タイヒミュラー空間のホロ境界

正井　秀俊　(東京工業大学)*

1. ホロ

「ホロ」というのはラテン語で「境界」という意味らしい[1]．そのため「ホロ境界」は「サハラ砂漠」や「ナイル川」のような名前になっている．本来は「ホロ関数境界」(horofunction boundary) と呼ぶのが正しいようで，これで "境界" におわす関数たちによる空間の bordification（日本語にすると境界づけ？）という意味となる．ホロ関数による境界は，グロモフ [Gro81] によって考案され，任意の距離空間の境界を与える手法としてさまざまな対象について研究されてきた．たくさんの応用を得るうちに，だんだんと "horofunction boundary" と呼ぶのが面倒になり "horoboundadry" と呼ばれるようになったようだ．

今回はあえてホロ境界とタイトルにつけた．ホロ境界は，空間をコンパクト化する試みなのであるが，実は距離空間が固有（proper, 距離による任意の閉球がコンパクト）でないと理論が単純には動かない．固有であるという条件を満たす空間は数多くあり，ホロ関数によるコンパクト化は距離とコンパクト化をつなげる架け橋となってきたものの，だんだんと固有でない距離空間を考える状況も増えてきた．本講演で考えるタイヒミュラー空間は，多様な背景から特徴づけがなされる空間であり，その背景に応じて距離やコンパクト化が知られていた．タイヒミュラー空間を固有な距離空間にする距離を考えると，ホロ関数によるコンパクト化は，対応する背景のもと（別方法で）構成された境界を与えることが知られている (§4)．一方で，多くの研究が知られるタイヒミュラー空間論において重要な距離であり，リーマン計量から定義される Weil-Petersson 距離は完備ではない．Weil-Petersson 距離の非完備性は非固有性を導き，ホロ関数によるコンパクト化が一般論からは得られない．しかし，Weil-Petersson 距離は非完備ながら CAT(0) 空間となる（i.e. non-positive curvature を持つ）ことが知られている．CAT(0) 性により，各点周りの "方向" が定まる（visual boundary）．ホロ関数に，この方向の情報を加味すると，タイヒミュラー空間のホロコンパクト化が自然に得られることがわかる．極座標 (r, θ) における半径 r がホロ関数と，偏角 θ が方向と対応すると，講演者が勝手に思っているので，ホロ関数と方向の組み合わせを**ホロ座標**と講演者は勝手に呼んでいる．極座標は原点を中心としているが，任意の点を中心とした極座標を考えることができる．ホロ座標を導入することで，"考えうる極座標を全て束ねて" 空間を調べている，という気持ちである．そして，より大きな空間に考えたい空間を埋め込み，閉包をとることにより，新しく境界（ホロ）にホロ座標を加えることで新しいコンパクト化が得られる．まとめると，本講演では境界（ホロ）に関数ではなく，座標を導入することで，固有とは限らない空間のコンパクト化，言うなればホロ座標コンパクト化を考えたい．そしてホロ座標コンパクト化を，タイヒミュ

本研究は科研費（課題番号：19K14525）の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 57M60, 20F65
キーワード：タイヒミュラー空間，ホロ境界
* 東京都目黒区大岡山 2-12-1，東京工業大学理学院数学系
e-mail: masai@math.titech.ac.jp
[1] https://en.wiktionary.org/wiki/horosphere より．

ラー空間の Weil-Petersson 距離，さらにはタイヒミュラー空間上に定まる繰り込み体積 (renormalized volume) からなる関数に対して考えていきたい．

2. ホロ関数

距離空間 (X,d) の上に基点 $b \in X$ を一つ定めて固定する．

定義 2.1. 点 $z \in X$ に対して，$\psi_z : X \to \mathbb{R}$ を

$$\psi_z(x) = d(x,z) - d(b,z)$$

で定める．

この関数はリプシッツ性を持つ，すなわち

$$|\psi_z(x) - \psi_z(y)| \leq d(x,y)$$

が成り立つ．これは三角不等式で遊べば得られる．さらに定義により $\psi_z(b) = 0$ である．

定義 2.2. 空間 X 上のリプシッツ関数で b で消えているもの全体を $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ とかく．すなわち

$$\mathrm{Lip}_b^1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0, f \text{ はリプシッツ関数}\}$$

と定義する．

今回は $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ に各点収束の位相を入れる．これは関数の値をあてがうことで

$$\mathrm{Lip}_b^1(X) \subset \prod_{x \in X} [-d(b,x), d(b,x)]$$

と見做して，直積位相を考えた位相と同値である．右辺はチコノフの定理よりコンパクトである．

命題 2.3 (c.f. [MT18, Wal14])**.** 空間 $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ はコンパクトな距離付け可能空間である．

さて，距離空間 X を $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ へ埋め込もう．

命題 2.4 (c.f. [Wal14, MT18])**.** 写像 $\Psi : X \to \mathrm{Lip}_b^1(X)$ を

$$\Psi(z) = \psi_z$$

で定めると，Ψ は単射で連続となる．

さて，空間が固有であればさらに次が成り立つ．

命題 2.5 ([Wal14])**.** X が固有であれば $\Psi : X \to \mathrm{Lip}_b^1(X)$ は像への同相写像である．

X が固有距離空間ならば命題2.3と命題2.5により，像 $\Psi(X)$ の閉包を取ることで X のコンパクト化が得られる．境界 $\partial_h(X) := \overline{\Psi(X)} \setminus \Psi(X)$ の元を**ホロ関数** *(horofunction)* と呼ぶ．このようにしてえら得るコンパクト化を**ホロ関数コンパクト化** *(horofunction compactification)* という．だんだんと時間が経ち，様々な研究が生まれるにつれ，境界だけでなく $\overline{\Psi(X)}$ の元をいつでもホロ関数と呼んだり，ホロ関数によるコンパクト化を単にホロコンパクト化と呼ぶようになったようだ．

3. ホロ座標

さて，距離空間が固有であればホロ関数を考えることでコンパクト化が得られることがわかった．ところが，距離空間の固有性がない場合，一般には，命題2.5は成り立たたず，Ψ の逆写像が連続にならない例が知られている．ここから先，X はCAT(0)空間であるとする．さらに，X はリーマン多様体であることも仮定する．一つ，のちの都合で完備性は仮定をしないでおく．細かい定義は必要ないので省略するが（[BH99]参照）空間がCAT(0)であると，次の性質が知られている．

命題 3.1 ([BH99])**.** 空間 X を CAT(0) 空間とする．このとき，任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，x と y を結ぶ測地線がただ一つ定まる．したがって，点 x から y への方向 $\bar{d}_y(x) \in T^1_x(X)$ を定めることができる．ここで，$T^1_x(X)$ は X の点 x における単位接空間である．

さらに任意の $x, y, z \in X$ に対して，点 z における x への方向と y への方向による角度 $\angle_z(x, y)$ を定めることができる（X がリーマン多様体の場合は，リーマン計量による角度．一般の場合はアレキサンドロフ角度と呼ばれる）．

この角度を用いてコンパクト化を考える．極座標において，原点で座標変換の連続性が壊れてしまう．ここでは，連続性の担保のために同相写像 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, 1]$ を考える．実際 $f(0) = 0$ であればなんでも良いが，例えば $f(x) = (e^x - 1)/(e^x + 1)$ などを考えれば良い．方向 $\bar{d}_y(x)$ を原点で消えるように調整した

$$d_y(x) := f(d(x, y))\bar{d}_y(x)$$

を考える．こうして次の写像を定義する．

定義 3.2 (ホロ座標 [Masa21])**.** 写像

$$\Phi : X \to \prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T^{\leq 1}_x(X)\right)$$

を

$$\Phi(z) := (\psi_z(x), d_z(x))_{x \in X}$$

で定義する．

命題2.3と同様にして次がわかる．

命題 3.3 ([Masa21])**.** 空間 $\prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T^{\leq 1}_x(X)\right)$ はコンパクトな距離付け可能空間である．

ここで，空間 $\prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T^{\leq 1}_x(X)\right)$ へは直積位相を入れていることに注意する．とくに方向に関して，接束とは位相が異なる．あとは，Φ が埋め込みであることを言えば良い．

命題 3.4 ([Masa21])**.** CAT(0) なリーマン多様体 X において，指数写像 exp が各点において，然るべき開集合からの微分同相写像であるとする．このとき，

$$\Phi : X \to \prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T^{\leq 1}_x(X)\right)$$

は像への同相写像である．

指数写像についての仮定は少し強めに感じるかもしれないが，後で考えるWeil-Petersson距離について成り立つ仮定である．

さて，この “方向たち”(direction) は，ホロ関数の視点から見ると，微分 (derivative) に見える．ちょうどよく双方 “d” である．

命題 3.5 ([BH99, Corollary II.3.6])**.** X を CAT(0) 空間とする．測地線 $\sigma : [0, T] \to X$ を考え， $p := \sigma(0)$ とする．このとき，

$$\lim_{s\to 0} \frac{d(\sigma(0), b) - d(\sigma(s), b)}{s} = \cos \angle_p(\dot{\sigma}(0), d_b(p))$$

が成り立つ．ここで $\dot{\sigma}(0) \in T^1_p(M)$ は σ で定まる方向である．

4. タイヒミュラー空間のホロ境界

以降，向け付け可能閉曲面 S を固定する．種数は $g \geq 2$ とする．タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(S)$ は S 上の（マーキング込みの）双曲構造，もしくは複素構造の空間である．タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(S)$ には様々な距離が乗る．代表的なものとして

- $\mathcal{T}(S)$ を双曲構造の空間だと思うサーストン距離 d_{Th}
- $\mathcal{T}(S)$ を複素構造の空間だと思うタイヒミュラー距離 $d_{\mathcal{T}}$

がある．これらはタイヒミュラー空間を固有な距離空間とする．同様に，タイヒミュラー空間には様々なコンパクト化が知られている．

- $\mathcal{T}(S)$ を双曲構造の空間だと思うサーストン境界 $\partial_{\mathrm{Th}}\mathcal{T}(S)$ [FLP79]
- $\mathcal{T}(S)$ を複素構造の空間だと思うガーディナー・メジャー境界 $\partial_{\mathrm{GM}}\mathcal{T}(S)$ [GM91]

これらの距離とコンパクト化はホロ境界を通して，自然に結びつく．

定理 4.1 ([Wal14, LS14])**.** 以下が成り立つ．

- サーストン距離 d_{Th} に関するホロ関数境界はサーストン境界 $\partial_{\mathrm{Th}}\mathcal{T}(S)$ であり，
- タイヒミュラー距離 $d_{\mathcal{T}}$ に関するホロ関数境界はガーディナー・メジャー境界 $\partial_{\mathrm{GM}}\mathcal{T}(S)$ [GM91] である．

ここでもう一つ，タイヒミュラー空間における自然な距離である Weil-Petersson 距離について考えるのは自然である．Weil-Petersson 距離については，例えばWolpert の文献 [Wol03, Wol10] などを参照して欲しい．ここでは簡単に結果をまとめるにとどめておく．

定理 4.2. [Masa21] タイヒミュラー空間に Weil-Petersson 距離 d_{wp} を入れた距離空間は，ホロ座標によってコンパクト化できる．

5. 繰り込み体積

論文 [Masa21] における，メインの対象は繰り込み体積 (renormalized volume) である．繰り込み体積は，Graham-Witten [GW99] による考察を元に，３次元双曲多様体について近年活発に研究されている対象である（[BBB19,KS08,KM18,Sch19] など）．特に擬フックス多様体に対して，繰り込み体積を考えることで関数

$$V_R : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$$

が定義できる．この関数は

- $V_R(X,Y) \geq 0$ であり $V_R(X,Y) = 0 \iff X = Y \in \mathcal{T}(S)$ [BBB19],
- $V_R(X,Y) = V_R(Y,X)$

を満たす．しかし，V_R は三角不等式を満たさないことがわかる [Masa21]．ホロ関数境界においては，三角不等式は至る所に現れる必須の条件であるが，次の結果で代用できることがわかる．

定理 5.1 ([Sch19, Theorem 5.4],[KM18])**.** $X, Y \in \mathcal{T}(S)$ とすると次が成り立つ．

1. $V_R(X,Y) \leq 3\sqrt{\pi(g-1)}d_{\mathrm{wp}}(X,Y)$,
2. $V_R(X,Y) \leq 6\pi(g-1)d_{\mathcal{T}}(X,Y)$.

以上の性質を念頭に，次のようにホロ関数を真似る．

定義 5.2. 点 $Z \in \mathcal{T}(S)$ に対して関数 $\nu_Z : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\nu_Z(X) := V_R(X,Z) - V_R(b,Z), \text{ for } X \in \mathcal{T}(S).$$

ν_Z を **体積ホロ関数** *(volume horofunction)* と呼ぶ．

さらに，繰り込み体積の微分に関する次の結果が知られている．

定理 5.3 ([KM18, Lemma 2.4], [Sch19, Corollary 3.13])**.** 任意の $Y \in \mathcal{T}(S)$ において，$V_R(\cdot, Y)$ は $\mathcal{T}(S)$ 上微分可能である．すなわち, $\sigma : [-1,1] \to \mathcal{T}(S)$ を微分可能な道とすると

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V_R(\sigma(t), Y) = -\mathrm{Re}\langle q_Y(\sigma(0)), \dot{\sigma}(0)\rangle.$$

が成り立つ．ここで $q_Y(X)$ はベアズ埋め込みを与える写像 $\mathcal{T}(S) \to \mathrm{QD}(S)$ であり（$\mathrm{QD}(S)$ は $\mathcal{T}(S)$ 上の正則２次微分の空間），$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は正則２次微分とベルトラミのペアリングである．

また，[BBB19] などで考えられている $-V_R$ の Weil-Petersson 測地流を考えると，正則２次微分 $q_Y(X)$ は方向を与えていると考えることもできる．したがって，V_R における “ホロ座標” を次のように定める発想に至る．

定義 5.4. 定数 $C := 3\sqrt{\pi(g-1)}$ とする．このとき，次のような空間を定義する．

$$\mathrm{LQ}(S) := \prod_{X \in \mathcal{T}(S)} \left\{ [-Cd_{\mathrm{wp}}(b,X), Cd_{\mathrm{wp}}(b,X)] \times \mathrm{QD}_B(X) \right\},$$

(LQ は $\underline{\text{L}}$ipschitz と$\underline{\text{Q}}$uadratic differential である)．ここで $\mathrm{QD}_B(X)$ は $X \in \mathcal{T}(S)$ 上の正則２次微分で L^∞ ノルムが上から $3/2$ で抑えられている空間である（とくに，コンパクトな空間である）．$\mathrm{LQ}(S)$ は各点収束の位相，もしくは直積位相を入れる．

すると，ホロ関数やホロ座標と同様に次がわかる．

命題 5.5 ([Masa21])**.** 空間 $\mathrm{LQ}(S)$ はコンパクトで，距離付け可能である．

そして，ベアズ埋め込みなどの性質を用いると次が得られる．

定理 5.6. 写像 $\mathcal{V} : \mathcal{T}(S) \to \mathrm{LQ}(S)$ を

$$\mathcal{V}(Z) := (\nu_Z(X), q_Z(X))_{X \in \mathcal{T}(S)}$$

と定めると，$\mathcal{V}$ は像への同相写像である．

したがって，閉包 $\overline{\mathcal{V}(\mathcal{T}(S))}$ をとると，$\mathcal{T}(S)$ のコンパクト化が得られる．本番の講演では，さらにコンパクト化 $\overline{\mathcal{V}(\mathcal{T}(S))}$ の性質や，そこから得られる帰結について紹介する．

参考文献

[BBB19] Martin Bridgeman, Jeffrey Brock, and Kenneth Bromberg, *Schwarzian derivatives, projective structures, and the Weil-Petersson gradient flow for renormalized volume*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 5, 867–896, DOI 10.1215/00127094-2018-0061. MR3934591

[BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR1744486

[FLP79] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin et al. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66, Société Mathématique de France, Paris, 1979 (French). Séminaire Orsay; With an English summary. MR568308

[GM91] Frederick P. Gardiner and Howard Masur, *Extremal length geometry of Teichmüller space*, Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237, DOI 10.1080/17476939108814480. MR1099913

[GW99] C. Robin Graham and Edward Witten, *Conformal anomaly of submanifold observables in AdS/CFT correspondence*, Nuclear Phys. B **546** (1999), no. 1-2, 52–64, DOI 10.1016/S0550-3213(99)00055-3. MR1682674

[Gro81] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 183–213. MR624814

[KS08] Kirill Krasnov and Jean-Marc Schlenker, *On the renormalized volume of hyperbolic 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **279** (2008), no. 3, 637–668, DOI 10.1007/s00220-008-0423-7. MR2386723

[KM18] Sadayoshi Kojima and Greg McShane, *Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2403–2426, DOI 10.2140/gt.2018.22.2403. MR3784525

[LS14] Lixin Liu and Weixu Su, *The horofunction compactification of the Teichmüller metric*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 355–374, DOI 10.4171/117-1/9. MR3289706

[MT18] Joseph Maher and Giulio Tiozzo, *Random walks on weakly hyperbolic groups*, J. Reine Angew. Math. **742** (2018), 187–239, DOI 10.1515/crelle-2015-0076. MR3849626

[Masa21] Hidetoshi Masai, “Compactification and distance on Teichmüller space via renormalized volume”, preprint.

[Sch19] Jean-Marc Schlenker, *Volumes of quasifuchsian manifolds.* To appear, Surveys in Differential Geometry, vol. 24, 2020. arXiv:1903.09849.

[Wal14] Cormac Walsh, *The horoboundary and isometry group of Thurston's Lipschitz metric*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 327–353, DOI 10.4171/117-1/8. MR3289705

[Wol10] Scott A. Wolpert, *Families of Riemann surfaces and Weil-Petersson geometry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 113, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR2641916

[Wol03] Scott A. Wolpert, *Geometry of the Weil-Petersson completion of Teichmüller space*, Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002), Surv. Differ. Geom., vol. 8, Int. Press, Somerville, MA, 2003, pp. 357–393, DOI 10.4310/SDG.2003.v8.n1.a13. MR2039996