第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

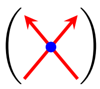
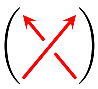
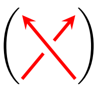
# On Vassiliev derivatives of Khovanov homology

吉田 純　(理化学研究所革新知能統合センター)*1
伊藤　昇　(茨城工業高等専門学校)*2

2021 年 8 月 24 日

## 1. Introduction

本稿では、**結び目** $K$ とは円周 $S^1$ のユークリッド空間への滑らかな埋め込み $S^1 \to \mathbb{R}^3$ の像のことをいい、二つの結び目が $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーによって移り合う時、それらの結び目は**同値**であるという。結び目の分類は結び目理論の成立以来の中心的な問題の一つであり様々な枠組みで研究されてきたが、一つの自然な理解として結び目全体のなす空間 $\mathcal{K}$ を調べることが考えられる。Vassiliev [41] はこの空間 $\mathcal{K}$ のコホモロジーを特異点理論の観点から調べることで、今日では *Vassiliev* **不変量**または**有限型不変量**と呼ばれる一連の不変量を定義した。文献 [6, 7] によれば、Vassiliev 不変量は空間 $\mathcal{K}$ における「壁越え」を代数的に記述した以下の漸化式で定義される結び目不変量の**微分**によって特徴付けることができる:

$v^{(r+1)}$  $= v^{(r)}$  $- v^{(r)}$  .　　(1.1)

一方、近年では結び目不変量の**圏化**が盛んに研究されるようになっている。$n$ 変数の結び目多項式 $v$ について、その圏化とは各結び目 $K$ に対して $(n+1)$ 重次数付きの鎖複体 $C(K)$ を与える対応 $C(-)$ で以下を満たすものである:

- $K$ と $K'$ が同値な結び目ならば $C(K)$ と $C(K')$ は擬同型である、すなわちそのホモロジー群 $H(K)$ の同型類は結び目不変量である。
- $i$ 次ホモロジー群の斉次分解 $H^i(K) = \bigoplus H^{i,j_1,\dots,j_n}(K)$ について、適切な正規化のもとで以下の等式が成り立つ:

$$v_K(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j_1,\dots,j_n} (-1)^i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \operatorname{rank} H^{i,j_1,\dots,j_n}(K) \quad . \tag{1.2}$$

上記の性質から、このような結び目不変量は**結び目ホモロジー**とも呼ばれる。結び目不変量の圏化の端緒となったのは Khovanov [17] による Jones 多項式 [15] の圏化である。Khovanov の定義した結び目ホモロジー $Kh(K)$ は *Khovanov* **ホモロジー**と呼ばれている。その他、結び目フレアホモロジー [35, 31]、Khovanov-Rozansky ホモロジー [21, 23] などの結び目ホモロジーがある。

我々の研究の大きな目標は、これらの結び目ホモロジーを Vassiliev のような結び目の空間 $\mathcal{K}$ の上の高次元のコホモロジーとして捉えることである。これにより、Vassiliev

本研究は科研費 (課題番号:20K03604) の助成を受けたものである。一部、研究プロジェクト経費助成事業・研究ネットワーク形成支援事業「結び目量子情報トポロジーネットワーク」の補助も受けた。
*1 e-mail: jun.yoshida@riken.jp
*2 〒 312-8508 茨城県ひたちなか市中根 866 茨城工業高等専門学校 国際創造工学科
e-mail: nito@gm.ibaraki-ct.ac.jp
web: https://researchmap.jp/noboru_ito

不変量の背景にあるより高次元の構造をホモトピー論の道具を用いて直接調べることが可能になり、結び目ホモロジーに対する Vassiliev 理論の類似を構成することが可能になると期待している。その最初の段階として Khovanov ホモロジーについて Vassiliev 微分 (1.1) の圏論的類似を構成し、古典的に知られる関係式について、それがホモロジーの段階で成立していることを示した。本質的には、これは交差交換に対応する以下の形の写像の実現である:

$$\widehat{\Phi} : Kh\left(\quad\right) \to Kh\left(\quad\right) \quad . \tag{1.3}$$

Khovanov ホモロジーを与える鎖複体の上にこのような写像を構成することで、それに付随する以下の長完全列によって Vassiliev 微分 (1.1) の圏化を与える:

$$\begin{array}{l} \cdots \to Kh^{i,j}\left(\quad\right) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i,j}\left(\quad\right) \longrightarrow Kh^{i,j}\left(\quad\right) \\ \to Kh^{i+1,j}\left(\quad\right) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i+1,j}\left(\quad\right) \to Kh^{i+1,j}\left(\quad\right) \to \cdots \end{array} \quad . \tag{1.4}$$

この長完全列は、式 (1.2) の意味での Euler 数において Vassiliev 微分 (1.1) を誘導することに注意されたい。すなわち長完全列 (1.1) は Jones 多項式の Vassiliev 微分の圏化である。我々は、このように二重点を持つ結び目に拡張された Khovanov ホモロジーが実際に特異結び目の不変量になることを示した。さらに、結び目多項式の Vassiliev 微分について古典的に知られる FI 関係式と 4 項関係式について、それらの圏化した類似を証明した。これら二つの関係式は、Vassiliev [41] 及び Kontsevich [27] による有限型不変量の空間の構造を記述において、最も基本的な関係式である。

本稿の目標は、我々の交差交換 (1.3) の概略を示し、上述の関係式の圏化が Vassiliev の枠組みにおいてどのようになされるのかを解説することである。

## 2. 結び目の空間と結び目不変量

まずはじめに、結び目の分類問題を、結び目の空間 $\mathcal{K}$ の観点から代数的に記述する方法を概説する。具体的には $\mathcal{K}$ を滑らかな埋め込み $S^1 \to \mathbb{R}^3$ の全体のなす空間とする。ここで、位相は Whitney $C^\infty$-位相を考える。この時、空間 $\mathcal{K}$ の各点は具体的な結び目に対応し、またその上の道とは埋め込みのイソトピーに他ならない。ここで、イソトピー拡張定理(例えば [12] を見よ)によって、埋め込みのイソトピーは常にアンビエントイソトピーに拡張できることに注意されたい。このことによって、結び目の同値類は $\mathcal{K}$ の弧状連結成分と一対一に対応する。すなわち、結び目の分類とは、弧状連結成分の集合 $\pi_0\mathcal{K}$ を求めることに他ならない。

分類問題に対しての一つの典型的なアプローチは不変量を用いることである。結び目理論もその例に漏れず、Alexander 多項式 [2], 符号数 [40, 30], Jones 多項式 [15], HOMFLY 多項式 [11, 34] など数多くの不変量が発見されてきた。このような結び目不変量は、上記の観点からはアーベル群 $A$ への写像 $v : \pi_0\mathcal{K} \to A$ と見做せる。ところが、以下の同型によりこれは空間 $\mathcal{K}$ の 0 次のコホモロジー類に他ならない:

$$\mathrm{Map}(\pi_0\mathcal{K}, A) \cong \mathrm{Map}(\mathcal{K}, A)/(\text{ホモトピー}) \cong H^0(\mathcal{K}; A) \quad .$$

ここで $A$ には離散位相を与えている。

上の定式化によれば、結び目の分類と結び目不変量の分類は双対であり、ともに空間 $\mathcal{K}$ のホモトピー型により決定される。より具体的には、$\mathcal{K}$ の 0 次の特異コホモロジーは以下の写像の核である:

$$H^0(\mathcal{K};A) \cong \ker\left(A^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathrm{ev}_1^* - \mathrm{ev}_0^*} A^{\mathrm{Path}(\mathcal{K})}\right) \quad ,$$

ここで、$\mathrm{Path}(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ 上の連続な道 $I=[0,1]\to\mathcal{K}$ の全体で、$\mathrm{ev}_t : \mathrm{Path}(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ は $\mathrm{ev}_t(c) = c(t)$ で与えられる。従って $\mathcal{K}$ 上の道の構造を理解することで、結び目不変量のコホモロジー類としての姿が見えてくるはずである。

**定義.** 位相空間 $X$ に対して、圏 $\Pi_1 X$ を以下で定義する:

- 対象の集合は $X$ の点全体からなる;
- $x, y \in X$ に対し、射 $x \to y$ は連続な道 $c : I \to X$ で $c(0) = x$, $c(1) = y$ となるもののホモトピー類である;
- 合成は道の連結として定義される。

この圏 $\Pi_1 X$ を $X$ の**基本亜群** *(fundamental groupoid)* と呼ぶ。

上の議論から、$\mathcal{K}$ の基本亜群 $\Pi_1\mathcal{K}$ はコホモロジー類としての結び目不変量を考察するために十分な情報を持っている。例えば、二つの結び目 $K$ と $K'$ が同値であるための必要十分条件は、それらが $\Pi_1\mathcal{K}$ の対象として同型であることであり、従って各結び目 $K$ に元 $v(K) \in A$ を対応させせる写像が結び目不変量であるための必要十分条件は、$v$ の値が $\Pi_1\mathcal{K}$ の同型によって不変になることである。

さて、結び目不変量の構成及び計算の典型的な手法は、結び目図式を用いることである。その基礎となるのが Reidemeister の定理であるが、Carter-斎藤 [9] 及び Roseman [36] の特異点の解析により、これは基本亜群の以下の記述を与える:

**定理 2.1** (本質的には [9] 及び [36])**.** 圏 $\Pi_1\mathcal{K}$ は以下で記述される圏と圏同値である*:*

- 対象は結び目図式のイソトピー類である*;*
- 射は表 *2.1* の平面曲線の特異点に対応する図式の移動によって生成される *(*これは *Reidemeister* 移動と呼ばれる*);*
- 射集合は以下で生成される同値関係の商集合である*:*
  - (i) *Reidemeister* 移動はその逆向きの移動の逆射である*;*
  - (ii) 重なりを持たない部分図式に適用される *Reidemeister* 移動同士は可換である*;*
  - (iii) 表 *2.2* にある特異点と対応する移動*.*

注意 2.2. Carter-斎藤 [9] ではさらに一般に、曲面結び目の移動の生成元を導出しており、それらは**ムービー移動**と呼ばれている。Theorem 2.1 で述べられている 表 2.2 に対応する移動は、その中で (コボルディズムとして) 可逆なものに対応している。

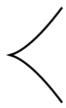
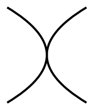
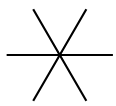
| RI | RII | RIII |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $(t^2, t^3)$ | $(\pm t^2, t)$ | triple point |

表 2.1: Reidemeister 移動に対応する特異点

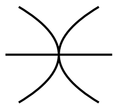
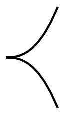
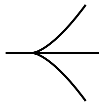
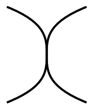
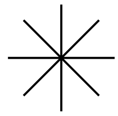
| MM6 | MM7 | MM8 | MM9 | MM10 |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |
| $(\pm t^2, t)$ and $(t, 0)$ | $(t^2, t^5)$ | $(t^2, t^3)$ and $(0, t)$ | $(\pm t^3, t)$ | quadruple point |

表 2.2: 可逆なムービー移動に対応する特異点

## 3. Khovanov ホモロジーと空間 $\mathcal{K}$

前節の結び目の空間 $\mathcal{K}$ を用いた枠組みは、アーベル群に値を取る結び目不変量を対象にしたものであったが、実は Khovanov ホモロジーも同様に $\mathcal{K}$ の枠組みで整理できる。本節ではこのことを詳しく見る。

Khovanov ホモロジーは Khovanov [17] によって考案され、その Euler 数は (空集合に関して正規化された) Jones 多項式と一致する。まずはその構成について簡単に復習する。多項式環 $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2) \cong \mathbb{Z}\{1, x\}$ を考え、その上に以下の**余積** $\Delta$ と**余単位射** $\varepsilon$ を考える:

$$\Delta : A \to A \otimes A \; ; \quad \begin{cases} 1 & \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1 \, , \\ x & \mapsto x \otimes x \; ; \end{cases} \quad , \quad \varepsilon : A \to \mathbb{Z} \; ; \quad \begin{cases} 1 & \mapsto 0 \, , \\ x & \mapsto 1 \, . \end{cases}$$

また、積 $\mu : A \otimes A \to A$ 及び単位射 $\eta : \mathbb{Z} \to A$ とすると、これらの演算によって $(A; \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ は Frobenius 代数になる。ところで、Frobenius 代数は Atiyah [3] の意味での 2 次元の位相的量子場の理論 (TQFT) と同値であることが知られており、以下の対称モノイダル関手を引き起こす:

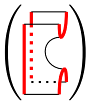
$$Z_A : \mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{Ab} \quad .$$

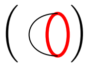
ここで、$\mathbf{Cob}_2$ 及び $\mathbf{Ab}$ はそれぞれ 1 次元向き付き閉多様体とそれらの間の 2 次元向き付きコボルディズムの圏及びアーベル群と群準同型の圏である。$\mathbf{Cob}_2$ の各対象は円周 $S^1$ の有限個の非交和であり、関手 $Z_A$ は対象について以下のように定める：

$$Z_A\Bigl(\overbrace{S^1 \amalg \cdots \amalg S^1}^{n}\Bigr) \coloneqq A^{\otimes n} \quad .$$

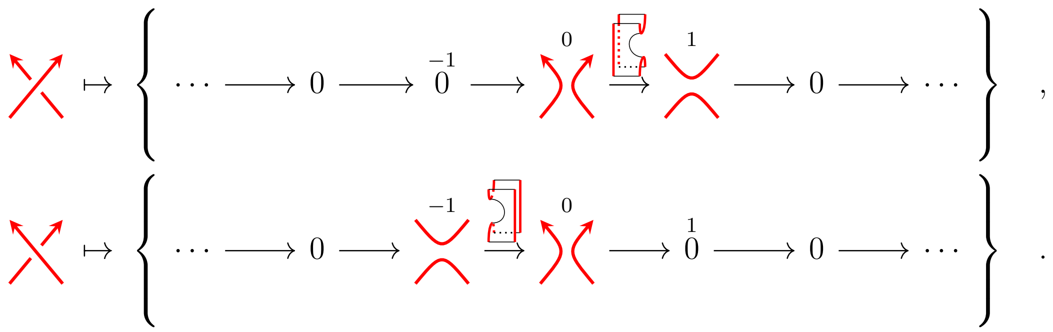
一方 $\mathbf{Cob}_2$ の射は 2 次元の場合のモース特異点に対応するコボルディズムで生成され

ており、それぞれについて $Z_A$ は以下の射を対応させる:

$Z_A$  $= \mu : A \otimes A \to A$ または $\Delta : A \to A \otimes A$ ,

$Z_A$  $= \eta : k \to A$ , $Z_A$  $= \varepsilon : A \to k$ .

この関手 $Z_A$ を用いて、各結び目図式 $D$ について鎖複体 $C(D)$ を以下のように定義する。まず、$D$ の各交点について、水平方向及び垂直方向の二種類の平滑化を考え、その符号に応じて局所的に以下のコボルディズムの鎖複体を考える[1]:



(3.1)

図式 $D$ の交点の集合を $c(D)$ とおくと、全ての交点を平滑化する方法は $2^{c(D)}$ 通り考えられるが、その結果は全て平面上の円周の非交和であり、また上記の方法によってそれぞれ(コ)ホモロジカルな次数を付与される。そこで、各平滑化に関手 $Z_A$ を適用して得られる次数付きアーベル群を $C^*(D)$ と置き、鎖複体のテンソル積の要領で微分を誘導することで鎖複体を得る。さらに $Z_A(S^1) = A \cong \mathbb{Z}\{1, x\}$ であることに注意し、$\deg 1 = 1$, $\deg x = -1$ と定めることによって $Z_A(S^1)$ に次数を付与することで $C^*(D) = C^{*,\star}(D)$ は二重次数付き鎖複体となる。この $Z_A(S^1)$ の次数から誘導される $C(D)$ の次数を、(コ)ホモロジカルな次数と区別するために**量子次数**と呼ぶ。量子次数を適切に補正することで $C^*(D)$ の微分は量子次数を保つことが示される。

**定理 3.1** (Khovanov [17])**.** 結び目図式 $D$ に対して、二重次数付き鎖複体 $C^{*,\star}(D)$ は以下の性質を満たす*:*

(1) $D_1$, $D_2$ が *Reidemeister* 移動によって移り合う時、鎖ホモトピー同値 $C^{*,\star}(D_1) \simeq C^{*,\star}(D)$ が存在する。特に、そのホモロジー群

$$Kh^{i,j}(D) \coloneqq H^i(C^{*,j}(D))$$

の同型類は結び目不変量を定義する。特に $D$ が結び目 $K$ の図式である時、上の群を $Kh^{i,j}(K)$ と書き、$K$ の *Khovanov* ホモロジーと呼ぶ。

(2) $D$ が表す結び目を $K$ とする時、次式が成立する*:*

$$V_K(t)|_{t=q^2} = \frac{1}{q+q^{-1}} \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{Q}} Kh^{i,j}(D) \otimes \mathbb{Q} \quad .$$

すなわち *Khovanov* ホモロジーは *Jones* 多項式の圏化である。

[1] ここで、水平方向の平滑化については特殊な向きを入れる必要がある。詳細は [44] を参照されたい。

さて、本節の目標は Khovanov ホモロジーを $\Pi_1\mathcal{K}$ からの関手と見做すことであった。Khovanov ホモロジーそのものは二重次数付きアーベル群の圏に値を持つが、圏化の観点からは導来圏を考えることが自然である。可換環 $k$ について $\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}}$ を全次元有限の次数付き $k$-加群と次数を保つ $k$-準同型のなす圏とし、$D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}})$ をその有界導来圏とする。この圏の対象は有限次元のホモロジーを持つ $k$ 上の二重次数付き鎖複体であるから、上記の構成により $Kh(D)\otimes k$ を $D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}})$ の対象と思うことができる。さらに射の対応を定義する必要があるが、Theorem 2.1 により、これは以下の手順でなされる:

- Reidemeister 移動に対応して、具体的な鎖ホモトピー同値を構成する;
- Reidemeister 移動の列について 表 2.2 の特異点に対応するムービー移動で不変であることを確認する。

**定理 3.2** (本質的には [10]). *Khovanov* ホモロジーの構成は以下の関手を定義する*:*

$$Kh : \Pi_1\mathcal{K} \to D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grVect}_k^{\mathsf{f}}) \quad .$$

注意 3.3. 上の構成は全て一般の絡み目図式 $D$ について意味を持つ。従って Theorem 3.2 の関手は絡み目の空間の基本亜群からの関手に拡張される。

## 4. Vassiliev 理論における交差交換と Khovanov ホモロジーの Vassiliev 微分

本稿の冒頭で、Vassiliev 理論は空間 $\mathcal{K}$ のホモトピーを調べることによって始まったと述べた。本節ではそのことを簡単に説明した後、前節で定義した $\Pi_1\mathcal{K}$ からの関手としての Khovanov ホモロジーについて、我々の定義した Vassiliev 微分について解説したい。

今、$S^1$ から $\mathbb{R}^3$ への滑らかな写像全体を $\mathcal{M} := C^\infty(S^1,\mathbb{R}^3)$ と書き Whitney $C^\infty$-位相を入れる。結び目の空間 $\mathcal{K} = \mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^3)$ は $\mathcal{M}$ の開集合である。一方、その補集合 $\Sigma = \mathcal{M}\setminus\mathcal{K}$ は何らかの意味での特異点を持つ写像の全体であり、Thom-Boardman 理論 [8] による特異点の次数によって $\Sigma = \bigcup_{i=1}^\infty \Sigma_i$ と分解される [2]。ここで、各 $\Sigma_i$ は $\mathcal{M}$ において余次元 $i$ の局所閉部分空間であり、特に次数の低いものについては以下のように書ける:

- $\Sigma_1$ は唯一の二重点を持つはめ込み写像の全体である、すなわちこれは二重点が丁度一つの特異結び目の空間である;
- $\Sigma_2$ は以下の二種類の特異点を持つ写像の全体である:
  - (i) 二重点が丁度二つのはめ込み写像;
  - (ii) 丁度一つの危点を持つ単射;

[2] 正確にはこの分解は $\Sigma_\infty \cup \bigcup_i \Sigma_i$ と書かれるべきである。ただし $\Sigma_\infty$ は $\mathcal{M}$ において余次元が無限大なので、ホモトピー論の観点からは無視して良い。

Vassiliev [41] の基本的なアイデアは以下の通りである。まず空間 $\mathcal{M}$ は可縮であることに注意する。すると $\Sigma = \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ の形より、Alexander 双対を用いて以下の同型を得る:

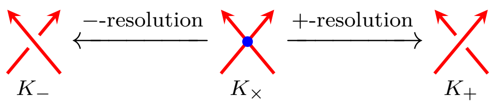
$$\widetilde{H}^*(\mathcal{K}) \cong \overline{H}_{\infty-*-1}(\Sigma) \quad . \tag{4.1}$$

ただし、左辺は $\mathcal{K}$ の既約コホモロジーであり、右辺は $\Sigma$ の有限次元近似に関する Borel-Moore ホモロジーの余極限である。さて $\Sigma = \bigcup_{i>1} \Sigma_i$ であったら、これにより $\Sigma$ にフィルトレーションを入れて、以下の形のスペクトル系列を得る:

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{K}) \quad . \tag{4.2}$$

第 2 節の考察によって、結び目不変量とは $\mathcal{K}$ の 0-次のコサイクルに他ならないのだから、上のスペクトル系列において $E_r^{-i,i}$ の形の群は結び目不変量の情報を持っているはずである。Vassiliev は $E_1^{-i,i}$ 及び $E_2^{-i,i}$ に関して組み合わせ的な記述を与えることによって、一連の不変量を定義した。これは後に Kontsevich [27] によってコード図式のなす代数系の言葉によって整理され、有理係数の場合には Vassiliev 型の不変量は $E_2^{-i,i}$ の形の群全体によって完全に決定されることが示された。

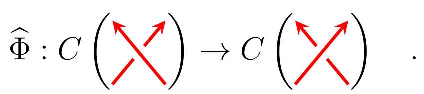
上記の Vassiliev の理論を低次の場合にもう少し具体的に見てみよう。同型 (4.1) は大雑把に言えば、$\Sigma$ の Borel-Moore サイクル $c$ に対して、$\mathcal{M}$ における $c$ と $\mathcal{K}$ のサイクルとの (一般化された) 絡み数を考えることで $\mathcal{K}$ 上のコサイクルを誘導している。よって $v \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K})$ がスペクトル系列の項 $E_\infty^{-i,i}$ の像に入るための条件とは、それが $\Sigma_i$ の Borel-Moore サイクルとのペアリングで自明となることである。例えば $i = 1$ の場合、これは以下のような条件として書き下せる。$K_\times$ を丁度一つの二重点を持つ特異結び目とし、その二重点を正負の交点に解消したものをそれぞれ $K_\pm$ とする:



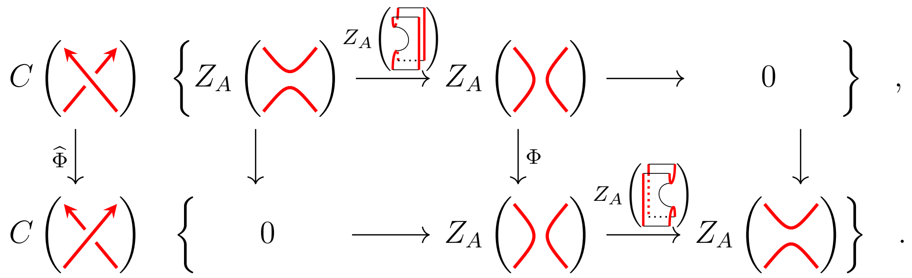

結び目不変量 $v \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K})$ が次数 1 の Vassiliev 不変量であるための条件は全ての $K_\times \in \Sigma_1$ に対して $v(K_+) - v(K_-) = 0$ となることである。これは $v$ が交差交換によって不変であることを意味しており、よって次数 1 の Vassiliev 不変量は全て自明である。Birman [6] 及び Birman-Lin [7] により、実は高次の Vassiliev 不変量についても、$v$ を以下の漸化式 (1.1) によって特異結び目に拡張したものによって特徴付けられることが示された。こうして得られた特異結び目の不変量 $v^{(r)}$ を $r$-**次の** *Vassiliev* **微分**と呼ぶ。

**定理 4.1** (Birman [6], Birman-Lin [7])**.** 結び目不変量 $v \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K})$ について、それが $r$-次の *Vassiliev* 不変量であるための必要十分条件は、$v^{(r)} \not\equiv 0$ かつ $v^{(r+1)} \equiv 0$ となることである。

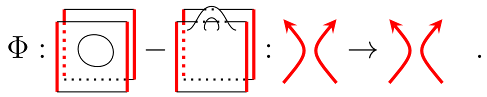
さて、$\mathcal{K}$ の立場からは、漸化式 (1.1) は $\mathcal{K}$ の連結成分を隔てる「壁」である $\Sigma_1$ を越えた時に $v$ の値がどのように変化するかを測っていると考えられる。よって、Vassiliev スケイン関係式 (1.1) の Khovanov ホモロジーにおける類似を考えるには、この「壁越え」を鎖複体の上の以下の形の射として実現することが本質的である:



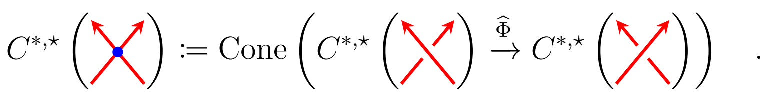
我々は文献 [13, 14] において、この射 $\widehat{\Phi}$ を以下によって記述される射として実現した:



ここで、$\Phi$ は以下のコボルディズムの形式和から誘導される射である:

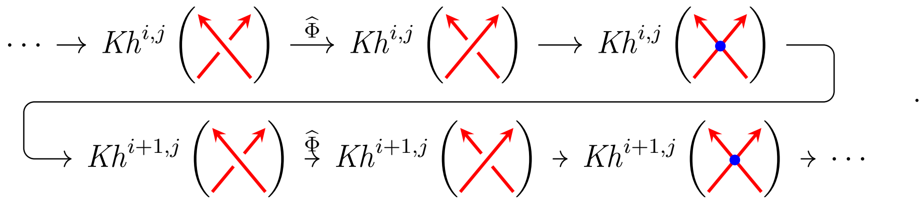


これを用いて、Khovanov ホモロジーの Vassiliev 微分として、二重点を持つ結び目図式についての Khovanov 鎖複体を以下の漸化式によって定義する:



ここで Cone(−) は鎖複体の写像錐である。

**定理 4.2** (伊藤-吉田 [13, 14])**.** 上で拡張された *Khovanov* ホモロジーは特異結び目の不変量を定め、さらに各二重点に対して、以下の長完全列が存在する*:*

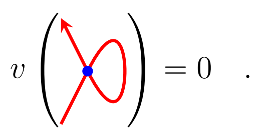


## 5. FI 関係式と 4 項関係式

前節では Vassiliev 微分は空間 $\mathcal{K}$ と特異結び目の空間 $\Sigma = \bigcup_{i>0} \Sigma_i$ とのペアリングで理解できることを説明したが、高次の Vassiliev 不変量に関しては $\Sigma_i$ が大きな余次元を持つので、一般にはそれが Vassiliev 微分に導く関係式は単純な二項の漸化式ではない。Kontsevich [27] は有理係数の Vassiliev 不変量の構造をコード図式の言葉で整理する中で、FI 関係式と 4 項関係式と呼ばれる二つの関係式が全ての関係式を生成することを指摘した。本節ではこれらの類似が Khovanov ホモロジーにおいて成立していることを示す。

### 5.1. FI 関係式

特異結び目の不変量 $v$ が FI 関係式を満たすとは、以下の等式が成立することである:



(5.1)

これは、$\mathcal{K}$ のホモトピー論の立場からは、Figure 5.1 の二つの経路でのモノドロミー作用が自明になることを意味している。すなわち、結び目ホモロジーの観点では、これ

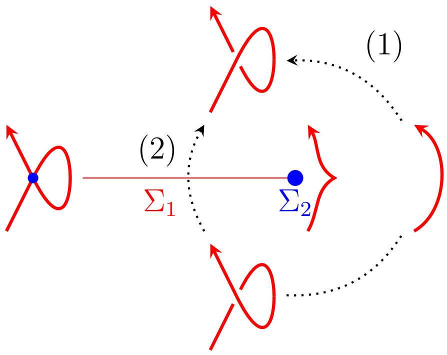
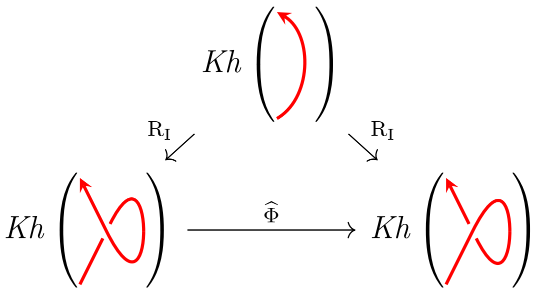



図 5.1: Two paths for the FI relation

は交差交換の射 $\widehat{\Phi}$ がタイプ I の Reidemsiter 移動と可換であることを意味している。特に、任意の結び目不変量に対して、その Vassiliev 微分は FI 関係式を満たしている。よって、結び目ホモロジーについても、その Vassiliev 微分が FI 関係式の圏化された類似を満たすことが期待される。

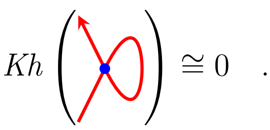
**定理 5.1.** 第 *4* 節で定義した交差交換の射 $\widehat{\Phi}$ について、$D^{\mathrm{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathrm{f}})$ の以下の図式は可換である*:*




(5.2)

*すなわち、* $\widehat{\Phi}$ *はタイプ I の Reidemeister 移動と可換である。*

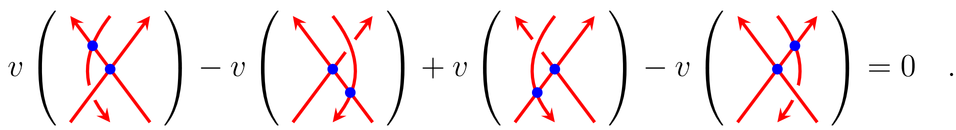
図式 (5.2) において、上から下への二つの射は擬同型である。従って、この場合の $\widehat{\Phi}$ もやはり擬同型であり、よって Theorem 4.2 より以下を得る:




このことから、Theorem 5.1 は FI 関係式の圏化された類似であるといえる。

### 5.2. 4 項関係式

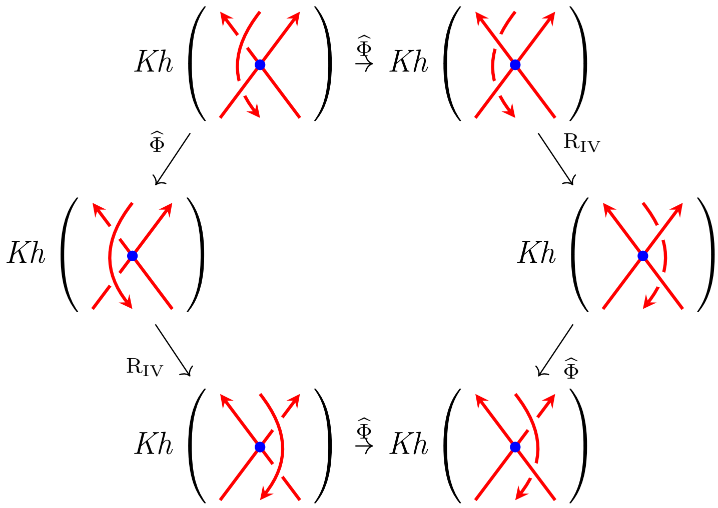
4 項関係式については、通常はコード図式に関して書かれるが、それを結び目図式の場合に書き下すと以下のようになる。特異結び目不変量 $v$ が 4 項関係式を満たすとは、以下の等式が成立することである:




任意の結び目不変量に関して、その Vassiliev 微分は 4 項関係式を満たす。実際に、上式を $v^{(r)}$ の場合で見ると、各二重点での値を全て $v$ で書き下してみるとタイプ III の

Reidemeister 移動で移り合う図式同士が互いに打ち消し合うことを確認できる。一方、結び目ホモロジーにおいては Reidemeister 移動は具体的に与えられた擬同型である。よってこの場合の 4 項関係式は、適切な可換図式として理解できると考えられる。

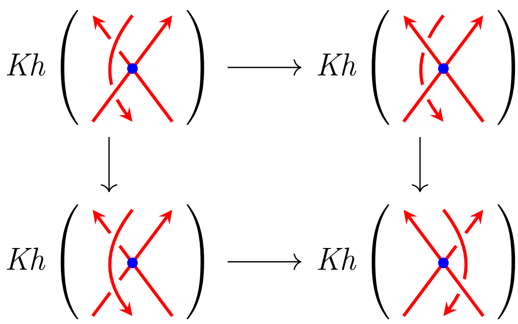
**定理 5.2** (in preparation)**.** *第 4 節で定義された Khovanov ホモロジーの Vassiliev 微分について、以下の* $D^{\mathrm{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathrm{f}})$ *の図式はホモトピー同値の差を除いて可換である:*




. (5.3)

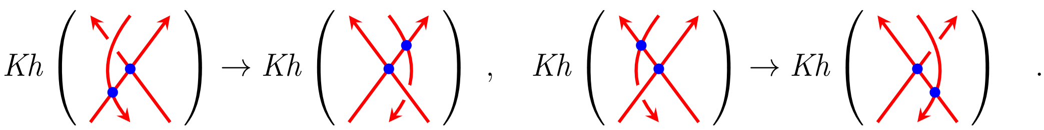
ここで $\mathrm{R_{IV}}$ はタイプ *III* の *Reidemeister* 移動が *Vassiliev* 微分に誘導する擬同型である。

図式 (5.3) の擬同型 $\mathrm{R_{IV}}$ の射を無視して書けば、これは以下のホモトピー可換図式として書ける:




. (5.4)

Khovanov ホモロジーでの Vassiliev 微分の定義から、図式 (5.4) の縦横の射はそれぞれ以下の射を誘導する:




これらの射の写像錐は、ともに図式 (5.4) を三重複体と思った時の全複体と擬同型なので、従ってこれらは擬同型である。この事実を用いると、(5.4) の各項の Euler 数に誘導される関係式は、通常の 4 項関係式の他ならない。すなわち、Theorem 5.2 は 4 項関係式の圏化された類似である。

## 6. Vassiliev 理論と Khovanov 理論の関係について

最後に、本研究の背景と未来について俯瞰的に概説する。本節では 2010 年–2015 年頃の海外における圏化 (カテゴリフィケーション、カテゴリー化、圏論化) の雰囲気を、

特に低次元トポロジーの観点から感じたままの印象を持ち込んでいることをお許しいただきたい。

Vassiliev 理論 [41] と Khovanov 理論 [17] は数学としてそれぞれの由緒正しい起源がある。またこの２つの理論については 1990 年代以降、2000 年代以降に「爆発的」に関連論文が出たということでも知られる。これらはそれぞれ数学理論として根源的な部分を扱っており、数学が何らかの意味で進んでいくものであるならば、真っ当な方向として深めていかれるはずのものであることは間違いない。この２つの理論は半世紀先後もおそらく未解決の問題を持ちながら発展しているであろう。例えば Vassiliev 不変量に関しては次の有名な予想[3]があり未だ解決していない[4]。

**予想** (Vassiliev [41])**.** Vassiliev 不変量は任意の異なる結び目を判別する。

Vassiliev 理論と Khovanov 理論、これらはもともと物理学の観点からは結びついていた。有名事実としては Witten [43] により Jones 多項式は Chern-Simons 理論から非摂動論として得られている。その一方で Chern-Simons 摂動論では摂動展開の係数が Vassiliev 不変量となり [4]、Khovanov 理論は refined-Chern Simons 理論に対応するとされる [1]。

2010 年頃といえば link homology 周辺では数学において２つの大きな未解決問題が提示されていた (下記の「Khovanov の問題」)。量子 $\mathfrak{sl}_2$ 表現の Jones 多項式に応じて Khovanov homology という圏化が Khovanov [17] により発見され、以降 Alexander 多項式に対して (Ozsváth-Szabó [31, 35])、HOMFLY-PT 多項式に対して (Khovanov-Rozansky [22, 24])、次々と圏化が見つかってきた。その流れの中で Khovanov [18], Stroppel [39] がそれぞれ ICM2006, ICM2010 の論文において問題として挙げていたものである。

**Khovanov の問題**

(1) Categorify polynomial invariants $P(L, \mathfrak{g})$ of knots and links associated to arbitrary complex simple Lie algebras $\mathfrak{g}$ and their irreducible representations.

(2) Categorify the Witten-Reshtikhin-Turaev invariants of 3-manifolds.

目標の的がぼやけてしまうかもしれないが、予稿集という性格上、非専門家向けに言い換えておく。

(A) 一般の量子 $\mathfrak{g}$ 表現における結び目量子不変量の圏化は何か？

(B) ３次元多様体の量子不変量の圏化は何か？

筆者 (伊藤) が 2011 年にトポロジーシンポジウムで講演させていただいた後といえば、前者の問題については Kang-柏原 [16] および Webster [42] による表現の圏化に関する論文が話題をさらい、もっと先にある多くの問題の解決が一気に進むのではないかという気運が高まったのは事実である[5]。実際、これらのことによって量子群の圏化 (KLR 代数 [19, 20, 37]) が具体的に使われる様子が理解されたといえよう。ただ、低

[3] [33, Page 46] では、“the Vassiliev Conjectue"という言い方がなされている。
[4] 但し、pure braids は Vassiliev 不変量により判別されることが河野俊丈によって示されている [26]。
[5] 筆者 (伊藤) も当時 Khovanov 研の学生さん達と一緒に Webster の論文を読んだりしてセミナーをしていた。

次元トポロジーの観点からは、上記の Khovanov の元々の問題は魅力的なまま残っているともいえる。なお、後者である３次元多様体の問題については各方面で大きな努力がなされ、道具立てとなる対象物の圏化は行われていながらも未解決である。

一方、Vassiliev 不変量が多項式となる結び目量子不変量に対して普遍性をもつものであることがいくつかの証明 (Piunikhin [32] もしくは河野俊丈の定理 [25] の系 [5]) によって明らかになっているため、次のようにも考えられよう。

Khovanovの問題 ((1)) に直接答えるために、任意の量子不変量を次数付き Euler 数として複体を構成するのは真正面の答えである。また量子不変量を Taylor 展開した各係数 (Vassiliev 不変量) の圏化を与えることができるなら、それも一つの答え方である。

ただし、以前筆者 (伊藤) は、この後者の考えは本当に筋のいいものかどうか疑問をもっていたし、周囲もそうであったのではないだろうか。なぜなら、Chern-Simons 摂動論から導かれる Vassiliev 不変量がある一方でせっかく Witten による厳密解を求める立場 (非摂動論) で述べられた Jones 多項式をもう一度近似解を求める立場 (摂動論) に戻すかのような錯覚があったからである。Khovanov 理論と Vassiliev 理論がどうして２０年以上具体的に結びつかなかったか、と問われれば、１０年前から現場にいた立場として、次の２つの若干懐疑的な雰囲気が長い間影響していたかもしれない、と答えるだろう。

- Shirokova-Webster [38] のような、Khovanov-Rozansky homology を経由した Vassiliev 定義関係式の圏化[6]についての「存在性」の確認はあったとはいえ、具体的な構成については当時、手法が全くと言っていいほどなかった。
- 脱圏化された状態においては物理学で Vassiliev 不変量がなす役割は明確である一方で、Vassiliev 不変量が圏化された理論がどう展開されるのか、圏化された対象物が物理理論でどう見えるかについて、物理学からの示唆は見えにくい状態にあった。

今回の一連の結果はこういった懐疑的な気分や錯覚から目を覚まさせるものであったといっていい (その意味で河野俊丈先生のアドバイスおよび、先入観のない吉田純氏のアプローチに依るところが大きかった)。実際、交差交換を圏化するコボルディズムが位相的場の理論 (TQFT) の文脈で発見され、そのことで Vassiliev 不変量の定義関係式が完全系列として圏化された [13, 14]。そして Kontsevich [29, 28] が Vassiliev 不変量をなす空間を生成する代数の関係式として述べた FI 関係式 (別名 one term-relation)、4 項関係式いずれもがまた圏化されたからである[7] (FI 関係式については [13, 14]、4 項関係式については本講演が初出となる)。

結果として例えば結び目解消数の評価に使われる Jones 多項式の特殊値の関係式が圏化された形で現れるだけでなく、交差交換をうまく利用できる無限列においては従来の Khovanov homology と全く異なる計算法も導出された (吉田純の単著 [45])。

位相的場の理論における交差交換の記述が引き起こす Vassiliev 定義関係式の圏化から FI 関係式, 4 項関係式の圏化へと続く議論は、2015 年前後に J. Rassmussen, S. Gukov,

[6] 伊藤-吉田 [13, 14] により明示的に解決された。

[7] Kontsevich の結果は次のように述べられる: $V_n$ を $n$ 次以下の Vassiliev 不変量が生成する線形空間、$\Delta_n$ を $n$-chord diagrams が生成する線型空間を FI 関係式 と 4 項関係式で割った商空間とする。このとき次の同型が成り立つ: $V_n/V_{n-1} \simeq \Delta_n^*$.

A. Lobb 等の seminar に身をおいていた当時の筆者 (伊藤) は、おそらく驚くだろうし、当時の議論していた人々もきっとそうなのではないかと推測する。一方で、ひょっとすると高いレベルの専門家 (有識者) にとっては、さもありなん、という理論なのかもしれない。いずれにしても発展の様相や全貌が掴めないまま、例えば筋の良さそうな射が次々に見つかっている。FI 関係式においては特異点カスプのモノドロミーと Khovanov homology の同型射の完全な対応があり [13, 14]、4 項関係式は「壁超え (wall-crossing)」のモノドロミーを表すため、「壁越え」に関する圏論的な記述が期待されている。

このような努力を続けていけば、Vassiliev 不変量との関係が深く理解されている pure braid の構造との直接的な関連付け、もしくは $R$ 行列とその逆行列の差の圏化が見通せるかもしれない。これらは Vassiliev 不変量の圏化への示唆を与えるだろうし、そうすれば string link に関しては Milnor 不変量の圏化も視野に入ってくるに違いない。Vassiliev 理論と Khovanov 理論との邂逅は始まったばかり、しかしながら着実に歩み出したといえる。

## 参考文献


[1] M. Aganagic and S. Shakirov. Knot homology and refined Chern-Simons index. *Comm. Math. Phys.*, 333(1):187–228, 2015.

[2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.

[3] M. Atiyah. Topological quantum field theories. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 68(1):175–186, 1988.

[4] D. Bar-Natan. *Perturbative aspects of the Chern-Simons topological quantum field theory*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1991. Thesis (Ph.D.)–Princeton University.

[5] D. Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, 34(2):423–472, 1995.

[6] J. S. Birman. New points of view in knot theory. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 28(2):253–287, 1993.

[7] J. S. Birman and X.-S. Lin. Knot polynomials and Vassiliev's invariants. *Inventiones Mathematicae*, 111(2):225–270, 1993.

[8] J. M. Boardman. Singularities of differentiable maps. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 33:21–57, 1967.

[9] J. S. Carter and M. Saito. *Knotted Surfaces and Their Diagrams*. Number 55 in Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1998.

[10] D. Clark, S. Morrison, and K. Walker. Fixing the functoriality of Khovanov homology. *Geometry & Topology*, 13(3):1499–1582, 2009.

[11] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 12(2):239–246, 1985.

[12] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[13] N. Ito and J. Yoshida. Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(7):2050051, 24, 2020.

[14] N. Ito and J. Yoshida. A cobordism realizing crossing change on $\mathfrak{sl}_2$ tangle homology and a categorified Vassiliev skein relation. *Topology Appl.*, 296:107646, 31, 2021.

[15] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):103–111, 1985.

[16] S.-J. Kang and M. Kashiwara. Categorification of highest weight modules via Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Invent. Math.*, 190(3):699–742, 2012.

[17] M. Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.*, 101(3):359–426, 2000.

[18] M. Khovanov. Link homology and categorification. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 989–999. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[19] M. Khovanov and A. D. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I. *Represent. Theory*, 13:309–347, 2009.

[20] M. Khovanov and A. D. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(5):2685–2700, 2011.

[21] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fundamenta Mathematicae*, 199(1):1–91, 2008.

[22] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fund. Math.*, 199(1):1–91, 2008.

[23] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. II. *Geometry & Topology*, 12(3):1387–1425, 2008.

[24] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. II. *Geom. Topol.*, 12(3):1387–1425, 2008.

[25] T. Kohno. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(4):139–160, 1987.

[26] T. Kohno. Vassiliev invariants and de Rham complex on the space of knots. In *Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993)*, volume 179 of *Contemp. Math.*, pages 123–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[27] M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gel′fand Seminar*, volume 16 of *Advances in Soviet Mathematics*, pages 137–150. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[28] M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[29] M. Kontsevich. Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97–121. Birkhäuser, Basel, 1994.

[30] K. Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Transactions of the American Mathematical Society*, 117:387–422, 1965.

[31] P. Ozsváth and Z. Szabó. Holomorphic disks and knot invariants. *Adv. Math.*, 186(1):58–116, 2004.

[32] S. Piunikhin. Weights of Feynman diagrams, link polynomials and Vassiliev knot invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 4(1):163–188, 1995.

[33] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky. *Knots, links, braids and 3-manifolds*, volume 154 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology, Translated from the Russian manuscript by Sossinsky [Sosinskiĭ].

[34] J. H. Przytycki and P. Traczyk. Invariants of links of Conway type. *Kobe Journal of Mathematics*, 4(2):115–139, 1988.

[35] J. A. Rasmussen. *Floer homology and knot complements*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2003. Thesis (Ph.D.)–Harvard University.

[36] D. Roseman. Projections of codimension two embeddings. In C. M. A. Gordon, V. F. R. Jones, and et al., editors, *Knots in Hellas '98 – Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Its Ramifications*, volume 24 of *K & E series on knots and*

*everything*, pages 380–410. World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2000.

[37] R. Rouquier. 2-kac-moody algebras, 2008.

[38] N. Shirokova and B. Webster. Wall-crossing morphisms in khovanov-rozansky homology, 2007.

[39] C. Stroppel. Schur-Weyl dualities and link homologies. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, pages 1344–1365. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[40] H. F. Trotter. Homology of group systems with applications to knot theory. *Annals of Mathematics. Second Series*, 76:464–498, 1962.

[41] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, volume 1 of *Adv. Soviet Math.*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[42] B. Webster. Knot invariants and higher representation theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 250(1191):v+141, 2017.

[43] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. In *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, volume 9 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 239–329. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[44] J. Yoshida. Decomposition of the first Vassiliev derivative of Khovanov homology and its application. arXiv:2007.15867, 2020.

[45] J. Yoshida. Decomposition of the first vassiliev derivative of khovanov homology and its application, 2020.