Soc. 33, no. 4, 466-472 (2001).

## 空間曲線の 2 種類の縮閉線、伸開線及び関連する線織面

本多 俊一 (公立千歳科学技術大学)\*

### 1. はじめに

はじめに、平面曲線の縮閉線と伸開線について復習する。縮閉線はその曲線の曲率円の中心の軌跡として得られる曲線であり、伸開線はその曲線に巻きつけられた糸をたゆまないようにほぐしてゆくときの端点の軌跡として得られる曲線である。縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作はある種の逆操作である。縮閉線と伸開線は波の生成、光の波動性や振り子の等時性などの研究に利用されてきた曲線であり、自然に特異点を持つことが知られている (図 1, 2)。

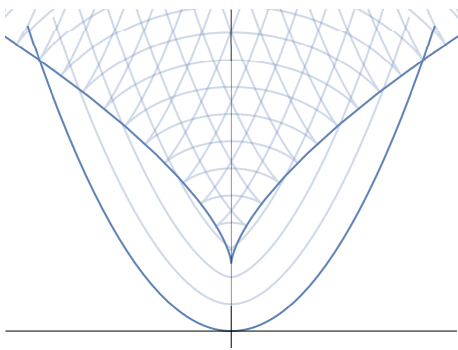


図 1: 放物線と縮閉線

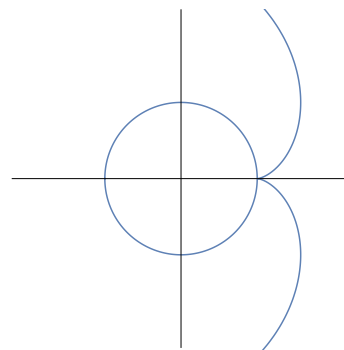


図 2: 円と伸開線

したがって、縮閉線と伸開線は正則性を仮定した従来の曲線論では取り扱うことが出来ない対象であるため、波面などの特異点を持つ曲線の微分幾何学的研究の理論を適用する必要がある。ここで、波面とは法線ベクトルが付随した平面曲線である。例えば、参考文献 [4] において、縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作が Legendre 曲線 (波面と法線ベクトルの組) の曲率の微分と積分に対応することが報告されている。

本稿では、空間曲線の縮閉線、伸開線および関連する線織面について調査した結果の概要を報告する。また、縮閉線は接触球に由来する縮閉線と接触円に由来する縮閉線の両方を取り扱う。空間曲線の縮閉線と伸開線は自然に特異点を持つので、特異点を持つ空間曲線の微分幾何学的研究の理論を適用する必要がある。ここでは参考文献 [9] における枠付き曲線の理論を適用する。第 2 節において、枠付き曲線の縮閉線と伸開線を考える上で必要な枠付き曲線、(一般化された) Frenet フレーム、Bishop フレーム、線織面および可展面の概念を紹介する。第 3 節では焦点曲面と接触球に由来する縮閉線、第 4 節では平行曲線と法線曲面、第 5 節では接触円に由来する縮閉線と伸開線を紹介する。第 6 節では上記各オブジェクトの関係を紹介する。接触円に由来する縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作はある種の逆操作であり、特異点型の対応が観察出来る。また、縮閉線と伸開線の法線曲面の関係についても考察する。

本稿の内容は高橋雅朋氏 (室蘭工大) との共同研究 [10, 11, 12] と参考文献 [7, 8] に基づく。

\* 〒 066-8655 北海道千歳市美々 758 番地 65 公立千歳科学技術大学 理工学部  
e-mail: s-honda@photon.chitose.ac.jp

## 2. 準備

$\mathbb{R}^3$  を 3 次元 Euclid 空間とする.  $\mathbb{R}^3$  における内積は  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  に対して,  $\mathbb{R}^3$  の標準内積  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  を用いる.  $\mathbf{x}$  のノルム  $\|\mathbf{x}\|$  と  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のベクトル積  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  を

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. ここで,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の標準基底である. また,  $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ,  $\Delta = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^2 \times S^2 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$  とする.

### 2.1. 枠付き曲線と枠付け可能曲線

本節では, 枠付き曲線の理論の概要を紹介する. 枠付き曲線は空間曲線とフレームの組で, 退化点 (i.e.  $\dot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ ) や特異点 (i.e.  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ ) を許容する. 詳細は参考文献 [9] と [5] を参照のこと. ここで,  $\dot{\gamma}(t) = (d\gamma/dt)(t)$ ,  $\ddot{\gamma}(t) = (d^2\gamma/dt^2)(t)$  である.

**定義 2.1 (枠付き曲線, 枠付け可能曲線)** (1) 写像  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  が枠付き曲線であるとは, 任意の  $t \in I$  に対して,  $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0$  と  $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0$  が成り立つことである. (2) 曲線  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  が枠付け可能曲線であるとは, ある写像  $(\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \Delta$  が存在して,  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  が枠付き曲線であることである.

**注意 2.2** 枠付け可能曲線  $\gamma(t)$  に対して,  $(\nu_1(t), \nu_2(t)) \in \Delta$  の取り方には回転と鏡映の自由度がある.

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  に対して,  $\mu(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t)$  とすれば,  $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \mu(t)\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底である.

**命題 2.3 (Frenet-Serret 型の公式, [9])** 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  に対して, 以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l(t) & m(t) \\ -l(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

ただし,

$$l(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), \quad m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \mu(t), \quad n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \mu(t), \quad \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t)$$

である. このとき, 写像  $(l, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  の曲率と呼ぶ.

**定義 2.4 (枠付き曲線の合同)** 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  が合同であるとは, ある回転  $A \in SO(3)$  とある平行移動  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  が存在して, 任意の  $t \in I$  に対して,

$$\tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + \mathbf{a}, \quad \tilde{\nu}_1(t) = A(\nu_1(t)), \quad \tilde{\nu}_2(t) = A(\nu_2(t))$$

が成り立つことである.

枠付き曲線の曲率は枠付き曲線の微分幾何学的不変量である. 実際, 以下の枠付き曲線の存在定理と一意性定理が成り立つ (定理 2.5, 2.6).

**定理 2.5 (枠付き曲線の存在定理, [9])** 写像  $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  に対して, 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  で  $(\ell, m, n, \alpha)$  が曲率であるものが存在する.

**定理 2.6 (枠付き曲線の一意性定理, [9])** 2つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき,  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  は合同である.

**注意 2.7** 枠付き曲線の曲率はパラメータの取り方に依存する. 一方, 枠付き曲線の曲率から写像  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  を復元することができる.

## 2.2. Frenet フレームと Bishop フレーム

本節では, 枠付き曲線の縮閉線を考える上で重要な役割を担う枠付き曲線の Frenet フレームと Bishop フレームを紹介する. Frenet フレームの詳細は参考文献 [8, 10], Bishop フレームの詳細は参考文献 [1, 11] を参照のこと.

### 2.2.1. Frenet フレーム

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  (i.e.  $\mu(t) \neq \mathbf{0}$ ) とする. フレーム  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$  を

$$\mathbf{t}(t) = \mu(t), \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$$

で定義する. フレーム  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$  を枠付け可能曲線  $\gamma(t)$  の (一般化された) **Frenet フレーム**と呼ぶ. このとき,  $(\gamma, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  は枠付き曲線であり, 以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}}(t) \\ \dot{\mathbf{n}}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mathbf{t}(t).$$

ここで,  $\kappa(t)$  と  $\tau(t)$  は

$$\kappa(t) = \|\dot{\mathbf{t}}(t)\|, \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{t}(t), \dot{\mathbf{t}}(t), \ddot{\mathbf{t}}(t))}{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|^2}$$

である.  $\kappa(t)$  を枠付け可能曲線  $\gamma(t)$  の **曲率**,  $\tau(t)$  を **捩率**と呼ぶ. 枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  の曲率は  $(\tau(t), -\kappa(t), 0, \alpha(t))$  である. Frenet フレームは第 3 節 (焦点曲面と接触球に由来する縮閉線) で利用する.

### 2.2.2. 回転されたフレームと Bishop フレーム

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $(\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) \in \Delta$  を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}$$

で定義する. ここで,  $\theta(t)$  は滑らかな関数である. フレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \mu(t)\}$  を枠付け可能曲線  $\gamma(t)$  の  $\theta(t)$  による **回転されたフレーム**と呼ぶ. このとき,  $(\gamma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  は枠付き曲線であり, 以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\ell}(t) & \bar{m}(t) \\ -\bar{\ell}(t) & 0 & \bar{n}(t) \\ -\bar{m}(t) & -\bar{n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

ここで,  $\bar{\ell}(t) = \ell(t) - \dot{\theta}(t)$ ,  $\bar{m}(t) = m(t) \cos \theta(t) - n(t) \sin \theta(t)$ ,  $\bar{n}(t) = m(t) \sin \theta(t) + n(t) \cos \theta(t)$  である. 特に,  $\theta(t)$  が条件  $\dot{\theta}(t) = \ell(t)$  (i.e.  $\bar{\ell}(t) = 0$ ) を満たすとき, フレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  を枠付け可能曲線  $\gamma(t)$  の  $\theta(t)$  による **Bishop フレーム** と呼ぶ. このとき,  $\mathbf{v}(t)$  と  $\mathbf{w}(t)$  を **Bishop ベクトル** と呼ぶ. Bishop フレームの取り方は  $\gamma(t)$  に対して一意ではなく, 積分定数の自由度がある. 回転されたフレームは第 4 節 (平行曲線と法線曲面), Bishop フレームは第 5 節 (接触円に由来する縮閉線と伸開線) で利用する.

### 2.3. 線織面と可展面

本節では, 線織面と可展面の概要を復習する. 詳細は参考文献 [16] を参照のこと.

**定義 2.8 (線織面, 可展面)** 空間曲線  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  と零でないベクトル  $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  に対して, 曲面  $F_{(\gamma, \xi)}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \xi(t)$  で定義する.  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  を **線織面**,  $\xi(t)$  を **導線**, 固定した各  $t_0$  に対して得られる直線  $\gamma(t_0) + \lambda \xi(t_0)$  を **母線** と呼ぶ. ガウス曲率が恒等的に零であるような線織面  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  を **可展面** と呼ぶ.

線織面  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  が可展面であることの必要十分条件は, 任意の  $t \in I$  に対して,

$$\det \left( \dot{\gamma}(t), \xi(t), \dot{\xi}(t) \right) = 0$$

が成り立つことである.  $\xi(t)$  を正規化し,  $\tilde{\xi}: I \rightarrow S^2$  を  $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) / \|\xi(t)\|$  で定義する. 任意の  $t \in I$  に対して,  $\tilde{\xi}(t) = 0$  であるとき,  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  は (一般化された) **柱面** であるという. また, 任意の  $t \in I$  に対して,  $\tilde{\xi}(t) \neq 0$  であるとき,  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  は **非柱面的** であるという.  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  が非柱面的であるとき,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \gamma(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \tilde{\xi}(t)}{\tilde{\xi}(t) \cdot \dot{\tilde{\xi}}(t)} \tilde{\xi}(t)$$

で表示される曲線を **縮括線** と呼ぶ.  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  の特異点の像は縮括線上に現れることが知られている. 縮括線が定点であるとき,  $F_{(\gamma, \xi)}(t, \lambda)$  は (一般化された) **錐面** であるという. 可展面は柱面, 錐面と接線曲面に分類されることが知られている.

## 3. 焦点曲面と接触球に由来する縮閉線

本節では, 枠付き曲線の焦点曲面と接触球に由来する縮閉線を紹介する. 詳細は参考文献 [8, 10] を参照のこと.

### 3.1. 焦点曲面

枠付き曲線  $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  (i.e.  $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \mathbf{0}$ ) とし, 第 2.2.1 節における Frenet フレーム  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$  を考える. 枠付き曲線の焦点曲面を以下で定義する.

**定義 3.1 (焦点曲面)** 曲面  $FD_\gamma: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$FD_\gamma(t, \lambda) = \gamma(t) + \frac{\alpha(t)}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t) + \lambda \mathbf{b}(t)$$

で定義する. 曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  を  $\gamma(t)$  の **焦点曲面** と呼ぶ.

焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  は可展面かつ波面である. 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の可展面の型の特徴付けは以下の通りである.

**定理 3.2** ([8]) (1) 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  が柱面であるための必要十分条件は, 任意の  $t \in I$  に対して,  $\tau(t) = 0$  が成り立つことである. (2) 任意の  $t \in I$  に対して,  $\tau(t) \neq 0$  とする. 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  が錐面であるための必要十分条件は, 任意の  $t \in I$  に対して,  $\sigma(t) = 0$  が成り立つことである. ここで,  $\sigma(t)$  は

$$\sigma(t) = \frac{\alpha(t)\tau(t)}{\kappa(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t)\dot{\kappa}(t) - \dot{\alpha}(t)\kappa(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)} \right)$$

である.

第 3.2 節において, 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の締括線として接触球に由来する縮閉線を定義する.  $(t_0, \lambda_0)$  が焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の特異点であることの必要十分条件は,

$$\frac{\alpha(t_0)\dot{\kappa}(t_0) - \dot{\alpha}(t_0)\kappa(t_0)}{\kappa^2(t_0)} + \lambda_0\tau(t_0) = 0$$

が成り立つことである.

### 3.2. 接触球に由来する縮閉線

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  (i.e.  $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \mathbf{0}$ ) とし, 第 2.2.1 節における Frenet フレーム  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$  を考える. また, 任意の  $t \in I$  に対して,  $\tau(t) \neq 0$  が成り立つとする. 枠付き曲線の接触球に由来する縮閉線を以下で定義する.

**定義 3.3** (接触球に由来する縮閉線) 曲線  $SE_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$SE_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{\alpha(t)}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t) - \frac{\alpha(t)\dot{\kappa}(t) - \dot{\alpha}(t)\kappa(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}\mathbf{b}(t)$$

で定義する. 曲線  $SE_\gamma(t)$  を  $\gamma(t)$  の接触球に由来する縮閉線と呼ぶ.

接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  は接触球の中心の軌跡や焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の締括線として得られる曲線であり, 枠付け可能曲線である. 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  と接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  の特異点型には以下の関係がある.

**定理 3.4** ([10])  $(t_0, \lambda_0)$  を焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の特異点とする. (1) 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の特異点  $(t_0, \lambda_0)$  がカस्प辺であることの必要十分条件は,  $t_0$  が接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  の正則点であることである. (2) 焦点曲面  $FD_\gamma(t, \lambda)$  の特異点  $(t_0, \lambda_0)$  がツバメの尾であることの必要十分条件は, 接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  の特異点  $t_0$  が  $3/2$  カस्पであることである.

※ここで, カस्प辺は  $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ , ツバメの尾は  $(u, v) \mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ ,  $3/2$  カस्पは  $t \mapsto (t^2, t^3, 0)$  にそれぞれ  $A$  同値な写像である.

接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  と中心が  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  で半径が  $r \in \mathbb{R}$  の球  $S^2(\mathbf{c}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r\}$  には以下の関係がある.

**命題 3.5** ([10]) 接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  が定点ならば, ある定点  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  とある非負定数  $r \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\gamma(t) \in S^2(\mathbf{c}, r)$  が成り立つ.

**命題 3.6** ([10]) 枠付け可能曲線  $\gamma(t)$  の正則点が  $I$  上で稠密であるとする. このとき, 接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  が定点であることの必要十分条件は, ある定点  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  とある正定数  $r \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\gamma(t) \in S^2(\mathbf{c}, r)$  が成り立つことである.

その他, 縮閉線の接触, 高次の縮閉線および縮閉線と元の曲線が合同になる条件などは参考文献 [8, 10] を参照のこと.

## 4. 平行曲線と法線曲面

本節では, 枠付き曲線の平行曲線と法線曲面を紹介する. 詳細は参考文献 [12] と [11] を参照のこと.

### 4.1. 平行曲線

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して, 第 2.2.2 節における回転されたフレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  を考える. 枠付き曲線の平行曲線を以下で定義する.

**定義 4.1 (平行曲線)** 零でない定数  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対して, 曲線  $P_\gamma[\mathbf{v}] : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$P_\gamma[\mathbf{v}](t) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$$

で定義する. 曲線  $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$  を  $\gamma(t)$  の  $\mathbf{v}(t)$  方向の**平行曲線**と呼ぶ.

$\dot{P}_\gamma[\mathbf{v}](t) = \lambda \bar{\ell}(t) \mathbf{w}(t) + \{\alpha(t) + \lambda \bar{m}(t)\} \boldsymbol{\mu}(t)$  であるから,  $\mathbf{v}(t)$  は  $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$  の法線ベクトルの 1 つである. また,  $t_0$  が  $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$  の特異点であることの必要十分条件は,  $\bar{\ell}(t_0) = 0$  と  $\alpha(t_0) + \lambda \bar{m}(t_0) = 0$  が成り立つことである. 一般に  $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$  は枠付け可能曲線であるとは限らない. 実際, 以下の必要十分条件が存在する.

**命題 4.2** ([11, 12]) ある単位ベクトル  $\mathbf{n} : I \rightarrow S^2$  が存在して,  $(P_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{v}, \mathbf{n})$  が枠付き曲線であることの必要十分条件は, ある関数  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して, 任意の  $t \in I$  と零でない定数  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対して,

$$\lambda \bar{\ell}(t) \cos \varphi(t) - \{\alpha(t) + \lambda \bar{m}(t)\} \sin \varphi(t) = 0$$

が成り立つことである.

**注意 4.3** 命題 4.2 より, Bishop フレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  に対して,  $(P_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{v}, \mathbf{w})$  は枠付き曲線である.

### 4.2. 法線曲面

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して, 第 2.2.2 節における回転されたフレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  を考える. 枠付き曲線の法線曲面を以下で定義する.

**定義 4.4 (法線曲面)** 曲面  $NS_\gamma[\mathbf{v}] : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$$

で定義する. 曲面  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  を  $\gamma(t)$  の  $\mathbf{v}(t)$  方向の**法線曲面**と呼ぶ.

$NS_\gamma[\mathbf{v}]_t(t, \lambda) \times NS_\gamma[\mathbf{v}]_\lambda(t, \lambda) = \{\alpha(t) + \lambda\bar{m}(t)\}\mathbf{w}(t) - \lambda\bar{\ell}(t)\boldsymbol{\mu}(t)$  であるから,  $\mathbf{v}(t)$  は  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  の接線ベクトルの 1 つである. また,  $(t_0, \lambda_0)$  が  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  の特異点であることの必要十分条件は,  $\alpha(t_0) + \lambda_0\bar{m}(t_0) = 0$  と  $\lambda_0\bar{\ell}(t_0) = 0$  が成り立つことである. 一般に  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  は枠付け可能曲面であるとは限らない. 実際, 以下の必要十分条件が存在する. 枠付き曲面と枠付け可能曲面の詳細については参考文献 [6] を参照のこと.

**命題 4.5** ([12]) ある単位ベクトル  $\mathbf{n} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$  が存在して,  $(NS_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{n}, \mathbf{v}) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  が枠付き曲面であることの必要十分条件は, ある関数  $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して, 任意の  $(t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$  に対して,

$$\lambda\bar{\ell}(t) \cos \varphi(t, \lambda) - \{\alpha(t) + \lambda\bar{m}(t)\} \sin \varphi(t, \lambda) = 0$$

が成り立つことである.

**注意 4.6** 命題 4.5 より, Bishop フレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  に対して,  $(NS_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{w}, \mathbf{v})$  は枠付き曲面である. このとき,  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  は可展面である.

法線曲面  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  の特異点型 (交叉帽子, カस्प辺, ツバメの尾, カस्प状交叉帽子) の特徴付けは参考文献 [12] を参照のこと. 特異点型の特徴付けは参考文献 [3, 17, 19] における判定法を適用した.

## 5. 接触円に由来する縮閉線と伸開線

本節では, 枠付き曲線の接触円に由来する縮閉線と伸開線を紹介する. 詳細は参考文献 [12] を参照のこと.

### 5.1. 接触円に由来する縮閉線

枠付き曲線  $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して, 第 2.2.2 節における Bishop フレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  を考える. また, 任意の  $t \in I$  に対して,  $\bar{m}(t) \neq 0$  が成り立つとする. 枠付き曲線の接触円に由来する縮閉線を以下で定義する.

**定義 5.1** 曲線  $CE_\gamma[\mathbf{v}] : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$CE_\gamma[\mathbf{v}](t) = \gamma(t) - \frac{\alpha(t)}{\bar{m}(t)}\mathbf{v}(t)$$

で定義する. 曲線  $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$  を  $\gamma(t)$  の  $\mathbf{v}(t)$  方向の接触円に由来する縮閉線と呼ぶ.

接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$  は  $\mathbf{v}(t)$  方向の接触円の中心の軌跡や法線曲面  $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$  の縮括線として得られる曲線であり, 枠付け可能曲線である.

**注意 5.2**  $(CE_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$  は枠付き曲線である. ただし,  $\{\mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \mathbf{v}(t)\}$  は接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$  の Bishop フレームではない.

平行曲線  $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$  の  $\mathbf{v}(t)$  方向の接触円に由来する縮閉線とオリジナル曲線  $\gamma(t)$  の  $\mathbf{v}(t)$  方向の接触円に由来する縮閉線は一致する (命題 5.3).

**命題 5.3** ([12])  $CE_{P_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}](t) = CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$ .

## 5.2. 伸開線

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  (i.e.  $\dot{\mu}(t) \neq 0$ ) とする. 枠付き曲線の伸開線を以下で定義する.

**定義 5.4** 固定された  $t_0 \in I$  に対して, 曲線  $I_\gamma[t_0] : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$I_\gamma[t_0](t) = \gamma(t) - \left( \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \right) \mu(t)$$

で定義する. 曲線  $I_\gamma[t_0](t)$  を  $\gamma(t)$  の  $t_0$  に関する**伸開線**と呼ぶ.

伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  は正則空間曲線の伸開線の直接的な一般化である (cf. [2]).

**注意 5.5**  $(I_\gamma[t_0], \xi, \mu)$  は枠付き曲線である. ここで,

$$\xi(t) = \frac{n(t)\nu_1(t) - m(t)\nu_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}$$

である.  $\{\xi(t), \mu(t), \xi(t) \times \mu(t)\}$  は伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の Bishop フレームである.

## 6. 各オブジェクトの関係

本節では, 接触円に由来する縮閉線と伸開線の関係, 接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係について紹介する. 詳細は参考文献 [12] を参照のこと.

**命題 6.1** ([12]) 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  と Bishop フレーム  $\{v(t), w(t), \mu(t)\}$  に対して,  $\bar{m}(t) \neq 0$  とする. このとき,  $CE_{I_\gamma[v]}[t_0](t) = \gamma(t) - (\alpha(t_0)/\bar{m}(t_0))v(t)$  が成り立つ.

**命題 6.2** ([12]) 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  とする. このとき,  $CE_{I_\gamma[t_0]}[-\mu](t) = \gamma(t)$  が成り立つ.

命題 6.1, 6.2 より, 然るべき設定の下では, 接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[v](t)$  をとる操作と伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  をとる操作がある種の逆操作であることが分かる. なお, 接触球に由来する縮閉線  $SE_\gamma(t)$  と伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の関係は得られない.

オリジナル曲線  $\gamma(t)$ , 接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[v](t)$ , 伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の特異点型の関係を考える.

**定理 6.3** ([12]) 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  と Bishop フレーム  $\{v(t), w(t), \mu(t)\}$  に対して,  $\bar{m}(t) \neq 0$  とする. (1) オリジナル曲線  $\gamma(t)$  の特異点  $t_0$  が 3/2 カスプであることの必要十分条件は,  $t_0$  が接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[v](t)$  の正則点であることである. (2) オリジナル曲線  $\gamma(t)$  の特異点  $t_0$  が 4/3 カスプであることの必要十分条件は, 接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[v](t)$  の特異点  $t_0$  が 3/2 カスプであることである.

※ここで, 4/3 カスプは  $t \mapsto (t^3, t^4, 0)$  に  $A$  同値な写像である.

**定理 6.4** ([12]) 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  とする. また,  $t_1$  が伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の特異点であるとする. (1)  $t_1$  がオリジナル曲線  $\gamma(t)$  の正則点であることの必要十分条件は, 伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の特異点  $t_1$  が 3/2 カスプであることである. (2) オリジナル曲線  $\gamma(t)$  の特異点  $t_1$  が 3/2 カスプであることの必要十分条件は, 伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の特異点  $t_1$  が 4/3 カスプであることである.

次に、接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係を考える．枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  と Bishop フレーム  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  に対して、 $\bar{m}(t) \neq 0$  とする．このとき、接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$  の  $\mathbf{v}_{CE}(t)$  方向の法線曲面は

$$NS_{CE_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}_{CE}](t, \lambda) = CE_\gamma[\mathbf{v}](t) + \lambda \mathbf{v}_{CE}(t)$$

である．ただし、 $\mathbf{v}_{CE}(t)$  は接触円に由来する縮閉線  $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$  の Bishop ベクトルである． $NS_{CE_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}_{CE}](t, \lambda)$  の特異点の像は締括線である 2 次の縮閉線  $CE_{CE_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}_{CE}](t)$  によってパラメータ付けされる．

一方、枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して、 $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$  とする．このとき、伸開線  $I_\gamma[t_0](t)$  の  $\mathbf{v}_I(t) = -\boldsymbol{\mu}(t)$  方向の法線曲面は

$$NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda) = I_\gamma[t_0](t) - \lambda \boldsymbol{\mu}(t)$$

である． $NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda)$  の特異点の像は締括線であるオリジナル曲線  $\gamma(t)$  によってパラメータ付けされる． $NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda)$  は非柱面的な可展面であるから、 $NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](I \times \mathbb{R})$  がオリジナル曲線  $\gamma(t)$  の接線曲面  $\gamma(t) + \lambda \boldsymbol{\mu}(t)$  の像と一致する (cf. [16])．接線曲面の特異点は [13, 14, 15] などで詳しく調査されている．以上の性質をまとめると、以下のダイアグラムを得る (図 3)．ただし、点線矢印は特異点を始点とする伸開線を考えたときに成り立つ．

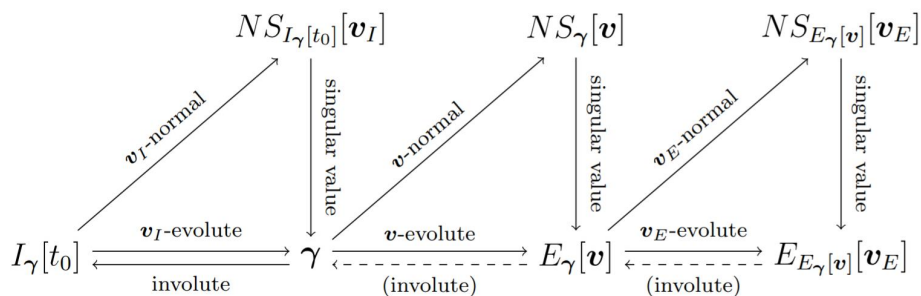


図 3: 接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係

例 6.5 (球面ネフィロイド) 写像  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : [0, 2\pi) \rightarrow S^2 \times \Delta$  を

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left( \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right), \\ \nu_1(t) &= \left( -\frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t, \cos^3 t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right), \\ \nu_2(t) &= \left( \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, \sin^3 t, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right) \end{aligned}$$

で定義する． $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  は枠付き曲線であり、オリジナルフレーム  $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  は Bishop フレームである．また、オリジナル曲線  $\gamma(t)$  の特異点  $t = 0$  と  $\pi$  は  $3/2$  カस्पである．このとき、上記の各オブジェクトの表示式は以下の通りである：

- $\nu_1$  方向の法線曲面:  $NS_\gamma[\nu_1](t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda\nu_1(t)$
- $\nu_1$  方向の接触円に由来する縮閉線:  $E_\gamma[\nu_1](t) = \gamma(t) + \tan t\nu_1(t)$
- $t_0 = 0$  に関する伸開線:  $I_\gamma[0](t) = \gamma(t) - \sqrt{3}(1 - \cos t)\mu(t)$

法線曲面の特異点型の判定法と定理 6.4 より, 以下が成り立つ.

- $NS_\gamma[\nu_1](t, \lambda)$  の特異点  $(t, \lambda) = (0, 0)$  と  $(\pi, 0)$  はカस्प状交叉帽子
- $NS_{I_\gamma[0]}[\mu](t, \lambda)$  の特異点  $(t, \lambda) = (0, 0)$  と  $(\pi, 0)$  はツバメの尾
- $I_\gamma[0]$  の特異点  $t = 0$  は  $4/3$  カस्प

上記の特異点および法線曲面, 接触円に由来する縮閉線と伸開線の関係は図 4 と図 5 で観察出来る.

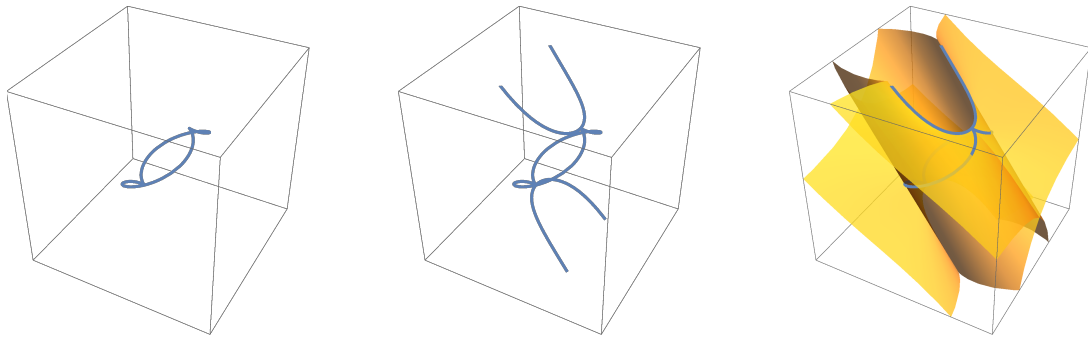


図 4: 左から順に  $\gamma$ ,  $(\gamma, E_\gamma[\nu_1])$ ,  $(\gamma, E_\gamma[\nu_1], NS_\gamma[\nu_1])$

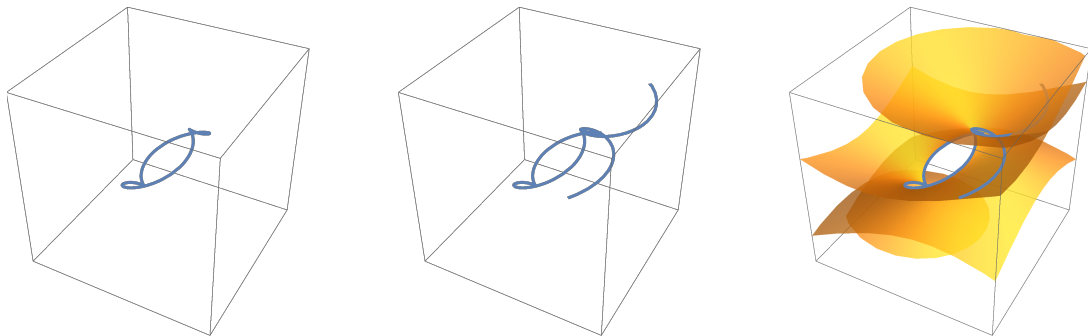


図 5: 左から順に  $\gamma$ ,  $(\gamma, I_\gamma[0])$ ,  $(\gamma, I_\gamma[0], NS_{I_\gamma[0]}[\mu])$

## 参考文献

- [1] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 246–251.
- [2] D. Fuchs, Evolutes and involutes of spatial curves, Amer. Math. Monthly 120 (2013), no. 3, 217–231.
- [3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, Math. Z. 259 (2008), no. 4, 827–848.
- [4] T. Fukunaga and M. Takahashi, Involutives of fronts in the Euclidean plane, Beitr. Algebra Geom. 57 (2016), no. 3, 637–653.

- [5] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves, *J. Geom.* 108 (2017), no. 2, 763–774.
- [6] T. Fukunaga and M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, *Bull. Braz. Math. Soc.* 50 (2019), no. 1, 37–65.
- [7] S. Honda, Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices, *Adv. Stud. Pure Math.* 78 (2018), 273–292.
- [8] S. Honda, Flat surfaces associated with framed base curves, doctoral theses (2018).
- [9] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.* 16 (2016), no. 3, 265–276.
- [10] S. Honda and M. Takahashi, Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 150 (2020), no. 1, 497–516.
- [11] S. Honda and M. Takahashi, Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space, *Turkish J. Math.* 44 (2020), no. 3, 883–899.
- [12] S. Honda and M. Takahashi, Circular evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean space, preprint (2021), arXiv:2103.07041.
- [13] G. Ishikawa, Determinacy of the envelope of the osculating hyperplanes to a curve, *Bull. London Math. Soc.* 25 (1993), no. 6, 603–610.
- [14] G. Ishikawa, Developable of a curve and determinacy relative to osculation-Type, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 46 (1995), no. 184, 437–451.
- [15] G. Ishikawa, Topological classification of the tangent developables of space curves, *J. London Math. Soc. (2)* 62 (2000), no. 2, 583–598.
- [16] S. Izumiya and N. Takeuchi, Geometry of ruled surfaces. In *Applicable Mathematics in the Golden Age*, edited by Misra, J. C., pp. 305–338, Narosa Publishing House, 2003.
- [17] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* 221 (2005), no. 2, 303–351.
- [18] M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, *Contemp. Math.* 675 (2016), 337–355.
- [19] H. Whitney, The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n - 1)$ -space, *Ann. of Math. (2)* 45 (1944), 247–293.

# 印付単体的集合のループ空間

堀内遼

## 1 はじめに

位相空間という概念を推し進めていって得られた現在の数学における到達点は少なくとも2つあるだろう。1つは貼り合せや被覆といったものに重きをおくトポスという対象である。もう1つは、これは一般の位相空間というよりユークリッド空間というアイデアの発展系と言うべきかもしれないが、空間には点・辺・面...などの次元づけられた構成物があり、それが重要であるとするホモトピー仮説である。この講演は後者に関するものである。<sup>\*1</sup>

$(\infty, 0)$ -圏と呼ばれる組合せ的对象を調べる事と位相空間をホモトピー群を通して調べる事は等価である、というのがホモトピー仮説の内容であった。そしてその組合せ的对象のモデルとして Kan 複体を採れば、この仮説は定理と言える。これがここ数十年間でのホモトピー論・高次元圏論における1つの最も大きな結果だと言えるだろう。ホモトピー仮説自体は20世紀後半には Grothendieck たちにより考えられていたようだが (例えば [4] に Quillen への手紙がある)、その定式化ないし解決には Joyal と Lurie の貢献が大きい ([7] や [10] など)。

もちろん他の高次元圏もこれまでに研究されてきており、例えば  $\omega$ -圏を単体的手法を用いて調べるために stratified simplicial set<sup>\*2</sup> という概念が導入されている<sup>\*3</sup>。次節で定義を与えるが、これはいくらかの単体が指定された単体的集合である。[18]において Verity は、特別なクラスの stratified simplicial set が Kan 複体と  $\omega$ -圏の共通の一般化であることを示した。そして現在では、stratified simplicial set を使って  $(\infty, n)$ -圏のモデルが構

---

<sup>\*1</sup> もちろん他にも色々な概念がある。例えば位相空間は距離空間の一般化であるが、非対称距離空間も距離空間のまた別の一般化である。

<sup>\*2</sup> simplicial set with marking とか marked simplicial set とか simplicial set with hollowness と呼ばれる。この講演では印付単体的集合と呼ぶ事にしたい。

<sup>\*3</sup> [15] や [17] による  $\omega$ -圏に関するある予想を解くために [19] で導入されたようである。

成できるという事が専門家の間では認められているようである ([12])。

すなわち Verity らの一連の仕事により、 $(\infty, n)$ -圏の単体的なモデルが手に入ったという格好になっている。一方で、代数的位相幾何学においてよく知られているように、 $(\infty, 0)$ -圏のモデルである Kan 複体に対しては単体的ホモトピー論と呼ばれる幾何学がある。そこで我々は、単体的ホモトピー論の諸々の幾何学的構成が stratified simplicial set による  $(\infty, n)$ -圏の単体的なモデルに対してまでどれくらい持ち上がるのかを調べてみたい。

ひとまずの試みとして、単体的ホモトピー群やループ空間などの単体的ホモトピー論における基本的な構成が stratified simplicial set の枠組みにまで素直に持ち上がることがチェックできたので、そのことを報告する。

## 2 単体的集合の印付け

まずは単体的集合の定義を思い出しておく。

**定義 2.1.**  $\Delta$  と書いて、有限全順序集合  $[n] := \{0 < 1 < \dots < n\} (n \in \mathbb{N})$  を対象とし、順序を保つ写像を射とする圏を表すものとする。集合の圏  $\mathbf{Set}$  に値を持つ  $\Delta$  上の前層のことを単体的集合という。単体的集合の間の射は前層の間の自然変換である。

単体的集合のなす圏には  $(\infty, 1)$ -圏のモデル構造が入ることが知られていて、さらにそのある局所化として  $(\infty, 0)$ -圏のモデル構造が入ることも知られている ([7])。そしてそれが位相空間の伝統的なホモトピー論に一致するというのは古典的な事実である ([16])。従って、 $n \geq 2$  に対して  $(\infty, n)$ -圏はどうなっているのかということが自然と問題になるだろう。<sup>\*4</sup>

単体的集合の単体を適切に“印付ける”事でそれらの高次元圏が単体的手法を用いて調べられる事が知られている。

**定義 2.2** ([19]). 対  $(X, mX)$  が印付単体的集合 (stratified simplicial set) であるとは

- $X$  は単体的集合
- $mX$  は  $\bigcup_{n \geq 1} X_n$  の部分集合であり、任意の退化単体を含むもの

となっている事である。 $mX$  の元を  $X$  の印付けられた単体と呼ぶ。

---

<sup>\*4</sup> directed algebraic topology (例えば [3] など) と  $(\infty, 1)$ -圏との関係を問うのも自然であると思う。

印付けられた単体は、適切な意味で“可逆”な単体と見なすことができる。例えば退化した単体というのは同型射のような働きをするので印付けておく必要がある。

また、任意の単体的集合  $X$  に対して 2 つの極端な印付単体的集合が得られることが定義よりわかる。1 つはできるだけ多く印付けた  $(X, \bigcup_{n \geq 1} X_n)$  であり、もう 1 つはできるだけ少なく印付けた  $(X, dX)$  である。ここで  $dX$  は  $X$  の退化単体のなす集合である。以下、特に断りがなければ単体的集合  $X$  に対してそれに対応する印付単体的集合を  $(X, dX)$  とする。一般に、 $(X, mX)$  を  $X$  と略記することも多い。印付単体的集合の射とは、単体的集合の射であって印付けられた単体を印付けられた単体に写すものとする。

[18] などに従って基本的な印付単体的集合の用語を思い出しておく。擬圏 (quasicategory) や Kan 複体を定義するには、プレーンな horn inclusions だけ考えれば十分だったが、より高次の圏のためにはそれに色々な印付けを施したものが必要となる。

**定義 2.3** ([18], [14]).  $n \geq 1, k \in [n]$  として、以下の印付単体的集合を定義する。

- $\Delta[n]_t := (\Delta[n], d\Delta[n] \cup \{\text{Id}_{[n]}\})$
- $\Delta^k[n] := (\Delta[n], d\Delta[n] \cup \{\alpha \in \Delta[n] \mid \{k-1, k, k+1\} \cap [n] \subset \text{Im}(\alpha)\})$
- $\Lambda^k[n]$  とは、その台単体的集合が  $\Delta[n]$  の  $k$ -次ホーンであって、 $\Delta^k[n]$  から誘導される印付が定まっている印付単体的集合<sup>\*5</sup>
- $\Delta^k[n]'' := (\Delta[n], d\Delta[n] \cup \{\alpha \in \Delta[n] \mid \{k-1, k, k+1\} \cap [n] \subset \text{Im}(\alpha)\} \cup \Delta[n][n-1])$   
つまり  $\Delta^k[n]$  の全ての  $n-1$ -単体をさらに印付けて得られるものである。同様に、 $\Lambda^k[n]'$  を  $\Lambda^k[n]$  の全ての  $n-1$ -単体をさらに印付けて得られる印付単体的集合とする。
- $\Delta^k[n]' := \Delta^k[n] \cup \Lambda^k[n]'$
- $\Delta[3]_{eq} := (\Delta[3], \bigcup_{n \geq 1} \Delta[3][n] \setminus \{[01], [23]\})$   
ここで、 $[01]$  と  $[23]$  はそれぞれ、 $\Delta[3][1]$  の元であって像が  $\{0, 1\}$  と  $\{2, 3\}$  であるものである。
- $\Delta[3]^\# := (\Delta[3], \bigcup_{n \geq 1} \Delta[3][n])$

高次圏の同型射だけでなく、同値射もうまく扱うためには saturated condition と呼ばれるものを導入する必要がある ([14])。そのために印付単体的集合の結 (join) という概念を導入する。これは有限全順序集合の“足し算”から自然に定まるものであり、位相空間

<sup>\*5</sup>  $\{\delta^i : [n-1] \rightarrow [n] \mid i \in [n] \setminus \{k\}\}$  で生成される  $\Delta[n]$  の部分単体的集合の標準的な記法  $\Lambda^k[n]$  と被っているが、 $(\Lambda^k[n], d\Lambda^k[n])$  とは別物である

の結の類似でもある。

**定義 2.4.** 圏  $\Delta$  に空な順序集合  $[-1] = \emptyset$  を始対象として添加して得られる圏を  $\Delta_+$  と書くことにする。Set に値を持つ  $\Delta_+$  上の前層のことを添加単体的集合 (*augmented simplicial set*) という。

$\Delta_+$  の2つの射  $\theta : [n] \rightarrow [m]$  と  $\theta' : [n'] \rightarrow [m']$  に対し、それらを単に並べる事で  $\Delta_+$  の射  $\theta \star \theta' : [n + n' + 1] \rightarrow [m + m' + 1]$

$$\theta \star \theta'(i) = \begin{cases} \theta(i) & 0 \leq i \leq n \\ \theta'(i - n - 1) + m + 1 & n + 1 \leq i \leq n + n' + 1 \end{cases}$$

を得る。これは  $\Delta_+$  にモノイダル構造を誘導する。 $[-1]$  が単位対象となる。

そしてこのモノイダル構造の Day convolution により、添加単体的集合のなす圏にもモノイダル構造が誘導され、その積を再び  $\star$  で表す事にする。

単体的集合  $X$  に対して、 $X_{-1} = *$  とおくことでこのモノイダル構造をさらに単体的集合のなす圏にも誘導できる。(昔からよく知られている構成であるが、例えば [1] や [8] にまとまった記述がある。) 具体的には、単体的集合  $X$  と  $Y$  に対してその結  $X \star Y$  の  $n$ -単体的なす集合は

$$(X \star Y)_n = \bigcup_{\substack{k, l \geq -1 \\ k+l=n-1}} X_k \times Y_l$$

となっている。

[18] に従って、印付単体的集合  $(X, m X)$  と  $(Y, m Y)$  に対してもその結を、台単体的集合は直上で定めた  $X \star Y$  であり、

$$x \star y \in m(X \star Y) \Leftrightarrow x \in m X \text{ または } y \in m Y$$

で得られる印付単体的集合として定める。

これを使って本講演の主な研究対象である ( $n$ -trivial) saturated weak complicial set が定義できる。

**定義 2.5** ([18], [14], [12]).  $X$  を印付単体的集合、 $[n] \in \Delta$ 、 $k \in [n]$ 、 $[l] \in \Delta_+$  とする。

1.  $\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta^k[n]$  と  $\Delta^k[n]' \hookrightarrow \Delta^k[n]''$  に右持ち上げ性質を持つとき、 $X$  は *weak complicial set* という\*6

---

\*6 weak を付けずに complicial set と呼ぶ文献もあるが、別のものを complicial set と呼ぶ文献もある。なお、complicial という単語は composition と simplicial から作った造語らしい。

2.  $X$  が *weak complicial set* であって、さらに  $\Delta[l] \star \Delta[3]_{eq} \hookrightarrow \Delta[l] \star \Delta[3]^\sharp$  に右持ち上げ性質を持つとき、 $X$  は *saturated weak complicial set* という
3. 任意の  $m > n$  に対し  $\Delta[m] \hookrightarrow \Delta[m]_t$  に右持ち上げ性質を持つとき、 $X$  は *n-trivial* という

これらの概念のためのホモトピー論も存在する。

**定理 2.6** ([18], [14], [12]). 印付単体的集合のなす圏  $\mathbf{msSet}$  にはそれぞれ、*weak complicial set*、*saturated weak complicial set*、*n-trivial saturated weak complicial set* がちょうどファイブランク対象であるようなモデル構造が入る。<sup>\*7</sup>

この講演では、*saturated weak complicial set* をファイブランク対象とするモデル構造を  $(\infty, \infty)$ -圏のモデル構造と呼び<sup>\*8</sup>、*n-trivial saturated weak complicial set* をファイブランク対象とするモデル構造を  $(\infty, n)$ -圏のモデル構造と呼ぶ事にしたい。実は、擬圏と Kan 複体はそれぞれ *1-trivial saturated weak complicial set* と *0-trivial saturated weak complicial set* と同一視できる ([14])。特に、Kan 複体はその 0-単体以外の全ての単体を印付ける事により *0-trivial saturated weak complicial set* となる。

この翻訳に則って、Kan 複体に対する色々な幾何学的構成を (*n-trivial saturated*) *weak complicial set* にまで適用していきたいというのがこの講演の研究の動機である。<sup>\*9</sup>

## 3 主結果

### 3.1 単体的ホモトピー群の拡張

Kan 複体に対するホモトピー群の構成はいくつか知られているが、この節では Kan による組合せ論的構成が *weak complicial set* の枠組みにまで自然に持ち上がり、モノイドに値を持つ不変量が構成できる事を確認する。印付単体的集合のカルテジアン積を  $\otimes$  で表す事にする。

**定義 3.1** ([18]).  $f, g : A \rightarrow X$  を印付単体的集合の射とする。この時、 $f \sim g$  とは以下の

<sup>\*7</sup> ここで挙げられているどのモデル構造においても、任意の対象がコファイブランクである

<sup>\*8</sup> これは標準的な言葉遣いではないかもしれない。詳しくは [12] 参照のこと。

<sup>\*9</sup> 例えば Verity は [19] で “It is sometimes instructive to think of  $\omega$ -categories as being *oriented combinatorial CW-complexes or globular spaces and ...*” と述べている。

図式を可換にする射  $H$  が存在することをいう。

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes \Delta[0] & \xrightarrow{\cong} & A \\
 \downarrow 1_A \times \delta^1 & & \searrow f \\
 A \otimes \Delta[1]_t & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow 1_A \times \delta^0 & & \nearrow g \\
 A \otimes \Delta[0] & \xrightarrow{\cong} & A
 \end{array}$$

この  $H$  はホモトピーと呼ばれるものだが、我々の目的は単体的ホモトピー群の類似物の構成なので、同様にして相対ホモトピーの概念も用意しておく。

**定義 3.2.**  $f, g : A \rightarrow X$  を印付単体的集合の射とし、 $B \subset A$  とする。さらに  $f|_B = g|_B$  とする。 $f \sim_B g$  とは  $f \sim g$  であって以下の可換図式があることをいう。

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes \Delta[1]_t & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow \cup & & \uparrow f|_B = g|_B \\
 B \otimes \Delta[1]_t & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

ここで  $H$  は  $f \sim g$  を与える射である。

Verity の定理 ([18, Theorem 75]) と Kan 複体に対する古典的な議論 ([9] や [2] や [11] など) を使って以下を得る。<sup>\*10</sup>

**補題 3.3.** 任意の *weak complicial set*  $X$  に対して、上で定義した二項関係は同値関係である。

$X$  を *weak complicial set* とし、 $x \in X$  をその 0-単体とし、 $n \geq 1$  を自然数とする。 $\tau_n(X, x)$  を以下の図式を可換にするような  $n$ -単体  $\alpha$  たちの  $\sim_{\partial\Delta[n]}$  による同値類のなす集合とする。

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \uparrow \cup & & \uparrow x \\
 \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \Delta[0]
 \end{array}$$

<sup>\*10</sup> ここには *saturated condition* は必要ない

Kan 複体の単体的ホモトピー群の群構造 ([9] や [2] や [11] など) を思い出して以下の対応を考える。

境界が  $x$  になっている 2 つの  $n$ -単体  $\alpha$  と  $\beta$  に対して、 $(x, x, \dots, x, \alpha, -, \beta) : \Delta^n[n+1] \rightarrow X$  を考える。つまり 0 番目から  $n-2$  番目までの  $n$  単体は一点  $x$  に潰れていて、 $n-1$  番目が  $\alpha$  で  $n+1$  番目が  $\beta$  になっているようなホーンを考える。 $n$  番目の面は与えられていない。任意の退化単体が印付けられていて、 $X$  が今 weak complicial set であることから、これは  $\theta : \Delta^n[n+1] \rightarrow X$  に延びる。そして  $n$ -単体  $d_n(\theta)$  を得る。

次の命題は、weak complicial set の右持ち上げ性質を用いて、Kan 複体に対する単体的ホモトピー群のものと同様な議論で証明される。

**命題 3.4** ([5]).  $[\alpha]$  と  $[\beta]$  の積を  $[\alpha][\beta] := [d_n(\theta)]$ 、 $[x]$  を単位元として  $\tau_n(X, x)$  はモノイドとなる。

$X$  が Kan 複体の時、それに対応する 0-trivial weak complicial set を  $\text{th}_0(X)$  と書けば、構成から  $\pi_n(X, x) \cong \tau_n(\text{th}_0(X), x)$  がわかる。 $n=0$  の時でも同様に  $\pi_n$  を  $\tau_n$  に拡張できる。そしてこれらの構成は全て関手的なので、結局以下の図式が手に入った事になる。<sup>\*11</sup>

$$\begin{array}{ccc}
 (\infty, \infty)\text{-Cat} & \xrightarrow{\tau_n} & \text{Mon} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (\infty, 0)\text{-Cat} & \xrightarrow{\pi_n} & \text{Grp}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (\infty, \infty)\text{-Cat} & \xrightarrow{\tau_0} & \text{Set} \\
 \uparrow & & \parallel \\
 (\infty, 0)\text{-Cat} & \xrightarrow{\pi_0} & \text{Set}
 \end{array}$$

ここで  $(\infty, \infty)\text{-Cat}$  は saturated weak complicial set のなす圏、 $(\infty, 0)\text{-Cat}$  は 0-trivial saturated weak complicial set あるいは Kan 複体のなす圏であり、Mon と Grp はそれぞれモノイドと群のなす圏である。

### 3.2 印付単体的集合のループ空間

次に、従来のホモトピー群とループ空間との関係  $\pi_{n+1} = \pi_n \circ \Omega$  が印付単体的集合の枠組みに持ち上がるかどうかを確かめたい。 $\tau_*$  は、少なくとも形式的には、球面からの射で定義されているわけではないことに注意したい。これが持ち上がるかどうかを確認するためには、 $\tau_*$  が weak complicial set に対してしか定義されていないことから、 $X$  が weak

<sup>\*11</sup> 0 でない  $n$  に対して、msSet に入る  $(\infty, n)$ -圏のモデル構造の弱同値は  $\tau_*$  の同型で与えられているわけではない。詳細は [18] や [12] 参照のこと。

complicial set ならそのループ空間もそうであるかどうかをまずは調べたい。そのためにはそもそも印付単体的集合のループ空間という概念を定義する必要があるので、[13] の懸垂の構成を参考にして約懸垂を定義してみる。

**定義 3.5** ([6]).  $X$  を基点付印付単体的集合とする。 $X$  の約懸垂  $\Sigma_+(X)$  を以下の押し出しで定める。

$$\begin{array}{ccc} X \cup \langle *x \rangle & \longrightarrow & \Delta[0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[0] \star X & \longrightarrow & \Sigma_+(X) \end{array}$$

ここで  $\langle *x \rangle \subset \Delta[0] \star X$  は  $\Delta[0]$  の基点と  $X$  の基点  $x$  から生成される印付単体的集合である。そしてこの構成は、基点付印付単体的集合のなす圏  $\mathbf{msSet}_*$  上の自己関手  $\Sigma_+ : \mathbf{msSet}_* \rightarrow \mathbf{msSet}_*$  となる。

この関手  $\Sigma_+$  には右随伴関手として、ループ空間関手  $\Omega : \mathbf{msSet}_* \rightarrow \mathbf{msSet}_*$  があるが、[13, Lemma 2.7] の類似により以下がわかる。これは  $\Omega$  がループ空間を与える関手であるというからには成り立っていてほしい事実である。

**定理 3.6** ([6]).  $\Omega$  は基点付  $(\infty, n+1)$ -圏のモデル構造から基点付  $(\infty, n)$ -圏のモデル構造への右 *Quillen* 関手でもあり、基点付  $(\infty, \infty)$ -圏のモデル構造から基点付  $(\infty, \infty)$ -圏のモデル構造への右 *Quillen* 関手でもある。特に  $X$  が基点付  $(n+1\text{-trivial})$  *saturated weak complicial set* ならば  $\Omega(X)$  は基点付  $(n\text{-trivial})$  *saturated weak complicial set* である。

**証明.** 定義 2.5 で挙げられている  $(n\text{-trivial})$  *saturated weak complicial set* を定める acyclic cofibration を  $\Sigma_+$  で写した時に、それが弱同値になっていることをチェックすれば良い。□

これによってループ空間の構成が基点付 *saturated weak complicial set* にまで持ち上がった事になる。

$$\begin{array}{ccc} (\infty, \infty)\text{-Cat}_* & \xrightarrow{\Omega} & (\infty, \infty)\text{-Cat}_* \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\infty, 0)\text{-Cat}_* & \xrightarrow{\Omega} & (\infty, 0)\text{-Cat}_* \end{array}$$

さらに言えば、 $X$  が基点付 *saturated weak complicial set* であればそのループ空間  $\Omega(X)$  の  $\tau_n$  たちが意味を持つ概念となった。系として、本節の目的であった次の同型を得る。

系 3.7 ([6]). 基点付 *saturated weak complicial set*  $(X, x)$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対し以下のモノイドの同型がある

$$\tau_{n+1}(X, x) \cong \tau_n(\Omega(X), x)$$

証明. ジョインの定義より  $\Delta[n+1] \cong \Delta[0] \star \Delta[n]$  が従い、約懸垂とループ空間の随伴性から全単射  $\tau_{n+1}(X, x) \cong \tau_n(\Omega(X), x)$  を得る。  $\tau_m$  の積構造の定義より、これが求めるべきモノイド同型を与えることがわかる。  $\square$

定理 3.6 と系 3.7 と Kan 複体の 2 次以上のホモトピー群が可換であるという古典的事実を使えば、自然数  $n \geq 0$  と  $k \geq n+1$ 、基点付  $n$ -trivial saturated weak complicial set  $(X, x)$  に対して、  $\tau_k(X, x)$  は群になり、  $\tau_{k+1}(X, x)$  は可換群になってしまうということもわかる。<sup>\*12</sup>

## 参考文献

- [1] P. J. Ehlers and Tim Porter, Joins for (Augmented) Simplicial Sets, Jour. Pure Applied Algebra, 145 (2000) 37-44,
- [2] Paul Goerss, Rick Jardine, Simplicial homotopy theory, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1996)
- [3] Grandis, Marco Directed algebraic topology. Models of non-reversible worlds. New Mathematical Monographs, 13. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. x+434 pp.
- [4] Alexander Grothendieck, Pursuing Stacks, 1983
- [5] R. Horiuchi, On complicial homotopy monoids, arXiv:2006.05058
- [6] R. Horiuchi, On loop spaces with marking, arXiv:2104.11860
- [7] A. Joyal, The theory of quasi-categories, in preparation.
- [8] A. Joyal, Quasi-categories and Kan complexes, J. Pure Appl. Algebra, 175 (2002), 207-222.
- [9] Dan Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 67, No. 2 (Mar., 1958), pp. 282-312
- [10] J. Lurie, Higher topos theory, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659

---

<sup>\*12</sup>  $\tau_k(X, x)$  が群になる事は構成からでもすぐにわかる。

- [11] Peter May, *Simplicial objects in algebraic topology*, University of Chicago Press, 1967
- [12] Viktoriya Ozornova and Martina Rovelli, Model structures for  $(\infty, n)$ -categories on (pre)stratified simplicial sets and prestratified simplicial spaces, *Algebr. Geom. Topol.* 20 (2020), no. 3, 1543-1600. MR 4105558
- [13] Viktoriya Ozornova and Martina Rovelli, Fundamental pushouts of  $n$ -complicial sets, arXiv:2005.05844
- [14] Riehl, Emily, *Complcial sets, an overture*. 2016 MATRIX annals, 49-76, MATRIX Book Ser., 1, Springer, Cham, 2018.
- [15] J.E. Roberts, *Complicial sets*, handwritten manuscript, 1978.
- [16] Dan Quillen, *Homotopical Algebra*, LNM 43, Springer, (1967)
- [17] R.H. Street, The algebra of oriented simplexes, *J. Pure Appl. Algebra* 49 (1987) 283-335.
- [18] D. Verity, Weak complicial sets. I. Basic homotopy theory, *Adv. Math.* 219 (2008), no. 4, 1081-1149,
- [19] Dominic Verity, Complicial sets characterising the simplicial nerves of strict  $\omega$ -categories, *Mem. Amer. Math. Soc.* 193 (2008), no. 905, xvi+184. MR 2399898

# 層の圏上のパーシステンス的距離と シンプレクティック幾何における分離エネルギー

池 祐一 (東京大学 情報理工学系研究科)\*

## 1. 序論

柏原と Schapira によって創始された超局所層理論は層係数のモース理論ともいえるもので、多様体上の層を局所的にだけでなく余接束内で局所的(超局所的)に調べることで層の詳しい解析を可能にする。この理論は偏微分方程式の研究に端を発し、 $D$ 加群理論や特異点論などに応用されてきた。近年, Nadler–Zaslow [NZ09] と Tamarkin [Tam18] の先駆的な仕事をはじめとして、超局所層理論をシンプレクティック幾何に応用する研究が盛んに行われている。本講演では話を余接束に限って、Tamarkin 流のシンプレクティック幾何への層理論的アプローチ・講演者と浅野知紘氏との共同研究 [AI20a] で得られたハミルトニアンによる分離エネルギーの層理論的下限を与える手法について説明する予定である。

## 2. 超局所層理論におけるマイクロ台

この節では柏原と Schapira により創始された超局所層理論について解説する。超局所層理論において最も重要な概念の一つは「層に関する臨界点」を記述するマイクロ台というものである。ここでは基本的な文献 [KS90] に従ってマイクロ台の定義と基本性質を説明する。

まず層に関する記号を準備する。本稿では以下  $\mathbf{k}$  を体とする。位相空間  $X$  に対して、 $\mathbf{k}_X$  で茎が  $\mathbf{k}$  の定数層をあらわし、 $\text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  で  $X$  上の  $\mathbf{k}$  ベクトル空間の層 ( $\mathbf{k}_X$  加群) のなすアーベル圏をあらわす。超局所層理論では導来圏で物事を考える方が適しており、ここでもその考えに従い  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) := \mathbf{D}^b(\text{Mod}(\mathbf{k}_X))$  で  $X$  上の  $\mathbf{k}$  ベクトル空間の層の有界導来圏をあらわす。適切な条件のもとで、導来圏の間の函手である Grothendieck の六演算  $\otimes, R\mathcal{H}om, f^{-1}, Rf_*, Rf!, f^!$  ( $f: X \rightarrow Y$  は連続写像) が定まる。

六演算には入らないが重要な演算である相対コホモロジーについて少し説明する。これは制限射が単射・全射・同形であるかを調べるための重要な概念である。 $Z$  を  $X$  の閉部分集合、 $F \in \text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  とする。 $X$  の開部分集合  $V$  に対して

$$\begin{aligned} \Gamma_{Z \cap V}(V; F) &:= \text{Ker}(\Gamma(V; F) \rightarrow \Gamma(V \setminus Z; F)) \\ &= \{s \in \Gamma(V; F) \mid \text{supp}(s) \subset Z \cap V\} \end{aligned}$$

と定める。すると、対応  $V \mapsto \Gamma_{Z \cap V}(V; F)$  は層を定めることが確かめられ、これを  $\Gamma_Z(F) \in \text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  とあらわす。函手  $\Gamma_Z(*): \text{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  は左完全函手となるので、その右導来函手  $R\Gamma_Z(*): \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  が定まる。その大域切断を  $R\Gamma_Z(X; F) := R\Gamma(X; R\Gamma_Z(F))$  と書き、 $j \in \mathbb{Z}$  に対して  $H_Z^j(X; F) := H^j R\Gamma_Z(X; F)$  と

本研究は科研費(課題番号:15J07993)の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 37J11, 53D35, 55N31, 35A27

キーワード: 超局所層理論, 分離エネルギー, 層量子化

\* 〒113-8654 東京都文京区本郷7-3-1 東京大学 大学院情報理工学系研究科

e-mail: ike@mist.i.u-tokyo.ac.jp, yuichi.ike.1990@gmail.com

において  $Z$  に台を持つ  $j$  次相対コホモロジーと呼ぶ.  $U := X \setminus Z$  とすると, 完全三角

$$R\Gamma_Z(X; F) \rightarrow R\Gamma(X; F) \rightarrow R\Gamma(U; F) \xrightarrow{+1}$$

が得られる. コホモロジーを取れば次の長完全列が得られる:

$$\cdots \rightarrow H_Z^j(X; F) \rightarrow H^j(X; F) \rightarrow H^j(U; F) \rightarrow H_Z^{j+1}(X; F) \rightarrow \cdots$$

上の完全三角あるいは長完全列から,  $R\Gamma_Z(X; F)$  は  $U = X \setminus Z$  上の切断の空間と  $X$  全体上の切断の空間のずれをあらわすことが分かる. 特に  $R\Gamma_Z(X; F) \simeq 0$  であれば制限射について同形  $R\Gamma(X; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U; F)$  が成り立つ. トポロジーでは  $H_Z^j(X; F)$  は  $H^j(X, X \setminus Z; F)$  と書かれることが多い.

以降最後まで連結な境界のない  $C^\infty$  級多様体上の層を考える. 多様体  $X$  に対して,  $\pi: T^*X \rightarrow X$  で  $X$  の余接束をあらわし,  $0_X$  でそのゼロ切断をあらわす. また,  $X$  の閉部分多様体  $M$  に対して,  $X$  内の  $M$  に対する余法束を  $T_M^*X$  であらわす.

以下この節の最後まで  $X$  を多様体とする. 層のマイクロ台とは大雑把に言えば層のコホモロジーを同形に拡張できない余方向をあらわす余接束の部分集合である. まず, マイクロ台の定義を与え, その後で定義が直感的に何を言っているのかを説明する.

**定義 2.1.**  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  の マイクロ台 (microsupport)  $\text{SS}(F) \subset T^*X$  を次で定義する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{点 } p \in T^*X \text{ が } p \notin \text{SS}(F) \text{ であるとは, } p \text{ の } T^*X \text{ 内での開近傍 } U \text{ が存在して,} \\ \text{任意の } x_0 \in X \text{ と任意の } C^\infty \text{ 級関数 } \varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ で } d\varphi(x_0) \in U \text{ を満たすもの} \\ \text{に対して } R\Gamma_{\{\varphi \geq \varphi(x_0)\}}(F)_{x_0} \simeq 0 \text{ となることをいう.} \end{array} \right.$$

余方向だけを考えているので  $\text{SS}(F)$  は  $T^*X$  の錐状 ( $\mathbb{R}_{>0}$  の作用で不変な) 閉部分集合となる.

上のマイクロ台の定義の気持ちを直感的に説明しよう.  $p \in T^*X \setminus 0_X$  として  $p \notin \text{SS}(F)$  の条件を考える. 定義の「 $U$  が存在して」という部分は  $d\varphi(x_0)$  が十分  $p$  に近いというだけのことだからここでは無視して,  $x_0 \in X$  と  $C^\infty$  級関数  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x_0 := \pi(p)$  かつ  $\varphi(x_0) = 0, d\varphi(x_0) = p$  を満たすように取る. このとき,  $\{\varphi = 0\}$  は  $x_0$  の近傍で滑らかな超曲面となり, 領域  $\{\varphi < 0\}$  は境界  $\{\varphi = 0\}$  の点  $x_0$  において外向き法線ベクトル  $p = d\varphi(x_0)$  を持つ (図 2.1 を参照).  $R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{x_0} \simeq 0$  という条件はコホモロジーを取って考えれば, 任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\varinjlim_{x_0 \in V} H_{\{\varphi \geq 0\}}^j(V; F) \simeq 0$$

であることと同値である. ここで  $V$  は  $X$  内の  $x_0$  の開近傍をわたる. 相対コホモロジーの長完全列を考えれば, これは任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対して制限写像

$$\varinjlim_{x_0 \in V} H^j(V \cup \{\varphi < 0\}; F) \rightarrow \varinjlim_{x_0 \in V} H^j(\{\varphi < 0\}; F)$$

(切除により同値だが局所的に書けば制限写像  $\varinjlim H^j(V; F) \rightarrow \varinjlim H^j(V \cap \{\varphi < 0\}; F)$ ) が同形であることと同値である. 状況は以下の図 2.1 を参照せよ. つまり, この条件は

領域  $\{\varphi < 0\}$  における任意のコホモロジー類が一意的に  $p$  の方向に拡張できることを述べている. 実際 [KS90] では, マイクロ台は「コホモロジーが伝播しない余方向の集合」と表現されている.

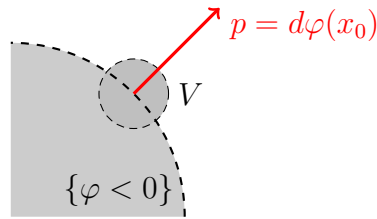


図 2.1:  $p \in T^*X$ , 領域  $\{\varphi < 0\}$  および  $V$  の状況

**例 2.2.** (i) 0 でない局所定数層  $F$  に対して  $SS(F) = 0_X$  である. 逆に  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  が  $SS(F) \subset 0_X$  を満たすならば, 任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対して  $H^j(F)$  は局所定数層である.

(ii) 閉区間  $[0, 1]$  上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層のゼロ拡張で定義される  $\mathbb{R}$  上の層  $\mathbf{k}_{[0,1]} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}})$  を考えよう. この層のマイクロ台は以下の図 2.2 のようになる.

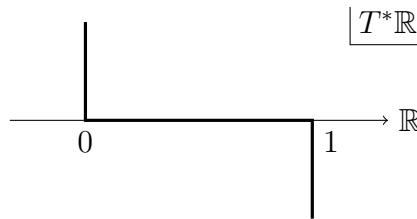


図 2.2:  $SS(\mathbf{k}_{[0,1]})$

$(0; 1) \in T^*\mathbb{R}$  がマイクロ台に入り,  $(0; -1) \in T^*\mathbb{R}$  が入らない理由を説明する. まず  $(0; 1)$  について判断するには, マイクロ台の定義から  $(-\infty, 0)$  と十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対する  $(-\infty, \varepsilon)$  上の切断を比べればよい. ここで

$$R\Gamma((-\infty, 0); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq 0, \quad R\Gamma((-\infty, \varepsilon); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}$$

である. したがって, 0 においては正の方向にコホモロジーが同形に拡張できないので  $(0; 1)$  はマイクロ台  $SS(\mathbf{k}_{[0,1]})$  に入ることが分かる.  $(0; -1)$  についても同様に考えればよいが, 今度は十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して

$$R\Gamma((0, +\infty); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}, \quad R\Gamma((-\varepsilon, +\infty); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}$$

である. ゆえに, 0 において負の方向にはコホモロジーは同形にのびるので,  $(0; -1)$  はマイクロ台  $SS(\mathbf{k}_{[0,1]})$  に入らない.

(iii) (ii) の一般化として次を示すことができる.  $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数として, 任意の  $x \in \psi^{-1}(0)$  に対して  $d\psi(x) \neq 0$  であると仮定する.  $X$  の開部分集合  $U$  と閉部分集合  $Z$  を  $U := \{x \in X \mid \psi(x) > 0\}$ ,  $Z := \{x \in X \mid \psi(x) \geq 0\}$  で定める. すると,  $U$  および  $Z$  上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層の  $X$  へのゼロ拡張  $\mathbf{k}_U$  および  $\mathbf{k}_Z$  について

$$\begin{aligned} SS(\mathbf{k}_U) &= 0_X|_U \cup \{(x; c d\psi(x)) \mid \psi(x) = 0, c \leq 0\}, \\ SS(\mathbf{k}_Z) &= 0_X|_Z \cup \{(x; c d\psi(x)) \mid \psi(x) = 0, c \geq 0\} \end{aligned}$$

となる。つまり境界が滑らかな開部分集合上の定数層のゼロ拡張のマイクロ台は境界では外向きに、閉部分集合上の定数層のゼロ拡張のマイクロ台は境界では内向きに現れる。

(iv)  $M$  を  $X$  の閉部分多様体とする。このとき、 $SS(\mathbf{k}_M) = T_M^*X$  である。これは大雑把には  $M$  から法方向に動くときだけコホモロジーが変化することを言っている。

上でマイクロ台は「層に関する臨界点」を記述すると述べたが、それを明らかにするのが次の定理である。 $F$  が定数層  $\mathbf{k}_X$  の場合は、例 2.2(i) と合わせて「臨界値を越えなければ劣位集合のコホモロジーは同形である」という古典的なモース理論のコホモロジーに関する主張に対応する。

**定理 2.3** (超局所的モースの補題).  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数、 $a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  とする。さらに  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  とし、次を仮定する：

- (1)  $\varphi$  は  $\text{Supp}(F)$  上固有である。
- (2) 任意の  $x \in \varphi^{-1}([a, b])$  に対して、 $d\varphi(x) \notin SS(F)$  である。

このとき、制限射  $R\Gamma(\varphi^{-1}((-\infty, b)); F) \rightarrow R\Gamma(\varphi^{-1}((-\infty, a)); F)$  は同形である。

ここでは詳しくは述べないが、Grothendieck の六演算を施した後の層のマイクロ台は演算を施す前の層たちのマイクロ台を使って評価することが可能である。

### 3. シンプレクティック幾何への層理論的アプローチ

この節では Tamarkin [Tam18] に端を発するシンプレクティック幾何への超局所層理論的アプローチの基礎について説明する。Tamarkin 圏とそこでの分離定理により余接束の二つのコンパクト部分集合が交わることを層理論的に示すことができる。さらに、Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] によるハミルトンアイソトピーの層量子化を用いることで余接束へのハミルトニアン作用を Tamarkin 圏に持ち上げられることも説明する。

以下最後まで  $M$  を (コンパクトとは限らない) 連結な境界のない多様体とする。

#### 3.1. Tamarkin の分離定理 ([Tam18, GS14])

Tamarkin は層の導来圏から Tamarkin 圏  $\mathcal{D}(M)$  を構成し、そこでの射の空間を用いて  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合が交わることを示せる分離定理を得た。基本的なアイデアは、 $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対してマイクロ台が  $A$  に含まれる  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_M)$  の部分圏  $\mathbf{D}_A^b(\mathbf{k}_M)$  を考え、二つのコンパクト部分集合  $A, B$  に対して射の空間  $\text{Hom}(\mathbf{D}_A^b(\mathbf{k}_M), \mathbf{D}_B^b(\mathbf{k}_M))$  を見ることで共通部分  $A \cap B$  を調べるというものである。しかし、層のマイクロ台は常に錐状であるから、一般の錐状ではないコンパクト集合に対してはこの単純なアイデアは上手く働かない。そこで Tamarkin が用いたトリックは底空間に 1 変数を付け足しコンパクト部分集合を錐状化して  $M \times \mathbb{R}_t$  上の層を考えるといるものである。 $(x; \xi)$  で  $T^*M$  の斉次局所座標をあらわし、 $(t; \tau)$  で  $T^*\mathbb{R}$  の標準的な斉次座標をあらわす。そして  $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対しては、その錐  $c(A) := \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0, (x; \xi/\tau) \in A\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  にマイクロ台が含まれる  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t})$  の部分圏を考えるのである。すると、 $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  の中の  $\Omega_+ := \{\tau > 0\}$  だけでマイクロ台を考える必要があるため、次のように部分圏  $\{F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}) \mid SS(F) \subset \{\tau \leq 0\}\}$  で割った商圏 (超局所化圏) を用いる。

**定義 3.1.**  $\Omega_+ := \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  とする. **Tamarkin 圏**  $\mathcal{D}(M)$  を

$$\mathcal{D}(M) := \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}; \Omega_+) = \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}) / \{F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}) \mid \text{SS}(F) \subset \{\tau \leq 0\}\}$$

で定める.  $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対して,  $\mathcal{D}(M)$  の充満部分圏  $\mathcal{D}_A(M)$  を

$$\mathcal{D}_A(M) := \{F \in \mathcal{D}(M) \mid \text{SS}(F) \cap \Omega_+ \subset c(A) := \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0, (x; \xi/\tau) \in A\}\}$$

で定める.

上では  $\mathcal{D}(M)$  を導来圏の商圏として定義したが, 商圏のままでは扱いが困難になる問題がある. そこで Tamarkin [Tam18] はある射影子を用いて  $\mathcal{D}(M)$  を  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t})$  の充満部分圏と同一視して議論を行った. このテクニックにより  $\mathcal{D}(M)$  とそこでの射の空間の扱いがはるかに簡単になるが, ここでは詳しく説明しない. この類の射影子の一般論は [GS14] も参照せよ.

$\mathcal{D}(M)$  の射の集合を用いて Tamarkin の分離定理の弱い形は次のように述べられる.

**命題 3.2** (Tamarkin の分離定理 (弱い形)).  $A, B$  を  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合とし,  $A \cap B = \emptyset$  と仮定する. このとき, 任意の  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  に対して,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \simeq 0$  が成り立つ.

この命題から,  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  であって  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \neq 0$  であるものを見つければ  $A \cap B \neq \emptyset$  であることが分かる. 実は上の分離定理は以下で説明する強い形の分離定理から従う. 超局所層理論では全ての対象を一旦は層として扱って, それらのマイクロ台を調べることで様々な同形を導くという手法がよく用いられる. ここでも射の集合  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G)$  を回復する層を用いて分離定理を示す. 実際, Tamarkin 圏  $\mathcal{D}(M)$  は内部 Hom 関手  $\text{Hom}^*: \mathcal{D}(M)^{\text{op}} \times \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  を持ち, それが

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \simeq H^0 R\Gamma_{[0, +\infty)}(\mathbb{R}_t; Rq_* \text{Hom}^*(F, G))$$

と射の集合を回復することが示せる. ここで  $q: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$  は  $\mathbb{R}_t$  への射影である. 重要なことは,  $\text{Hom}^*(F, G)$  は具体的に Grothendieck の六演算を用いて構成されるため, そのマイクロ台は  $F$  と  $G$  のマイクロ台で評価が可能であるということである. この内部 Hom 関手を用いて Tamarkin の分離定理の強い形は次のように述べられる.

**定理 3.3** (Tamarkin の分離定理 (強い形)).  $A, B$  を  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合とし,  $A \cap B = \emptyset$  と仮定する. このとき, 任意の  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  に対して  $Rq_* \text{Hom}^*(F, G) \simeq 0$  が成り立つ.

証明の概略. 一般に  $A$  と  $B$  の共通部分の仮定なしに, 任意の  $F, G \in \mathcal{D}(M)$  に対して  $R\Gamma(\mathbb{R}; Rq_* \text{Hom}^*(F, G)) \simeq 0$  となることが示せる. さらに, 仮定  $A \cap B = \emptyset$  と層の演算に関するマイクロ台の評価を用いると

$$\text{SS}(Rq_* \text{Hom}^*(F, G)) \subset 0_{\mathbb{R}_t}$$

となることがチェックできる. ゆえに, 例 2.2(i) で説明したことと  $\mathbb{R}_t$  が可縮であることから,  $Rq_* \text{Hom}^*(F, G)$  のコホモロジー層は  $\mathbb{R}_t$  上定数である. これら二つを合わせると  $Rq_* \text{Hom}^*(F, G) \simeq 0$  が得られる.  $\square$

### 3.2. ハミルトンアイソトピーの層量子化 ([GKS12])

ここでは Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] によるハミルトンアイソトピーの層量子化について解説する. 大雑把にはハミルトンアイソトピーのラグランジュグラフにマイクロ台が一致する層のことを層量子化と呼び, 彼らの論文では存在と一意性が証明されている. 前小節で述べたようにマイクロ台は錐状なので, ここでもハミルトンアイソトピーのグラフを錐状化して考える必要がある. 以下でこのテクニックについてもう少し詳しく説明する.

$T^*M$  の斉次局所座標  $(x; \xi)$  を用いて, Liouville 1-形式  $\theta$  を  $\theta := \langle \xi, dx \rangle$  により定める.  $I$  を閉区間  $[0, 1]$  を含む  $\mathbb{R}$  の開区間とし座標を  $s$  であらわす.  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  を時間依存するコンパクト台のハミルトン関数とすると, 時間依存する  $T^*M$  上のハミルトンベクトル場  $X_{H_s}$  が  $d\theta(X_{H_s}, *) = -dH_s$  により定まる. このハミルトンベクトル場のフローを  $\phi^H = (\phi_s^H)_{s \in I}: T^*M \times I \rightarrow T^*M$  と書き,  $H$  が生成するハミルトンアイソトピーと呼ぶ.

ハミルトンアイソトピー  $\phi^H$  は以下のように  $\hat{\phi}: \Omega_+ \times I \rightarrow \Omega_+$  に斉次に持ち上げることができる. ここで  $\Omega_+ = \{\tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  であったことを思い出そう. 関数  $\hat{H}: T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times I \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\hat{H}_s(x, t; \xi, \tau) := \tau \cdot H_s(x; \xi/\tau)$  により定める. すると  $\hat{H}$  は次数1の斉次関数, すなわち任意の  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $\hat{H}_s(x, t; c\xi, c\tau) = c \cdot \hat{H}_s(x, t; \xi, \tau)$  である.  $\hat{H}$  が生成するハミルトンアイソトピー  $\hat{\phi}: T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times I \rightarrow T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t})$  は次の図式を可換にする. ここで  $\rho: \Omega_+ \rightarrow T^*M, (x, t; \xi, \tau) \mapsto (x; \xi/\tau)$  である:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_+ \times I & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \Omega_+ \\ \rho \times \text{id}_I \downarrow & & \downarrow \rho \\ T^*M \times I & \xrightarrow{\phi^H} & T^*M. \end{array}$$

構成から  $\hat{\phi}$  は斉次ハミルトンアイソトピーである. すなわち任意の  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $\hat{\phi}_s(x, t; c\xi, c\tau) = c \cdot \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau)$  が成り立つ.

その斉次性により  $\hat{\phi}_s$  の  $T^*((M \times \mathbb{R}_t)^2)$  内のグラフは錐状ラグランジュ部分多様体となる. この錐状ラグランジュ部分多様体にマイクロ台が一致する  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2})$  の対象が存在するというのが Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] の主張である. 実は彼らはさらに強く, 時間  $s$  での切り口のマイクロ台が  $\hat{\phi}_s$  のグラフに一致するような族である  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  の対象を構成した. このように変形族として層が得られることが, 次節での応用に本質的に重要である. その族のマイクロ台を記述するために錐状ラグランジュ部分多様体  $\Lambda_{\hat{\phi}} \subset T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times T^*I$  を

$$\Lambda_{\hat{\phi}} := \left\{ \left( \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau), (x, t; -\xi, -\tau), (s; -\hat{H}_s \circ \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau)) \right) \left| \begin{array}{l} (x; \xi) \in T^*M, \\ (t; \tau) \in (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}), \\ s \in I \end{array} \right. \right\}$$

により定めよう. 錐状化の構成より

$$\hat{H}_s \circ \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau) = \tau \cdot (H_s \circ \phi_s^H(x; \xi/\tau))$$

であることが確かめられる.

**定理 3.4.** 上の状況で  $K \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  が一意的に存在して次を満たす：

- (1) マイクロ台について  $\text{SS}(K) \subset \Lambda_{\hat{\phi}} \cup 0_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I}$  が成り立つ.
- (2) 時刻  $s = 0$  において同形  $K|_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times \{0\}} \simeq \mathbf{k}_{\Delta_{M \times \mathbb{R}_t}}$  が成り立つ. ここで右辺は  $(M \times \mathbb{R}_t)^2$  の対角集合上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層のゼロ拡張である.

上の対象  $K$  を斉次ハミルトンアイソトピー  $\hat{\phi}$  の層量子化 (sheaf quantization) と呼ぶ. 簡単のため以下では  $K$  を  $\phi^H$  に付随した層量子化とも呼ぶ.  $s \in I$  に対して  $K_s := K|_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times \{s\}} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2})$  と定める. すると,  $K_s$  を核とする積分変換は関手  $\Phi_s^H := K_s \circ (*): \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  を誘導する. さらに,  $K_s$  のマイクロ台は  $\hat{\phi}_s$  のグラフであることとマイクロ台の評価により,  $\Phi_1^H$  は  $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対して関手  $\mathcal{D}_A(M) \rightarrow \mathcal{D}_{\phi_s^H(A)}(M)$  を誘導することも示せる. こうして  $T^*M$  へのハミルトニアン  $H$  の作用が Tamarkin 圏  $\mathcal{D}(M)$  へと持ち上げられた.

#### 4. 分離エネルギーの層理論的評価 ([AI20a])

前節で,  $T^*M$  のコンパクト部分集合が交わることを示せる分離定理と  $T^*M$  へのハミルトニアン  $H$  の作用を層の圏に持ち上げることができる層量子化について説明した. 二つのコンパクト部分集合が共通部分を持たなければ Tamarkin 圏における射の空間は 0 であり, 層量子化による積分変換で層をハミルトン変形することができる. そこでハミルトン変形する前の層と変形した後の層がどれくらい離れているかを層の世界で調べることができれば分離エネルギーを層理論的にはかることができると考えた. これを実行したのが浅野氏との共同研究 [AI20a] である.

まず分離エネルギーの定義を思い出そう. 前と同様に  $I$  を閉区間  $[0, 1]$  を含む  $\mathbb{R}$  の開区間とする. コンパクト台のハミルトン関数  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  の Hofer ノルム  $\|H\|$  を

$$\|H\| := \int_0^1 \left( \max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right) ds$$

で定める. さらに  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合  $A, B$  に対して

$$e(A, B) := \inf \{ \|H\| \mid H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R} \text{ はコンパクト台で } A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset \}$$

と定め,  $A$  と  $B$  の 分離エネルギー (displacement energy) と呼ぶ.  $e(A, B) = +\infty$  ならば任意の  $H$  に対して  $A \cap \phi_1^H(B) \neq \emptyset$ , すなわち  $A$  と  $B$  は分離不可能 (non-displaceable) であることに注意する.

エネルギー評価定理の主張を述べるために  $M \times \mathbb{R}_t$  上の平行移動が誘導する  $\mathcal{D}(M)$  における射について説明する.  $c \in \mathbb{R}$  に対して  $T_c: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M \times \mathbb{R}_t, (x, t) \mapsto (x, t + c)$  で  $\mathbb{R}_t$  方向への平行移動写像をあらわす. すると,  $F \in \mathcal{D}(M)$  と  $c \leq d$  に対して  $\mathcal{D}(M)$  における標準的な射  $\tau_{c,d}(F): T_{c*}F \rightarrow T_{d*}F$  が定まる.  $q: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$  で  $\mathbb{R}_t$  への射影をあらわすことを思い出すと,  $F, G \in \mathcal{D}(M)$  に対しては  $Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G) \in \mathcal{D}(\text{pt})$  とみなせるから,  $c \leq d$  に対して  $\mathcal{D}(\text{pt})$  における射

$$\tau_{c,d}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)): T_{c*}Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G) \rightarrow T_{d*}Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)$$

が定まる. これは  $\tau_{c,d}(G): T_{c*}G \rightarrow T_{d*}G$  から誘導された射と一致することが示せる. この  $\tau_{c,d}$  を用いると, エネルギー評価定理は次のように述べられる. 不等式中の二つ目の不等号は  $\mathcal{H}om^*$  が  $\mathcal{D}(M)$  における射の集合を回復することから従う.

**定理 4.1** (エネルギー評価定理 [AI20a]).  $A, B$  を  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合とする. このとき, 任意の  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  に対して, 不等式

$$e(A, B) \geq \inf \{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)) = 0\} \\ \geq \inf \{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{射 } \text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, T_{c*}G) \text{ は零射である}\}$$

が成り立つ.

特に, 任意の  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  に対して  $\tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)) \neq 0$  ならば  $A$  と  $B$  は分離不可能である. これがもともとの Tamarkin の分離不可能性定理 (Tamarkin [Tam18, Thm. 3.1]) の主張であり, 定理 4.1 はその定量的な拡張とみなすことができる.

**例 4.2.** 定理 4.1 を用いた分離エネルギー評価の例を一つ紹介しよう.  $M = \mathbb{R}^m$  として  $T^*\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$  を考える.  $(x; \xi)$  で  $T^*\mathbb{R}^m$  の大域的な斉次シンプレクティック座標をあらわす.  $S^m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1\}$  としてコンパクト完全ラグランジュはめ込み  $\iota: S^m \rightarrow T^*\mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto (x; yx)$  を考える. 定理 4.1 を用いて, このはめ込みの像  $\iota(S^m)$  の分離エネルギー  $e(\iota(S^m), \iota(S^m))$  の評価を与えよう.  $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := -\frac{1}{3}y^3$  と定めれば, これは  $\iota^*\theta = df$  を満たすことが分かる. この原始関数  $f$  を用いて  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t$  の局所閉部分集合  $Z$  を

$$Z := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t \mid \|x\| \leq 1, -\frac{1}{3}(1 - \|x\|^2)^{\frac{3}{2}} \leq t < \frac{1}{3}(1 - \|x\|^2)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

と定めて,  $F$  を  $Z$  上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層のゼロ拡張, すなわち  $F := \mathbf{k}_Z \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t})$  とする. すると, 例 2.2(iii) で見たマイクロ台の評価より,  $F$  は  $\mathcal{D}_{\iota(S^m)}(\mathbb{R}^m)$  の対象を定めることが分かる.  $m = 1$  の場合の状況は図 4.1 と 4.2 を参照せよ.

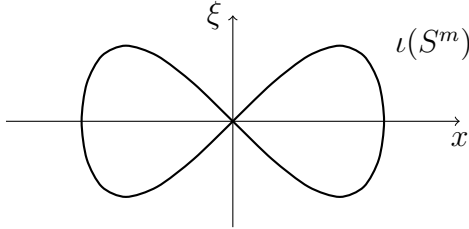


図 4.1:  $m = 1$  のときの  $\iota(S^m)$

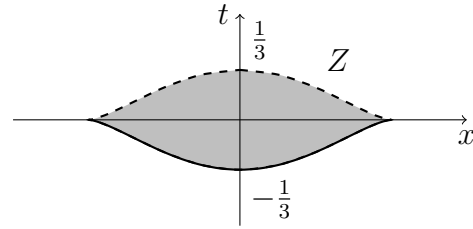


図 4.2:  $m = 1$  のときの  $Z$

この対象  $F$  に対して,  $Z$  を  $\mathbb{R}_t$  方向に平行移動して考えてみれば

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, T_{c*}F) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t})}(F, T_{c*}F) \simeq \begin{cases} \mathbf{k} & (0 \leq c < \frac{2}{3}) \\ 0 & (c \geq \frac{2}{3}) \end{cases}$$

となることが分かる. さらに, この同形を通して  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, T_{c*}F)$  から誘導される射は  $0 \leq c < 2/3$  に対して恒等写像である. ゆえに定理 4.1 より  $e(\iota(S^m), \iota(S^m)) \geq 2/3$  が得られる. これは Akaho [Aka15] でフレアー理論的に与えられている評価と同じである.

定理 4.1 は, もし  $A$  と  $B$  に付随する良い層が存在すれば  $A$  と  $B$  の分離エネルギーの評価が可能であるということだけを主張しており, そのような層の存在については何

も述べていない. [AI20a] に続く浅野氏との共同研究 [AI20b] では, 上の例 4.2 を一般化してある条件を満たすラグランジュはめ込みに対して良いエネルギー評価と交叉点の個数評価を与えるパラメータ付き Tamarkin 圏の対象が構成された.

以下で定理 4.1 の証明の概略を与える. 具体的には  $\mathcal{D}(M)$  に擬距離を導入して層のハミルトン変形がこの擬距離を Hofer ノルム以下だけ変化させることを示す.

**定義 4.3** ([AI20a]). (i)  $F, G \in \mathcal{D}(M)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  とする. このとき, 組  $(F, G)$  が  $(a, b)$ -interleaved であるとは, 射  $\alpha, \delta: F \rightarrow T_{a*}G$  と  $\beta, \gamma: G \rightarrow T_{b*}F$  が存在して次の条件を満たすことをいう:

$$(1) \text{ 合成射 } F \xrightarrow{\alpha} T_{a*}G \xrightarrow{T_{a*}\beta} T_{a+b*}F \text{ は } \tau_{0, a+b}(F): F \rightarrow T_{a+b*}F \text{ と等しい.}$$

$$(2) \text{ 合成射 } G \xrightarrow{\gamma} T_{b*}F \xrightarrow{T_{b*}\delta} T_{a+b*}G \text{ は } \tau_{0, a+b}(G): G \rightarrow T_{a+b*}G \text{ と等しい.}$$

(ii)  $F, G \in \mathcal{D}(M)$  に対して,  $d_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$  を

$$d_{\mathcal{D}(M)}(F, G) := \inf\{a + b \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{組}(F, G) \text{ は } (a, b)\text{-interleaved である}\}$$

により定義する. すると,  $d_{\mathcal{D}(M)}$  は  $\mathcal{D}(M)$  上の拡張擬距離を定めることが確認できる.

**注意 4.4.** Kashiwara–Schapira [KS18] はパーシステンス加群間のインターリービング距離と呼ばれる擬距離を層の導来圏上の擬距離として解釈した. これは上の定義で  $M = \text{pt}$  のときに  $a = b, \alpha = \delta, \beta = \gamma$  という条件を付けて  $\inf$  を取ったものに対応する. インターリービング距離と同じ定義を用いてしまうと, 分離する  $H$  の  $2 \int_0^1 \|H_s\|_{\infty} ds$  の  $\inf$  しか評価できなくなり, 定理 4.1 よりも弱い評価しか得られなくなってしまう.

$\mathcal{D}(M)$  の対象とそのハミルトン変形間の距離を考えると, 次の安定性定理が示せる.

**定理 4.5** (ハミルトン変形に関する安定性定理 [AI20a]).  $G \in \mathcal{D}(M)$  として,  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  をコンパクト台のハミルトン関数とする. このとき, 不等式  $d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \|H\|$  が成り立つ.

証明の概略.  $K \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  をハミルトンアイソトピー  $\phi^H$  に付随した層量子化として,  $\mathcal{H} := K \circ G \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t \times I})$  を時間成分  $I$  が残った  $K$  を核とする  $G$  の積分変換とする. すると, 層量子化の性質と層の演算に関するマイクロ台の評価より  $\mathcal{H}$  は次の二つの条件を満たすことが分かる:

$$(1) \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{0\}} \simeq G, \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{1\}} \simeq \Phi_1^H(G),$$

$$(2) \text{SS}(\mathcal{H}) \subset T^*M \times \{(t, s; \tau, \sigma) \mid (-\max_p H_s(p)) \cdot \tau \leq \sigma \leq (-\min_p H_s(p)) \cdot \tau\}.$$

すなわち  $\mathcal{H}$  は  $G$  と  $\Phi_1^H(G)$  をつなぐ層の変形族であり, そのマイクロ台を含む錐状集合の開きはハミルトン関数で統制されている. ここで次の補題を準備する:

**補題 4.6.**  $\mathcal{H} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t \times I})$  とし,  $s_1 < s_2$  を  $I$  内の二点とする. ある  $a, b, r \in \mathbb{R}_{> 0}$  が存在して

$$\text{SS}(\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times (s_1 - r, s_2 + r)}) \subset T^*M \times \{(t, s; \tau, \sigma) \mid -a \cdot \tau \leq \sigma \leq b \cdot \tau\}$$

であると仮定する. このとき, 不等式

$$d_{\mathcal{D}(M)}(\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{s_1\}}, \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{s_2\}}) \leq (a + b)(s_2 - s_1)$$

が成り立つ.

この補題の証明は述べないが, 感覚としてはマイクロ台は層の変化を記述する部分集合であり,  $T^*(\mathbb{R}_t \times I)$  成分の錐の開き方が  $I$  方向に変化させたときの  $\mathbb{R}_t$  方向のずれ方, すなわち  $d_{\mathcal{D}(M)}$  を統制していることから従う.

上の補題と条件 (1), (2) を使えば, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して

$$d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \max_{s \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} \left( \max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right)$$

となり,  $n \rightarrow +\infty$  とすれば右辺は  $\|H\|$  に近づくから結論が得られる. この証明で見たように層量子化が時間パラメータ  $I$  を持つ族, すなわち  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  の対象として得られていることが有効に働くのである.  $\square$

最後に定理 4.1 が定理 4.5 から従うことを説明しよう.

定理 4.5  $\Rightarrow$  定理 4.1 の証明. まず, 擬距離の定義から

$$\inf\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)) = 0\} = d_{\mathcal{D}(\text{pt})}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G), 0)$$

となることに注意する. ハミルトン関数  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  が  $A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset$  を満たすとする. すると, Tamarkin の分離定理から  $Rq_* \mathcal{H}om^*(F, \Phi_1^H(G)) \simeq 0$  である. ゆえに,  $Rq_*$  と  $\mathcal{H}om^*(F, *)$  により擬距離が大きくなることと安定性定理 (定理 4.5) より, 不等式

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}(\text{pt})}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G), 0) &\leq d_{\mathcal{D}(M)}(\mathcal{H}om^*(F, G), \mathcal{H}om^*(F, \Phi_1^H(G))) \\ &\leq d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \|H\| \end{aligned}$$

が得られて, エネルギー評価定理が証明された.  $\square$

## 参考文献

- [AI20a] T. Asano and Y. Ike, Persistence-like distance on Tamarkin's category and symplectic displacement energy, *J. Symplectic Geom.*, **18** (2020), no. 3, 613–649.
- [AI20b] T. Asano and Y. Ike, Sheaf quantization and intersection of rational lagrangian immersions, arXiv preprint, arXiv:2005.05088 [math.SG], 2020.
- [Aka15] M. Akaho, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions, arXiv preprint, arXiv:1505.06560 [math.SG], 2015.
- [GKS12] S. Guillermou, M. Kashiwara, and P. Schapira, Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems, *Duke Math. J.*, **161** (2012), no. 2, 201–245.
- [GS14] S. Guillermou and P. Schapira, Microlocal theory of sheaves and Tamarkin's non displaceability theorem, In *Homological mirror symmetry and tropical geometry*, Vol. **15** of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.* 43–85, Springer, Cham, 2014.
- [KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Vol. **292** of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [KS18] M. Kashiwara and P. Schapira, Persistent homology and microlocal sheaf theory, *Journal of Applied and Computational Topology*, **2** (2018), no. 1–2, 83–113.
- [NZ09] D. Nadler and E. Zaslow, Constructible sheaves and the Fukaya category, *J. Amer. Math. Soc.*, **22** (2009), no. 1, 233–286.
- [Tam18] D. Tamarkin. Microlocal condition for non-displaceability. In M. Hitrik, D. Tamarkin, B. Tsygan, and S. Zelditch, editors, *Algebraic and Analytic Microlocal Analysis* 99–223, Cham, 2018. Springer International Publishing.

## Bott 多様体のコホモロジー剛性問題

石田 裕昭 (鹿児島大学)\*

### 概 要

この講演では, Bott 多様体のコホモロジー剛性問題および強コホモロジー剛性問題について概説する. また8次元 Bott 多様体の強コホモロジー剛性について, 講演者の得た進展を報告する.

## 1. 序

### 1.1. Bott tower と Bott 多様体

まずこの講演の主役である Bott 多様体を導入する. 高さ  $n$  の **Bott tower** とは,  $\mathbb{C}P^1$ -束の列

$$B_\bullet : B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 = \{\text{a point}\}$$

であって, 各ファイブレーション  $B_j \rightarrow B_{j-1}$  が次のように順に構成されるものである:  $B_j$  は  $B_{j-1}$  上の複素直線束  $\xi_j, \xi'_j$  の Whitney 和  $\xi_j \oplus \xi'_j$  の射影化  $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$ . Bott tower に現れる  $B_j$  達を **Bott 多様体** という. Bott 多様体  $B_n$  は実  $2n$  次元の閉多様体多様体であり, 直線束  $\xi_j, \xi'_j$  たちの選び方に依存する.

**例 1.**  $B_0$  は1点で,  $B_0$  上のベクトル束は直積束である. したがって  $B_1$  は複素射影直線  $\mathbb{C}P^1$  に他ならない.  $B_2$  は **Hirzebruch 曲面** と呼ばれ, 位相型は2つある. しかしながら  $n \geq 3$  に対して  $B_n$  の位相型は加算無限個ある.

以下では, 直線束, ベクトル束といえば全て複素直線束, 複素ベクトル束を意味することとする. Bott 多様体の位相型あるいは微分位相型を分類することが問題である.

### 1.2. コホモロジー剛性問題 (cohomological rigidity problem) と強コホモロジー剛性問題 (strong cohomological rigidity problem)

コホモロジーは位相空間のホモトピー不変量であるが, 完全ではない. しかしながら特別な族に制限すれば完全不変量となりうる. 典型的な例として, 閉曲面はコホモロジーによって分類することができる. コホモロジー剛性問題とは, 与えられた多様体の族に対して, 次に述べるコホモロジー剛性が成り立つかどうかを問うものである:

**定義 2.** 可微分多様体の族  $\mathcal{M}$  がコホモロジー剛性 (cohomological rigid) であるとは, 次を満たすことをいう:  $M, N \in \mathcal{M}$  のコホモロジー環  $H^*(M)$  と  $H^*(N)$  が同型ならば,  $M$  と  $N$  は微分同相である.

この講演ではコホモロジーは全て整係数のものを考えるが, 異なる係数をとれば別の問題になる. また, 微分同相ではなく同相やホモトピー同値を考えることもできる.

**定義 3.** 可微分多様体の族  $\mathcal{M}$  が強コホモロジー剛性 (strong cohomological rigid) であるとは, 次を満たすことをいう:  $M, N \in \mathcal{M}$  のコホモロジー環の間の任意の同型  $\varphi: H^*(N) \rightarrow H^*(M)$  に対し, 微分同相写像  $f: M \rightarrow N$  で  $f^* = \varphi$  を満たすものが存在する.

\*〒 890-0065 鹿児島市郡元1丁目21番地 鹿児島大学理学部理学科数理解情報科学プログラム  
e-mail: ishida@sci.kagoshima-u.ac.jp

強コホモロジー剛性は明らかにコホモロジー剛性を導く。また、強コホモロジー剛性である必要十分条件は、コホモロジー剛性かつ、任意の  $M \in \mathcal{M}$  とコホモロジー環の自己同型  $\varphi: H^*(M) \rightarrow H^*(M)$  に対して自己微分同相  $f: M \rightarrow M$  で  $f^* = \varphi$  を満たすものが存在することである。これに注意すれば、例えば向き付け可能な閉曲面のなす族は強コホモロジー剛性であることがわかる。

Bott 多様体に関しては、これまでのところコホモロジー剛性の反例は知られておらず、以下に記載するようにいくつかの肯定的な結果が知られている。

### 1.3. いくつかの知られている結果

ここでは Bott 多様体のコホモロジー剛性問題に関して、本講演と関連の深いものを、議論の概略と共に簡潔に紹介する。先行研究を全て網羅しているわけではないことを断っておく。

- Hirzebruch 曲面, すなわち実 4 次元の Bott 多様体はコホモロジー剛性である。  $\gamma$  を  $\mathbb{C}P^1$  上の tautological 直線束とし、整数  $a$  に対して  $\Sigma_a$  を  $P(\mathbb{C} \oplus \gamma^{\otimes a})$  と定める。[Hir1951]において  $\Sigma_a$  と  $\Sigma_b$  が (微分) 同相であることと、  $a, b$  の偶奇が等しいことが同値であることを示されている。一方で、  $H^*(\Sigma_a)$  と  $H^*(\Sigma_b)$  のコホモロジー環が同型になることと、  $a, b$  の偶奇が等しいことが同値であることは、簡単な計算によって示すことができる。
- 6次元 Bott 多様体はコホモロジー剛性である。[CMS2010]では6次元 Bott 多様体  $B_3, B'_3$  のコホモロジーの間の環同型は第一 Pontrjagin 類と第二 Stiefel-Whitney 類を保つことを示し、[Jup1973]を用いて示された。
- Bott 多様体  $B_n$  のうち、  $\mathbb{Q}$ -係数コホモロジー環  $H^*(B_n, \mathbb{Q})$  が  $H^*((\mathbb{C}P^1)^n, \mathbb{Q})$  と同型となるものを  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott 多様体と呼ぶ。[CM2012]では、後で述べる階数 2 の分解可能ベクトル束の分解と、注意深い考察によって、  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott 多様体は強コホモロジー剛性であることが示されている。
- さらに[Cho2015]では、  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott 多様体の強コホモロジー剛性を用いて、「6次元 Bott 多様体は強コホモロジー剛性であること」「8次元 Bott 多様体はコホモロジー剛性であること」が示されている。
- [CMM2015]では、コホモロジー環の生成元を上手くとることによって、純粋な代数的手法で Bott 多様体のコホモロジー環の間の任意の同型はそれぞれの Pontrjagin 類を保つことが示されている。また同時に環同型の構造を調べることによって  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -trivial Bott 多様体は強コホモロジー剛性であることが示されている。ここで Bott 多様体  $B_n$  が  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -trivial であるとは、  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -係数コホモロジー環  $H^*(B_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  が  $H^*((\mathbb{C}P^1)^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  と同型となることを言う。

## 2. 準備

### 2.1. Bott 多様体の整係数コホモロジー環

Bott tower

$$B_\bullet : B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 = \{\text{a point}\}$$

について, 各  $B_j$  は  $B_{j-1}$  上の複素直線束  $\xi_j, \xi'_j$  の Whitney 和  $\xi_j \oplus \xi'_j$  の射影化  $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$  であり, また直線束は第一 Chern 類によって分類される. ここでは Bott 多様体のコホモロジー環は  $\xi_j, \xi'_j$  たちの第一 Chern 類によって帰納的に記述できることを説明する.

まず初めに, ベクトル束の射影化について注意しておく. ベクトル束  $\xi$  に対して, その射影化を  $P(\xi)$  で表す. 多様体  $B$  を底空間とする階数  $n$  のベクトル束  $V$  と直線束  $L$  に対して, テンソル積  $L \otimes V$  は  $V$  と階数の等しいベクトル束である. これらの射影化  $P(V)$  と  $P(L \otimes V)$  は共に  $B$  上の  $\mathbb{C}P^{n-1}$ -束であるが, これらの間には自然な同型がある. 各点  $x \in B$  に対し,  $V_x, L_x$  をそれぞれ  $V, L$  のファイバーとし,  $L_x$  の 0 でない元  $\ell$  を用いて同型  $V_x \rightarrow L_x \otimes V_x$  を  $v \mapsto \ell \otimes v$  によって定めれば, これは射影空間の微分同相  $P(V_x) \rightarrow P(L_x \otimes V_x)$  を誘導し, この微分同相は  $\ell$  の取り方に依存しない.

Bott tower において, 各  $B_j$  は  $B_{j-1}$  上の複素直線束  $\xi_j, \xi'_j$  の Whitney 和  $\xi_j \oplus \xi'_j$  の射影化  $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$  であった. 上の注意から,  $\xi_j$  のテンソル積に関する逆元をテンソルすることによって, 1 つ目の直線束は自明束  $\mathbb{C}$  であると仮定しても一般性を失わない. 以下,  $\xi_j$  は  $B_{j-1}$  上の直線束で  $B_j = P(\mathbb{C} \oplus \xi_j)$  とする.  $\gamma_j$  を  $P(\mathbb{C} \oplus \xi_j)$  の tautological 直線束, すなわち底空間を  $B_j$ , 全空間を

$$\gamma_j = \{(\ell, v) \in P(\mathbb{C} \oplus \xi_j) \times (\mathbb{C} \oplus \xi_j) \mid \ell \ni v\}$$

とする直線束とする.  $B_j \rightarrow B_{j-1}$  は  $\mathbb{C}P^1$ -束であり, また  $\mathbb{C}P^1$  のコホモロジーは tautological 直線束の第一 Chern 類によって生成される. このことと Leray-Hirsch の定理 ([Hat2002] など) によって,  $B_j$  の整係数コホモロジー  $H^*(B_j)$  は,  $H^*(B_{j-1})$ -加群として 1 と  $\gamma_j$  の第一 Chern 類  $x_j := c_1(\gamma_j) \in B_j$  によって生成されることがわかる.  $H^*(B_{j-1})$ -代数としての構造を理解するには,  $x_j^2 \in H^4(B_j)$  さえ理解できれば十分である. ベクトル束  $\mathbb{C} \oplus \xi_j$  の  $\pi_j: B_j \rightarrow B_{j-1}$  による引き戻し  $\pi_j^*(\mathbb{C} \oplus \xi_j)$  にエルミート計量をつ取り, 部分束  $\gamma_j$  の直交補空間束を  $\gamma_j^\perp$  とする. このとき  $\pi_j^*(\mathbb{C} \oplus \xi_j) = \gamma_j \oplus \gamma_j^\perp$  であるから, 両辺の全 Chern 類を比較すれば  $x_j(-x_j + \pi_j^*c_1(\xi_j)) = 0$  を得る. 従って  $H^*(B_j)$  は  $H^*(B_{j-1})$ -代数として

$$H^*(B_j) \cong H^*(B_{j-1})[X]/(X^2 - c_1(\xi_j)X)$$

となる.

以上のことから,  $B_n$  の整係数コホモロジー環は次のように記述される.  $X_j := \pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(x_j) \in H^2(B_n)$  とすれば,  $X_1, \dots, X_n$  は  $H^2(B_n)$  の  $\mathbb{Z}$ -基底となり,  $H^*(B_n)$  を  $\mathbb{Z}$ -代数として生成する. また  $c_1(\xi_j) \in H^2(B_{j-1})$  より,  $\pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_j^*(c_1(\xi_j))$  は  $X_1, \dots, X_{j-1}$  の一次結合  $\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i$  で表され,  $X_j^2 = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i X_j$  となる. 従って対角成分が 0, 各成分が整数の  $n$  次の上三角行列  $(a_{ij})$  を用いて

$$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/(X_j^2 - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i X_j \mid j = 1, \dots, n), \quad \deg X_j = 2$$

と表示できる.

## 2.2. Bott 多様体に対応する上三角行列

前節で説明したことの逆を辿っていけば, 上三角行列から Bott tower を定めることができる. 対角成分が 0, 各成分が整数の  $n$  次の上三角行列  $(a_{ij})$  に対して, Bott tower

$$B_\bullet : B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 = \{\text{a point}\}$$

が次のように定まる:  $B_0$  は 1 点,  $B_1$  は複素射影直線  $\mathbb{C}P^1$  で,  $x_1^{(1)} \in H^2(B_1)$  は  $B_1$  の tautological 直線束の第一 Chern 類とする.  $B_1$  上の直線束  $\xi_2$  を  $c_1(\xi_2) = a_{12}x_1^{(1)}$  となるものとし,  $B_2 = P(\mathbb{C} \oplus \xi_2)$  とする.  $x_2^{(2)}$  を  $B_2$  の tautological 直線束の第一 Chern 類とする. 射影  $\pi_2: B_2 \rightarrow B_1$  を用いて  $x_1^{(2)} = \pi_2^*x_1^{(1)}$  とし,  $B_2$  上の直線束  $\xi_3$  を  $c_1(\xi_3) = a_{13}x_1^{(2)} + a_{23}x_2^{(2)}$  となるものとし,  $B_3 = P(\mathbb{C} \oplus \xi_3)$  とする. この操作を繰り返すことによって, Bott tower で

$$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/(X_j^2 - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_iX_j \mid j = 1, \dots, n), \quad \deg X_j = 2$$

となるものが(微分同相を除いて)一意的に構成される.

### 2.3. Bott 多様体上の階数 2 の分解可能ベクトル束の分類

Bott 多様体のコホモロジー剛性問題にあたって, 次の命題は有用である:

**命題 4** ([Ish2012]). Bott 多様体  $B_n$  上の階数 2 の分解可能なベクトル束  $V_1, V_2$  について,  $V_1$  と  $V_2$  がベクトル束として同型なのは,  $V_1$  と  $V_2$  の全 Chern 類  $c(V_1)$  と  $c(V_2)$  が等しいときかつその時に限る.

実際, Hirzebruch 曲面  $\Sigma_a$  は次のように分類ができる.  $\gamma$  は  $B_1 = \mathbb{C}P^1$  上の tautological 直線束とする.  $\Sigma_a = P(\mathbb{C} \oplus \gamma^{\otimes a})$  は,  $a$  が偶数  $2k$  のとき,  $\gamma^{\otimes(-k)}$  をテンソルすれば  $\Sigma_a = P(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k})$  を得る. 一方で  $c(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k}) = c(\gamma^{\otimes(-k)})c(\gamma^{\otimes k}) = (1+x)(1-x) = 1$  より  $\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k}$  は自明である. したがって  $a$  が偶数の時,  $\Sigma_a$  は  $(\mathbb{C}P^1)^2$  と微分同相である.  $a$  が奇数  $2k+1$  のときも同様に  $\gamma^{\otimes(-k)}$  をテンソルすれば  $\Sigma_a = P(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)})$  を得る. 一方で  $c(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)}) = 1+x$  より  $\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)}$  は  $\mathbb{C} \oplus \gamma$  と同型である. したがって  $a$  が奇数のとき,  $\Sigma_a$  は  $P(\mathbb{C} \oplus \gamma)$  と微分同相である. これが  $(\mathbb{C}P^1)^2$  と同相でないことは, 整係数コホモロジー環の間に同型が存在しないことから導かれる.

Hirzebruch 曲面, すなわち 4次元の Bott 多様体の場合ほど単純ではないが,  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott 多様体の場合でも同様の議論によって分類がなされる ([CM2012]). 実  $2n$  次元の  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott 多様体は,  $n$  の分割の個数だけ位相型がある. Hirzebruch 曲面は  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott 多様体である.

## 3. $\mathbb{C}P^1$ -束の強コホモロジー剛性と Bott tower の強コホモロジー剛性

### 3.1. $\mathbb{C}P^1$ -束の強コホモロジー剛性

Bott 多様体  $B_n$  上の直線束  $\xi$  に対し,  $\mathbb{C}P^1$ -束  $P(\mathbb{C} \oplus \xi) \rightarrow B_n$  の全空間  $P(\mathbb{C} \oplus \xi)$  はまた Bott 多様体である. また前述の通り  $H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi))$  は自然に  $H^*(B_n)$ -代数の構造をもち,

$$H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi)) \cong H^*(B_n)[X]/(X^2 - c_1(\xi)X), \quad \deg X = 2$$

となる. ごく簡単な計算および命題 4 によって, 次がわかる:

**命題 5.** Bott 多様体  $B_n$  上の直線束  $\xi, \xi'$  に対し, 次は同値:

1.  $H^*(B_n)$ -代数として  $H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi)) \cong H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi'))$ ,
2. ある  $a \in H^2(B_n)$  が存在して  $1 + c_1(\xi) = (1 + a)(1 + a + c_1(\xi'))$ .
3. ある直線束  $L$  が存在して  $\mathbb{C} \oplus \xi \cong L \otimes (\mathbb{C} \oplus \xi')$ ,

4.  $B_n$  上の  $\mathbb{C}P^1$ -束として  $P(\mathbb{C} \oplus \xi) \cong P(\mathbb{C} \oplus \xi')$ .

特に,  $B_n$  上の分解可能な直線束の Whitney 和から定まる  $\mathbb{C}P^1$ -束は, 全空間のコホモロジーの  $H^*(B_n)$ -代数としての構造によって分類される. また次も簡単な計算によって示すことは容易い:

**命題 6.** Bott 多様体  $B_n$  上の直線束  $\xi$  に対し,  $H^*(B_n)$ -代数としての  $H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi))$  の自己同型はちょうど2つある. 1つは恒等写像であり, もう1つは  $X \mapsto -X + c_1(\xi)$  で定まるものである.

$X \mapsto -X + c_1(\xi)$  によって定まる自己同型が,  $P(\mathbb{C} \oplus \xi)$  の  $\mathbb{C}P^1$ -束としての自己同型によって誘導されることをみる. ベクトル束  $\mathbb{C} \oplus \xi$  に Hermite 計量を1つ取って固定し,  $f: P(\mathbb{C} \oplus \xi) \rightarrow P(\mathbb{C} \oplus \xi)$  を  $l \in P(\mathbb{C} \oplus \xi)$  に対してその直交補空間  $l^\perp$  を対応させる微分同相とする.  $f$  は  $\mathbb{C}P^1$ -束の自己同型であり, さらに  $f^*\gamma \cong \gamma^\perp$  を満たすことが示される. ここで,  $\gamma$  は  $P(\mathbb{C} \oplus \xi)$  の tautological 直線束である. したがって  $f$  は  $X \mapsto -X + c_1(\xi)$  で定まる自己同型を誘導する. 命題5と合わせれば, 次がわかる:

**命題 7** ( $\mathbb{C}P^1$ -束の強コホモロジー剛性). Bott 多様体  $B_n$  上の直線束  $\xi, \xi'$  について, 任意の  $H^*(B_n)$ -代数としての同型  $\varphi: H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi')) \rightarrow H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi))$  は, ある  $\mathbb{C}P^1$ -束の同型  $f: P(\mathbb{C} \oplus \xi) \rightarrow P(\mathbb{C} \oplus \xi')$  によって誘導される.

### 3.2. Bott tower の強コホモロジー剛性

高さ  $n$  の2つの Bott tower

$$B_\bullet: B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0$$

と

$$B'_\bullet: B'_n \xrightarrow{\pi'_n} B'_{n-1} \xrightarrow{\pi'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi'_2} B'_1 \xrightarrow{\pi'_1} B'_0$$

が同型であることを, 次で定める: 微分同相写像の系列  $f_\bullet = \{f_k: B_k \rightarrow B'_k\}_{k=0}^n$  が存在して, 図式

$$\begin{array}{ccccccc} B_n & \xrightarrow{\pi_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi_2} & B_1 & \xrightarrow{\pi_1} & B_0 \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ B'_n & \xrightarrow{\pi'_n} & B'_{n-1} & \xrightarrow{\pi'_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi'_2} & B'_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & B'_0 \end{array}$$

が可換になる. Bott tower の同型類は, 次に導入するフィルター付き次数付き環によって分類される.

高さ  $n$  の Bott tower

$$B_\bullet: B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0$$

に対して, フィルター付き次数付き環  $F_\bullet H^*(B_\bullet)$  を

- $i \geq n$  に対し,  $F_i H^*(B_\bullet) := H^*(B_n)$ ,
- $0 \leq j \leq n-1$  に対し,  $F_j H^*(B_\bullet) := \pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(H^*(B_j))$

と定める. 高さに関する帰納法と命題7によって, 次が示される ([Ish2012]):

**定理 8** (Bott tower の強コホモロジー剛性).  $B_\bullet = (\{B_k\}_{k=0}^n, \{\pi_k\}_{k=0}^n)$ ,  $B'_\bullet = (\{B'_k\}_{k=0}^n, \{\pi'_k\}_{k=0}^n)$  は高さ  $n$  の Bott tower,  $\varphi_\bullet: F_\bullet H^*(B'_\bullet) \rightarrow F_\bullet H^*(B_\bullet)$  はフィルトレーションを保つ次数付き環の同型とする. このとき, Bott tower の同型  $f_\bullet = \{f_k: B_k \rightarrow B'_k\}_{k=0}^n$  で各  $k = 0, \dots, n$  に対し  $f_k^* = \varphi_k$  を満たすものが存在する.

高さ  $n$  の Bott tower の一番上の Bott 多様体  $B_n$  の 2 次コホモロジー群には, (Bott tower の構成に用いた直線束の選び方に依存する) tautological 直線束の第一 Chern 類から定まる特別な基底  $X_1, \dots, X_n \in H^2(B_n)$  があった. この生成元を用いれば, 定理?? は次のように言い換えることができる:

**系 9.**  $B_n, B'_n$  は Bott 多様体とする. コホモロジー環の同型  $\varphi: H^*(B'_n) \rightarrow H^*(B_n)$  の先の生成元に関する表現行列が上三角行列ならば,  $\varphi$  は微分同相  $f: B_n \rightarrow B'_n$  によって誘導される.

#### 4. Hirzebruch 曲面束の強コホモロジー剛性と 8 次元 Bott 多様体の強コホモロジー剛性

前節では  $\mathbb{C}P^1$ -束について述べたが, 講演者は最近, Bott 多様体上の Hirzebruch 曲面束に関して強コホモロジー剛性と, その応用を得た. ここではそれについて概略を述べる.

##### 4.1. Hirzebruch 曲面束の強コホモロジー剛性

$B_n$  は Bott 多様体とし,  $B_n$  上の直線束  $\xi_{n+1}$  と,  $P(\mathbb{C} \oplus \xi_{n+1})$  上の直線束  $\xi_{n+2}$  をとる. このとき 2 つの射影

$$E = P(\mathbb{C} \oplus \xi_{n+2}) \rightarrow P(\mathbb{C} \oplus \xi_{n+1}) \rightarrow B$$

の合成  $E \rightarrow B$  はファイバーを Hirzebruch 曲面とするファイバー束であり, また  $E$  自身も Bott 多様体である.  $E$  のコホモロジー環  $H^*(E)$  は自然に  $H^*(B_n)$ -代数の構造が入る.

**定理 10.** Bott 多様体  $B_n$  上の Hirzebruch 曲面束  $E \rightarrow B_n$ ,  $E' \rightarrow B_n$  と  $H^*(B_n)$ -代数としての同型  $\tilde{\varphi}: H^*(E') \rightarrow H^*(E)$  に対し,  $B_n$  上の束の同型  $\tilde{f}: E \rightarrow E'$  で  $\tilde{f}^* = \tilde{\varphi}$  を満たすものが存在する.

Hirzebruch 曲面束の (弱い) コホモロジー剛性については, 命題 4 と代数的な計算のみ (ただし場合分けが煩雑ではあるが) で迫ることができる. 一方で “強い” コホモロジー剛性の証明は,  $\mathbb{C}P^1$ -束の場合と比べてずっと難しい. Hirzebruch 曲面束  $E \rightarrow B_n$  のコホモロジーの  $H^*(B_n)$ -代数としての自己同型  $\varphi: H^*(E) \rightarrow H^*(E)$  が,  $c_1(\xi_{n+1}) \in H^2(B_n)$  と  $c_1(\xi_{n+2}) \in H^2(P(\mathbb{C} \oplus \xi_1))$  に与える代数的な制約を考察する. 具体的には, 次のような議論を行う: 射影の誘導する準同型は単射.  $H^*(B_n) \subset H^*(P(\mathbb{C} \oplus \xi_{n+1})) \subset H^*(E)$  とみなす.  $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}$  をそれぞれ  $P(\mathbb{C} \oplus \xi_{n+1})$ ,  $E = P(\mathbb{C} \oplus \xi_{n+2})$  の tautological 直線束とする.  $x_{n+1}, x_{n+2}$  は  $H^*(E)$  の  $H^*(B)$ -代数としての生成元になる.  $\xi_{n+2}$  の第一 Chern 類は  $a \in \mathbb{Z}$  と  $y \in H^2(B_n)$  によって  $c_1(\xi_{n+2}) = ax_{n+1} + y$  と書ける. このとき  $E \rightarrow B_n$  のファイバーは  $\Sigma_a$ .  $H^*(E)/H^{>0}(B_n) \cong H^*(\Sigma_a)$  より,  $H^*(B_n)$ -代数としての同型  $\tilde{\varphi}: H^*(E) \rightarrow H^*(E)$  は同型  $\varphi: H^*(\Sigma_a) \rightarrow H^*(\Sigma_a)$  を誘導する. 一方で,  $H^*(\Sigma_a)$  の任意の同型が  $H^*(E)$  の同型に持ち上がるかどうかはわからない. そこで,

1. 同型  $\varphi: H^*(\Sigma_a) \rightarrow H^*(\Sigma_a)$  を 1 つ固定する.  $\varphi$  は 8 個あり, それらについて場合分けを行う.

2.  $\varphi$ が $\tilde{\varphi}: H^*(E) \rightarrow H^*(E)$ に持ち上がるための $c_1(\xi_{n+1})$ と $c_1(\xi_2) = ax_{n+1} + y$ に関する必要十分条件を得る. 特に,  $\varphi$ の持ち上げ可能性が $E \rightarrow B_n$ の構造群にどのような制約を与えるかを調べる.
3. 得られた必要十分条件を使って,  $\tilde{f}^* = \tilde{\varphi}$ を満たす $\tilde{f}: E \rightarrow E$ を構成する.

命題7と定理10を用いれば, 帰納的に次が証明できる:

系 11.  $B_n, B'_n$ はBott多様体とする. コホモロジー環の同型 $\varphi: H^*(B'_n) \rightarrow H^*(B_n)$ の先の生成元に関する表現行列が

$$\begin{pmatrix} A_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n_k} \end{pmatrix}, \quad A_{n_j} \text{は} 1 \times 1 \text{あるいは} 2 \times 2 \text{の行列}$$

ならば,  $\varphi$ はある微分同相 $f: B_n \rightarrow B'_n$ によって誘導される.

#### 4.2. 8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性

先述の通り, これまで8次元Bott多様体はコホモロジー剛性であることが知られていた ([Cho2015]). 系11のおかげで, 8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性を以下の順に示すことができる.

1.  $B_4$ は8次元Bott多様体,  $\varphi: H^*(B_4) \rightarrow H^*(B_4)$ は同型とする. 8次元Bott多様体はコホモロジー剛性であるから,  $\varphi$ が微分同相 $f: B_4 \rightarrow B_4$ に誘導されることを示せば十分である.
2.  $B_4$ が $\mathbb{Q}$ -trivialならば [CM2012] による.  $B_4$ は $\mathbb{Q}$ -trivialでないと仮定してよい.
3.  $B_4$ が $\mathbb{Q}$ -trivialでないとき, Bott tower  $B_4 \rightarrow B_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0$ の最初のファイブレーション $B_4 \rightarrow B_3$ は,  $B_1$ 上の $CP^1$ -束の引き戻しでないと仮定して良い.
4. 上の仮定によって,  $\varphi$ の表現行列は

$$\left( \begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right)$$

となることがわかる.

5.  $\varphi$ の表現行列が前者のときは系11から $\varphi$ は微分同相によって誘導されることがわかる. 後者のときは, 6次元Bott多様体の強コホモロジー剛性 ([Cho2015]) と命題7から微分同相によって誘導されることがわかる.

#### 参考文献

- [Cho2015] S. Choi, *Classification of Bott manifolds up to dimension 8*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **58** (2015), no. 3, 653–659. MR3391366
- [CM2012] S. Choi and M. Masuda, *Classification of  $\mathbb{Q}$ -trivial Bott manifolds*, J. Symplectic Geom. **10** (2012), no. 3, 447–461. MR2983437

第68回トポロジーシンポジウム (2021年8月：オンライン開催)

- [CMM2015] S. Choi, M. Masuda, and S. Murai, *Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds*, *Algebr. Geom. Topol.* **15** (2015), no. 2, 965–986. MR3342682
- [CMS2010] S. Choi, M. Masuda, and D. Y. Suh, *Topological classification of generalized Bott towers*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), no. 2, 1097–1112. MR2551516
- [Hat2002] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354
- [Hir1951] F. Hirzebruch, *Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*, *Math. Ann.* **124** (1951), 77–86. MR45384
- [Ish2012] H. Ishida, *Filtered cohomological rigidity of Bott towers*, *Osaka J. Math.* **49** (2012), no. 2, 515–522. MR2945760
- [Jup1973] P. E. Jupp, *Classification of certain 6-manifolds*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **73** (1973), 293–300. MR314074

## Extension problem of quasi-morphisms and commuting symplectomorphisms

川崎 盛通 (青山学院大学理工学部数理サイエンス学科(旧物理・数理学科))\*

令和三年八月二十七日

### 1. シンプレクティック幾何における変換群

まずはシンプレクティック幾何の基本事項と、シンプレクティック多様体の自然な変換群であるハミルトン微分同相群とシンプレクティック微分同相群について説明する。なお、本章は二年前の筆者のトポロジーシンポジウムの要項と重複する説明も多く、詳しい方は本章を飛ばして読むと良い(逆に詳しく知りたい方は[Ban97, PR14]など参照)。本稿では多様体は全て連結で境界のない滑らかなものを考えるとする。

**定義 1.1.**  $M$  を  $2n$  次元多様体とする。  $M$  上の二次微分形式  $\omega$  がシンプレクティック形式であるとは、  $\omega$  が閉形式、つまり  $d\omega = 0$  であって、任意の  $x \in M$  について  $(\omega^n)_x \neq 0$  となることである。偶数次元多様体  $M$  とその上のシンプレクティック形式  $\omega$  の組  $(M, \omega)$  をシンプレクティック多様体という。

シンプレクティック幾何学の歴史的起源は解析力学にあり、余接束には自然なシンプレクティック形式が入り、その上のハミルトン力学系(後述)が解析力学におけるハミルトン力学系と対応する。

さて、シンプレクティック多様体の自然な変換群についてであるが、まず定義から思いつくのはシンプレクティック構造を保つような微分同相写像の成す群である。すなわち、多様体  $M$  の微分同相群を  $\text{Diff}(M)$  とし、シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  のシンプレクティック微分同相群  $\text{Symp}(M, \omega)$  を以下のように定義する。

$$\text{Symp}(M, \omega) = \{\psi \in \text{Diff}(M) \mid \psi^* \omega = \omega\}.$$

$(M, \omega)$  をシンプレクティック多様体とし、その上の  $C^\infty$  級ベクトル場の成す集合を  $X(M)$  とする。  $M$  上の関数  $H: M \rightarrow \mathbb{R}$  について、そのハミルトン・ベクトル場  $X_H$  を

$$\text{任意の } V \in X(M) \text{ について、 } \omega(X_H, V) = -dH(V)$$

によって定義する ( $\omega$  は非退化二次形式なので、このような  $X_H$  は一意に定まる)。

円周  $S^1$  を  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  によって定める。また、本稿では時間依存しコンパクト台をもつハミルトン関数を考える。つまり本稿において、シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  上のハミルトン関数とは、滑らかな関数  $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  であって、その台が  $[0, 1] \times M$  内のコンパクト部分集合となるものを指す。また、ハミルトン関数  $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  について、その時間パラメータ  $t$  を固定したものを  $H_t$  で定める。つまり  $H_t: M \rightarrow \mathbb{R}$  を  $H_t(x) = H(t, x)$  によって定義する。

本稿は木村満晃氏(京都大学)、松下尚弘氏(琉球大学)、丸山修平氏(名古屋大学)、見村万佐人氏(東北大学)との共同研究 [KKMM21, KKM<sup>+</sup>21] に基づくもので、科研費(課題番号:18J00765, 21K13790, 21J11199, 19K14536 と 17H04822)の助成を受けたものである。

キーワード: 擬準同型, ハミルトン微分同相群, カラビ擬準同型

\* 〒252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1, 青山学院大学数理サイエンス学科  
e-mail: kawasaki@math.aoyama.ac.jp

ハミルトン函数  $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  について, そのハミルトン・イソトピー  $\{\phi_H^t\}_{t \in [0, 1]}$  を時間変化するベクトル場  $\{X_{(H_t)}\}_t$  による積分として定義する. つまり, 微分方程式  $\phi_H^0 = \text{id}$ ,  $\frac{d\phi_H^t}{dt} = X_{(H_t)}$  の解として定義する. 更に,  $\phi_H^1$  を  $\phi_H$  と略記し, これを  $H$  により生成されたハミルトン微分同相写像と呼び, ハミルトン函数から生成される微分同相写像をハミルトン微分同相写像と呼ぶ.

シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  についてハミルトンの成す集合をハミルトン微分同相群と呼び,  $\text{Ham}(M, \omega)$  と表記する. これは名前の通り写像の合成について群を成す. (ただし, 「ハミルトン函数で生成される」という形での定義のため, 実際に群を成すことを証明するのは少し非自明である.)

任意のハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保存し, 更にいえばハミルトン微分同相群はシンプレクティック微分同相群の正規部分群である.

ハミルトン微分同相群  $\text{Ham}(M, \omega)$  を「リー群」とみなす場合, その「リー環」である  $\text{Lie}(\text{Ham}(M, \omega))$  はハミルトン・ベクトル場の成す線形空間となる. ハミルトン・ベクトル場がハミルトン函数の微分のみで決まることを考えると,  $\text{Lie}(\text{Ham}(M, \omega))$  は  $C^\infty(M)/\mathbb{R}$  と同一視でき, 特にハミルトン微分同相群は「無限次元リー群」である.

## 2. 主結果

少し唐突ではあるが, 「シンプレクティック微分同相群はどのくらい可換な元の組を持っているか」という問題を考える. 一般には自由群のように可換な元の組のほとんどないような群もあるが, シンプレクティック微分同相群の場合は以下のように多くの可換なシンプレクティック微分同相写像がある.

- (i)  $2n$ 次元のシンプレクティック・トーリック多様体には自然に  $n$ 次元トーラスによるハミルトン作用  $\mathbb{T}^n \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$  がある. もちろんトーラスは可換群であるので, この作用から可換な元の組をとることができる.
- (ii) 互いに交わらない開集合  $U_1, U_2$  をとる. 開集合  $U_1, U_2$  をそれぞれ台に持つようなシンプレクティック微分同相写像  $\phi_1, \phi_2$  を考えると, これらは可換となる. ここで, 微分同相写像  $\phi$  の台とは, 集合  $\{x \in M; \phi(x) \neq x\}$  の閉包として定義される.
- (iii)  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  を満たすようなベクトル場  $X$  により生成されるフロー  $\{\phi_X^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  を考える. このとき, 各  $\phi_X^t$  はシンプレクティック微分同相写像で, 任意の  $s, t \in \mathbb{R}$  について  $\phi_X^s$  と  $\phi_X^t$  は可換.

さて, このように見ると, 可換なシンプレクティック微分同相写像の組は無数に存在するように思えるが, 可換になるための必要条件は何か存在するのであろうか. シンプレクティック多様体が曲面の場合のこの問題への一つの答えが本稿の主結果であるが, それを記述するためにフラックス準同型を導入する. シンプレクティック微分同相群の単位元成分を  $\text{Symp}_0(M, \omega)$  とおく.

定義 2.1 ([Ban78]). 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  を考える. フラックス準同型  $\text{Flux}_\omega: \text{Symp}_0(S, \omega) \rightarrow H_c^1(S; \mathbb{R})$  を

$$\text{Flux}_\omega(h) = \int_0^1 [\iota_{X_t} \omega] dt.$$

ここで,  $\{\psi^t\}_{t \in [0,1]}$  は  $\text{Symp}_0(M, \omega)$  中のイソトピーで,  $\psi^0 = 1, \psi^1 = h$  を満たすもの. このとき,  $\text{Flux}_\omega(h)$  の値は  $\{\psi^t\}_{t \in [0,1]}$  の選び方に依存せず,  $\text{Flux}_\omega: \text{Symp}_0(S, \omega) \rightarrow H_c^1(S; \mathbb{R})$  は *well-defined* な準同型となる.

本稿で解説する主定理は以下である.

**定理 2.2** ([KKMM21]). 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  を考える. このとき,  $\text{Symp}_0(S, \omega)$  の元の組  $(h_1, \dots, h_n)$  であって任意の  $i, j$  に対して  $h_i h_j = h_j h_i$  を満たすものに対して, 以下が成立する.

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_n) \rangle_{\mathbb{R}} \leq l.$$

この定理によれば, 可換なシンプレクティック微分同相写像の組があれば, そのフラックス準同型の像には上のような制限が付くことになる. この定理を群作用の言葉で言い換えたのが以下である.

**定理 2.3** ([KKMM21]). 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  を考える. このとき, 任意の準同型  $A: \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Symp}_0(S, \omega)$  に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \text{Im}(\text{Flux}_\omega \circ A) \rangle_{\mathbb{R}} \leq l.$$

更に二個の可換なシンプレクティック微分同相群について以下の予想を提唱する.

**予想 2.4** ([KKMM21]). 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  を考える. このとき, 条件  $h_1 h_2 = h_2 h_1$  を満たす任意の  $h_1, h_2 \in \text{Symp}_0(S, \omega)$  に対して, 以下が成立する.

$$\text{Flux}_\omega(h_1) \smile \text{Flux}_\omega(h_2) = 0.$$

この予想の状況証拠として以下の定理を示した.

**定理 2.5** ([KKMM21]). 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  を考える. このとき, 条件  $h_1 h_2 = h_2 h_1, \text{Flux}_\omega(h_1) \in \text{Sp}(2l, \mathbb{Z}) \cdot W_\beta$  を満たす任意の  $h_1, h_2 \in \text{Symp}_0(S, \omega)$  に対して, 以下が成立する.

$$\text{Flux}_\omega(h_1) \smile \text{Flux}_\omega(h_2) = 0.$$

定理 2.5 は定理 2.2 の「兄弟」ともいえる定理であるが, これより本稿においては定理 2.2 に絞って解説する.

### 3. カラビ準同型, カラビ擬準同型

定理 2.2, 2.5 を証明する上で膜となる道具が  $\mathbf{Py}$  のカラビ擬準同型 [Py06] である. これを説明するために, まずは「擬準同型」とは何であることを説明する.

**定義 3.1.** 群  $G$  上の実数値関数  $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$  に対して障害 (*detect*)  $D(\mu)$  を以下で定義する.

$$D(\mu) = \sup_{x, y \in G} |\mu(x) + \mu(y) - \mu(xy)|.$$

障害  $D(\mu)$  が有限, つまり  $D(\mu) < \infty$  となるとき,  $\mu$  は擬準同型であるという. 擬準同型  $\mu$  が任意の  $x \in G$ , 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $\mu(x^n) = n\mu(x)$  を満たすとき,  $\mu$  は同次擬準同型であるという. 群  $N$  に対して  $G$  上の同次擬準同型の成す空間を  $Q(G)$  と書く (定義よりこの空間は実線形空間となる).

注意 3.2.  $D(\mu) = 0$  のとき,  $\mu$  は準同型であり, これが「擬準同型」と呼称する由来である.

有界関数は定義より明らかに擬準同型である. また, 群  $G$  について  $G$  上の擬準同型の成す実線形空間を  $\overline{Q}(G)$ ,  $G$  上の有界関数の成す実線形空間を  $B(G)$  とすると,

$$\overline{Q}(G)/B(G) \cong Q(G)$$

が成立する. これが同次擬準同型を考える動機の一つである.

例 3.3. 同次擬準同型の最も古典的な例はポアンカレの回転数で, これは円周の向きを保つ同相群  $\text{Homeo}^+(S^1)$  の普遍被覆  $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$  の上で定義される同次擬準同型である.

また, 幾何学的群論で盛んに研究されているグロモフ双曲群も (非初等的な場合には) 非自明な同次擬準同型を許容する [EF97]. 一方で, 次元が 2, 4 でない閉多様体の微分同相群が非自明な同次擬準同型を持たないことも [Tsu12] によって知られている<sup>1</sup>.

「擬準同型」の次は「カラビ擬準同型」なる概念について説明するが, その前に「カラビ準同型」について説明する.

シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  が完全であるとは, シンプレクティック形式  $\omega$  が完全形式であることである.  $2n$  次元の完全シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  上のカラビ準同型  $\text{Cal}: \text{Ham}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  を以下の式で定義する.

$$\text{Cal}_M(\phi) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n dt.$$

ここで,  $F: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\varphi_F = \phi$  となるコンパクト台ハミルトン関数である. 値  $\text{Cal}_M(\phi)$  はハミルトン関数  $F$  の選び方に依存せず, したがってカラビ準同型  $\text{Cal}: \text{Ham}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  は well-defined な準同型である. (詳しくは [Cal70, Ban97] など参照)

閉シンプレクティック多様体は完全シンプレクティック多様体とはならないことが知られている. そこで自然な問題として「閉シンプレクティック多様体上でカラビ準同型のような概念を考えられるか」という問いが発生する.<sup>2</sup>

しかし, そこで問題になるのはバンヤガの以下の有名な結果 ([Ban78]) である.

定理 3.4 ([Ban78]). 閉シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  のハミルトン微分同相群  $\text{Ham}(M, \omega)$  は単純群である.

この定理により, 閉シンプレクティック多様体の場合には  $\text{Ham}(M, \omega)$  上にカラビ準同型どころか準同型も存在し得ないことも分かる. そこで, 「準同型」の部分を上述の「擬準同型」に緩めてカラビ準同型の類似を考えたのが, Entov と Polterovich [EP03] である. カラビ擬準同型の導入のために以下の概念を導入する.

定義 3.5. 同次擬準同型  $\mu: \text{Ham}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. 空でない  $M$  の開集合  $U$  が  $\mu$  についてカラビ性を満たすとは,  $[0, 1] \times U$  にコンパクト台をもつ任意のハミルトン関数

<sup>1</sup> 次元が 2, 4 のときに微分同相群が非自明な同次擬準同型を許容するかは長く未解決であったが, 2 次元の場合は [BHW19] が (高種数の場合に) 同次擬準同型を許容することを示した. 4 次元の場合は未だに未解決である

<sup>2</sup> カラビ準同型の定義式  $\text{Cal}_M(\phi) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n dt$  をそのまま閉シンプレクティック多様体の場合に適用してカラビ準同型を定義しようとすると well-defined 性が破綻する. なぜならば,  $\varphi_F = \phi$  となるコンパクト台ハミルトン関数  $F$  をとったとき, それに非零定数  $C$  を加えた  $F + C$  も  $\varphi_{F+C} = \phi$  を満たしているが,  $\int_0^1 \int_M (F_t + C) \omega^n dt = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n dt + \int_0^1 \int_M C \omega^n \neq \int_0^1 \int_M F_t \omega^n dt$  になってしまうからである.

$F: [0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,

$$\mu(\varphi_F) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n dt.$$

となることである.

**定義 3.6.**  $X, Y$  をシンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  の部分集合とする.  $X$  が  $Y$  から *displaceable* であるとは, ある  $f \in \text{Ham}(M, \omega)$  が存在して,  $f(X) \cap \bar{Y} = \emptyset$  となることである. ここで,  $\bar{Y}$  は  $Y$  の閉包である. 単に  $X$  が *displaceable* といった場合には,  $X$  が  $X$  自身から *displaceable* であることを指す.

**定義 3.7.** 同次擬準同型  $\mu: \text{Ham}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  がカラビ擬準同型であるとは,  $M$  の任意の *displaceable* な開部分集合が  $\mu$  についてカラビ性を満たすことである.

**注意 3.8.** さて, カラビ擬準同型の研究されてきた歴史的背景についてだが, 定義 3.7 に *displaceability* が出てくるように, *displaceability* の判定問題が背景にある.

例えば, 閉シンプレクティック多様体上の任意の可積分系<sup>3</sup> は *displaceable* でないファイバーを持つことが知られているが, これは [EP06] の有名な結果で, 証明にはカラビ擬準同型の一般化であるカラビ部分擬準同型を用いる<sup>4</sup>.

この [EP06] の結果の特殊な場合として, 複素射影空間  $\mathbb{C}P^n$  内のクリフォード・トーラス

$$\{(z_0; \dots; z_n) \in \mathbb{C}P^n; |z_0|^2 = |z_1|^2 = \dots = |z_n|^2\}$$

が *displaceable* でないことも知られている [BEP04]<sup>5</sup>.

Entov と Polterovich の [EP03] に始まる一連の研究 (サーベイとしては [Ent14, PR14] を薦める) では, ハミルトン・フレアー理論を用いて構成したカラビ擬準同型を用いていた. 一方で, 種数 2 以上の閉リーマン面の場合にフレアー理論を用いないカラビ擬準同型の構成を考えたのが Py [Py06] である. 彼の構成を一言で述べるのはなかなか難しいが, 「種数 2 以上の閉リーマンの普遍被覆はポアンカレ円盤で, その境界は円周なので, その円周を用いて (円周の同相群の普遍被覆の上の擬準同型である) 回転数の構成のアナロジーを行う」というのが大雑把なアイディアである.

種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  に対し, Py の構成したカラビ擬準同型を  $\mu_P$  とかくものとする. 定理 2.2, 2.5 を証明する上で膜となる定理が以下である.

**定理 3.9** (Py のカラビ擬準同型の拡張不能性).  $\hat{\mu}|_{\text{Ham}(S, \omega)} = \mu_P$ . 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  とその上の面積形式  $\omega$  を考える. 曲面  $S$  のコホモロジー群  $H^1(S; \mathbb{R})$  の部分線形空間  $V$  の次元が  $l$  より大きいとすると,  $\text{Flux}_\omega^{-1}(V)$  上の同次擬準同型  $\hat{\mu}$  であって,  $\hat{\mu}|_{\text{Ham}(S, \omega)} = \mu_P$  となるものは存在しない.

#### 4. 擬準同型の拡張定理

定理 2.2, 2.5 の証明には擬準同型のある種の拡張定理を用いるが,

<sup>3</sup>可積分系ということ思い出したが, 可積分系研究者の Anna Kiesenhofer さんが東京五輪自転車競技女子ロードレースで金メダルを受賞されたことをお祝い申し上げる.

<sup>4</sup>この結果の一般化としては筆者らの論文 [KR19] も参照 (我田引水)

<sup>5</sup> $\mathbb{C}P^n$  のシンプレクティック形式としてはフビニ・スタディ形式を考えている.

命題 4.1 (Proposition 6.4 of [KKMM20]). 群の完全列

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{q} Q \rightarrow 1$$

を考える. 準同型  $q: G \rightarrow G/N$  が実質的切断 (*virtual section*) を持つ, つまり群  $Q$  の有限位数部分群  $\Lambda$  であって群準同型  $s_1: \Lambda \rightarrow G$  で任意の  $x \in \Lambda$  に対して  $Q \circ s_1(x) = x$  となるものがあると仮定する. このとき, 写像  $i^*: Q(G) \rightarrow Q(N)^G$  は全射.

注意 4.2. 命題 4.1 の  $\Lambda$  が自明群, つまり  $Q$  が有限群の場合は石田智彦氏の結果である ([Ish14]). 命題 4.1 の証明自体も石田氏の手法の一般化であり, 今回の主定理の証明で重要な定理 4.3 の証明も同様に石田氏のアイデアが鍵となる.

この定理の「一様格子版」が以下の定理であり, これが定理 2.2, 2.5 の証明のもう一つの膜となる.

定理 4.3 (一様格子に対する拡張定理).  $G$  を位相群,  $N$  を  $G$  の部分位相群, そして  $Q$  を局所コンパクトな位相群とする. 群の完全列

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{q} Q \rightarrow 1$$

を考える. 群  $Q$  の離散部分群  $\Lambda$  であって群準同型  $s_1: \Lambda \rightarrow G$  で任意の  $x \in \Lambda$  に対して  $q \circ s_1(x) = x$  となるものを考える. 更に, 作用  $\Lambda \curvearrowright Q$  の相対コンパクトな狭義基本領域  $B$  で以下を満たすものが存在すると仮定する.

(\*) 写像  $q|_{q^{-1}(\bar{B})}: q^{-1}(\bar{B}) \rightarrow \bar{B}$  の連続な切断 (準同型であることは仮定しない)  $\bar{s}_2: \bar{B} \rightarrow G$  が存在する.

このとき, 任意の  $G$  不変な連続擬準同型  $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $G$  上の同次擬準同型  $\hat{\mu}: G \rightarrow \mathbb{R}$  であって,  $\hat{\mu}|_N = \mu$  となるものが存在する.

## 5. 定理 2.2 の証明

本章では, 定理 3.9, 4.3 を用いて定理 2.2 を証明する.

ここで注意すべきは, 定理 4.3 において, 拡張される擬準同型の連続性を仮定していたことである. したがって,  $\text{Py}$  のカラビ擬準同型  $\mu_P$  が連続となるように  $\text{Symp}_0(S, \omega)$  の位相を選ぶ必要があるが, 筆者らにはどのような位相を選べば良いのか分からなかった. そこで,  $\text{Py}$  のカラビ擬準同型  $\mu_P$  を連続にするように「改造」する. このための用いるのが Brandenbursky の構成したカラビ擬準同型である.

Brandenbursky [Bra15] は曲面組紐群上の擬準同型を用いることで,  $\text{Ham}(S, \omega)$  上にカラビ擬準同型  $\mu_B: \text{Ham}(S, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  を構成した. これは元々石田 [Ish14] が  $S$  が円盤の場合に行った議論を種数 2 以上の有向閉曲面の場合に一般化したものである.

定理 5.1 ([EPP12]). 組  $(S, \omega)$  を閉曲面  $S$  にシンプレクティック形式 (面積形式)  $\omega$  の付随したものとする. 函数  $\mu_1, \mu_2: \text{Ham}(S, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\text{Ham}(S, \omega)$  上のカラビ擬準同型であるとする. このとき,  $\mu_1$  と  $\mu_2$  の差  $\mu_1 - \mu_2: \text{Ham}(S, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^0$  位相について連続な函数となる.

練習問題 5.2. 任意のシンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  とその上のカラビ擬準同型  $\mu: \text{Ham}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  について,  $\mu$  は  $C^0$  位相について連続とはなりえないことを示せ.

この定理を用いて  $\mu_P$  を連続な擬準同型  $\mu_P - \mu_B$  に置き換えて定理 4.3 を適用するわけであるが、定理 2.2 を用いたい都合上、 $\mu_P - \mu_B$  の拡張可能性が改めて問題になる。ところがなんと、Brandenbursky のカラビ擬準同型  $\mu_B$  は  $\text{Symp}_0(S, \omega)$  上の同次擬準同型の  $\text{Ham}(S, \omega)$  への制限として構成されており、 $\mu_B$  は自明に  $\text{Symp}_0(S, \omega)$  に拡張可能である。したがって、 $\mu_P - \mu_B$  の拡張可能性の問題は  $\mu_P$  のそれと全く等価なのである。

定理 2.2 の証明. 背理法で証明するので、 $\dim_{\mathbb{R}} \langle \text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_n) \rangle_{\mathbb{R}} > l$  と仮定する。ここで、 $h_1, \dots, h_n$  を適当に並び替えることにより、 $\text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_{l+1})$  が一次独立であると仮定する。ここで、

$$V = \langle \text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}},$$

$$\Lambda = \langle \text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

とおくと、 $\Lambda$  は  $V$  の一様格子である。

更に、完全列

$$1 \rightarrow \text{Ham}(S, \omega) \rightarrow \text{Flux}^{-1}(V) \xrightarrow{q} V \rightarrow 1$$

一様格子  $\Lambda$  から  $\text{Flux}^{-1}(V)$  への写像  $s_1: \Lambda \rightarrow \text{Flux}^{-1}(V)$  を

$$s_1(a_1 \text{Flux}(h_1) + \dots + a_{l+1} \text{Flux}(h_{l+1})) = h_1^{a_1} \circ \dots \circ h_{l+1}^{a_{l+1}}$$

とおくと、 $h_i h_j = h_j h_i$  より  $s_1$  は準同型である。

よって、定理 4.3 より、 $\mu_P - \mu_B$  は  $\text{Flux}^{-1}(V)$  へ拡張可能である。

ここで、 $\text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_{l+1})$  は一次独立なので、

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}} > l$$

となり、この拡張可能性は定理 3.9 と矛盾する。したがって、

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \text{Flux}(h_1), \dots, \text{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}} \leq l.$$

□

## 6. 定理 3.9 の証明

定理 3.9 を証明する上で膜となるのは次の補題である。

補題 6.1 ([KK19, Lemma 4.8]). 群  $G$  と、その正規部分群  $N$  の上の同次擬準同型  $\mu: N \rightarrow \mathbb{R}$  を考える。以下の条件を満たす  $f, g \in G$  の存在を仮定する。

- $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$ ,
- $[f, g] \in N$ ,
- $\mu([f, g]) \neq 0$ .

このとき、 $G$  上の同次擬準同型  $\hat{\mu}$  であって  $\hat{\mu}|_G = \mu$  となるものは存在しない。

これは以下の補題からただちに従う。

補題 6.2. 同次擬準同型  $\hat{\mu}: G \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. さらに,  $f, g \in G$  で  $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$  を満たすものを考える. このとき,

$$\hat{\mu}([f, g]) = 0.$$

練習問題 6.3. 補題 6.2 を示せ.

補題 6.1 の条件を満たす  $f, g \in \text{Flux}^{-1}(V)$  を実際に構成して  $\mu_p$  が  $\text{Flux}^{-1}(V)$  へ拡張不能なのを示すのが, 定理 3.9 の証明である. ただし, その構成は図を大量に用いるので, 紙面に限りのある本稿で解説するのは適当でないと思われる. 実際のトポロジーシンポジウムでの講演を聞いていただくか, もしくは原論文を実際に読まれることを薦める. 原論文の第3章の図だけを眺めるだけでも構成の雰囲気は伝わるものかと思う.

## 7. 拡張不能擬準同型の成す空間について

本章では [KKM<sup>+</sup>21] の研究について解説するが, 簡単のために非常に限定的な場合に絞って紹介する.

$\text{Py}$  のカラビ擬準同型の拡張不能性が問題になったわけだが, より一般の問題として, 群とその正規部分群の組  $(G, N)$  に対して,

- $N$  上の同次擬準同型で  $G$  へ (同次擬準同型として) 拡張不能なものが存在するか.
- 拡張不能なものが存在するとしたらどのくらい存在するか.

という問題が考えられるであろう. この問題にアプローチしたのが [KKM<sup>+</sup>21] である.

正規部分群  $N$  から  $G$  への包含写像を  $i: N \rightarrow G$  とした場合に, これは線形空間の間の準同型  $i^*: Q(G) \rightarrow Q(N)$  を誘導する. そこで, 「拡張不能な擬準同型がどのくらい存在するか」を測る量として線形空間  $Q(N)/i^*Q(G)$  の次元が一つ適当であろう. しかしながら, 拡張不能性には以下のような自明な障害が存在する. 群  $G$  の正規部分群  $N$  上の同次擬準同型  $\mu$  が  $G$ -不変であるとは, 任意の  $x \in N, g \in G$  について  $\mu(g^{-1}xg) = \mu(x)$  となることである.

命題 7.1. 群  $G$  上の任意の同次擬準同型は  $G$ -不変である.

練習問題 7.2. 命題 7.1 を示せ.

この命題 7.1 より明らかに  $i^*Q(G) \subset Q(N)^G$  であるので,  $Q(N)^G/i^*Q(G)$  を「拡張不能な擬準同型の成す空間」として考えることとしよう.

以下, 群  $G$  に対して, その交換子群  $[G, G]$  を  $G'$ , そのアーベル化  $G/[G, G]$  を  $G^{\text{ab}}$  とかく. 交換子群  $G'$  から  $G$  への包含写像を  $i: G' \rightarrow G$ ,  $G$  から  $G^{\text{ab}}$  への商写像を  $q: G \rightarrow G^{\text{ab}}$  とかく. また, 本章ではコホモロジー群は全て実係数とする.

定理 7.3.

$$\dim Q(G')^G/i^*Q(G) \leq \dim H^2(G^{\text{ab}})$$

更に, もしも  $G$  がグロモフ双曲的であれば, このとき,

$$\dim Q(G')^G/i^*Q(G) = \dim H^2(G^{\text{ab}}).$$

例 7.4. 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$  を考える. 群  $G$  を  $S$  の基本群  $\pi_1(S)$  とする. このとき,  $G$  は双曲群となるのが知られており, 定理 7.3 より

$$\dim Q(G')^G / i^* Q(G) = \dim H^2(G^{\text{ab}}) = l(2l - 1).$$

となることが分かる. これまで説明してきた事項からただちに分かる結果ではないが, [KKM<sup>+</sup>21] では更に

$$\dim \left( Q(G')^G / (H^1(G')^G + i^* Q(G)) \right) = 1$$

も証明している.

定理 7.5. 以下の同型

$$Q(G')^G / (H^1(G')^G + i^* Q(G)) \cong \text{Im}(q^*) \cap \text{Im}(c_G),$$

が存在する. ここで,  $c_G: H_b^2(G)^6 \rightarrow H^2(G)$  は比較写像である. 特に,

$$\dim \left( Q(G')^G / (H^1(G')^G + i^* Q(G)) \right) \leq \dim H^2(G).$$

例 7.6. 群  $G$  が自由群や組紐群の場合,  $H^2(G) = 0$  が知られており, 定理 7.5 から

$$Q(G')^G = H^1(G')^G + i^* Q(G)$$

となることが分かる.

注意 7.7. 定理 7.3, 7.5 は原論文 [KKM<sup>+</sup>21] においてはより一般的な形で書かれている. 具体的には, 商  $G/N$  が従順 (amenable) であるような群  $G$  とその正規部分群  $N$  に対して, 定理 7.3, 7.5 の  $G'$  を  $N$ ,  $G^{\text{ab}}$  を  $G/N$  に置き換えた主張が成立する.

## 8. 混合交換子長との比較問題

群  $G$  上の 2 つの非負値関数  $\mu_1, \mu_2: G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  が (双リブシッツ) 同値であるとは, ある定数  $c > 0$  が存在して任意の  $g \in G$  に対して  $c^{-1} \cdot \mu_2(g) < \mu_1(g) < c \cdot \mu_2(g)$  となることである.

群  $G$  とその正規部分群  $N$  を考える. 群  $G$  の元  $x$  が  $(G, N)$ -交換子であるとは, ある  $g \in G$  と  $a \in N$  が存在して  $x = [g, a] = gag^{-1}a^{-1}$  とかけることである. 群  $G$  の部分群  $[G, N]$  を  $(G, G)$ -交換子によって生成された部分群として定義する.  $N$  は  $G$  の正規部分群だったので,  $[G, N]$  は  $N$  の正規部分群となる.  $[G, N]$  の元  $x$  に対して,  $(G, N)$ -交換子長  $\text{cl}_{G,N}(x)$  を

$$\text{cl}_{G,N}(y) := \min\{k \mid \exists x_1, \dots, x_k \in N, \exists g_1, \dots, g_k \in G \text{ such that } y = [g_1, x_1] \cdots [g_k, x_k]\}$$

によって定義する. また, Fekete の補題により, 以下の極限

$$\text{scl}_{G,N}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{cl}_{G,N}(x^n)}{n}$$

が存在して, この  $\text{scl}_{G,N}(x)$  を  $x$  の安定  $(G, N)$ -交換子長と呼称する.

$N = G$  となるとき,  $\text{scl}_{G,G} = \text{scl}_{N,N}$  のことを単に安定交換子長といい, これは古典的によく研究された概念である. 安定交換子長  $\text{scl}$  についての基本文献としては [Cal09]<sup>7</sup>

<sup>6</sup> これは有界コホモロジーと呼ばれるもので, [KKM<sup>+</sup>21] において極めて重要な役割を果たすものであるが, 紙面の関係で説明を省略する. 詳しく知りたい方は例えば, [Fri17], [Cal09] など参照

<sup>7</sup> なんと『scl』が正式な書名である!

がある. 安定交換子長の他の有名な研究としては [EK01], [BIP08], [Mim10], [Tsu12], [CMS14], [BBF16], [BHW19] など参照.

安定交換子長の一般化である安定  $(G, N)$ -交換子長を提唱したのは筆者らの仕事 ([KK19]) で, その後も [KKMM20], [Kar21a], [Kar21b] による仕事もあるが, 本稿で紹介する [KKM<sup>+</sup>21] で示したのは以下である.

**定理 8.1** ([KKM<sup>+</sup>21]). 群  $G$  とその正規部分群  $N$  が  $Q(N)^G = i^*Q(G) + H^1(N)^G$  を満たすとす. このとき,

- (1)  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  は  $[G, N]$  上で同値である.
- (2) さらに, もし  $N = [G, G]$  ならば, 任意の  $x \in [G, N]$  に対して  $\text{scl}_G(x) = \text{scl}_{G,N}(x)$  となる.

定理 8.1 と例 7.6 により,  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  が同値である例が構成できる. 更に [KKM<sup>+</sup>21] では  $G$  が自由群  $F_n$  の自己同型群  $\text{Aut}(F_n)$  で  $N$  が IA 自己同型群  $\text{IA}_n$  の場合にも  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  が同値なのを示している.

そこで興味深い問題として,  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  が同値でない例として何があるかがある. まず定理 8.1 より  $Q(N)^G \neq i^*Q(G) + H^1(N)^G$  が必要条件であり, 既述のように我々はその例をいくつか得た. そのうちで  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  が同値でないことを実際に示せるものはあるのだろうか. 実は, 現地点で知られている例は本質的には以下のみである.

**例 8.2.** 種数  $l$  が 2 以上の連結有向閉曲面  $S$ , その上の面積形式  $\omega$  と  $S$  のコホモロジー群  $H^1(S; \mathbb{R})$  の部分線形空間  $V$  を考え,  $G = \text{Symp}_0(S, \omega)$ ,  $N = \text{Flux}_\omega^{-1}(V)$  とおく. もし  $V$  の次元が  $l$  より大きいとすると,  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  は同値ではない.

上の主張は定理 3.9 の  $\text{Py}$  のカラビ擬準同型の拡張不能性の証明を議論を用いて証明できるが, その際に重要なのは拡張不能擬準同型の具体的な形が分かっていることである.

[KKMM21] では条件  $Q(N)^G \neq i^*Q(G) + H^1(N)^G$  を満たす  $(G, N)$  の例が例 7.4 など多数挙げられているが, これらの群で  $\text{scl}_G$  と  $\text{scl}_{G,N}$  が同値かどうかは一切分かっていない. これらの群においては拡張不能擬準同型の具体的な形が分からないのが一つの大きな障害である.

## 練習問題解答

**練習問題 5.2 の解答.** シンプレクティック多様体  $M$  上の一点  $x$  とリーマン計量を固定する. 数列  $\{F_n: M \rightarrow \mathbb{R}\}_{n=1,2,\dots}$  を, 各  $n$  に対して台が  $x$  を中心とする半径  $1/n$  の球体に含まれていて, かつ  $\int_M F_n \omega^m = n$  ( $M$  の次元を  $2m$  とする) となるものとする.

このとき,  $\phi_{F_n}$  はハミルトン微分同相写像の列は  $C^0$  位相で恒等写像に収束する. 一方,  $\mu$  はカラビ擬準同型なので十分大きい  $n$  に対して  $\mu(\phi_{F_n}) = n$  となって,  $\mu(\phi_{F_n}) = n$  は  $n \rightarrow \infty$  で発散する. よって  $\mu$  は  $C^0$  位相について連続ではない.  $\square$

**練習問題 7.2 の解答.** 任意の同次擬準同型  $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$ , 任意の  $f, g \in G$  について  $\mu(gfg^{-1}) = \mu(f)$  を示す. こ

のとき, 任意の  $n$  について,

$$\begin{aligned} |\mu(g^{-1}fg) - \mu(f)| &= \frac{1}{n} \cdot |\mu(g^{-1}f^n g) - \mu(f^n)| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot (|\mu(g) + \mu(f^n) + \mu(g^{-1}) - \mu(f^n)| + 2D(\mu)) \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot (|\mu(g) + n\mu(f) - \mu(g) - n\mu(f)| + 2D(\mu)) \\ &= \frac{2}{n}D(\mu). \end{aligned}$$

上の  $n$  は任意だったので,  $\mu(g^{-1}fg) = \mu(f)$  を得る. □

練習問題 6.3 の解答. 条件  $f, g \in G$  で  $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$  より, 任意の  $n$  について

$$[f, g]^n = (f(gf^{-1}g^{-1}))^n = f^n(gf^{-1}g^{-1})^n = f^n g f^{-n} g^{-1} = [f^n, g].$$

$\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$  は同次擬準同型なので,

$$\begin{aligned} |\mu([f, g])| &= \frac{1}{n} \cdot |\mu([f^n, g])| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot (|\mu(g) + \mu(f^n) + \mu(g^{-1}) + \mu(f^{-n})| + 3D(\mu)) \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot (|\mu(g) + n\mu(f) - \mu(g) - n\mu(f)| + 3D(\mu)) \\ &= \frac{3}{n}D(\mu). \end{aligned}$$

上の  $n$  は任意だったので,  $\mu([f, g]) = 0$  を得る. □

## 謝辞

まずは本稿執筆の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝いたします. この機会に共同研究者の皆様にも改めて感謝したいと思います. 他にも本研究を支えてくださった数多くの方々に感謝いたします.

## 参考文献

- [Ban78] Augustin Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), no. 2, 174–227.
- [Ban97] ———, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, vol. 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
- [BBF16] Mladen Bestvina, Ken Bromberg, and Koji Fujiwara, *Stable commutator length on mapping class groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **66** (2016), no. 3, 871–898. MR 3494163
- [BEP04] Paul Biran, Michael Entov, and Leonid Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 5, 793–802.
- [BHW19] Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, and Richard Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, preprint, arXiv:1909.07164 (2019).
- [BIP08] Dmitri Burago, Sergei Ivanov, and Leonid Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Groups of diffeomorphisms, Adv. Stud. Pure Math., vol. 52, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, pp. 221–250.
- [Bra15] Michael Brandenbursky, *Bi-invariant metrics and quasi-morphisms on groups of Hamiltonian diffeomorphisms of surfaces*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 9, 1550066, 29.
- [Cal70] Eugenio Calabi, *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, Problems in analysis (Lectures at the Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), 1970, pp. 1–26.
- [Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

- [CMS14] Danny Calegari, Naoyuki Monden, and Masatoshi Sato, *On stable commutator length in hyperelliptic mapping class groups*, Pacific J. Math. **272** (2014), no. 2, 323–351.
- [EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289. MR 1452851
- [EK01] H. Endo and D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 169–175.
- [Ent14] Michael Entov, *Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 1147–1171.
- [EP03] Michael Entov and Leonid Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 30, 1635–1676.
- [EP06] ———, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 1, 75–99.
- [EPP12] Michael Entov, Leonid Polterovich, and Pierre Py, *On continuity of quasimorphisms for symplectic maps*, Perspectives in analysis, geometry, and topology, Progr. Math., vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, With an appendix by Michael Khanevsky, pp. 169–197.
- [Fri17] Roberto Frigerio, *Bounded cohomology of discrete groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 227, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [Ish14] Tomohiko Ishida, *Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk via braid groups*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **1** (2014), 43–51.
- [Kar21a] Bastien Karlhofer, *Aut-invariant quasimorphisms on free products*, preprint, arXiv:2103.01354 (2021).
- [Kar21b] ———, *Aut-invariant quasimorphisms on graph products of abelian groups*, preprint, arXiv:2107.12171 (2021).
- [KK19] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura,  *$\hat{G}$ -invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, to appear in *Israel J. Math.*, arXiv:1911.10855v2 (2019).
- [KKM<sup>+</sup>21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, preprint, arXiv:2107.08571 (2021).
- [KKMM20] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, preprint, arXiv:2007.02257 (2020).
- [KKMM21] ———, *Commuting symplectomorphisms on a surface and the flux homomorphism*, preprint, arXiv:2102.12161 (2021).
- [KR19] Morimichi Kawasaki and Orita Ryuma, *Existence of pseudo-heavy fibers of moment maps*, to appear in *Communications in Contemporary Mathematics*, arXiv:1901.09395 (2019).
- [Mim10] Masato Mimura, *On quasi-homomorphisms and commutators in the special linear group over a Euclidean ring*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 18, 3519–3529.
- [PR14] Leonid Polterovich and Daniel Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, CRM Monograph Series, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. MR 3241729
- [Py06] Pierre Py, *Quasi-morphismes et invariant de Calabi*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 1, 177–195.
- [Tsu12] Takashi Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 141–185.

## タイヒミュラー空間のホロ境界

正井 秀俊 (東京工業大学)\*

### 1. ホロ

「ホロ」というのはラテン語で「境界」という意味らしい<sup>1</sup>. そのため「ホロ境界」は「サハラ砂漠」や「ナイル川」のような名前になっている. 本来は「ホロ関数境界」(horofunction boundary)と呼ぶのが正しいようで, これで“境界”におわす関数たちによる空間のbordification (日本語にすると境界づけ?) という意味となる. ホロ関数による境界は, グロモフ [Gro81] によって考案され, 任意の距離空間の境界を与える手法としてさまざまな対象について研究されてきた. たくさんの応用を得るうちに, だんだんと“horofunction boundary”と呼ぶのが面倒になり“horoboundary”と呼ばれるようになったようだ.

今回はあえてホロ境界とタイトルにつけた. ホロ境界は, 空間をコンパクト化する試みなのであるが, 実は距離空間が固有 (proper, 距離による任意の閉球がコンパクト) でないと理論が単純には動かない. 固有であるという条件を満たす空間は数多くあり, ホロ関数によるコンパクト化は距離とコンパクト化をつなげる架け橋となってきたものの, だんだんと固有でない距離空間を考える状況も増えてきた. 本講演で考えるタイヒミュラー空間は, 多様な背景から特徴づけがなされる空間であり, その背景に応じて距離やコンパクト化が知られていた. タイヒミュラー空間を固有な距離空間にする距離を考えると, ホロ関数によるコンパクト化は, 対応する背景のもと (別方法で) 構成された境界を与えることが知られている (§4). 一方で, 多くの研究が知られるタイヒミュラー空間論において重要な距離であり, リーマン計量から定義される Weil-Petersson 距離は完備ではない. Weil-Petersson 距離の非完備性は非固有性を導き, ホロ関数によるコンパクト化が一般論からは得られない. しかし, Weil-Petersson 距離は非完備ながら CAT(0) 空間となる (i.e. non-positive curvature を持つ) ことが知られている. CAT(0) 性により, 各点周りの“方向”が定まる (visual boundary). ホロ関数に, この方向の情報を加味すると, タイヒミュラー空間のホロコンパクト化が自然に得られることがわかる. 極座標  $(r, \theta)$  における半径  $r$  がホロ関数と, 偏角  $\theta$  が方向と対応すると, 講演者が勝手に思っているので, ホロ関数と方向の組み合わせを**ホロ座標**と講演者は勝手に呼んでいる. 極座標は原点を中心としているが, 任意の点を中心とした極座標を考えることができる. ホロ座標を導入することで, “考えうる極座標を全て束ねて”空間を調べている, という気持ちである. そして, より大きな空間に考えたい空間を埋め込み, 閉包をとることにより, 新しく境界 (ホロ) にホロ座標を加えることで新しいコンパクト化が得られる. まとめると, 本講演では境界 (ホロ) に関数ではなく, 座標を導入することで, 固有とは限らない空間のコンパクト化, 言わなければホロ座標コンパクト化を考えたい. そしてホロ座標コンパクト化を, タイヒミュ

本研究は科研費 (課題番号: 19K14525) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 57M60, 20F65

キーワード: タイヒミュラー空間, ホロ境界

\*東京都目黒区大岡山 2-12-1, 東京工業大学理学院数学系

e-mail: masai@math.titech.ac.jp

<sup>1</sup><https://en.wiktionary.org/wiki/horosphere> より.

ラー空間の Weil-Petersson 距離, さらにはタイヒミュラー空間上に定まる繰り込み体積 (renormalized volume) からなる関数に対して考えていきたい.

## 2. ホロ関数

距離空間  $(X, d)$  の上に基点  $b \in X$  を一つ定めて固定する.

**定義 2.1.** 点  $z \in X$  に対して,  $\psi_z : X \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\psi_z(x) = d(x, z) - d(b, z)$$

で定める.

この関数はリプシッツ性を持つ, すなわち

$$|\psi_z(x) - \psi_z(y)| \leq d(x, y)$$

が成り立つ. これは三角不等式で遊べば得られる. さらに定義により  $\psi_z(b) = 0$  である.

**定義 2.2.** 空間  $X$  上のリプシッツ関数で  $b$  で消えているもの全体を  $\text{Lip}_b^1(X)$  とかく. すなわち

$$\text{Lip}_b^1(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(b) = 0, f \text{ はリプシッツ関数}\}$$

と定義する.

今回は  $\text{Lip}_b^1(X)$  に各点収束の位相を入れる. これは関数の値をあてがうことで

$$\text{Lip}_b^1(X) \subset \prod_{x \in X} [-d(b, x), d(b, x)]$$

と見做して, 直積位相を考えた位相と同値である. 右辺はチコノフの定理よりコンパクトである.

**命題 2.3** (c.f. [MT18, Wal14]). 空間  $\text{Lip}_b^1(X)$  はコンパクトな距離付け可能空間である.

さて, 距離空間  $X$  を  $\text{Lip}_b^1(X)$  へ埋め込もう.

**命題 2.4** (c.f. [Wal14, MT18]). 写像  $\Psi : X \rightarrow \text{Lip}_b^1(X)$  を

$$\Psi(z) = \psi_z$$

で定めると,  $\Psi$  は単射で連続となる.

さて, 空間が固有であればさらに次が成り立つ.

**命題 2.5** ([Wal14]).  $X$  が固有であれば  $\Psi : X \rightarrow \text{Lip}_b^1(X)$  は像への同相写像である.

$X$  が固有距離空間ならば命題 2.3 と命題 2.5 により, 像  $\Psi(X)$  の閉包を取ることによって  $X$  のコンパクト化が得られる. 境界  $\partial_h(X) := \overline{\Psi(X)} \setminus \Psi(X)$  の元を **ホロ関数** (horofunction) と呼ぶ. このようにしてえら得るコンパクト化を **ホロ関数コンパクト化** (horofunction compactification) という. だんだんと時間が経ち, 様々な研究が生まれるにつれ, 境界だけでなく  $\overline{\Psi(X)}$  の元をいつでもホロ関数と呼んだり, ホロ関数によるコンパクト化を単にホロコンパクト化と呼ぶようになったようだ.

### 3. ホロ座標

さて、距離空間が固有であればホロ関数を考えることでコンパクト化が得られることがわかった。ところが、距離空間の固有性がない場合、一般には、命題2.5は成り立たず、 $\Psi$ の逆写像が連続にならない例が知られている。ここから先、 $X$ はCAT(0)空間であるとする。さらに、 $X$ はリーマン多様体であることも仮定する。一つ、のちの都合で完備性は仮定をしないでおく。細かい定義は必要ないので省略するが ([BH99] 参照) 空間がCAT(0)であると、次の性質が知られている。

**命題 3.1** ([BH99]). 空間  $X$  を CAT(0) 空間とする。このとき、任意の相異なる 2 点  $x, y \in X$  に対して、 $x$  と  $y$  を結ぶ測地線がただ一つ定まる。したがって、点  $x$  から  $y$  へ方向  $\bar{d}_y(x) \in T_x^1(X)$  を定めることができる。ここで、 $T_x^1(X)$  は  $X$  の点  $x$  における単位接空間である。

さらに任意の  $x, y, z \in X$  に対して、点  $z$  における  $x$  への方向と  $y$  への方向による角度  $\angle_z(x, y)$  を定めることができる ( $X$  がリーマン多様体の場合は、リーマン計量による角度。一般の場合はアレキサンドロフ角度と呼ばれる)。

この角度を用いてコンパクト化を考える。極座標において、原点で座標変換の連続性が壊れてしまう。ここでは、連続性の担保のために同相写像  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$  を考える。実際  $f(0) = 0$  であればなんでも良いが、例えば  $f(x) = (e^x - 1)/(e^x + 1)$  などを考えれば良い。方向  $\bar{d}_y(x)$  を原点で消えるように調整した

$$d_y(x) := f(d(x, y))\bar{d}_y(x)$$

を考える。こうして次の写像を定義する。

**定義 3.2** (ホロ座標 [Masa21]). 写像

$$\Phi: X \rightarrow \prod_{x \in X} ([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X))$$

を

$$\Phi(z) := (\psi_z(x), d_z(x))_{x \in X}$$

で定義する。

命題2.3と同様にして次がわかる。

**命題 3.3** ([Masa21]). 空間  $\prod_{x \in X} ([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X))$  はコンパクトな距離付け可能空間である。

ここで、空間  $\prod_{x \in X} ([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X))$  へは直積位相を入れていることに注意する。とくに方向に関して、接束とは位相が異なる。あとは、 $\Phi$ が埋め込みであることを言えば良い。

**命題 3.4** ([Masa21]). CAT(0) なリーマン多様体  $X$  において、指数写像  $\exp$  が各点において、然るべき開集合からの微分同相写像であるとする。このとき、

$$\Phi: X \rightarrow \prod_{x \in X} ([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X))$$

は像への同相写像である。

指数写像についての仮定は少し強めに感じるかもしれないが、後で考える Weil-Petersson 距離について成り立つ仮定である。

さて、この“方向たち”(direction)は、ホロ関数の視点から見ると、微分(derivative)に見える。ちょうどよく双方“d”である。

**命題 3.5** ([BH99, Corollary II.3.6]).  $X$  を CAT(0) 空間とする。測地線  $\sigma : [0, T] \rightarrow X$  を考え、 $p := \sigma(0)$  とする。このとき、

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\sigma(0), b) - d(\sigma(s), b)}{s} = \cos \angle_p(\dot{\sigma}(0), d_b(p))$$

が成り立つ。ここで  $\dot{\sigma}(0) \in T_p^1(M)$  は  $\sigma$  で定まる方向である。

#### 4. タイヒミュラー空間のホロ境界

以降、向け付け可能閉曲面  $S$  を固定する。種数は  $g \geq 2$  とする。タイヒミュラー空間  $\mathcal{T}(S)$  は  $S$  上の (マーキング込みの) 双曲構造、もしくは複素構造の空間である。タイヒミュラー空間  $\mathcal{T}(S)$  には様々な距離が乗る。代表的なものとして

- $\mathcal{T}(S)$  を双曲構造の空間だと思いうサーストン距離  $d_{\text{Th}}$
- $\mathcal{T}(S)$  を複素構造の空間だと思いうタイヒミュラー距離  $d_{\mathcal{T}}$

がある。これらはタイヒミュラー空間を固有な距離空間とする。同様に、タイヒミュラー空間には様々なコンパクト化が知られている。

- $\mathcal{T}(S)$  を双曲構造の空間だと思いうサーストン境界  $\partial_{\text{Th}}\mathcal{T}(S)$  [FLP79]
- $\mathcal{T}(S)$  を複素構造の空間だと思いうガーディナー・メジャー境界  $\partial_{\text{GM}}\mathcal{T}(S)$  [GM91]

これらの距離とコンパクト化はホロ境界を通して、自然に結びつく。

**定理 4.1** ([Wal14, LS14]). 以下が成り立つ。

- サーストン距離  $d_{\text{Th}}$  に関するホロ関数境界はサーストン境界  $\partial_{\text{Th}}\mathcal{T}(S)$  であり、
- タイヒミュラー距離  $d_{\mathcal{T}}$  に関するホロ関数境界はガーディナー・メジャー境界  $\partial_{\text{GM}}\mathcal{T}(S)$  [GM91] である。

ここでもう一つ、タイヒミュラー空間における自然な距離である Weil-Petersson 距離について考えるのは自然である。Weil-Petersson 距離については、例えば Wolpert の文献 [Wol03, Wol10]などを参照して欲しい。ここでは簡単に結果をまとめるにとどめておく。

**定理 4.2.** [Masa21] タイヒミュラー空間に Weil-Petersson 距離  $d_{\text{wp}}$  を入れた距離空間は、ホロ座標によってコンパクト化できる。

## 5. 繰り込み体積

論文 [Masa21] における, メインの対象は繰り込み体積 (renormalized volume) である. 繰り込み体積は, Graham-Witten [GW99] による考察を元に, 3次元双曲多様体について近年活発に研究されている対象である ([BBB19, KS08, KM18, Sch19] など). 特に擬フックス多様体に対して, 繰り込み体積を考えることで関数

$$V_R : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

が定義できる. この関数は

- $V_R(X, Y) \geq 0$  であり  $V_R(X, Y) = 0 \iff X = Y \in \mathcal{T}(S)$  [BBB19],
- $V_R(X, Y) = V_R(Y, X)$

を満たす. しかし,  $V_R$  は三角不等式を満たさないことがわかる [Masa21]. ホロ関数境界においては, 三角不等式は至る所に現れる必須の条件であるが, 次の結果で代用できることがわかる.

**定理 5.1** ([Sch19, Theorem 5.4], [KM18]).  $X, Y \in \mathcal{T}(S)$  とすると次が成り立つ.

1.  $V_R(X, Y) \leq 3\sqrt{\pi(g-1)}d_{\text{wp}}(X, Y)$ ,
2.  $V_R(X, Y) \leq 6\pi(g-1)d_{\mathcal{T}}(X, Y)$ .

以上の性質を念頭に, 次のようにホロ関数を真似る.

**定義 5.2.** 点  $Z \in \mathcal{T}(S)$  に対して関数  $\nu_Z : \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する.

$$\nu_Z(X) := V_R(X, Z) - V_R(b, Z), \text{ for } X \in \mathcal{T}(S).$$

$\nu_Z$  を **体積ホロ関数** (*volume horofunction*) と呼ぶ.

さらに, 繰り込み体積の微分に関する次の結果が知られている.

**定理 5.3** ([KM18, Lemma 2.4], [Sch19, Corollary 3.13]). 任意の  $Y \in \mathcal{T}(S)$  において,  $V_R(\cdot, Y)$  は  $\mathcal{T}(S)$  上微分可能である. すなわち,  $\sigma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{T}(S)$  を微分可能な道とすると

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V_R(\sigma(t), Y) = -\text{Re}\langle q_Y(\sigma(0)), \dot{\sigma}(0) \rangle.$$

が成り立つ. ここで  $q_Y(X)$  はベアズ埋め込みを与える写像  $\mathcal{T}(S) \rightarrow \text{QD}(S)$  であり ( $\text{QD}(S)$  は  $\mathcal{T}(S)$  上の正則2次微分の空間),  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は正則2次微分とベルトラミのペアリングである.

また, [BBB19] など考えられている  $-V_R$  の Weil-Petersson 測地流を考えると, 正則2次微分  $q_Y(X)$  は方向を与えていると考えることもできる. したがって,  $V_R$  における“ホロ座標”を次のように定める発想に至る.

**定義 5.4.** 定数  $C := 3\sqrt{\pi(g-1)}$  とする. このとき, 次のような空間を定義する.

$$\text{LQ}(S) := \prod_{X \in \mathcal{T}(S)} \{[-Cd_{\text{wp}}(b, X), Cd_{\text{wp}}(b, X)] \times \text{QD}_B(X)\},$$

(LQ は Lipschitz と Quadratic differential である). ここで  $QD_B(X)$  は  $X \in \mathcal{T}(S)$  上の正則 2 次微分で  $L^\infty$  ノルムが上から  $3/2$  で抑えられている空間である (とくに, コンパクトな空間である).  $LQ(S)$  は各点収束の位相, もしくは直積位相を入れる.

すると, ホロ関数やホロ座標と同様に次がわかる.

**命題 5.5** ([Masa21]). 空間  $LQ(S)$  はコンパクトで, 距離付け可能である.

そして, ベアズ埋め込みなどの性質を用いると次が得られる.

**定理 5.6.** 写像  $\mathcal{V} : \mathcal{T}(S) \rightarrow LQ(S)$  を

$$\mathcal{V}(Z) := (\nu_Z(X), q_Z(X))_{X \in \mathcal{T}(S)}$$

と定めると,  $\mathcal{V}$  は像への同相写像である.

したがって, 閉包  $\overline{\mathcal{V}(\mathcal{T}(S))}$  をとると,  $\mathcal{T}(S)$  のコンパクト化が得られる. 本番の講演では, さらにコンパクト化  $\overline{\mathcal{V}(\mathcal{T}(S))}$  の性質や, そこから得られる帰結について紹介する.

## 参考文献

- [BBB19] Martin Bridgeman, Jeffrey Brock, and Kenneth Bromberg, *Schwarzian derivatives, projective structures, and the Weil-Petersson gradient flow for renormalized volume*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 5, 867–896, DOI 10.1215/00127094-2018-0061. MR3934591
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR1744486
- [FLP79] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin et al. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66, Société Mathématique de France, Paris, 1979 (French). Séminaire Orsay; With an English summary. MR568308
- [GM91] Frederick P. Gardiner and Howard Masur, *Extremal length geometry of Teichmüller space*, Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237, DOI 10.1080/17476939108814480. MR1099913
- [GW99] C. Robin Graham and Edward Witten, *Conformal anomaly of submanifold observables in AdS/CFT correspondence*, Nuclear Phys. B **546** (1999), no. 1-2, 52–64, DOI 10.1016/S0550-3213(99)00055-3. MR1682674
- [Gro81] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 183–213. MR624814
- [KS08] Kirill Krasnov and Jean-Marc Schlenker, *On the renormalized volume of hyperbolic 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **279** (2008), no. 3, 637–668, DOI 10.1007/s00220-008-0423-7. MR2386723
- [KM18] Sadayoshi Kojima and Greg McShane, *Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2403–2426, DOI 10.2140/gt.2018.22.2403. MR3784525
- [LS14] Lixin Liu and Weixu Su, *The horofunction compactification of the Teichmüller metric*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 355–374, DOI 10.4171/117-1/9. MR3289706
- [MT18] Joseph Maher and Giulio Tiozzo, *Random walks on weakly hyperbolic groups*, J. Reine Angew. Math. **742** (2018), 187–239, DOI 10.1515/crelle-2015-0076. MR3849626

第68回トポロジーシンポジウム (2021年8月：オンライン開催)

- [Masa21] Hidetoshi Masai, “Compactification and distance on Teichmüller space via renormalized volume”, preprint.
- [Sch19] Jean-Marc Schlenker, *Volumes of quasifuchsian manifolds*. To appear, *Surveys in Differential Geometry*, vol. 24, 2020. arXiv:1903.09849.
- [Wal14] Cormac Walsh, *The horoboundary and isometry group of Thurston’s Lipschitz metric*, *Handbook of Teichmüller theory*. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 327–353, DOI 10.4171/117-1/8. MR3289705
- [Wol10] Scott A. Wolpert, *Families of Riemann surfaces and Weil-Petersson geometry*, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 113, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR2641916
- [Wol03] Scott A. Wolpert, *Geometry of the Weil-Petersson completion of Teichmüller space*, *Surveys in differential geometry*, Vol. VIII (Boston, MA, 2002), *Surv. Differ. Geom.*, vol. 8, Int. Press, Somerville, MA, 2003, pp. 357–393, DOI 10.4310/SDG.2003.v8.n1.a13. MR2039996