

第67回

トポロジーシンポジウム

講演集

2020年10月12日～10月15日

ZOOM オンライン開催（ホスト：東大数理）

令和2年度科学研究費補助金

基盤研究(B) 研究課題/領域番号 19H01785

はしがき

この講演集は2020年10月12日から10月15日までの4日間、東京大学大学院数理科学研究科のホストによりZOOMオンライン開催された第67回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立っていることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

令和2年度科学研究費補助金

研究種目	基盤研究(B)
研究代表者	逆井卓也
研究課題名	グラフ複体と種々のモジュライ空間 のコホモロジー環の構造の解明
研究課題/領域番号	19H01785

世話人： 河澄響矢（東大数理）
逆井卓也（東大数理）
寺垣内政一（広島大教育）
大本 亨（北大理）

共 催： 日本数学会トポロジー分科会
東大数理

第67回トポロジーシンポジウム・オンライン

日時：令和2年10月12日（月）～10月15日（木）

ZOOM（ホスト：東大数理）

世話人：河澄響矢（東大），逆井卓也（東大），寺垣内政一（広島大），
大本亨（北大）

URL：<https://sites.google.com/view/topologysymposium2020msj/home>

10月12日

15:00 - 16:00 森藤孝之（慶応義塾大学経済学部）

双曲結び目・絡み目のねじれ Alexander 多項式

16:20 - 17:20 清水達郎（大阪市立大学数学研究所）

A geometric description of the Riedemeister-Turaev torsion of 3-manifolds

10月13日

09:30 - 10:30 和田康載（大阪大学・JSPS 特別研究員）

ウェルデッド絡み目のミルナー不変量

10:50 - 11:50 市原一裕（日本大学文理学部）

結び目に沿った矯飾的手術について

15:00 - 16:00 森谷駿二（大阪府立大学）

A spectral sequence for cohomology of knot spaces

16:20 - 17:20 Alexander Berglund（Stockholm University）

Characteristic classes of manifold bundles and graph homology

10月14日

09:30 - 10:30 Dominik Wrazidlo (九州大学 IMI · JSPS 外国人特別研究員)

Cobordism theory of Morse functions and applications

10:50 - 11:50 石橋 典 (京都大学数理解析研究所)

Pseudo-Anosov properties in cluster algebras

15:00 - 16:00 Victor Hugo Yanez (愛媛大学 · JSPS-DC2)

Topological groups described by their continuous homomorphisms
or small subgroups

10月15日

09:30 - 10:30 石川 卓 (京都大学数理解析研究所)

symplectic field theory とその構成について

10:50 - 11:50 山下真由子 (京都大学数理解析研究所)

トーラス束の変形量子化と格子版 Atiyah-Singer 指数定理

双曲結び目・絡み目のねじれ Alexander 多項式

森藤 孝之 (慶大経済)*

概 要

ねじれ Alexander 多項式は群とその表現の組に対して定まる不変量であり, Alexander 多項式の自然な一般化になっている. Dunfield, Friedl, Jackson は計算機を用いた膨大な数値計算に基づいて, 双曲結び目のホロノミー表現に付随したねじれ Alexander 多項式が結び目のファイバー性と種数を決定すると予想している. 本稿ではこの予想に関する最近の結果を概観し, 双曲絡み目に対する一般化された予想についても述べる.

1. はじめに

ねじれ Alexander 多項式は, 3次元球面 S^3 内の結び目については X.-S. Lin [29] により, 一般の有限表示群については和田 [43] により導入された. これは群とその表現の組に対して定まる不変量であり, 古典的な Alexander 多項式の1つの自然な一般化になっている. 特に, 和田は11交点を持つ樹下-寺阪結び目と Conway 結び目(これらは自明な Alexander 多項式を持つミュータントな結び目の例である)を, 有限体上の表現に付随したねじれ Alexander 多項式を用いて区別している.

Alexander 多項式が持つ性質の多くはねじれ Alexander 多項式についても拡張され, より強い制約条件をしばしば与える. 特に, 結び目のファイバー性の判定および種数の決定に関する問題は多くの研究者によって調べられ [4, 8, 17, 25], 最終的には Friedl, Vidussi [12, 13, 14] により, 既約3次元多様体のファイバー性と Thurston ノルムが(閉グラフ多様体の場合は [10]), ねじれ Alexander 多項式で決定されることが示された. 彼らはさらに非ファイバーの場合には, ねじれ Alexander 多項式が零となるような表現が存在することを示しており, 帰結として4次元シンプレクティック多様体に関する Taubes 予想を肯定的に解決している.

Dunfield, Friedl, Jackson [7] は, 双曲結び目のホロノミー表現に付随したねじれ Alexander 多項式の研究を行い, 計算機の援用による大規模な数値計算に基づいて, いくつかの興味深い予想を挙げている. 本稿では, そのなかの1つである双曲結び目のファイバー性と種数の決定に関する予想 [7, Conjecture 1.4] について, これまでに得られている結果を概観し, 双曲絡み目に対する一般化された予想 [34] についても述べる.

ねじれ Alexander 多項式の応用は多岐に渡っており, 本稿で扱う内容はそのごく一部に過ぎない. 最近では, $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体の ideal point 上でのねじれ Alexander 多項式の挙動に関する Dunfield, Friedl, Jackson の別の予想 [7, Conjecture 8.1] の部分的解決 [28] や, ねじれ Alexander 多項式と双曲体積 [3, 15], グラフの行列重み付きゼータ関数 [16] との関係性も明らかにされている. また, 2次元結び目への応用 [21] や, カンドルコサイクル不変量の観点からの理解 [20] も進んでおり, 本分野は現在も進展中である. その他の話題や関連する文献については [11, 32] を参照して欲しい.

本研究は科研費(課題番号:17K05261)の助成を受けたものである. なお, 本稿は日本数学会 2020 年度秋季総合分科会特別講演の抽象トに加筆したものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 57M05, 57M25

* 〒 223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1 慶應義塾大学経済学部

e-mail: morifuji@z8.keio.jp

なお、本稿で紹介する研究成果は、主に Anh T. Tran 氏 (University of Texas at Dallas) との共同研究 [33, 34, 35] に基づくものである。

2. ねじれ Alexander 多項式

2.1. 準備

まず、本稿で必要となる用語を準備する。

3次元球面 S^3 に埋め込まれた互いに交わらない向きと順序の付いた円周 L_i の和集合 $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ のことを μ -成分絡み目という。結び目とは、1-成分絡み目のことである。絡み目 L の開管状近傍を $N(L)$ とする。外部空間 $E(L) = S^3 \setminus N(L)$ の基本群を L の絡み目群 ($\mu = 1$ のときは結び目群) といい $G(L) = \pi_1(E(L))$ で表す。以下では特に断らない限り、 L は non-split (L が分離している正則表示を持たない) と仮定する。

向きの付いた絡み目 L の Seifert 曲面 Σ とは、 S^3 に埋め込まれた向き付けられたコンパクト曲面で Σ のすべての連結成分が境界を持ち、 $\partial\Sigma = L$ かつ L の向きが Σ から誘導される向きと一致するものである。絡み目 L は $E(L)$ が Seifert 曲面の $E(L)$ への制限をファイバーとする円周上の曲面束の構造を持つとき、ファイバー絡み目という。絡み目 L の種数 $g(L)$ とは、 L の Seifert 曲面の種数の最小値のことである。また、 $E(L)$ の内部が有限体積完備双曲構造を持つとき、 L を双曲絡み目という。

向き付けられた連結コンパクト3次元多様体を M とする。 $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の任意の元は M 内に固有に埋め込まれた (連結とは限らない) 向き付け可能コンパクト曲面 Σ により実現できる。 Σ から S^2 および D^2 成分を除いて得られる曲面を Σ_0 とするとき、 $\chi_-(\Sigma) = |\chi(\Sigma_0)|$ とおく。このとき $\psi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ の Thurston ノルム $\|\psi\|_T$ が、 ψ の Poincaré 双対であるような曲面 Σ についての $\chi_-(\Sigma)$ の最小値として定まる [42]。

縫い目付き多様体 (M, R_\pm, γ) とは、向き付けられたコンパクト3次元多様体 M で、2つの部分曲面 $R_\pm \subset \partial M$ の共通の境界 γ に沿った ∂M の分割を持つものである。

2.2. $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体

次に、 $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体の基本事項を復習する (詳しくは [6, 18] を参照のこと)。

有限生成群 Γ に対して、 \mathbb{C} 上のアフィン代数多様体 $R(\Gamma) = \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$ を $SL(2, \mathbb{C})$ -表現多様体という。表現 $\rho \in R(\Gamma)$ の指標 $\chi_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(\gamma) = \text{tr } \rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) 全体の集合を $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体と呼び $X(\Gamma)$ で表す。また、 $t : R(\Gamma) \rightarrow X(\Gamma)$ を $t(\rho) = \chi_\rho$ で定める。 $R(\Gamma)$ には共役によって $SL(2, \mathbb{C})$ が作用するが、 $X(\Gamma)$ には t が正則写像となるような \mathbb{C} 上のアフィン代数多様体の構造が入り、幾何学的不変式論商 $R(\Gamma) // SL(2, \mathbb{C})$ を実現することが知られている。実際、値写像 $I_\gamma : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ を $I_\gamma(\chi_\rho) = \text{tr } \rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) によって定めると、群 Γ の任意の生成系 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ に対して $\{I_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}}\}_{\substack{1 \leq k \leq 3 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l}}$ が $X(\Gamma)$ のアフィン座標を与える。

既約な $SL(2, \mathbb{C})$ -表現の指標全体からなる部分集合の、 $X(\Gamma)$ の中での Zariski 閉包を $X_{\text{irr}}(\Gamma)$ で表す。

M を有限体積の完備双曲的3次元多様体とする。このとき、 M は離散忠実表現 $\bar{\rho}_0 : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ を持ち、 $\mathbb{H}^3 / \text{Im } \bar{\rho}_0 \cong M$ が成り立つ。この表現 $\bar{\rho}_0$ は M のホロノミー表現と呼ばれ、共役を除いて一意的に定まる。Thurston の結果により、 $\bar{\rho}_0$ は $SL(2, \mathbb{C})$ への離散忠実表現にリフトする。

絡み目群 $G(L) = \pi_1(E(L))$ に対して、簡単のため $R(L) = R(G(L))$, $X(L) = X(G(L))$, $X_{\text{irr}}(L) = X_{\text{irr}}(G(L))$ で表す。双曲結び目 K のホロノミー表現 $\bar{\rho}_0 : G(K) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$

のリフト ρ_0 に対して, χ_{ρ_0} を含む $X_{\text{irr}}(K)$ の既約成分 C_0 (canonical component) は曲線になることが知られている.

2.3. Riley 多項式

一般に結び目 K のメリディアン m_K に対して, $\text{tr } \rho(m_K) = 2$ を満たす非可換表現 $\rho : G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ をパラボリック表現という. 2橋結び目 $K = S(p, q)$ (p, q は互いに素な奇数で $p > 0, -p < q < p$ を満たす) の結び目群は, 表示 $G(K) = \langle x, y \mid xw = wy \rangle$, $w = \prod_{i=1}^{(p-1)/2} y^{\epsilon_{2i-1}} x^{\epsilon_{2i}}$, $\epsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{|q|}{p} i \rfloor}$ を持つ. 対応 $\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$, $u \neq 0$ がパラボリック表現 $\rho : G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ となるのは, $\rho(w) = (w_{ij})$ に対して $w_{11} = 0$ となることが必要十分である [40]. $\phi_{S(p,q)}(u) = w_{11} \in \mathbb{Z}[u]$ を $S(p, q)$ の Riley 多項式という. Riley 多項式 $\phi_{S(p,q)}(u)$ は 2橋結び目を (おおよそ) 分類することが知られている. この事実は Riley 多項式の可除性と結び目群の間の全射準同型の存在に関する考察から従う [26].

2.4. 和田のねじれ Alexander 多項式

ねじれ Alexander 多項式の定義にはいくつか流儀 [22, 29, 43] があるが, 本稿では和田の定義 [43] に従うことにする. 和田のねじれ Alexander 多項式は絡み目群についても自然に定義され, 計算の簡便さの観点からも重要な役割を担っている. 絡み目 ($\mu \geq 2$) のねじれ Alexander 多項式は多変数多項式として定義されるが, ここでは 1 変数に簡約化された多項式を考えることにする. なお, ねじれ Alexander 多項式の基本的事項については [24] を参照のこと.

$L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ を 3次元球面 S^3 内の絡み目とし, $G(L)$ の不足数 1 の表示 (例えば Wirtinger 表示) を固定する: $G(L) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$. また, $G(L)$ の可換化準同型を $\alpha_L : G(L) \rightarrow H_1(E(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu = \langle t_1, \dots, t_\mu \mid [t_i, t_j] = 1 \rangle$ で表す. 各 t_i を $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ の生成元 t に対応させる全射準同型 $\tau : H_1(E(L); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ に対し, 合成写像 $\tau \circ \alpha_L : G(L) \rightarrow \mathbb{Z}$ を簡単に α で表すと, $\alpha \in \text{Hom}(G(L), \mathbb{Z}) = H^1(E(L); \mathbb{Z})$ である.

本稿では双曲絡み目群のホロノミー表現のリフトを念頭に, 主に $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -表現 $\rho : G(L) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ を考えるが, 以下の構成は一般の線型表現についても同様に成り立つ. ρ と α は自然に群環上の環準同型 $\tilde{\rho}, \tilde{\alpha}$ を誘導し, それらのテンソル表現 $\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\rho}$ は環準同型 $\mathbb{Z}[G(L)] \rightarrow M(2, \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ を定める. 階数 s の自由群を $F_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ とし, $G(L)$ の表示から定まる全射準同型との合成を $\Phi : \mathbb{Z}[F_s] \rightarrow \mathbb{Z}[G(L)] \xrightarrow{\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\rho}} M(2, \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ で表す. $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$ で定まる $(s-1) \times s$ 行列とする. ただし, $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}[F_s] \rightarrow \mathbb{Z}[F_s]$ は自由微分を表す. A から第 j 列を取り除いて得られる行列を $A_j \in M(s-1, M(2, \mathbb{C}[t^{\pm 1}]))$ とし, これを $M(2(s-1), \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ の元と見なす.

定義 2.1 ([43]) 絡み目 L の表現 $\rho \in R(L)$ に付随したねじれ Alexander 多項式 $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ を

$$\Delta_{L,\rho}^\alpha(t) = \frac{\det A_j}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

で定義する. これは t^k ($k \in \mathbb{Z}$) による積を法として well-defined である.

最初に固定した $G(L)$ の表示や A から取り除く列に依らずに $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ が定まることは, Alexander 多項式のときと同様に示すことができる. 定義から, ねじれ Alexander 多項式は有理関数として定まる. また, 結び目 ($\mu = 1$) のとき $\alpha_K = \alpha$ となるので, 簡単

のため α を省略して $\Delta_{K,\rho}(t)$ と記す. Milnor の結果の一般化として, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は $E(L)$ の Reidemeister トーションと等価であることが知られている [22, 23].

注意 2.2 (1) L が 2 成分以上の絡み目 [43], あるいは, $\mu = 1$ かつ $\rho \in R(K)$ が非可換表現 [25] ならば, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ が成り立つ.

(2) 表現 $\rho, \rho' \in R(L)$ が共役ならば $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t) = \Delta_{L,\rho'}^\alpha(t)$ が成り立つ. さらに, 指標 $\chi_\rho \in X(L)$ に対して $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は $\mathfrak{t}(\rho) = \chi_\rho$ となるような表現 ρ のとり方に依らずに定まり, 多項式の各係数は $X(L)$ 上の関数と見なせる [7]. この観点からのねじれ Alexander 多項式の研究については [7, 28, 32, 37] を参照のこと.

(3) L がトーラス絡み目の場合 $\dim X_{\text{irr}}(L) \geq 1$ となるが, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ の各係数は $X_{\text{irr}}(L)$ 上の局所定数関数になることが知られている [27].

(4) ねじれ Alexander 多項式は reciprocal, つまり $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t^{-1}) \doteq \Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ を満たす [19].

例 2.3 K を 3 次元球面 S^3 内の 8 の字結び目とする. これは結び目のテーブルで最初に現れる双曲結び目であり, 種数 1 のファイバー結び目である. 群 $G(K)$ は 2 橋結び目としての表示を持つ: $G(K) = \langle x, y \mid r = xwy^{-1}w^{-1}, w = [y, x^{-1}] \rangle$. また, パラボリック表現 $\rho: G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ を $\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$ で定める. ただし, $u \in \mathbb{C}$ は $1 + u + u^2 = 0$ を満たす. このとき, 表現 ρ に付随したねじれ Alexander 多項式は

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det \Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\det \Phi(y-1)} = \frac{t^{-2}(t-1)^2(t^2-4t+1)}{(t-1)^2} \doteq t^2 - 4t + 1$$

で与えられ, 2 次のモニック多項式になる.

多項式 $f(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ がモニックであるとは, $f(t)$ の最高次数の係数が ± 1 であるときをいう. 一般に絡み目 L に対して次が成り立つ.

定理 2.4 ([4, 8, 17]) 3 次元球面 S^3 内のファイバー絡み目 L と任意の表現 $\rho: G(L) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$ に対して, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は $\deg \Delta_{L,\rho}^\alpha(t) = n \|\alpha\|_T$ を満たすモニック多項式である.

注意 2.5 非自明な結び目 K に対して, $\|\alpha\|_T = 2g(K) - 1$ であることが知られている.

定理 2.6 ([8]) 表現 $\rho: G(L) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$ に対して $n \|\alpha\|_T \geq \deg \Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ が成り立つ.

Friedl, Vidussi [12, 13, 14] によって定理 2.4 の逆が成り立ち, さらに定理 2.6 の等号を実現するような表現 (有限群への表現) の存在が示されている. これらの結果により絡み目のファイバー性と Thurston ノルムは代数的に決まることになるが, 実際には有限群への表現をすべて考える必要があり, 実用面で効果的とは言い難い. 特に $n = 2$ の場合に同様のことが成り立つかは未解決問題である.

3. Dunfield-Friedl-Jackson 予想

本節では双曲結び目に対する Dunfield-Friedl-Jackson 予想について述べる. 現在, 予想をサポートする具体例が少しずつ積み上げられている状況であるが, 一般には未解決である.

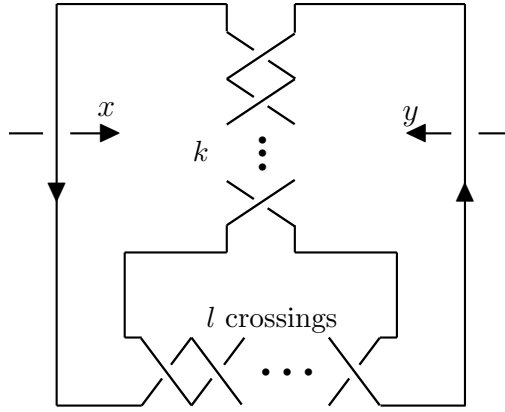


図 1: ダブルツイスト結び目(絡み目) $J(k, l)$.

Dunfield, Friedl, Jackson [7] は, ホロノミー表現 $\bar{\rho}_0 : G(K) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ のリフトのうち, $\mathrm{tr} \rho_0(m_K) = 2$ となるリフト $\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に付随したねじれ Alexander 多項式 $\Delta_{K, \rho_0}(t)$ を詳しく考察している¹. 彼らは $\Delta_{K, \rho_0}(t^{-1}) = \Delta_{K, \rho_0}(t)$ を満たすように正規化されたものを双曲的トーション多項式と呼び $\mathcal{T}_K(t)$ と記している. $\mathcal{T}_K(t)$ が持つ基本的性質として, $\mathcal{T}_K(t)$ は t に任意の 1 の冪根を代入しても non-zero であることが知られている. 特に $\mathcal{T}_K(t)$ は非自明である. また Menal-Ferrer, Porti [31] により, $\mathcal{T}_K(1)$ と $\mathcal{T}_K(-1)$ はミューテーション不変量であることも知られている ($\mathcal{T}_K(t)$ 自身はミューテーション不変とならないことに注意).

Dunfield, Friedl, Jackson は計算機の援用による大規模な数値計算に基づいて, 次を予想している.

予想 3.1 ([7]) 3次元球面 S^3 内の双曲結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) = 4g(K) - 2$ が成り立つ. さらに $\mathcal{T}_K(t)$ がモニック多項式ならば, K はファイバー結び目である.

上記予想は, 15 交点以下のすべての双曲結び目 (313, 209 個) に対して成り立つことが計算機を用いて確かめられている [7]. しかしながら, Alexander 多項式によって非ファイバー性と種数が捉えられるような結び目に対しても, 予想 3.1 は未解決である. その一方で, 1つの多項式の情報のみで結び目の幾何的性質が決定されるという意味において, 魅力的な予想となっている.

予想 3.1 が成り立つ双曲結び目の例として次が知られている. $J(k, l)$ を図 1 にあるような結び目(絡み目)とする. $J(k, l)$ が結び目となるのは kl が偶数のときである. これをダブルツイスト結び目という.

定理 3.2 ([33]) 双曲的ダブルツイスト結び目 $K = J(k, 2n)$ に対して, $\deg \mathcal{T}_K(t) = 4g(K) - 2$ が成り立つ. さらに, $k = 2m + 1$, $k = 2$, または, $k = 2m$ かつ $|4mn - 1| \in \mathcal{P}_2 = \{p: \text{奇素数} \mid 2 \text{ は } (\mathbb{Z}/p)^* \text{ の生成元}\}$ に対して, $\mathcal{T}_K(t)$ がモニック多項式ならば, K はファイバー結び目である.

定理 3.2 は, 予想 3.1 を満たす双曲結び目の無限系列を与える最初の例になっている. 2橋結び目 $J(k, 2n)$ は交代結び目の一種なので, そのファイバー性と種数は Alexander 多項式で決定されるが, 同じことが双曲的トーション多項式でも成り立つという apriori な理由はいまのところ見つかっていない.

¹ $\mathrm{tr} \rho'_0(m_K) = -2$ となる $\bar{\rho}_0$ のもう 1 つのリフト ρ'_0 に対して, $\Delta_{K, \rho'_0}(t) = \Delta_{K, \rho_0}(-t)$ が成り立つ.

定理 3.2 の証明は ρ_0 を含む $G(K)$ のすべてのパラボリック表現に対して適用できる形でなされる．そこでは Riley 多項式 $\phi_{J(k,2n)}(u)$ が本質的な役割を果たす (\mathcal{P}_2 に関する条件は Riley 多項式 $\phi_{J(2m,2n)}(u)$ の既約性を保証するのに用いられる)．次節で一般化された Dunfield-Friedl-Jackson 予想に関する結果を述べる際に，証明のあらましをもう少し詳しく説明する．

3 橋以上の双曲結び目についても，予想 3.1 を満たす結び目の無限系列が存在する．次の定理は canonical component C_0 上のすべてのパラボリック表現に対して成り立つ (プレッツェル結び目のねじれ Alexander 多項式については [2, 37] も参照のこと)．

定理 3.3 ([35]) 双曲的プレッツェル結び目 $P(2k+1, 2k+1, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1, 0$ に対して予想 3.1 が成り立つ．

予想 3.1 の種数に関する主張については，より広範な双曲結び目のクラスに対して等号が成り立つことが確かめられている [1, 39]．

3 次元球面 S^3 内の結び目 K は， $E(K)$ 内に互いに交わらない最小種数 Seifert 曲面の集合 $\Sigma = \sqcup_i \Sigma_i$ が存在して， $E(K) \setminus \Sigma$ が book of I -bundles の構造を持つ縫い目付き多様体の和集合となるときの libroid 結び目という．libroid 結び目はすべてのファイバー結び目を含んでおり，また，libroid 結び目のクラスが村杉和で閉じていることが示されている [1]．よって，向きの付いたバンドの plumbing から得られるすべての special arborescent 結び目 (これは 2 橋結び目を含む) や，自明な Alexander 多項式を持つ結び目の無限系列が libroid 結び目になることがわかる．

定理 3.4 ([1]) 双曲的 libroid 結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) = 4g(K) - 2$ が成り立つ．

一方，Porti [39] は双曲的 トーション多項式 $\mathcal{T}_K(t)$ の次数について次を示している．

定理 3.5 ([39]) 3 次元球面 S^3 内の双曲結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) \geq 2$ が成り立つ．特に $\mathcal{T}_K(t)$ は非自明である．

定理 2.6, 3.5 の系として次が成り立つ．

系 3.6 種数 1 の双曲結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) = 2$ が成り立つ．

種数 1 の双曲的ファイバー結び目は 8 の字結び目 (例 2.3) のみであることが知られているが，予想 3.1 のファイバー性に関する主張は種数 1 に限っても未解決である．

4. 双曲絡み目への一般化

4.1. 一般化された Dunfield-Friedl-Jackson 予想

本節では予想 3.1 の双曲絡み目への一般化について述べる．結び目と異なり，絡み目 ($\mu \geq 2$) の場合はそのファイバー性と種数は絡み目の向きに依存することに注意する．

$L = L_1 \cup \cdots \cup L_\mu$ を 3 次元球面 S^3 内の向きの付いた μ -成分双曲絡み目とする．また， $\bar{\rho}_0 : G(L) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ を $E(L)$ のホロノミー表現とする．このとき $\bar{\rho}_0$ の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ へのリフトは 2^μ 個存在する．ホロノミー表現のリフトと $E(L)$ のスピン構造の間には 1 対 1 の対応が存在することが知られている [5]．

ここでは L の各成分 L_i のメリディアン m_i に対して， $\mathrm{tr} \rho_0(m_i) = 2$ を満たすリフト $\rho_0 : G(L) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を考えることにする．一般に各メリディアン m_i の像がトレース 2 の行列となる非可換表現 $\rho : G(L) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ をパラボリック表現と呼ぶことにする．

定理 2.4, 2.6 と予想 3.1 の観点から，双曲絡み目に対して次が成り立つと予想される．

予想 4.1 ([34]) 3次元球面 S^3 内の向きの付いた双曲絡み目 L に対して $\deg \Delta_{L,\rho_0}^\alpha(t) = 2\|\alpha\|_T$ が成り立つ. さらに $\Delta_{L,\rho_0}^\alpha(t)$ がモニック多項式ならば, L はファイバー絡み目である.

注意 4.2 L が交代絡み目の場合には, $\|\alpha\|_T = \|\alpha\|_A$ が成り立つことが知られている. ここで $\|\alpha\|_A$ は $\alpha \in H^1(E(L); \mathbb{Z})$ の Alexander ノルム [30] を表す. Alexander ノルムは (多変数) Alexander 多項式で定まるので, $\|\alpha\|_A = \deg \Delta_L(t) - 1$ が成り立つ ($\Delta_L(t)$ は α で 1 変数に簡約化された Alexander 多項式である). よって, μ -成分双曲的交代絡み目 L については $\deg \Delta_{L,\rho_0}^\alpha(t) = 4g(L) + 2(\mu - 2)$ が成り立つと予想される².

予想 4.1 が成り立つ例として, 図 1 のダブルツイスト絡み目 $L = J(2m + 1, 2n + 1)$ がある. L が双曲絡み目である必要十分条件は $m, n \notin \{-1, 0\}$ である.

定理 4.3 ([34]) 双曲的ダブルツイスト絡み目 $L = J(2m + 1, 2n + 1)$, $m, n \notin \{-1, 0\}$ の任意の向きに対して予想 4.1 が成り立つ.

定理 4.3 の証明は以下の方針で行う (定理 3.2, 3.3 も同様である). まず, 絡み目群 $G(L)$ の表示を固定する: $G(L) = \langle x, y \mid xw = wx \rangle$, $w = (y^{-1}x)^m ((yx^{-1})^m yx(y^{-1}x)^m)^n$. このとき Petersen, Tran [38] により, $X_{\text{irr}}(L)$ を具体的に記述することができる:

$$X_{\text{irr}}(L) = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid F(a, b, c) = 0\}, \quad a = \text{tr } \rho(x), \quad b = \text{tr } \rho(y), \quad c = \text{tr } \rho(xy^{-1}).$$

ここで $F(a, b, c)$ は Chebyshev 多項式を用いて表される. 次に, L のねじれ Alexander 多項式が種数 $g(L)$ と L のファイバー性を決定するような $X_{\text{irr}}(L)$ の部分集合 $X_g(L) = X_{\text{irr}}(L) \setminus Z_g$, $X_f(L) = X_{\text{irr}}(L) \setminus Z_f$ を特定する. 最後に, 我々のリフト $\rho_0 : G(L) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ (つまり $F(2, 2, c_0) = 0$, $c_0 \notin \mathbb{R}$ を満たす $\chi_{\rho_0} = (2, 2, c_0)$) が Z_g, Z_f のどちらにも含まれないことを示すことで主張が得られる. いずれのステップも初等的であるが, 具体的な計算はやや煩雑である.

最近 Nguyen, Tran [36] は, twisted Whitehead 絡み目 L の 2 変数ねじれ Alexander 多項式 $\Delta_{L,\rho}^{\alpha,t}(t_1, t_2)$ の明示公式を与えることで, この絡み目に対して予想 4.1 が成り立つことを示している. 次の定理はホロノミー表現のリフト χ_{ρ_0} を含む既約成分上のすべてのパラボリック表現に対して成り立つ.

定理 4.4 ([36]) 3次元球面 S^3 内の双曲的 twisted Whitehead 絡み目に対して予想 4.1 が成り立つ.

4.2. パラボリック表現

Dunfield, Friedl, Jackson [7] は, $p \leq 287$ を満たす双曲的非ファイバー 2 橋結び目 $K = S(p, q)$ (3,830 個) に対して, ホロノミー表現のリフトとは限らないパラボリック表現 $\rho : G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に付随した $\Delta_{K,\rho}(t)$ が K のファイバー性と種数を決定することを計算機を用いて確かめている. また前節までに見てきたように, 予想 3.1, 4.1 を満たす双曲結び目・絡み目のパラボリック表現は, ファイバー性と種数に関してホロノミー表現のリフト ρ_0 と同等の情報を持っていることがわかる. そこで次の問題を考える.

問題 4.5 向きの付いた双曲絡み目 L の任意のパラボリック表現 $\rho : G(L) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は L のファイバー性と Thurston ノルム $\|\alpha\|_T$ を決定するか.

² Crowell と村杉の結果により, μ -成分交代絡み目 L に対して $\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu - 1$ が成り立つ.

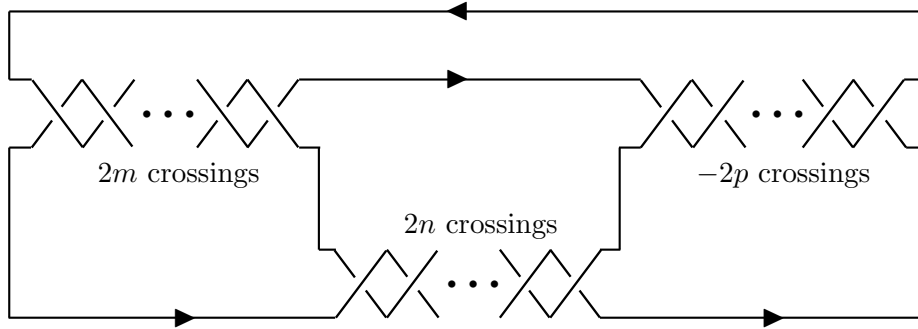


図 2: 2 橋絡み目 $L = C(2m, 2n, -2p)$.

問題 4.5 が肯定的な解を持てば, 予想 3.1, 4.1 が正しいことが直ぐにわかる. しかしながら, 以下で見るように, 絡み目の場合は答えは否定的である.

正整数 m, n, p に対して, Conway の記号で $C(2m, 2n, -2p)$ によって表される双曲的 2 橋絡み目 L を考える (図 2). 問題 4.5 の部分解として次が成り立つ.

定理 4.6 ([34]) m, n, p を $m \neq p$ となる正奇数の組とする. このとき双曲的 2 橋絡み目 $L = C(2m, 2n, -2p)$ の任意の向きに対して, $\Delta_{L, \rho}^{\alpha}(t)$ は L の種数を決定する. さらに,

- (1) $\gcd(m, p) = 1$ ならば, $G(L)$ のすべてのパラボリック表現 $\rho: G(L) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して, $\Delta_{L, \rho}^{\alpha}(t)$ は $g(L)$ を決定する.
- (2) $\gcd(m, p) \geq 3$ ならば, $g(L)$ を決定しない $G(L)$ のパラボリック表現 ρ が存在する.

注意 4.7 図 2 の向きに対して $g(L) = 1$ となり, 1 つの成分の向きを反対にすることで定まる L の向きについては $g(L) = m + p - 1$ となる. 定理 4.6 (2) の種数を決定しないパラボリック表現は前者の場合に現れる.

定理 4.6 の証明では, 絡み目 L のすべてのパラボリック表現を記述する Riley [41] の結果が本質的に用いられる.

最後に幾つか問題を挙げて本稿を終える.

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -指標多様体 $X(K)$ のパラボリック表現によるスライス上での $\mathcal{T}_K(t)$ の挙動の解析から予想 3.1 にアプローチするために, まずは次の点を明らかにしたい.

問題 4.8 ファイバー性もしくは種数を決定しない, 双曲結び目のパラボリック表現は存在するか.

Friedl, Kim [9] は, 定理 2.6 の等号が成り立つような表現 ρ の存在条件を縫い目付き多様体のホモロジーの言葉で記述している. 定理 3.4 はこの判定条件を用いて示されるので自然に次の問題が考えられる.

問題 4.9 双曲的 libroid 結び目に対する結果を双曲絡み目の場合に一般化せよ.

また, 定理 3.5 は, ねじれ Alexander 多項式の次数がねじれ係数コホモロジーの間の写像のランクから計算されることを用いて証明される.

問題 4.10 双曲的 トーション多項式の次数の評価に関する結果を双曲絡み目の場合に一般化せよ. 特に種数 1 の双曲絡み目 L に対して $\deg \Delta_{L, \rho}^{\alpha}(t) = 2\|\alpha\|_T$ を示せ.

2橋結び目を含む幾つかの双曲結び目のクラスに対して、そのファイバー性と種数は、ある種の“有限性”を備えた曲線成分 $C \subset X_{\text{irr}}(K)$ (C は canonical component C_0 とは限らない)の存在によって特徴付けられる [32].

問題 4.11 この観点から双曲絡み目のファイバー性と Thurston ノルムを決定せよ.

謝辞. 第67回トポロジーシンポジウムにお招き下さった東京大学の河澄響矢氏, 逆井卓也氏, 広島大学の寺垣内政一氏, 北海道大学の大本亨氏に心から感謝いたします.

参考文献

- [1] I. Agol and N. M. Dunfield, *Certifying the Thurston norm via $SL(2, \mathbb{C})$ -twisted homology*, What's Next?: The Mathematical Legacy of William P. Thurston, 1–20, Ann. of Math. Stud., 205, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2020.
- [2] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of $(-2, 3, 2n+1)$ -pretzel knots*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 43–57.
- [3] L. Bénard, J. Dubois, M. Heusener and J. Porti, *Asymptotics of twisted Alexander polynomials and hyperbolic volume*, Indiana Univ. Math. J. (to appear).
- [4] J. C. Cha, *Fibred knots and twisted Alexander invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4187–4200.
- [5] M. Culler, *Lifting representations to covering groups*, Adv. in Math. **59** (1986), 64–70.
- [6] M. Culler and P. B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109–146.
- [7] N. M. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math. **21** (2012), 329–352.
- [8] S. Friedl and T. Kim, *The Thurston norm, fibered manifolds and twisted Alexander polynomials*, Topology **45** (2006), 929–953.
- [9] S. Friedl and T. Kim, *Taut sutured manifolds and twisted homology*, Math. Res. Lett. **20** (2013), 289–303.
- [10] S. Friedl and M. Nagel, *Twisted Reidemeister torsion and the Thurston norm: graph manifolds and finite representations*, Illinois J. Math. **59** (2015), 691–705.
- [11] S. Friedl and S. Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, The mathematics of knots, 45–94, Contrib. Math. Comput. Sci., 1, Springer, Heidelberg, 2011.
- [12] S. Friedl and S. Vidussi, *Twisted Alexander polynomials detect fibered 3-manifolds*, Ann. of Math. **173** (2011), 1587–1643.
- [13] S. Friedl and S. Vidussi, *A vanishing theorem for twisted Alexander polynomials with applications to symplectic 4-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15** (2013), 2027–2041.
- [14] S. Friedl and S. Vidussi, *The Thurston norm and twisted Alexander polynomials*, J. Reine Angew. Math. **707** (2015), 87–102.
- [15] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **93** (2017), 61–66.
- [16] H. Goda, *Twisted Alexander polynomial and matrix-weighted zeta function*, Kyushu J. Math. **74** (2020), 211–221.
- [17] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), 51–61.
- [18] M. Heusener, *$SL_n(\mathbb{C})$ -representation spaces of knot groups*, RIMS Kôkyûroku No. 1991 (2016), 1–26.
- [19] J. Hillman, D. Silver and S. Williams, *On reciprocity of twisted Alexander invariants*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), 1017–1026.

- [20] A. Ishii and K. Oshiro, *Augmented Alexander matrices and generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants*, preprint (2018).
- [21] T. Kanenobu and T. Sumi, *Twisted Alexander polynomial of a ribbon 2-knot of 1-fusion*, Osaka J. Math. (to appear).
- [22] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999), 635–661.
- [23] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996), 431–442.
- [24] 北野 晃朗, 合田 洋, 森藤 孝之, *ねじれ Alexander 不変量*, 数学メモアール第5巻, (2006).
- [25] T. Kitano and T. Morifuji, *Divisibility of twisted Alexander polynomials and fibered knots*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), 179–186.
- [26] T. Kitano and T. Morifuji, *A note on Riley polynomials of 2-bridge knots*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **26** (2017), 1211–1217.
- [27] T. Kitano, T. Morifuji and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of torus links*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), 2050016, 16pp.
- [28] T. Kitayama, *Twisted Alexander polynomials and ideal points giving Seifert surfaces*, Acta Math. Vietnam. **39** (2014), 567–574.
- [29] X.-S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380.
- [30] C. T. McMullen, *The Alexander polynomial of a 3-manifold and the Thurston norm on cohomology*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **35** (2002), 153–171.
- [31] P. Menal-Ferrer and J. Porti, *Mutation and $SL(2, \mathbb{C})$ -Reidemeister torsion for hyperbolic knots*, Algebr. Geom. Topol. **12** (2012), 2049–2067.
- [32] T. Morifuji, *Representations of knot groups into $SL(2, \mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials*, Handbook of Group Actions. Vol. I, 527–576, Adv. Lect. in Math. (ALM), 31, Int. Press, Somerville, MA, 2015.
- [33] T. Morifuji and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of 2-bridge knots for parabolic representations*, Pacific J. Math. **269** (2014), 433–451.
- [34] T. Morifuji and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic links*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **53** (2017), 395–418.
- [35] T. Morifuji and A. T. Tran, *Hyperbolic torsion polynomials of pretzel knots*, Adv. Geom. DOI: 10.1515/advgeom-2020-0017.
- [36] H.-A. Nguyen and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of twisted Whitehead links*, New York J. Math. **25** (2019), 1240–1258.
- [37] 大橋 明行, *プレツツェル結び目のファイバー性とねじれアレキサンダー不変量について*, 東北大学修士論文 (2013).
- [38] K. Petersen and A. T. Tran, *Character varieties of double twist links*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), 3569–3598.
- [39] J. Porti, *Nontrivial twisted Alexander polynomials*, A mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia, 547–558, Dep. Geom. Topol. Fac. Cien. Mat. UCM, Madrid, 2016.
- [40] R. Riley, *Parabolic representations of knot groups, I*, Proc. London Math. Soc. **24** (1972), 217–242.
- [41] R. Riley, *Algebra for Heckoid groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 389–409.
- [42] W. Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), no. 339, i–vi and 99–130.
- [43] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), 241–256.

A geometric description of the Reidemeister-Turaev torsion of 3-manifolds

清水 達郎 (大阪市立大学数学研究所/京都大学数理解析研究所)

1 主結果の概要

本稿では、向きづけられた閉3次元多様体の Reidemeister-Turaev torsion と Chern-Simons 摂動論に由来するある不変量間の関係式を紹介する。この式は両者が定数倍を除き等価な情報をもつことを示唆する。この式は Lecsoy による Betti 数 1 の 3 次元多様体に対する公式 ([12]) の拡張および精密化と位置づけることができる。

M を向きづけられた閉3次元多様体とし、 $H = H_1(M; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ とおく。 H の群演算は積で表すことにする。 H の \mathbb{R} 上の群環 $\mathbb{R}H$ の商体を $Q(H)$ と書く。 H の元の H への積作用は自然に $Q(H)$ への作用を誘導する。これを

$$\rho_0 : H \rightarrow \text{Aut } Q(H) = Q(H)^\times$$

と書くことにする。なお、続く2章で $Q(H)$ や ρ_0 を基底を用いて具体的に表示する。 ρ_0 (あるいは基本群のアーベル化との合成)

$$(\pi_1(M) \rightarrow) H \xrightarrow{\rho_0} Q(H)^\times$$

は M の上の局所系を定める。この局所系も同じ記号 ρ_0 で書くことにする。以降 ρ_0 が非輪状であることを仮定する：

$$H_i(M; \rho_0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

e を M の Euler 構造とする (Euler 構造に関しては2章を参照) と、Reidemeister-Turaev torsion

$$\text{Tor}(M, e) \in Q(H)^\times$$

が定義される(3章)。Reidemeister-Turaev torsion は M の ρ_0 係数チェイン複体の境界準同型が持つ代数的情報 (本質的には行列式) を用いて定義される。

他方 M と e から幾何学的な構成を経て別の不変量

$$d(M, e) \in H \otimes Q(H)$$

が定義される(4章)。主結果はこの $\text{Tor}(M, e)$ と $d(M, e)$ が定数の情報を除いて等価であることを主張する。

定理. 写像 $D : Q(H)^\times \rightarrow H \otimes Q(H)$ があって以下が成り立つ.

$$D(\text{Tor}(M, e)) = d(M, e).$$

定理中の D は対数微分を用いて定義される写像であり, 定数分の情報が失われている (詳細は5章). $d(M, e)$ は Chern-Simons 摂動論に深く関わる不変量であり, 大雑把に言えば, M と M の直積多様体 $M \times M$ 内での対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$ の自己絡み数 (self-linking number) として定義される. 自己絡み数を定義するには framing が必要だが, その役割は Euler 構造 e が果たす.

注意 1.1. Lescop は [12] において $\text{rk}H = 1$ の場合に $d(M, e_0)$ を計算し, 定理の式を得ている. ここで e_0 はある対称性を満たす特別な Euler 構造を選んでいる (2.2 章参照). 上の定理は Lescop の結果を $\text{rk}H \geq 2$ の場合に拡張すると同時に Euler 構造による精密化を与えるものになっている.

2 設定の詳細

2.1 多様体と表現 (局所系) について

M を向きづけられた閉3次元多様体, π_1 をその基本群, $H = H_1(M; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ をその1次元ホモロジー群のねじれがない部分とする. 本稿ではホモロジー群の演算 (群としての演算) は積で書くことにする. H の基底 $\{t_1, \dots, t_k\} \subset H$ を一つ固定しておく:

$$H = \{t_1^{n_1} \cdots t_k^{n_k} \mid n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

H の群環を

$$\mathbb{R}H = \left\{ \sum_{n_1, \dots, n_k} a_{n_1, \dots, n_k} t_1^{n_1} \cdots t_k^{n_k} \right\},$$

その商体を

$$Q(H) = \{f/g \mid f, g \in \mathbb{R}H, g \neq 0\}$$

とする. 表現 $\rho_0 : (\pi_1 \rightarrow)H \rightarrow Q(H)^\times$ が定める M の上の局所系も ρ_0 で書き, この局所系係数のホモロジー群

$$H_*(M; \rho_0)$$

がすべて消えている (つまり ρ_0 が非輪状である) ことを仮定する.

2.2 Euler 構造について

M 上の非零ベクトル場 X, X' がホモログスであるとは, M から1点を除いた多様体 $M \setminus \{pt\}$ への制限 $X|_{M \setminus \{pt\}}, X'|_{M \setminus \{pt\}}$ がホモトピックであるときをいう (別の言い方をすれば2スケルトンへの制限がホモトピックということ). M 上の非零ベクトル場

のホモロガスによる同値類を **Euler 構造** という。Euler 構造にはいくつかの同値な言い換えが存在し、特に spin^c 構造との関係は Reidemeister torsion と Seiberg-Witten 不変量との関係を考察するうえで重要である。ここでは、後で必要となる Morse 関数を使った言い換えを紹介する。

Morse 関数を用いた Euler 構造の言い換え

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を M の上の Morse 関数とする。 M に Riemann 計量をひとつ固定し、勾配ベクトル場 $\text{grad}f$ を取る。 $\text{grad}f$ には有限個の零点 (Morse 特異点) があるが、それを

$$\text{Crit}(f) = (\text{grad}f)^{-1}(0) = \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$$

とする。ここで特異点 p_1, \dots, p_k の Morse 指数は偶数であり、特異点 q_1, \dots, q_k のそれは奇数であるとする。 M 内に埋め込まれた可縮なコンパクト向きづけられた 1 次元多様体 e_f であって、

$$\partial e_f = \sum_i p_i - \sum_i q_i$$

となるものとする。 $\text{grad}f$ の零点を e_f の近傍で非零ベクトル場に置き換えることで、 M の非零ベクトル場を得ることができる。その一つを $\text{grad}f/e_f$ と書くことにする。置き換えの方法に ambiguity があるので $\text{grad}f/e_f$ は一意ではないが、代表する Euler 構造は一意に定まる。障害理論を用いてさらに考察すると、 $\partial e'_f = \sum_i p_i - \sum_i q_i$ を e_f の別の選択とすると、 e_f と e'_f の差が定める 1 サイクル $[e_f - e'_f] \in H_1(M; \mathbb{Z})$ が 0 であることと、 $\text{grad}f/e_f$, $\text{grad}f/e'_f$ が代表する Euler 構造が一致することが同値であることが分かる。¹

対称性を持つ Euler 構造

M 上のベクトル場 X に対し各点で一斉に -1 倍をして得られるベクトル場を $-X$ と書くことにする。 M が向きづけられた 3 次元多様体であることから、 X_0 と $-X_0$ がホモロガスであるような非零ベクトル場 X_0 が存在することがわかる。注意 1.1 においてはこの X_0 が代表する Euler 構造 (の 1 つを) e_0 と書いた。

3 Reidemeister-Turaev torsion $\text{Tor}(M, e)$

この章では Reidemeister-Turaev torsion の 1 つの定義 (Morse 関数を用いたもの) の概略を述べる。より詳しくは例えば [14] を参照。まずは非輪状チェイン複体に対する Reidemeister torsion の定義を述べる。

$$C_* = (C_*, \partial) = \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

¹このことから特に Euler 構造全体の集合 $\text{Eul}(M)$ は $H_1(M; \mathbb{Z})$ を随伴ベクトル空間とする affine 空間の構造を持つことも分かる。

を任意の非輪状複体とする．各 C_n は体 F 上の有限次元線形空間とする．このとき，degree を 1 つ上げる準同型

$$g = (g_n : C_{n-1} \rightarrow C_n)_n$$

で，すべての n に対して

$$\partial_{n+1} \circ g_{n+1} + (-1)^n g_n \circ \partial_n = \text{id}_{C_n}$$

を満たすものが取れる． $C_{\text{even}} = \bigoplus_{n:\text{even}} C_n$, $C_{\text{odd}} = \bigoplus_{n:\text{odd}} C_n$ とおくととき，

$$\partial + g (= (\bigoplus_{n:\text{even}} \partial_n) \oplus (\bigoplus_{n:\text{odd}} g_n)) : C_{\text{even}} \rightarrow C_{\text{odd}}$$

は線形同型写像となる． $C_{\text{even}} \oplus C_{\text{odd}}$ の基底 \mathbf{c} を 1 つ決めることで $\partial + g$ の行列式を取ることができる．これが Reidemeister torsion の定義である：

$$\text{tor}(C_*, \mathbf{c}) \in F^\times.$$

なお， $\text{tor}(C_*, \mathbf{c})$ は g の取り方には依らない．

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数とする． M に Morse-Smale 条件を満たす Riemann 計量を一つ取る．局所系 ρ_0 を係数とする Morse-Smale 複体 $(C_*^f(M, \rho_0), \partial_*^f)$ を考える．各 $C_n^f(M, \rho_0)$ は Morse 指数 n の特異点に対応する $Q(H)$ をあつめた $Q(H)$ 上の線形空間である． $(C_*^f(M, \rho_0), \partial_*^f)$ のホモロジーは M の ρ_0 係数ホモロジーと一致するから非輪状である．

M の Euler 構造 e を 1 つ固定する． e を代表する 1 次元多様体 e_f を一つ取る．各 Morse 特異点 $p \in \text{Crit}(f)$ に対して $Q(H)_p$ の²0 でない元 $c_f(p)$ を一つずつ取ったコレクションは $C_*^f(M, \rho_0)$ の基底 \mathbf{c}_f を与える．このように作った基底であって以下の条件を満たすものをとる：特異点 p, q が e_f の連結成分 γ で結ばれているのなら， $\gamma_* c_f(p) = c_f(q)$ ．以上の準備の下，**Reidemeister-Turaev torsion** $\text{Tor}(M, e)$ が以下で定義される．

$$\text{Tor}(M, e) = \text{tor}(C_*^f(M, \rho_0), \mathbf{c}_f) \in Q(H)^\times.$$

基底 \mathbf{c}_f の選び方には ambiguity があるが，計算結果には影響しない．

4 不変量 $d(M, e)$

M と Euler 構造 e に対して不変量

$$d(M, e) \in H \otimes Q(H)$$

の定義を紹介する (不変量の構成はチェインの交差を用いた単純なものですが，チェインの係数が局所系であるため表記が重くなっています．必要に応じて係数を読み

²局所系 ρ_0 は M 上の平坦 $Q(H)$ 束を与えるが，その p におけるファイバーを $Q(H)_p$ と書くことにする．

飛ばしてください). 詳細は [13],[4] 等を参照のこと. この不変量は Chern-Simons 摂動論と深く関わっているが, そのことに関しては後の 6 章において言及する.

表現 ρ_0 とその双対表現 ρ_0^* の外部テンソル積は 6 次元多様体 $M \times M$ の上の非輪状な局所系 $\rho \boxtimes \rho^*$ を定める. $\rho_0 \boxtimes \rho_0^*$ の対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$ への制限 $\rho_0 \boxtimes \rho_0^*|_{\Delta} = \rho_0 \otimes \rho_0^*$ には恒等写像 $\text{id} \in \text{Hom}(Q(H), Q(H)) = Q(H) \otimes Q(H)^*$ が定める切断 $\mathbf{1}$ が存在する. $\mathbb{R} \ni 1 \mapsto \mathbf{1} \in \rho_0 \otimes \rho_0^*$ によって,

$$H_3(\Delta; \mathbb{R}) \subset H_3(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) = H_3(\Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*|_{\Delta})$$

とみなす. 基本ホモロジー類 $[\Delta] \in H_3(\Delta; \mathbb{R}) \subset H_3(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*)$ は $H_3(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$ の 3 次元ホモロジー類を与える:

$$[\Delta] \in H_3(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*).$$

$\rho \boxtimes \rho^*$ は非輪状であるから, $[\Delta] = 0$ である. よって 4 チェイン $\Sigma \in C_4(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$ であって,

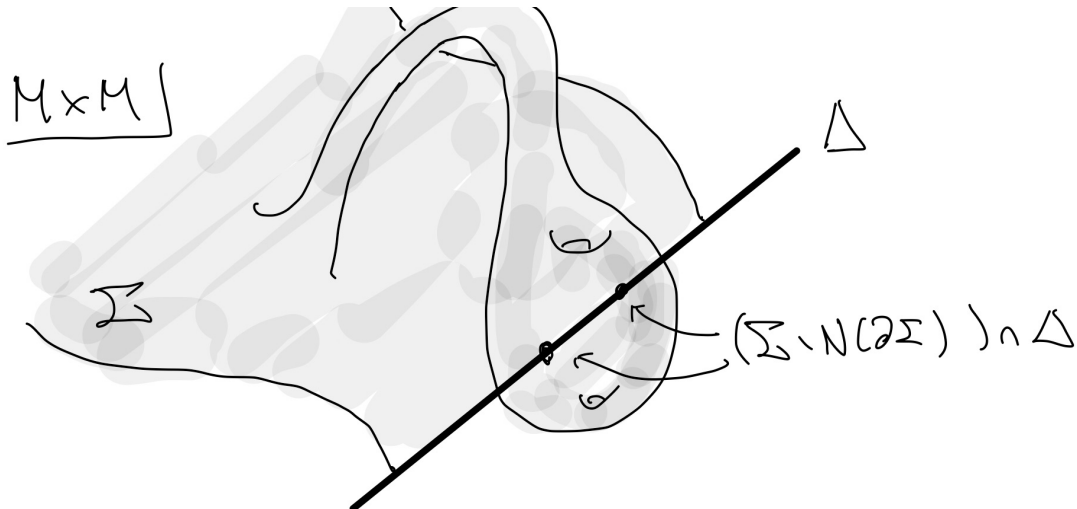
$$\partial \Sigma = \Delta$$

となるものが取れる. Σ はいわば Δ の (局所係数の) Seifert 膜である. このままでは自由度が高すぎるので, さらに Σ に「境界条件」を課すことで, Σ から M の不変量を取り出す. 「境界条件」は Σ の境界の近傍 $N(\partial \Sigma)$ への制限である. v_e を Euler 構造 e を代表する M の non-vanishing vector field とする. このとき, 「境界条件」は以下で記述される.

$$N(\partial \Sigma) = \{(x, tv_e(x)) \mid x \in M, 0 \leq t < \varepsilon\}.$$

そのころは, $\partial \Sigma$ 付近は Euler 構造を代表するベクトル場の方向に Δ を”流す”ということである. 4-chain $\Sigma \setminus N(\partial \Sigma) \in C_4(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$ と 3-chain $\Delta \in C_3(M \times M; \mathbb{R})$ の交差 $(\Sigma \setminus N(\partial \Sigma)) \cap \Delta$ は $C_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*)$ のサイクルを与える. ところで $\rho_0 \otimes \rho_0^*$ は Δ 上自明であるから, $H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \cong H_1(\Delta; \mathbb{R}) \otimes Q(H) = H \otimes Q(H)$ である. ホモロジー群の計算から次の補題が従う.

補題 4.1. $[(\Sigma \setminus N(\partial \Sigma)) \cap \Delta] \in H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \cong H \otimes Q(H)$ は Σ のとり方によらない M, e の位相不変量である.



定義 4.2.

$$d(M, e) = [(\Sigma \setminus N(\partial\Sigma)) \cap \Delta] \in H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \cong H \otimes Q(H).$$

注意 4.3. (1) 4-chain Σ は Chern-Simons 摂動論における propagator (の Poincaré 双対) の一つである. 詳細は 6 章を参照のこと.

(2) $d(M, e)$ の定義は次のように記述することもできる (本質的に上で紹介した定義と同じである). まず, Δ の $M \times M$ における十分小さい管状近傍 $N(\Delta)$ をとっておく. $\rho_0 \boxtimes \rho_0^*|_{N(\Delta)}$ は $\rho_0 \otimes \rho_0^*$ と同一視できる. Thom 同型

$$H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \rightarrow H_4(N(\Delta), \partial N(\Delta), \rho_0 \otimes \rho_0^*)$$

と切除同型

$$H_4(N(\Delta), \partial N(\Delta), \rho_0 \otimes \rho_0^*) \rightarrow H_4(M \times M, M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*),$$

さらに $(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$ の対のホモロジー完全列の中の連結準同型 (ρ_0 が非輪状であることからこれは同型であることがわかる)

$$H_4(M \times M, M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*) \xrightarrow{\partial_*} H_3(M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$$

の合成

$$\Phi : H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \rightarrow H_3(M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$$

は同型である. Δ を Euler 構造を定めるベクトル場 v_e によって摂動し, $M \times M \setminus \Delta$ 内に押しこんで得られる 3 次元多様体を $v_e(\Delta)$ とする. 以上の準備の元,

$$d(M, e) = \Phi^{-1}([v_e(\Delta)])$$

が従う.

5 定理

写像 $D : Q(H)^\times \rightarrow H \otimes Q(H)$ を,

$$D(f) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i \otimes \left(t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \log \right) \right\} (f) = \sum_{i=1}^k t_i \otimes \frac{1}{f} \left(t_i \frac{\partial}{\partial t_i} (f) \right)$$

で定める. ここで $t_1, \dots, t_k \in H$ は H の \mathbb{R} 上の基底であった. D は基底にはよらないことが確かめられる.

例 5.1. $D(1 + t_1^3 + t_1^2 t_2^6) = \frac{1}{1+t_1^3+t_1^2 t_2^6} (t_1 \otimes 3t_1^3 + t_1 \otimes 2t_1^2 t_2^6 + t_2 \otimes 6t_1^2 t_2^6)$

以上の設定のもと、次の式が成り立つ。

定理 (再掲).

$$D(\text{Tor}(M, e)) = d(M, e).$$

例 5.2. $M = S^1 \times S^2$ とする. $H = H_1(S^1 \times S^2; \mathbb{R})$ の生成元を一つとり, t とする: $H = \langle t \rangle$. このとき, 適当な Euler 構造 e に対し,

$$\text{Tor}(S^1 \times S^2, e) = \frac{1}{(t-1)^2} \in Q(H)$$

であることが知られている. したがって定理を適用すると,

$$d(S^1 \times S^2, e) = D\left(\frac{1}{(t-1)^2}\right) = t \otimes \frac{-2t}{t-1} \in H \otimes Q(H)$$

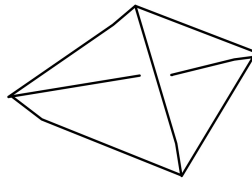
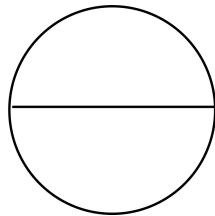
が従う.

6 不変量 $d(M, e)$ の背景 : Chern-Simons 摂動論

不変量 $d(M, e)$ の背景にある Chern-Simons 摂動論について簡単に述べる.

6.1 Chern-Simons 摂動論

Chern-Simons 量子場の理論の分配関数は, 3次元多様体の位相不変量であることが期待される. 分配関数そのものはいまの数学では扱えないが, その漸近展開である Chern-Simons 摂動論は数学であり, Kontsevich, Axelrod, Singer によって 1990 年代初頭に確立された ([11],[1]). Chern-Simons 摂動論は 3次元多様体 M とその上の非輪状な局所系の組に対する不変量を大量に作り出す. その構成は, 一言で言えば「propagator の持つ情報を配置空間積分を用いて取り出す」ものである. propagator (のホモロジカルな描写) は $M \times M$ 内の 4 チェインで, 課される条件 (境界条件, 対称性など) にいくつかのバリエーションがあるが, $d(M, e)$ の構成中に用いた Σ は propagator の一つとみることができる. 実際, Σ として, Bott と Cattaneo による Chern-Simons 摂動論 ([2],[3]) で用いられる propagator を取ることができる. この propagator をいくつも用意し, その様々なタイプの交差をカウントすることで propagator から M と局所系の情報を取り出すことができる. この「交差をカウントする」手法を配置空間積分という. 着目する交差のタイプによって配置空間積分は幾通りも考えられるが, 適切な交差のタイプたちを指定することで不変量が得られる. それら交差のタイプを指定するレシピをグラフとして図式化したものは Jacobi 図あるいは Feynman 図などと呼ばれている.



← Jacobi図の例

6.2 局所系が自明な場合の Chern-Simons 摂動論

M をホモロジー球面から 1 点穴を空けたものとして、局所系としては自明なものをとる。つまり通常の実係数ホモロジーを考える。Jacobi 図としては「 Θ 」の形のグラフをとってくる。 Θ が指示する配置空間積分は、 Δ 以外では横断的に交わる propagator³ を 3 つとってそれら 3 つが交わる点を数えよ (ただし Δ は交差から除外する)、というものでなる。propagator の境界条件で用いる非零ベクトル場の情報をうまく補正してやると、 M の不変量が得られ、それは Casson 不変量の定数倍に一致することが知られている。また、もっと複雑な Jacobi 図を持つてくることで有限型不変量とよばれるクラスに属する不変量がすべて得られることも知られている。

6.3 局所系が非自明な場合の Chern-Simons 摂動論

一方、局所系が非自明な場合の Chern-Simons 摂動論の性質はあまりわかっていない。局所系が非自明な場合と自明な場合とでは様相が異なる部分が散見されるが、 $d(M, e_0)$ はその差異の一つを定量化したものと捉えることができる。ここで e_0 は 2.2 章で導入した対称性をもつ Euler 構造である。局所系が自明なときには常に $d(M, e_0) = 0$ であることがわかる。 $d(M, e_0)$ は propagator と対角線 Δ の交差によって定義されていたので、 $d(M, e_0) = 0$ は代数的交差が 0 であるということである。さらに $d(M, e_0) = 0$ のときは propagator を Δ の付近で局所的に変形して、交差が (代数的にではなく) 本当に起きないように取れることが知られている。その結果、配置空間積分をするときに Δ 付近の処理が容易になるのである。局所系が非自明なときも、たとえば局所系が $SU(2)$ 束の平坦接続のホロノミー準同型から決まるような場合には必ず $d(M, e_0) = 0$ であることが示され、自明接続のときとほぼ同様にして Chern-Simons 摂動論を展開することができる ([13])。

Lescop は [12] において $\text{rk}H = 1$ である M と表現 $\rho_0 : H \rightarrow Q(H)$ に対する Chern-Simons 摂動論を展開している。この場合には $d(M, e_0)$ は一般に 0 ではなく、その考察が必要である。実際 Lescop は $d(M, e_0)$ を M の Alexander 多項式で表す公式を与えている。また、渡邊は [16] において $\text{rk}H = 1$ の場合の Chern-Simons 摂動論の Morse homotopy による表示を与えている。

7 定理の証明の概略

7.1 証明のアイデア

M 上に Morse 関数を取る。 $\text{Tor}(M, e)$ は局所系係数の Morse-Smale 複体 $(C_*^f(M, \rho)_0, \partial)$ の Reidemeister torsion として表示できるのであった。もう少し詳しく見ると、 $\text{Tor}(M, e)$ は境界準同型 ∂ と準同型 g の情報から定まるのであった。Morse-Smale 複体における ∂ の Euler 構造による基底に関する表現行列の各要素は trajectory を局所系から定

³厳密には propagator は穴の付近でコントロールする必要がある。

まる重み付きでカウントすることで計算される。他方、以下に見るように、 $d(M, e)$ にも Morse 関数を用いた具体的な表示を与えることができ、trajectory と g と関係する情報を用いて表される。これら $\text{Tor}(M, e)$ と $d(M, e)$ の表示を比較するのが証明の大まかな流れである。

7.2 Morse homotopy を用いた $d(M, e)$ の表示

$d(M, e)$ を Morse 関数を用いて表示するためには propagator を Morse 関数によって表示すれば良い。そこで用いるのは Morse homotopy とよばれる手法である。ここで用いる Morse ホモトピーについて詳しくは [5],[15] を参照のこと。特に [5] の Introduction には以下の構成のアイデアが端的にまとめられている。 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数とする。 $\{\Phi_t^f : M \rightarrow M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を f の勾配ベクトル場 $\text{grad} f$ が生成する微分同相写像の 1 パラメータファミリーとする。 $M \times M$ の 4次元部分多様体

$$\Sigma^0(f) = \{(x, \Phi_t^f(x)) \mid x \in M, t \geq 0\}$$

をとる。これはいわば Δ を $\text{grad} f$ のフローで”流して”得られる 4次元多様体である。 $t=0$ のときに $\{(x, \Phi_0^f(x)) \mid x \in M\} = \Delta$ であるから、境界 $\partial \Sigma^0(f)$ は Δ をその一部に含む。実際には Morse 特異点に由来する別の境界やエンドが存在するが、それを安定多様体・不安定多様体を用いて適切に補正してやることで $\partial \Sigma(f) = \Delta$ となる 4 チェイン $\Sigma(f)$ を作るができる。ここでは細部には触れないが、⁴式のみを書いておく：

$$\Sigma(f) = \{(x, \Phi_t^f(x)) \mid x \in M, t \geq 0\} + \sum_{p,q} g_{p,q}(\mathcal{A}_p \times \mathcal{D}_q).$$

$g_{p,q}$ は Morse 関数と局所系の情報から定まる $Q(H)_p \otimes Q(H)_q^*$ の元で、 $\text{Tor}(M, e)$ の定義 (3 章) のところで用いた $g : C_* \rightarrow C_{*+1}$ と深く関係している。 propagator の境界条件は非零ベクトル場で与えられていた。チェイン $\Sigma(f)$ の境界は勾配ベクトル場にコントロールされているが、勾配ベクトル場は一般に零点を持つ。そこで、同じ場所に逆符号の零点を持つベクトル場 $-\text{grad} f$ を用いて零点の寄与を相殺させる：

$$\Sigma(\pm f) = \frac{1}{2}(\Sigma(f) + \Sigma(-f)).$$

$\Sigma(\pm f)$ は実際に propagator になることが確かめられる。

さて $d(M, e) = [(\Sigma(\pm f) - N(\partial \Sigma(\pm f))) \cap \Delta]$ であった。 $(\mathcal{A}_p \times \mathcal{D}_q) \cap \Delta$ は p と q を結ぶ積分曲線 (trajectory) の和集合であることに注意すると、

$$d(M, e) = \sum_{\gamma: \text{trajectory}} [\gamma] \otimes \gamma_* \circ g_{p,q} \in H \otimes Q(H)$$

⁴詳しくは例えば [15] を参照のこと。実際はコンパクト化や局所係数の考察が必要である。

であることがわかる. ここで $[\gamma]$ は γ を M の 1 チェインとみなしたものであり, $\gamma_* \in Q(H)_p^* \otimes Q(H)_q$ は γ に沿った局所系のねじれである. $\gamma_* \circ g_{p,q}$ は $Aut(Q(H)_q) \cong Q(H)^\times$ の元である. 以上が $d(M, e)$ の Morse 関数を用いた表示である.

- 注意 7.1.** (1) Morse 関数を用いた Reidemeister torsion に対するアプローチとして Hutchings と Lee による仕事 ([7],[8],[9]) がある. Hutchings と Lee は S^1 値 Morse 関数の trajectory に着目し, 閉軌道となる積分曲線の情報を特異点どうしを結ぶ trajectory の情報で補正することで Reidemeister-Turaev torsion が取り出せることを示した. ただし, $\mathbb{R} \subset S^1$ とみなして Hutchings-Lee の結果を \mathbb{R} 値の Morse 関数に適用すると自明な式となってしまう. しかし本稿の定理とは類似点が散見され, 両者を含む自然な拡張が期待される.
- (2) 不変量 $d(M, e)$ は任意の (可換とは限らない) 非輪状表現に対して定義される. しかしその場合の $d(M, e)$ と Reidemeister torsion との関係は明らかになっていない. 一方で, (1) で紹介した Hutchings-Lee の結果の非可換表現への拡張は合田, Pajitonov [6], 北山 [10] らによって調べられている.

References

- [1] S. Axelrod and I. M. Singer, Chern-Simons perturbation theory. In *Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, Vol. 1, 2 (New York, 1991), pages 3-45. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [2] R. Bott and A. S. Cattaneo, Integral invariants of 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 48(1):91-133, 1998.
- [3] R. Bott and A. S. Cattaneo, Integral invariants of 3-manifolds. II. *J. Differential Geom.*, 53(1):1-13, 1999.
- [4] A. S. Cattaneo and T. Shimizu, A note on the Θ -invariant of 3-manifolds, preprint, 2019. to appear in *Quantum Topology*
- [5] K. Fukaya, Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory. *Comm. Math. Phys.*, 181(1):37-90, 1996.
- [6] H. Goda and A. V. Pajitnov, Dynamics of gradient flows in the half-transversal Morse theory, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 85 (2009), no. 1, 6-10.
- [7] M. Hutchings, Reidemeister torsion in generalized Morse theory, *Forum Math.* 14 (2002) 209244.
- [8] M. Hutchings and Y. J. Lee, Circle-valued Morse theory, Reidemeister torsion, and Seiberg- Witten invariants of three manifolds, *Topology* 38 (1999) 861888.

- [9] M. Hutchings and Y. J. Lee, Circle-valued Morse theory and Reidemeister torsion, *Geom. Topol.* 3 (1999) 369396.
- [10] T. Kitayama, Non-commutative Reidemeister torsion and Morse-Novikov theory, *Proceedings of the American Mathematical Society* 138 (2010), 3345-3360.
- [11] M. Kontsevich, Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics*, Vol. II (Paris, 1992), volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97-121. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [12] C. Lescop, On the cube of the equivariant linking pairing for knots and 3-manifolds of rank one, arXiv:1008.5026, 2010.
- [13] T. Shimizu, Morse homotopy for the $SU(2)$ -Chern-Simons perturbation theory. RIMS preprint 1857, 2016.
- [14] V. Turaev, *Torsions of 3-dimensional manifolds*, Progress in Mathematics, 208, Birkhäuser Verlag, Basel (2002). MR1958479 (2003m:57028)
- [15] T. Watanabe, Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds I. Invariants of homology 3-spheres. *Asian J. Math.* 22 (2018), no. 1, 111-180.
- [16] T. Watanabe, Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds II, arXiv:1605.05620v4, 2016.

ウェルデッド絡み目のミルナー不変量

和田 康載 (大阪大学・日本学術振興会特別研究員PD)*

1. はじめに

1950年代に Milnor [10, 11] は $\bar{\mu}$ 不変量と呼ばれる3次元球面内の絡み目の不変量を定義した. 順序付けられた有向 n 成分絡み目 L に対し, 集合 $\{1, \dots, n\}$ の元を項にもつ数列 I に対応してミルナー数と呼ばれる整数 $\mu_L(I)$ が定まる. ミルナー数 $\mu_L(I)$ のある剰余類 $\bar{\mu}_L(I)$ をとることにより, L の不変量が得られる. この剰余類が $\bar{\mu}$ 不変量である. 数列 I の項に重複がない場合, $\bar{\mu}_L(I)$ はリンクホモトピー不変量であることが知られている [11]. ここで, リンクホモトピーとは自己交差交換によって生成される同値関係のことである [10]. 1990年に, Habegger-Lin [5] は絡み目のミルナー数を3次元球体内のストリング絡み目の不変量に拡張した. この整数値不変量をストリング絡み目の μ 不変量という.

1990年代の後半, 絡み目の一般化にあたる概念として, ウェルデッド絡み目が定義された [4]. ウェルデッド絡み目と同様に, ウェルデッドストリング絡み目も定義される. 2010年に Dye-Kauffman [3] は数列の項に重複がない場合に絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量をウェルデッド絡み目へ拡張したが, 2013年に Kotorii [6] はこの拡張が正しくないことを指摘した. ([1]も参照されたい.) そして, Turaev [14] のナワード理論を用いた組合せ論的な手法で, $\bar{\mu}$ 不変量のウェルデッド絡み目への拡張を与え直した. またウェルデッドストリング絡み目に対して, 2011年に Kravchenko-Polyak [7] は, ガウス関式を用いた組合せ論的な手法で, 数列の項に重複がない場合にストリング絡み目の μ 不変量を拡張した. Kotorii や Kravchenko-Polyak によるミルナー不変量の拡張は数列の項に重複がない場合, すなわち, リンクホモトピー不変量の場合に限られている.

2017年に Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1] は4次元球体内のリボン2次元ストリング絡み目に μ 不変量を定義した. さらにチューブ写像を組み合わせて, 任意の数列に対するストリング絡み目の μ 不変量をウェルデッドストリング絡み目へ拡張した. ここで, チューブ写像とはウェルデッドストリング絡み目をリボン2次元ストリング絡み目に対応させる写像のことである (cf. [13, 15]). Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1] と類似のトポロジカルな手法で, 2020年に Chrisman [2] は任意の数列に対する絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量をウェルデッド絡み目へ拡張することに成功した. [1, 2] でウェルデッド (ストリング) 絡み目に対しミルナー不変量が完全な形で定義されたが, その手法はトポロジカルなものである. ウェルデッド (ストリング) 絡み目は, 仮想関式により定義される組合せ論的な対象であるため, それらのミルナー不変量の定義やその不変性の証明を組合せ論的な手法で与えることは重要な課題であると考えられる.

Milnor は [11] で関式を用いた絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量を計算する方法を与えた. Milnor の計算方法は仮想絡み目関式に対しても適用できる. 上記の Chrisman [2] の結果より, Milnor の計算方法から得られる値はウェルデッド絡み目の不変量であり, 理論的にはその値の不変性を仮想絡み目関式のみを用いて証明することが可能である. そのような組合せ論的な証明を実際に与えることができたので, 本講演ではその証明の概略を紹介

本研究は科研費 (課題番号: JP19J00006) の助成を受けたものである.

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: ko-wada@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

する。また、ウェルデッド絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量は数列の項に重複がない場合に自己仮想化同値の不変量であること、我々の証明は上記の Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1] の結果の別証明を含むことも紹介する。本講演の内容は、宮澤治子氏（津田塾大学）、安原晃氏（早稲田大学）との共同研究 [12] に基づく。

2. ウェルデッド絡み目のミルナー不変量

本節では、Milnor [11] の図式を用いた絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量の計算方法を基にした、ウェルデッド絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量の定義を紹介する。

まずウェルデッド絡み目を定義する。平面にはめ込まれた n 個の円周であり、多重点が横断的な2重点のみであるものを n 成分仮想絡み目図式という。その2重点は、図1に示された実交差と呼ばれるものと、仮想交差と呼ばれるものの二種類がある。



図 1: 仮想絡み目図式の二種類の交差

二つの仮想絡み目図式が同値であるとは、それらがウェルデッドライデマイスター移動と呼ばれる図2に示された八種類の局所変形 R1-R3, V1-V4, OC の有限列によって互に移り合うときをいう。 n 成分仮想絡み目図式の同値類を n 成分ウェルデッド絡み目という。なお以下では、仮想絡み目図式およびウェルデッド絡み目の各成分は、向きと順序が指定されていると仮定する。

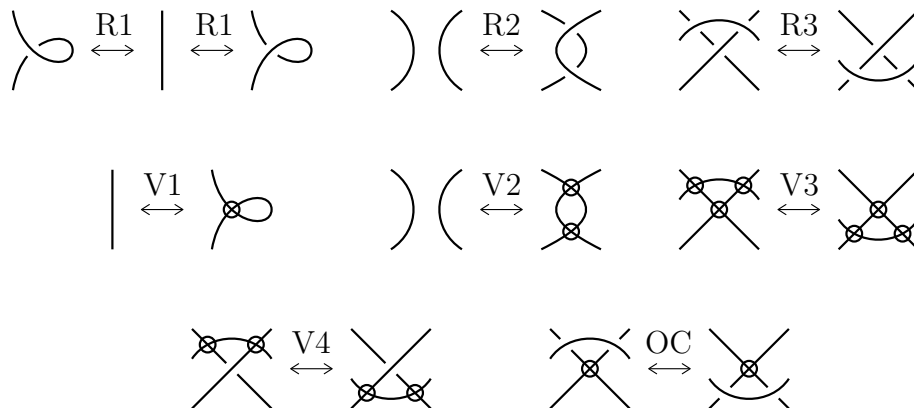


図 2: ウェルデッドライデマイスター移動

D を n 成分仮想絡み目図式とする。各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し、 D の第 i 成分上に1点 p_i を選び固定する。各点 p_i を第 i 成分の基点といい、 n 個の基点の組 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ を D の基点システムと呼ぶ。また、基点システム \mathbf{p} を伴った図式 D を (D, \mathbf{p}) で表す。 D の実上交差と n 個の基点 p_1, \dots, p_n により D は有限個の連結成分に分割されるが、その各連結成分を (D, \mathbf{p}) のアークと呼ぶ。 ((D, \mathbf{p}) のアークには実上交差や仮想交差が含まれてもよい。)

基点 p_i から第 i 成分の向きに沿って一周し、通過した順に (D, \mathbf{p}) の各アークにラベル $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im_i+1}$ を付ける (図3参照)。ここで、 $m_i + 1$ は (D, \mathbf{p}) の第 i 成分のアー

クの総数である．また $u_{ij} \in \{a_{kl}\}$ を a_{ij} と a_{ij+1} を区分するアークとし， $\varepsilon_{ij} \in \{1, -1\}$ を a_{ij}, a_{ij+1}, u_{ij} からなる交差の符号とする．

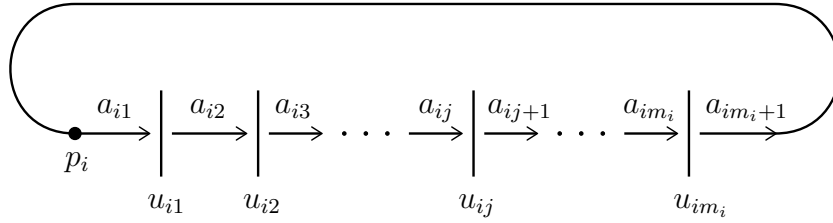


図 3: (D, \mathbf{p}) の第 i 成分の概略図

$A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ を階数 n の自由群とし， \bar{A} を (D, \mathbf{p}) のアーク全体の集合 $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i + 1\}$ で生成される自由群とする．また，語 $u_{i1}^{\varepsilon_{i1}} u_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \cdots u_{ij}^{\varepsilon_{ij}} \in \bar{A}$ ($1 \leq j \leq m_i$) を v_{ij} で表す．自然数 q に対し， (D, \mathbf{p}) に付随した準同型写像 $\eta_q = \eta_q(D, \mathbf{p}) : \bar{A} \rightarrow A$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \eta_1(a_{ij}) &= \alpha_i, \\ \eta_{q+1}(a_{i1}) &= \alpha_i, \quad \eta_{q+1}(a_{ij}) = \eta_q(v_{ij-1}^{-1}) \alpha_i \eta_q(v_{ij-1}) \quad (2 \leq j \leq m_i + 1). \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ を整数係数の X_1, \dots, X_n を非可換な変数とする形式的ベキ級数環とする．マグナス展開とは次で定義される準同型写像 $E : A \rightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ のことをいう．

$$E(\alpha_i) = 1 + X_i, \quad E(\alpha_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \cdots \quad (1 \leq i \leq n).$$

注意 2.1 ([8]) A_q を A の降中心列の第 q 番目の部分群とする．任意の $x \in A_q$ に対し， $E(x) = 1 + (q$ 次以上の項) が成り立つ．

各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し， (D, \mathbf{p}) の第 i 成分の自己交差の符号和を w_i とし，語 $a_{i1}^{-w_i} v_{im_i} \in \bar{A}$ を l_i で表す．この語 l_i を (D, \mathbf{p}) の第 i 番標準ロンジチュードと呼ぶ．

定義 2.2 集合 $\{1, \dots, n\}$ の元を項とする数列 $j_1 \dots j_s i$ ($1 \leq s < q$) に対する (D, \mathbf{p}) のミルナー数とは， $\eta_q(l_i)$ のマグナス展開 $E(\eta_q(l_i))$ における $X_{j_1} \cdots X_{j_s}$ の係数のことであり， $\mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q)}(j_1 \dots j_s i)$ で表す．

注意 2.3 $1 \leq s < q$ に対し， $\mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q)}(j_1 \dots j_s i) = \mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q+1)}(j_1 \dots j_s i)$ が成り立つ．

注意 2.3 より， q が十分大きければ $\mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q)}(j_1 \dots j_s i)$ を， (q) を省略して $\mu_{(D, \mathbf{p})}(j_1 \dots j_s i)$ と表して差し支えない． q は任意に大きくとれるため，今後 q は十分大きい自然数であると仮定する．

二つの基点付き仮想絡み目図式が基点付き同値であるとは，それらが基点を含まないウエルデッドライデマイスター移動と図 4 の局所変形の有限列で互いに移り合うときをいう．

注意 2.4 図 5 の二種類の局所変形は基点付き同値において使用が許されない．

次のように基点付き仮想絡み目図式のミルナー数は基点付き同値の不変量である．



図 4: 基点が仮想交差を通過する局所変形



図 5: 基点付き同値において使用できない二種類の局所変形

定理 2.5 ([12, Theorem 3.1]) 二つの基点付き仮想絡み目図式 (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') が基点付き同値であるならば, 任意の数列 I に対し $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I)$ が成り立つ.

(D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') の第 i 番標準ロンジチュードを各々 l_i と l'_i で表す. 定理 2.5 を示すためには, (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') が 1 回の基点を含まないウエルデッドライデマイスター移動または図 4 の局所変形で移り合うときを考え, $\eta_q(D, \mathbf{p})(l_i)$ と $\eta_q(D', \mathbf{p}')(l'_i)$ の差を観察すればよい. その差について次が分かる.

命題 2.6 (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') を基点付き仮想絡み目図式とし, l_i と l'_i をその第 i 番標準ロンジチュードとする. (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') が基点付き同値であるならば, $\eta_q(D, \mathbf{p})(l_i) \equiv \eta_q(D', \mathbf{p}')(l'_i) \pmod{A_q}$ が成り立つ.

命題 2.6 は認めて定理 2.5 を証明する.

定理 2.5 の証明 注意 2.1 と命題 2.6 を組み合わせると,

$$E(\eta_q(D, \mathbf{p})(l_i)) - E(\eta_q(D', \mathbf{p}')(l'_i)) = (q \text{ 次以上の項})$$

を得る. よって定義より, 任意の数列 $j_1 \dots j_s i$ ($s < q$) に対し, $\mu_{(D, \mathbf{p})}(j_1 \dots j_s i) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (j_1 \dots j_s i)$ が成り立つ. \square

基点付き仮想絡み目図式 (D, \mathbf{p}) のミルナー数 $\mu_{(D, \mathbf{p})}(i_1 \dots i_r)$ は基点システム \mathbf{p} の選び方に依存し, 一般にウエルデッド絡み目の不変量ではない. そこで, 非負整数 $\Delta_{(D, \mathbf{p})}(i_1 \dots i_r)$ を

$$\gcd \left\{ \mu_{(D, \mathbf{p})}(j_1 \dots j_s) \mid \begin{array}{l} j_1 \dots j_s \ (2 \leq s < r) \text{ は } i_1 \dots i_r \text{ から一つ以上の項} \\ \text{を取り除き残りを巡回置換させて得られる数列} \end{array} \right\}$$

で定義する. ただし, $\Delta_{(D, \mathbf{p})}(i_1 i_2) = 0$ と定める. このとき次が成り立つ.

定理 2.7 ([12, Theorem 5.2]) 二つの仮想絡み目図式 D と D' が同値であるならば, D と D' 各々の任意の基点システム \mathbf{p} と \mathbf{p}' に対し次が成り立つ.

- (i) 任意の数列 I に対し, $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) \equiv \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I) \pmod{\Delta_{(D, \mathbf{p})}(I)}$ である.
- (ii) 任意の数列 I に対し, $\Delta_{(D, \mathbf{p})}(I) = \Delta_{(D', \mathbf{p}')} (I)$ である.

定理 2.7 により次の定義は well-defined である.

定義 2.8 L を n 成分ウェルデッド絡み目とする. 集合 $\{1, \dots, n\}$ の元を項とする数列 I に対する L の $\bar{\mu}$ 不変量とは, 剰余類 $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) \pmod{\Delta_{(D, \mathbf{p})}(I)}$ のことであり, $\bar{\mu}_L(I)$ で表す. ここで, D は L の図式であり, \mathbf{p} は D の基点システムである.

注意 2.9 定義 2.8 のウェルデッド絡み目 L の $\bar{\mu}$ 不変量は, Chrisman [2] が定義した $\bar{\mu}$ 不変量と同値なものである. とくに, L が 3 次元球面内の絡み目の場合は Milnor [11] のオリジナルの $\bar{\mu}$ 不変量と一致する.

3. 定理 2.7 の証明の概略

本節では定理 2.7 の証明の概略を述べる. まず, n 成分仮想絡み目図式 D を固定し, D の基点システムを取り替えた際の $\eta_q(l_i)$ の変化を考察することから始める.

D の実下交差により分割された D の各連結成分を D のアークという. (D のアークには実上交差や仮想交差が含まれてもよい. また, D のアークと (D, \mathbf{p}) のアークの定義は異なることに注意されたい.) 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し, 第 i 成分のアークを一つ選び固定し, そのアークにラベル a_{i1} を付ける. a_{i1} とラベル付けられたアークから向きに沿って第 i 成分を一周し, 通過した順に残りのアークにラベル a_{i2}, \dots, a_{im_i} を付ける. ここで, m_i は D の第 i 成分のアークの総数である. 以後, D のアークのラベル a_{i1}, \dots, a_{im_i} は固定して考える.

今, D に対し基点システム $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ を与える. 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し, 基点 p_i を含むアークの添字の第 2 番目の整数を $\mathbf{p}(i)$ で表す. 例えば, p_i が a_{ij} 上にあるならば, $\mathbf{p}(i) = j$ である. ここで, D のアークのラベルから (D, \mathbf{p}) のアークのラベルを定める. (D, \mathbf{p}) において, p_i を含む D のアーク $a_{i\mathbf{p}(i)}$ は p_i により二つに分割されるので, それらには図 6 のように $b_i^{\mathbf{p}}$ と $a_{i\mathbf{p}(i)}$ とラベルを付ける. その他の (D, \mathbf{p}) のアークには, D の対応するアークのラベルを付ける.

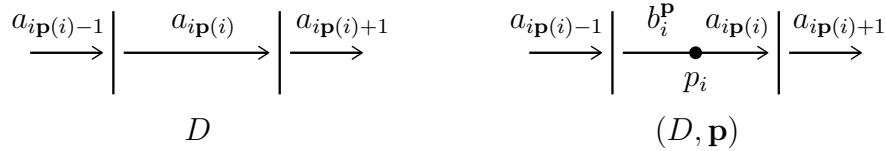


図 6: D のアークのラベルと (D, \mathbf{p}) のアークのラベルの対応

以上の設定の下で, 前節で定義した (D, \mathbf{p}) に付随した準同型写像 $\eta_q(D, \mathbf{p})$ は次のように記述される. 簡単のため $\eta_q(D, \mathbf{p})$ を $\eta_q^{\mathbf{p}}$ で表す. $\eta_q^{\mathbf{p}}$ の定義域は $\{a_{ij}\} \cup \{b_i^{\mathbf{p}}\}$ で生成される自由群 \bar{A} であり, 値域 $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ への対応は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \eta_1^{\mathbf{p}}(a_{ij}) &= \alpha_i, \quad \eta_1^{\mathbf{p}}(b_i^{\mathbf{p}}) = \alpha_i, \\ \eta_{q+1}^{\mathbf{p}}(a_{i\mathbf{p}(i)}) &= \alpha_i, \quad \eta_{q+1}^{\mathbf{p}}(a_{ij}) = \eta_q^{\mathbf{p}}((v_{ij-1}^{\mathbf{p}})^{-1})\alpha_i\eta_q^{\mathbf{p}}(v_{ij-1}^{\mathbf{p}}) \quad (j \neq \mathbf{p}(i)), \\ \eta_{q+1}^{\mathbf{p}}(b_i^{\mathbf{p}}) &= \eta_q^{\mathbf{p}}((v_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\mathbf{p}})^{-1})\alpha_i\eta_q^{\mathbf{p}}(v_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

ここで,

$$v_{ij}^{\mathbf{p}} = \begin{cases} u_{i\mathbf{p}(i)}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)}} u_{i\mathbf{p}(i)+1}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)+1}} \cdots u_{ij}^{\varepsilon_{ij}} & (\mathbf{p}(i) \leq j \leq m_i), \\ u_{i\mathbf{p}(i)}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)}} u_{i\mathbf{p}(i)+1}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)+1}} \cdots u_{im_i}^{\varepsilon_{im_i}} u_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdots u_{ij}^{\varepsilon_{ij}} & (1 \leq j \leq \mathbf{p}(i) - 1) \end{cases}$$

であり, $v_{i0}^{\mathbf{p}} = v_{im_i}^{\mathbf{p}}$ と定める. さらに, (D, \mathbf{p}) の第 i 番標準ロンジチュード $l_i^{\mathbf{p}}$ は

$$l_i^{\mathbf{p}} = a_{i\mathbf{p}(i)}^{-w_i} v_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\mathbf{p}}$$

で与えられる。

D の実下交差と実上交差により分割された D の各連結成分を D のセミアークという。
(D のセミアークには仮想交差が含まれてもよい。) D の基点システム全体の集合を \mathcal{P} とし、各 p_i が第 i 成分の向きに沿って実下交差から始まるセミアーク上にある基点システム (p_1, \dots, p_n) 全体の集合を $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ とする。また、 \mathcal{P}_0 の元であり各 p_i が a_{i1} 上にある基点システム (p_1, \dots, p_n) を \mathbf{p}_* で表す。以下では、簡単のため (D, \mathbf{p}_*) に付随した準同型写像 $\eta_q^{\mathbf{p}_*}$ と第 i 番標準ロンジチュード $l_i^{\mathbf{p}_*}$ を各々 η_q と l_i で表す。

基点システム $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ に対し語 $\lambda_i^{\mathbf{p}} \in \bar{A}$ を

$$\lambda_i^{\mathbf{p}} = \begin{cases} u_{i1}^{\varepsilon_{i1}} u_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \cdots u_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)-1}} & (\mathbf{p}(i) \neq 1), \\ 1 & (\mathbf{p}(i) = 1) \end{cases}$$

で定め、準同型写像 $\phi_q^{\mathbf{p}} : A \rightarrow A$ を

$$\begin{aligned} \phi_1^{\mathbf{p}}(\alpha_i) &= \alpha_i, \\ \phi_q^{\mathbf{p}}(\alpha_i) &= \eta_{q-1}^{\mathbf{p}}(\lambda_i^{\mathbf{p}}) \alpha_i \eta_{q-1}^{\mathbf{p}}((\lambda_i^{\mathbf{p}})^{-1}) \quad (q \geq 2). \end{aligned}$$

で定義する。 $M_q^{\mathbf{p}}$ を A における $\{\phi_q^{\mathbf{p}}([\alpha_i, \eta_q(l_i)]) \mid 1 \leq i \leq n\}$ の正規閉包とし、 $M_q = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_0} M_q^{\mathbf{p}}$ とおく。このとき、 D の基点システムを \mathbf{p}_* から \mathbf{p} に取り替えた際の $\eta_q(l_i)$ と $\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})$ の差が次のように記述される。

定理 3.1 ([12, Theorem 4.8]) $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ を任意の基点システムとし、 $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}_0$ を $\mathbf{p}_0(k) = \mathbf{p}(k)$ ($1 \leq k \leq n$) をみたす基点システムとする。各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し、 $\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}}) \equiv \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q((\lambda_i^{\mathbf{p}_0})^{-1} l_i \lambda_i^{\mathbf{p}_0})) \pmod{A_q M_q}$ が成り立つ。

定理 3.1 の証明は割愛する。

ここで、 $\mu_{\mathbf{p}}(I) = \mu_{(D, \mathbf{p})}(I)$, $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta_{(D, \mathbf{p})}(I)$ とおく。とくに、 $\mu(I) = \mu_{(D, \mathbf{p}_*)}(I)$, $\Delta(I) = \Delta_{(D, \mathbf{p}_*)}(I)$ とおく。そして、 $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ の両側イデアル \mathcal{D}_i を

$$\left\{ \sum \nu(j_1 \dots j_s) X_{j_1} \cdots X_{j_s} \mid \begin{array}{l} \nu(j_1 \dots j_s) \equiv 0 \pmod{\Delta(j_1 \dots j_s i)} \quad (s < q), \\ \nu(j_1 \dots j_s) \in \mathbb{Z} \quad (s \geq q). \end{array} \right\}$$

で定める。定義より、 \mathcal{D}_i の元は

$$\sum_{s < q} (\Delta(j_1 \dots j_s i) \text{ の倍数}) X_{j_1} \cdots X_{j_s} + (q \text{ 次以上の項})$$

という形で表される。よって $\eta_q(l_i)$ と $\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})$ が同じ剰余類 $\mu(j_1 \dots j_s i) \pmod{\Delta(j_1 \dots j_s i)}$ を与えることをいうには、 $E(\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})) - E(\eta_q(l_i)) \in \mathcal{D}_i$ を証明すればよい。そこで次の補題を用意する。

補題 3.2 ([12, Lemma 5.7]) 語 $x, y \in A$ と基点システム $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ に対し、任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ で次が成り立つ。

(i) $E(x^{-1} \eta_q(l_i) x) - E(\eta_q(l_i)) \in \mathcal{D}_i$ である。

(ii) $E(\phi_q^{\mathbf{p}}(\eta_q(l_i))) - E(\eta_q(l_i)) \in \mathcal{D}_i$ である。

(iii) もし $x \equiv y \pmod{A_q M_q}$ であるならば、 $E(x) - E(y) \in \mathcal{D}_i$ である。

補題3.2を認め、定理3.1と組み合わせることで次を証明する。

命題 3.3 ([12, Proposition 5.8]) 任意の基点システム $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ に対し、次が成り立つ。

(i) 任意の数列 I に対し、 $\mu_{\mathbf{p}}(I) \equiv \mu(I) \pmod{\Delta(I)}$ である。

(ii) 任意の数列 I に対し、 $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta(I)$ である。

証明 (i) $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}_0$ を各 $k \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\mathbf{p}_0(k) = \mathbf{p}(k)$ をみたす基点システムとする。定理3.1から、

$$\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}}) \equiv \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q((\lambda_i^{\mathbf{p}_0})^{-1} l_i \lambda_i^{\mathbf{p}_0})) \pmod{A_q M_q}$$

を得る。 $x = \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(\lambda_i^{\mathbf{p}_0})) \in A$ とおくと、補題3.2より次が成り立つ。

$$\begin{aligned} E(\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})) - E(\eta_q(l_i)) &\equiv E(x^{-1} \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(l_i)) x) - E(\eta_q(l_i)) \pmod{\mathcal{D}_i} \\ &\equiv E(x^{-1} \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(l_i)) x) - E(x^{-1} \eta_q(l_i) x) \pmod{\mathcal{D}_i} \\ &= E(x^{-1}) (E(\phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(l_i))) - E(\eta_q(l_i))) E(x) \\ &\equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_i}. \end{aligned}$$

よって任意の数列 $j_1 \dots j_{s_i}$ に対し、 $\mu_{\mathbf{p}}(j_1 \dots j_{s_i}) - \mu(j_1 \dots j_{s_i}) \equiv 0 \pmod{\Delta(j_1 \dots j_{s_i})}$ である。

(ii) 数列 I の長さ k に関する帰納法で示す。 $k = 2$ のとき、定義より $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta(I) = 0$ である。 $k \geq 2$ と仮定する。 $\mathcal{J}_1(I)$ を I からただ一つ項を取り除き残りを巡回置換させて得られる数列全体の集合とする。また、 $\mathcal{J}_{\geq 1}(I)$ を I から一つ以上の項を取り除き残りを巡回置換させて得られる数列全体の集合とする。帰納法の仮定より、任意の数列 $J \in \mathcal{J}_1(I)$ に対し $\Delta_{\mathbf{p}}(J) = \Delta(J)$ である。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{p}}(I) &= \gcd \{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \mid J \in \mathcal{J}_{\geq 1}(I) \} \\ &= \gcd \left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}_1(I)} (\{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \} \cup \{ \mu_{\mathbf{p}}(J') \mid J' \in \mathcal{J}_{\geq 1}(J) \}) \right) \\ &= \gcd \left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}_1(I)} (\{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \} \cup \{ \Delta_{\mathbf{p}}(J) \}) \right) \\ &= \gcd \left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}_1(I)} (\{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \} \cup \{ \Delta(J) \}) \right). \end{aligned}$$

そして、(i) より $\mu_{\mathbf{p}}(J) \equiv \mu(J) \pmod{\Delta(J)}$ であるため、 $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta(I)$ が成り立つ。 \square

定理 2.7 の証明 (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') は基点を含まないウェルデッドライデマイスター移動、図4の局所変形、および図5の二種類の局所変形の有限列で互いに移り合うため、定理2.7は定理2.5と命題3.3から従う。 \square

4. 自己仮想化

自己仮想化とは、図7に示された自己交差を仮想交差に置き換える局所変形である。基点付き仮想絡み目図式のミルナー数と自己仮想化との関係について次が分かる。

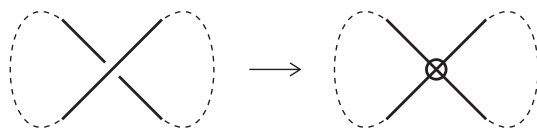


図 7: 自己仮想化

定理 4.1 ([12, Theorem 6.7]) 二つの基点付き仮想絡み目図式 (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') が一回の自己仮想化で移り合うならば、項に重複のない任意の数列 I に対し $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I)$ が成り立つ。

二つのウェルデッド絡み目が自己仮想化同値であるとは、それらの図式がウェルデッドライデマイスター移動と自己仮想化の有限列で互いに移り合うときをいう。定理 2.5, 2.7, および 4.1 を組み合わせることで次が得られる。

定理 4.2 ([12, Theorem 6.1]) 二つのウェルデッド絡み目 L と L' が自己仮想化同値であるならば、項に重複のない任意の数列 I に対し $\bar{\mu}_L(I) = \bar{\mu}_{L'}(I)$ が成り立つ。

注意 4.3 自己交差交換はウェルデッドライデマイスター移動と自己仮想化の有限列で実現される (図8参照)。すなわち、二つのウェルデッド絡み目がリンクホモトピックであるならば、それらは自己仮想化同値である。したがって、定理 4.2 は絡み目の $\bar{\mu}$ 不変量のリンクホモトピー不変性に関する結果 [11, Theorem 8] の一般化となっている。

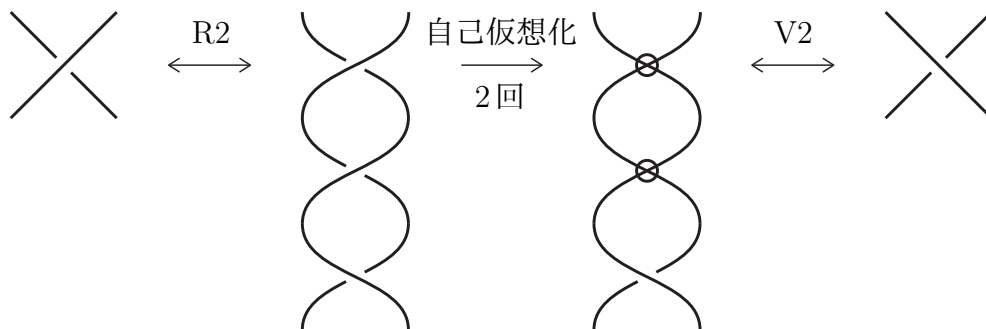


図 8: 自己交差交換の自己仮想化による実現

5. ウェルデッドストリング絡み目のミルナー不変量

単位区間 $[0,1]$ 内に $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$ をみたす n 個の点 x_1, \dots, x_n を選び固定する。また $[0, 1]$ の n 個のコピー $[0, 1]_1, \dots, [0, 1]_n$ を考える。次の条件 (i) と (ii) をみたすはめ込み $f : \bigsqcup_{i=1}^n [0, 1]_i \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ の像を n 成分仮想ストリング絡み目図式という。

(i) 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し、 $\partial f([0, 1]_i) = \{x_i\} \times \{0, 1\}$ である。

(ii) f の多重点は実交差と仮想交差の横断的な2重点のみである。

ウェルデッドライデマイスター移動によって生成される同値関係の下での n 成分仮想ストリング絡み目図式と同値類を n 成分ウェルデッドストリング絡み目という。

S を n 成分仮想ストリング絡み目図式とする。 $[0, 1] \times [0, 1]$ を平面内に入れ、その外側で図9のように、各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し二点 $(x_i, 0)$ と $(x_i, 1)$ をつなぐと仮想絡み目図式が得られる。さらに $(x_i, 0)$ を基点 p_i と見なすことで、基点付き仮想絡み目図式が一意的に得られる。これを (D_S, \mathbf{p}_S) で表す。

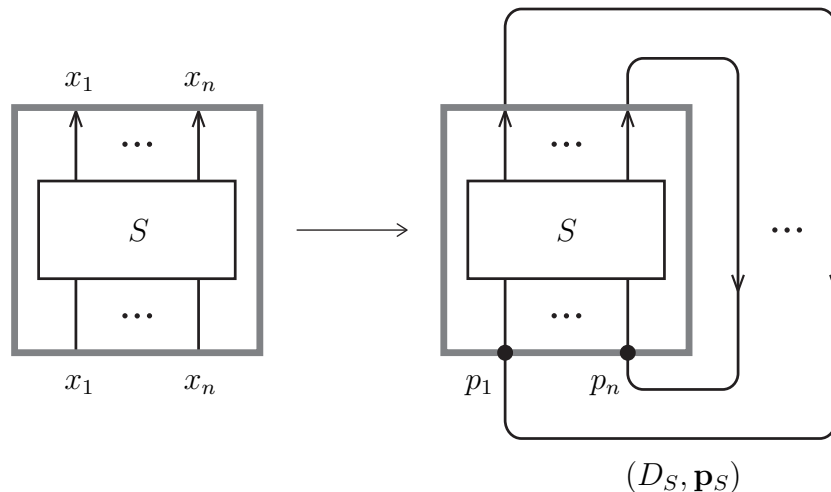


図 9: 仮想ストリング絡み目図式 S から得られる基点付き仮想絡み目図式 (D_S, \mathbf{p}_S)

集合 $\{1, \dots, n\}$ の元を項とする数列 I に対する S のミルナー数を $\mu_{(D_S, \mathbf{p}_S)}(I)$ で定義し、 $\mu_S(I)$ と表す。二つの仮想ストリング絡み目図式 S と S' が同値であるならば、明らかに (D_S, \mathbf{p}_S) と $(D_{S'}, \mathbf{p}_{S'})$ は基点付き同値である。よって定理 2.5 より、ただちに次が得られる。

系 5.1 ([12, Corollary 7.1]) 二つの仮想ストリング絡み目図式 S と S' が同値であるならば、任意の数列 I に対し $\mu_S(I) = \mu_{S'}(I)$ が成り立つ。

この系は次の定義の well-defined 性を保証する。

定義 5.2 σ を n 成分ウェルデッドストリング絡み目とする。集合 $\{1, \dots, n\}$ の元を項とする数列 I に対する σ の μ 不変量とは、ミルナー数 $\mu_S(I)$ のことであり、 $\mu_\sigma(I)$ で表す。ここで、 S は σ の図式である。

注意 5.3 定義 5.2 のウェルデッドストリング絡み目の μ 不変量と、Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1, Definition 5.3] がチューブ写像を用いて定義した μ^w 不変量は同値なものである。

さらに定理 4.1 から次が得られる。

系 5.4 ([12, Corollary 7.2]) 二つのウェルデッドストリング絡み目 σ と σ' が自己仮想化同値であるならば、項に重複のない任意の数列 I に対し $\mu_\sigma(I) = \mu_{\sigma'}(I)$ が成り立つ。

注意 5.5 系 5.4 の逆の主張も成り立つことが知られている [1, 9].

最後に、基点付き仮想絡み目図式の基点付き自己仮想化同値による分類を与える。ここで、二つの基点付き仮想絡み目図式が基点付き自己仮想化同値であるとは、それら

が基点を含まないウェルデッドライデマイスター移動, 図4の局所変形, および自己仮想化の有限列で互いに移り合うときをいう. 定理2.5, 定理4.1, および注意5.5を組み合わせることによって次が得られる.

定理 5.6 二つの基点付き仮想絡み目図式 (D, \mathbf{p}) と (D', \mathbf{p}') が基点付き自己仮想化同値であるための必要十分条件は, 項に重複のない任意の数列 I に対し $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I)$ が成り立つことである.

参考文献

- [1] B. Audoux, P. Bellingeri, J.-B. Meilhan, E. Wagner, *Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **17** (2017), no. 2, 713–761.
- [2] M. Chrisman, *Milnor’s concordance invariants for knots on surfaces*, preprint (2020), arXiv:2002.01505.
- [3] H. A. Dye, L. H. Kauffman, *Virtual homotopy*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 7, 935–960.
- [4] R. Fenn, R. Rimányi, C. Rourke, *The braid-permutation group*, Topology **36** (1997), no. 1, 123–135.
- [5] N. Habegger, X.-S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 389–419.
- [6] Y. Kotorii, *The Milnor $\bar{\mu}$ invariants and nanophrases*, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), no. 2, 1250142, 28 pp.
- [7] O. Kravchenko, M. Polyak, *Diassociative algebras and Milnor’s invariants for tangles*, Lett. Math. Phys. **95** (2011), no. 3, 297–316.
- [8] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Second revised edition, Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [9] J.-B. Meilhan, A. Yasuhara, *Arrow calculus for welded and classical links*, Algebr. Geom. Topol. **19** (2019), no. 1, 397–456.
- [10] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.
- [11] J. Milnor, *Isotopy of links. Algebraic geometry and topology*, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [12] H. A. Miyazawa, K. Wada, A. Yasuhara, *Combinatorial approach to Milnor invariants of welded links*, to appear in Michigan Mathematical Journal, arXiv:2003.13273.
- [13] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), no. 4, 531–542.
- [14] V. Turaev, *Knots and words*, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 84098, 23 pp.
- [15] T. Yajima, *On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space*, J. Math. Osaka City Univ. **13** (1962), 63–71.

結び目に沿った矯飾的手術について

市原 一裕 (日本大学文理学部)*

1. 導入

本稿の目的は、3次元多様体内の結び目に沿った矯飾的手術 (cosmetic surgery)¹に関するこれまでの研究を概観し、その中で主に筆者が関わった [IS18, IJ18, IW19, IIS, IJMS] を中心に解説を行うことである。これらの論文は、筆者と、伊藤哲也氏 (京都大学)、鄭仁大氏 (近畿大学)、Thomas Mattman 氏 (カリフォルニア州立大学チコ校)、斎藤敏夫氏 (上越教育大学)、Zongtao Wu 氏 (香港中文大学) との共同研究に基づく。

以下、全ての多様体は向き付け可能であるとし、一つの向きが与えられているとする。本稿では、向きづけられた多様体 M に対して、逆の向きが与えられた多様体を $-M$ で表す。また、2つの向きづけられた多様体 M, M' に対して、向きを保つ同相写像 $h: M \rightarrow M'$ が存在するとき $M \cong M'$ と表す。従って、向きを逆転する同相写像 $h': M \rightarrow M'$ が存在するとき $M \cong -M'$ と表される。

2. 背景

本節では、結び目に沿った矯飾的手術の研究動機となった「結び目補空間予想」およびその一般化について解説した後、結び目に沿った矯飾的手術の定義を与え、その研究の中心的課題である「矯飾的手術予想」を紹介する。

3次元多様体 M 内の結び目とは、 S^1 から M への埋め込み写像の像と定義される。そして通常、 M 内の2つの結び目 K, K' が同値であるとは、ある M 上の自己同相写像 h が存在して $h(K) = K'$ を満たすことである。従って、1つの多様体内の2つの結び目が同値であるとき、その補空間は同相になる。

1908年に [Ti1908, pp.82] において、Tietze はこの逆が成り立つかという問いを提起した。これが後に長く未解決となった「結び目補空間予想」である。

結び目補空間予想: 3次元球面内 S^3 内の2つの結び目が同相な補空間をもつならば、それらは同値であろう²。

およそ80年後の1989年に、この予想は Gordon と Luecke によって肯定的に証明された [GL89]。ただし実際に証明されたのは次の定理である。

定理 1 ([GL89]). 非自明な結び目に沿った非自明なデーン手術は S^3 を生じない。

ここで、 S^3 内の結び目 K に沿ったデーン手術とは、次の操作である。まず K の開管状近傍を取り除く。ここで得られた境界付き3次元多様体を、その結び目の外部空間 $E(K)$ と呼ぶ。この外部空間 $E(K)$ にソリッド・トーラス $V \cong D^2 \times S^1$ を埋め戻す。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 57M25

キーワード: デーン手術, 矯飾的手術

* 〒156-8550 東京都世田谷区桜上水3-25-40 日本大学文理学部

e-mail: ichihara.kazuhiro@nihon-u.ac.jp

web: <http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/index-j.html>

¹ cosmetic の訳語として筆者は矯飾的を提案している (矯飾: 偽りかざること。うわべをかざること。)

² Tietze は3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内で問うているが、ここではその後の研究に合わせて S^3 内とした。

正確には、 V の境界 ∂V と $E(K)$ の境界 $\partial E(K)$ はトーラスであり同相なので、その同相写像によって ∂V と $\partial E(K)$ を同一視する。

もし結び目補空間予想の反例となる結び目が存在したとすると、その結び目に沿った非自明なデーン手術（脚注を参照）で S^3 が生じる。しかし、Gordon-Luecke の定理より、そのようなことは起こらないので、結び目補空間予想が正しいことが従う。

一方で、ほぼ同時期に、 S^3 内ではなく $S^2 \times S^1$ や S^1 上のトーラス束内の結び目についても、同じことが成り立つことが Gabai によって（余次元1の葉層構造を用いて）示されている [Ga87]。

このようなことから、結び目補空間予想の一般化として、次のことが予想された。

予想：（[Go90, Conjecture 6.2], [Ki97, Problem 1.81(D)]）向きづけられた閉3次元多様体 M 内の2つの結び目 K_1 と K_2 について、もし、 $M - K_1 \cong M - K_2$ ならば、 K_1 と K_2 は同値であろう。

この予想を導くような、デーン手術を用いて表された予想を簡潔に述べるために、次の定義を準備する。

定義 1. 結び目 K での2つの手術スロープ r_1 と r_2 に沿ったデーン手術³が矯飾的 (*cosmetic*) であるとは、得られた2つの閉3次元多様体 $K(r_1)$ と $K(r_2)$ が同相となることをいう。特に、 $K(r_1) \cong K(r_2)$ が成り立つとき純矯飾的 (*purely cosmetic*)、 $K(r_1) \cong -K(r_2)$ が成り立つとき対掌矯飾的 (*chirally cosmetic*) という。

このとき、上の一般化された結び目補空間予想は、次の矯飾的手術予想 (Cosmetic Surgery Conjecture) から導かれる。

矯飾的手術予想：（[Go90, Conjecture 6.1], [Ki97, Problem 1.81(A)]）閉3次元多様体内の結び目 K での2つの手術スロープ r_1 と r_2 に沿ったデーン手術は、 r_1 と r_2 が同値でないならば純矯飾的でないであろう。（つまり $K(r_1) \not\cong K(r_2)$ であろう。）

ここで、結び目外部空間 $E(K)$ の境界上の2つのスロープが同値であるとは、それぞれを代表する単純閉曲線が $E(K)$ の自己同相写像で写りあうことをいう。

この予想は現在でも未解決であるが、いくつかのアプローチにより、近年、大きく研究が進んでいる。以降では、それらについて解説をしていく。

3. 知られている結果

この節では、結び目補空間予想の解決後、およそ2015年頃までの矯飾的手術に関する研究を概観する。

S^3 内の結び目に沿った矯飾的手術の非自明な最初の例は、1990年に Mathieu によって与えられた。

³ デーン手術において、 V 内で円板を張る ∂V 上の単純閉曲線 μ を1つとり、それと貼り合わされる $\partial E(K)$ 上の単純閉曲線 γ を考える。貼り合わせ方を変えても、 μ と貼り合わされる単純閉曲線が γ とイソトピックであれば、得られる閉3次元多様体の同相類は変わらない。そこで、 γ の $\partial E(K)$ 上でのイソトピー類を、そのデーン手術の手術スロープと呼ぶ。一般に2次元トーラス T^2 上の単純閉曲線のイソトピー類をスロープと呼ぶが、それらは $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ の生成系を固定したとき、 $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ でパラメーター付けされる。 S^3 内の結び目でのデーン手術については、通常、 $H_1(\partial E(K))$ の生成系として、 K のメリディアン (K の管状近傍内でディスクをはる単純閉曲線) で代表される元と、 K のロンジチュード (K の外部空間内で向き付け可能な曲面をはる単純閉曲線) で代表される元をとり、 $1/0$ に対応するのがメリディアン、 $0/1$ に対応するのがロンジチュードであるようにする。特に $r = 1/0$ に沿ったデーン手術を自明なデーン手術という。以降、本稿では、手術スロープを有理数で表すことにし、手術スロープ r に沿った K でのデーン手術で得られる多様体を $K(r)$ で表すことにする。

定理 2 ([Math92]). S^3 内の三つ葉結び目 $T_{2,3}$ について⁴, 任意の $k \geq 0$ に対して, $T_{2,3}(\frac{18k+9}{3k+1}) \cong -T_{2,3}(\frac{18k+9}{3k+2})$ が成り立つ。

なお, このスロープ $\frac{18k+9}{3k+1}$ と $\frac{18k+9}{3k+2}$ は同値ではない。このことから, 矯飾的手術予想において, 向きを保つという仮定が外せないことがわかる。

さらに上の例の拡張として, Rong により, レンズ空間⁵以外の閉3次元多様体内の結び目で, 外部空間がザイフェルト多様体⁶であるものについて, 矯飾的手術をもつものの分類が与えられた [Ro93]。この系として, 例えば次のことがわかる ([IIS, Appendix A])。 S^3 内の (r, s) 型のトーラス結び目 $T_{r,s}$ が矯飾的手術をもつのは, $s = 2$ かつ $r \geq 3$ (奇数) のときに限る。このとき, その矯飾的手術は全て対掌的であり, 任意の正の整数 m について, 次が成り立つ。

$$T_{r,s}\left(\frac{2r^2(2m+1)}{r(2m+1)+1}\right) \cong -T_{r,s}\left(\frac{2r^2(2m+1)}{r(2m+1)-1}\right)$$

その後, さらにレンズ空間内の非双曲的結び目に対しては, Matignon により矯飾的手術の完全な分類が与えられている [Mati10]。これらの結果において, 実際には, 純矯飾的手術は存在しなく, そこで与えられた矯飾的手術は全て対掌的であった。

以上は全て, 実は矯飾的手術という用語が明確に導入される以前の結果である。矯飾的手術について, 最初に明確に定義を述べ, その研究の出発点となったのは, 1999 年に出版された論文 [BHW98] である。そこでは, 非自明な矯飾的手術を許容する双曲結び目の初めての具体例が1つ与えられている。それは $S^2 \times S^1$ 内の具体的な1つの結び目として与えられ, 矯飾的手術は対掌的で, 得られた閉3次元多様体はレンズ空間 $L(49, -19) \cong -L(49, -18)$ であった。

一方, 与えられた結び目が矯飾的手術をもつかどうかの判定については, 明確な形で最初に得られたのは, 次の Boyer-Lines の結果だと思われる。

定理 3 ([BL90]). S^3 内の結び目 K に対して $\Delta_K(t)$ を K のアレクサンダー多項式とする。ただし, $\Delta_K(1) = 1$ となるように正規化しておく。このとき, $\Delta_K''(1) \neq 0$ ならば, K は矯飾的手術をもたない。

この定理は, 有理係数ホモロジー球面のキャッソン不変量を計算する手術公式を用いて計算されている。実際, この後から, 3次元多様体の不変量とその手術公式を用いて, 矯飾的手術の非存在を示すことが, 主な手法となった。なお, この $\Delta_K''(1)$ の値は, 結び目 K のコンウェイ多項式の2次の係数 $a_2(K)$ と一致することがよく知られており, 結び目の2次の有限型不変量にもなっている。

21世紀に入り, Ozsváth と Szabó により [OZ04] において導入されたヒーガード・フレア・ホモロジーは, 矯飾的手術の研究にも精力的に応用された。Ozsváth と Szabó 自身によるものも含めて幾つかの結果が得られていたが, ヒーガード・フレア・ホモロジーのみでなく, その他の不変量を組み合わせるとより強い結果が得られることが次第にわかってきた。例えば, まず [Wu11] において Wu が, S^3 内の結び目 K に沿っ

⁴ 三つ葉結び目は, $(2, 3)$ 型のトーラス結び目であるので, このような表記をする。なお, S^3 内に標準的に埋め込まれたトーラス上に描かれる結び目をトーラス結び目という。

⁵ 2つのソリッド・トーラスを貼り合わせて得られる閉3次元多様体。以降, $L(p, q)$ で (p, q) 型のレンズ空間を表す。

⁶ S^1 による葉層構造を許容するコンパクト3次元多様体。

たデーン手術について、その手術スロープが異符号ならば純矯飾的にならないことを、ヒーガード・フレア・ホモロジーとキャッソン不変量を合わせて用いることで示した。

さらに、[NW15]において、3次元多様体のキャッソン-ゴードン不変量も合わせて、次の非常に強い結果が得られた。

定理 4 ([NW15, Theorem 1.2]). S^3 内の結び目 K と異なる手術スロープ r_1, r_2 に対して、もし $K(r_1) \cong K(r_2)$ となるならば、次が成り立つ。(a) $r_1 = -r_2$, (b) $r_1 = p/q$ と表したとき、 $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$, (c) $\tau(K) = 0$ (τ は Ozsváth-Szabó によって定義された τ -不変量)。

ここで、結び目 K が交代的結び目 (交点の上下が交代的に現れる図式をもつ結び目) の場合は、 τ -不変量は、よく知られた結び目の符号数 $\sigma(K)$ と一致することが知られており、比較的容易に計算することができる (4.2 節で説明する)。

4. 得られた結果

4.1. ジョーンズ多項式

本節では、不変量を用いた矯飾的手術の存在の判定について、[IW19] で得られた、結び目のジョーンズ多項式に関する結果を紹介する。参考文献も含め、詳細については [IW19] を参照。

定理 5 ([IW19, Theorem 1.1]). S^3 内の結び目 K に対して $V_K(t)$ を K のジョーンズ多項式とする。このとき、 $V_K''(1) \neq 0$ または $V_K'''(1) \neq 0$ が成り立つならば、 K は矯飾的手術をもたない。

この定理は、定理 3 で用いられた $\Delta_K''(1)$ に対して $V_K''(1) = -3\Delta_K''(1)$ が成り立つことから、定理 3 の 1 つの拡張と見ることができる。さらに、3次元多様体の有限型不変量から見ても、結び目の有限型不変量から見ても、定理 3 の拡張となっている。

定理 5 の証明で用いたのは、Lescop によって定義された λ_2 -不変量と呼ばれる 3次元多様体の不変量である。これは有理ホモロジー球面に対して定義された Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量 Z_n の 2 次のパートに対応する。この Z_n は整ホモロジー球面に対して定義された有限型不変量の普遍不変量となっており、非常に強力な不変量である。なおキャッソン不変量は 1 次の有限型不変量であり Z_1 に対応している。

この λ_2 -不変量の明示的な手術公式は Lescop について、次のように与えられている。 S^3 内の結び目 K での手術スロープ p/q に沿ったデーン手術で得られた多様体 $K(p/q)$ に対して、次が成り立つ。

$$\lambda_2(K(\frac{p}{q})) = (\frac{q}{p})^2 \lambda_2''(K) + (\frac{q}{p}) w_3(K) + c(\frac{q}{p}) a_2(K) + \lambda_2(L(p, q))$$

ここで $\lambda_2''(K)$ と $c(\frac{q}{p})$ は K 及び手術スロープ p/q で決まる定数を表す。本質的なのは、Lescop によって $w_3(K)$ と表された結び目の不変量である。この w_3 について、Lescop は結び目の交差交換に関するスケイン関係式を与えている。そのスケイン関係式と次数 3 以下の有限型不変量の関係式を比較することによって

$$w_3(K) = \frac{1}{72} V_K'''(1) + \frac{1}{24} V_K''(1)$$

が成り立つことを示すことができ、これから定理の証明が従う (最後に定理 4 も使う)。

なお w_3 は結び目の不変量として次数3の有限型不変量であるので、結び目の有限型不変量を用いて定理5を書き換えることもできる ([IW19, Theorem 3.5])。

定理5は3次元多様体の有限型不変量に基づくものであり、定理4などヒーガード・フレア・ホモロジーによる結果とは独立になる。実際、具体的な結び目 9_{44} (よく知られた結び目表を参照) に対しては、デーン手術で得られる多様体 $K(1)$ と $K(-1)$ が同型なヒーガード・フレア・ホモロジーを持つことが知られているが、定理5によってこれらの多様体を区別することができる。

以上の結果は、Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量 Z_n を基にした Lescop の結果によっているが、もう一つの有限型不変量の普遍不変量である LMO 不変量を用いた拡張が、最近、伊藤によって得られている ([It20])。

4.2. 2橋結び目

本節では [IJMS] で得られた2橋結び目に関する以下の結果を紹介する。また一部では、それ以前に開発された [IS18] の手法を用いているので、その解説も含める。参考文献も含め、詳細については [IJMS] を参照。

定理 6 ([IJMS, Theorem 1.1]). S^3 内の2橋結び目は純矯飾的手術をもたない。

さらに同様の手法を用いて、代数的ファイバー結び目、代数的プレッツェル結び目が純矯飾的手術をもたないことも示される ([IJMS, Theorem 1.2])。

ここで2橋結び目とは、 S^3 内の結び目で、極大点・極小点をそれぞれ2点のみもつような図式をもつものである。そのような図式でより見やすく整形したものをコンウェイ図式と言い、有限整数列を用いて表すことができる。この整数列を連分数展開の成分として計算し得られた有理数を用いると、2つのコンウェイ図式が表される2橋結び目が同型かどうかなど、様々な情報を得ることができる。また連分数展開として特に、偶数のみによるものや、各成分の値が正で最後の項が2以上になるものなどを取ることもできる。さらに、このことから2橋結び目は代数的結び目であることもわかる。

さて定理6は、次の Hanselman の結果に大きく依存している。

定理 7 ([Ha, Theorem 2]). S^3 内の結び目 K での異なる手術スロープ r, r' に沿ったデーン手術が純矯飾的ならば次が成り立つ。(i) $\{r, r'\} = \{\pm 2\}$ または $\{\pm 1/q\}$, (ii) $\{r, r'\} = \{\pm 2\}$ のとき $g(K) = 2$, (iii) $\{r, r'\} = \{\pm 1/q\}$ のとき、次が成り立つ。

$$q \leq \frac{th(K) + 2g(K)}{2g(K)(g(K) - 1)}$$

ここで、 $g(K)$ は K の種数 (K が張るザイフェルト曲面の最小種数)、 $th(K)$ はヒーガード・フレア・ホモロジーの厚み (*thickness*) と呼ばれる不変量。

特に、代数的結び目 K については $th(K) = 0$ となるので (iii) より $q = 1$ がわかる。つまり、定理4と合わせると次がわかる。

補題 1. S^3 内の代数的結び目 K での異なる手術スロープ r, r' に沿ったデーン手術が純矯飾的ならば、 $g(K) = 2$, $\sigma(K) = 0$, $\{r, r'\} = \{\pm 1\}$ または $\{\pm 2\}$ 。

以下、上の補題を基に定理6の証明の概略を説明する。

まず、定理 5 の系として [IW19, Corollary 4.5] において、次のことを示してあった。もし種数 2 の 2 橋結び目 K が純矯飾的手術をもつならば、 K に対応する連分数は $[2x, 2y, -2(x+y), 2x]$ である。さらに、 $x > 0$ かつ $y \neq 0$ も成り立つ。これは 2 橋結び目のコンウェイ図式からスケイン関係式により w_3 を計算することで得られる。

そこでこの連分数 $[2x, 2y, -2(x+y), 2x]$ に対応する 2 橋結び目 K を考える。次に補題 1 により、結び目の符号数について $\sigma(K) = 0$ とならなければならない。このことからさらに、 $y < 0$ かつ $(x+y) > 0$ とならなければいけないことがわかる。ここで、交代的結び目の符号数については、Lee と Traczyk により独立に $\sigma(K) = o(D) - y(D) - 1$ という公式が知られているので、これを利用した。この左辺は結び目 K の符号数、右辺はそれぞれ K の交代図式 D から決まる量であるが、ここでは説明を省略する。

以上より、 $[2x, 2y, -2(x+y), 2x]$ ($x > 0, y < 0, (x+y) > 0$) に対応する 2 橋結び目 K を考えれば良い。このとき、全ての成分が正となる連分数展開に書き換えると $[2x-1, 1, -(2y+1), 2(x+y)-1, 1, 2x-1]$ のようになる。

ここで、[IS18] で用いた $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量を利用する。

$SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量とは、非常に大雑把な言い方をすれば、閉 3 次元多様体 Σ に対して、 $\pi_1(\Sigma)$ の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の符号付同値類の個数を与えるものであり、オリジナルのキャッソン不変量の変種として、2001 年に Curtis により導入された。その後、Boden-Curtis によって、2 橋結び目 K に対して、手術スロープ p/q に沿った K でのデー手術で得られた多様体 $K(p/q)$ について、 $\lambda_{SL(2, \mathbb{C})}(K(p/q))$ が total Culler-Shalen セミノルム とほぼ一致することが示されている。このセミノルムは大槻の結果により、 K の境界スロープ (外部空間 $E(K)$ に埋め込まれた本質的曲面の境界で定まるスロープ) の集合から求められることがわかる。さらに、2 橋結び目の境界スロープは Mattman-Maybrun-Robinson によって、全ての成分が正となる連分数展開から計算するアルゴリズムが与えられている。これらを基に [IS18] では、ある 2 橋結び目のクラスでの手術が矯飾的とならないことを示していた (その結果は後に [IW19] で拡張されたので、ここでは省略する)。

ここでは、連分数展開 $[2x-1, 1, -(2y+1), 2(x+y)-1, 1, 2x-1]$ ($x > 0, y < 0, (x+y) > 0$) に対応する 2 橋結び目 K に対して、手術スロープ $\{\pm 1\}$ または $\{\pm 2\}$ に沿ったデー手術で得られる多様体の $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量を具体的に計算することによって、もしその K が純矯飾的手術をもつならば $x = -2y$ とならなければいけないことを示した。実際、 $x = -2y$ の場合には、対応する 2 橋結び目はもろ手型 (amphicheiral)⁷ になり、 $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量は、3 次元多様体とその鏡像で値が一致するので、この場合は利用できない (6 節も参照)。

最後に、 $x = -2y$ として上記の連分数展開を計算すると $[4n, -2n, -2n, 4n]$ ($n > 0$) と書き換えられるので、この連分数展開に対応する 2 橋結び目 K を考える。この K については、[It20] で得られた結果を利用する。そこでは 3 次元多様体の LMO 不変量の次数 3 のパートから、結び目が純矯飾的手術をもつための条件が、4 次と 6 次の結び目の有限型不変量を用いて得られている。あとは上記の連分数展開に対応する K について計算すれば良いが、結局、本質的に残るのは $j_4(K)$ という値であった。これはジョーンズ多項式 $V_K(t)$ で $t = e^h$ として展開した時の 4 次の係数である。この値を計算することによって、最終的に全ての 2 橋結び目が純矯飾的手術をもたないことが証明された。

⁷ S^3 内の結び目 K は、その鏡像と向きを保って同値である時、もろ手型であるという。

5. 最近の結果について

本稿を執筆している現在（2020年9月）までに、前述の Hanselman の結果を基に様々な結び目に対して結果が得られている。現時点では全てプレプリントだと思われるので、arXiv の番号と共に列挙しておく。

- [arXiv:1906.06773] J. Hanselman, Heegaard Floer homology and cosmetic surgeries in S^3 .
- [arXiv:1909.02340] K. Ichihara, I. D. Jong, T. W. Mattman, T. Saito, Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries.
- [arXiv:1909.05048] R. Tao, Connected sums of knots do not admit purely cosmetic surgeries.
- [arXiv:2005.07278] K. Varvarezos, 3-braid knots do not admit purely cosmetic surgeries.
- [arXiv:2005.12795] I. Petkova, B. Wong, Twisted Mazur pattern satellite knots and bordered Floer theory.
- [arXiv:2006.06765] A. I. Stipsicz, Z. Szabó, Purely cosmetic surgeries and pretzel knots.
- [arXiv:2009.00522] B. Boehnke, C. Gillis, H. Liu, S. Xue, The purely cosmetic surgery conjecture is true for the Kinoshita-Terasaka and Conway knot families.

6. 対掌矯飾の手術

この節では、対掌矯飾の手術について [IJ18, IIS] で得られた結果を解説する。

純矯飾の手術については、矯飾の手術予想があり研究の方向性が示されているが、対掌矯飾の手術については、Mathieu の結果 [Math92] などによって、より複雑な状況が起こりうると考えられている。以下では、先に [IIS] によって得られた結果を説明してから、[IJ18] において得られた新しい例について紹介する。

6.1. 種数1の交代的結び目

結び目 K での2つの手術スロープ r_1 と r_2 に沿ったデーモン手術で得られた2つの閉3次元多様体 $K(r_1)$ と $K(r_2)$ について、 $K(r_1) \cong -K(r_2)$ が成り立つとき対掌矯飾的 (chirally cosmetic) というのであった。

単純な例として、もろ手型結び目に沿ったデーモン手術がある。 K を S^3 内のもろ手型結び目とすると、 $\{0, 1/0\}$ を除く任意のスロープ r と $-r$ について、 K の外部空間に向きを逆転する自己同相写像が存在して、スロープ r の代表元を $-r$ の代表元に写す。従って、 r と $-r$ は同値になり、 $K(r) \cong -K(-r)$ が成り立つ。よって、 r と $-r$ に沿ったデーモン手術は対掌矯飾的である。

また一方、3節で紹介したように、 S^3 内のトーラス結び目は非自明な対掌矯飾の手術をもつ。

現時点で知られている S^3 内の結び目に沿った矯飾の手術はこれだけであり、実際、[IIS] において、種数1の交代的結び目については、これで尽きることを示した。

定理 8 ([IIS, Theorem 6.4]). S^3 内の種数1の交代的結び目 K での異なる手術スロープ r, r' に沿ったデーモン手術が対掌矯飾的ならば次のいずれかが成り立つ。(i) K はもろ手型であり $r = -r'$, (ii) K は三つ葉結び目であり r, r' は Mathieu が与えたスロープ。

[IIS]ではまず、キャッソン不変量とキャッソン-ゴードン不変量を用いて、スロープの分母とデデキント和に関する等式を導き、それに有限型不変量の計算を合わせて主に証明をしている。ただし、最後の段階で例外的に残ってしまった結び目については、 $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量とヒーガード・フレア・ホモロジーで得られた結果 (Ozsváth-Szabó, Ni による) を利用した。

この定理から、次の問題が自然に生じる (楽観的過ぎるかもしれないが)。

問題. もろ手型でなくトーラス結び目でもない S^3 内の結び目が対掌矯飾的手術をもつことがあるか?

この問題は現時点でどちらとも言えない。実際, [IJ18]において非自明な対掌矯飾的手術をもつ双曲結び目を構成している (ただし, S^3 内の結び目ではない)。次に, この結果 (例) を紹介する。

6.2. 対掌矯飾的手術をもつ双曲結び目

矯飾的手術という用語を導入し, その研究の出発点となった [BHW98] では, 非自明な矯飾的手術を許容する双曲結び目の初めての具体例が1つ与えられていた。それは $S^2 \times S^1$ 内の具体的な1つの結び目として与えられ, 矯飾的手術は対掌的で, 得られる多様体はレンズ空間 $L(49, -19) \cong -L(49, -18)$ である。その構成は非常に特殊なソリッド・トーラス内の結び目を利用しており, 一般化するのは非常に困難であるように思われていた。実際, [BHW98] では, 次のような予想が述べられている。

予想: ([BHW98, Conjecture 3], [Ki97, Problem 1.81(B)]) 閉3次元双曲多様体を生じるような矯飾的手術をもつ双曲結び目は存在しないだろう。

この予想の反例を与えたのが次の結果である。

定理 9 ([IJ18, Theorem 5.1]). 閉3次元双曲多様体を生じるような矯飾的手術をもつ双曲結び目が存在する。

この矯飾的手術は対掌的であり, 互いに鏡像であるような双曲多様体を生成する。以下, この例の構成方法と, その双曲性などをどのように示したか, 説明する。

まず, 例の記述にはいわゆるモンテシノス・トリックを用いた。モンテシノス・トリックとは, S^3 内の結び目が強可逆的⁸であるとき, それに沿ったデー手術で得られる多様体を2重分岐被覆としてもつような絡み目を構成する方法である。具体的には, 与えられた強可逆的結び目を回転対称性で割って得られる絡み目から, バンド手術によってデー手術後の多様体を2重分岐被覆としてもつ絡み目を構成する。

[BHW98]で構成された例は, デー手術によって表示されていたため, まずその例のモンテシノス・トリックを用いた表示を求めた。その表示を鏡像対称性および回転対称性が「見える」ように変形したのが図1である。

図の左の結び目 K から緑のバンドに沿って切って変形する (バンド手術する) と右の結び目 K' になる。一方で, 中央の水平面に関して K の鏡像をとり $2/3\pi$ 回転すると K' が得られる。つまり, バンド手術によって鏡像が得られる結び目が見つかった。実はこの結び目は, 9_{27} と呼ばれる2橋結び目で, その2重分岐被覆はレンズ空間となる。従って, [BHW98] の例の対掌矯飾的手術で得られる多様体がレンズ空間になるのである。

⁸ 結び目の向きを逆転するような 180° の回転対称性をもつ結び目を, 強可逆的結び目という。

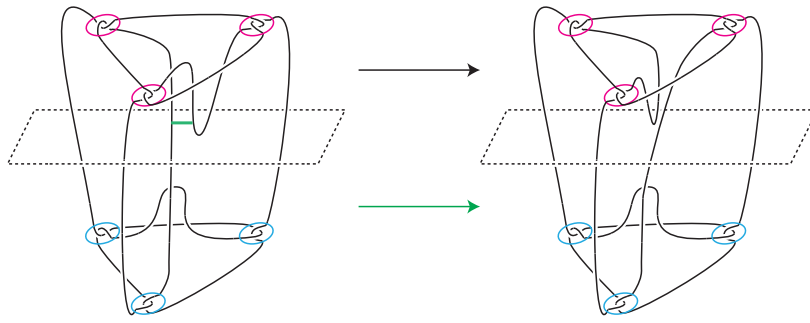


図 1: Bleiler-Hodgson-Weeks の例 (結び目 9_{27})

Bleiler-Hodgson-Weeks の例を図示することができたので、あとは2重分岐被覆が双曲多様体になるようにこの例を一般化すれば良い。実際には、図 1で3角柱上に配置されていた結び目を5角柱状に配置して例を構成した。

図の構成から、得られた結び目が対掌矯飾的手術をもつことは直ちに従う。あとは、その結び目が双曲的であること、得られた多様体が双曲的であること、さらに非自明な例であることを示すために、2つの手術スロープが同値でないことを示す必要がある。

今回は一つでも具体的な例を与えることを目的としたので、これらのことをコンピュータを使ってチェックした。結び目および得られた多様体の双曲性については、以前に [HIKMOT16] で開発したプログラム “hikmot” を利用した。このプログラムは、3次元多様体の理想四面体分割から立てられる貼り合わせ方程式を精度保障付き数値計算を用いて解くことにより、解が見つかった場合には双曲的であることを数学的に保証する。さらに、手術スロープが同値でないことは、hikmot を応用して、正しく解が見つかった場合には3次元多様体の対称性を調べることができる [DHR15] で開発されたプログラムを利用した。これらの計算については、正井秀俊氏による [IJ18] の Appendix を参照して欲しい。

7. 終わりに

現状では、Hanselman の結果 [Ha] がヒーガード・フレア・ホモロジーによるアプローチの一つの到達点とされている（紹介できなかったが Gainullin や Ravenomanana による結果も重要である）。伊藤氏による LMO 不変量によるアプローチ [It20] は非常に強力であり有望であるが、具体的な計算上の難しさが残る。実は最近、双曲幾何を用いたアプローチにも進展があり紹介したかったのだが、紙面の都合上で割愛せざるを得なかった（Jeon による結果や Futer-Purcell-Schleimer による結果）。他にも関連する結果で紹介できなかったものもある（cable knot に関する研究（Ran Tao, 伊藤）、4次元のトポロジーを用いたアプローチ（Lidman））。

本稿では矯飾的手術を研究する動機として、結び目補空間予想およびその一般化から話を始めたが、他に、3次元多様体間の操作としてのデー手術理論の基礎としての位置付けもある。いずれにしても重要性が高く、新たな視点からのアプローチが望まれる。新規に取り組む（若い）研究者の参入を期待したい。

謝辞. 本稿を執筆するにあたって、共同研究者である伊藤哲也氏、斎藤敏夫氏、鄭仁大氏にはご協力をいただきました。この場をお借りして感謝申し上げます。

参考文献

- [BHW98] S. A. Bleiler, C. D. Hodgson and J. R. Weeks, Cosmetic surgery on knots, in *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, 23–34, Geom. Topol. Monogr., 2, Geom. Topol. Publ., Coventry.
- [BL90] S. Boyer and D. Lines, Surgery formulae for Casson’s invariant and extensions to homology lens spaces, *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), 181–220.
- [DHR15] N. M. Dunfield, N. R. Hoffman and J. E. Licata, Asymmetric hyperbolic L -spaces, Heegaard genus, and Dehn filling, *Math. Res. Lett.* **22** (2015), no. 6, 1679–1698.
- [Ga87] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds. II, *J. Differential Geom.* **26** (1987), no. 3, 461–478.
- [Go90] C. McA. Gordon, Dehn surgery on knots, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, 631–642, Math. Soc. Japan, Tokyo.
- [GL89] C. McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 2, 371–415.
- [Ha] J. Hanselman, Heegaard Floer homology and cosmetic surgeries in S^3 , preprint, arXiv:1906.06773
- [HIKMOT16] N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi, and A. Takayasu, Verified Computations for Hyperbolic 3-Manifolds, *Exp. Math.* **25** (2016), no. 1, 66–78.
- [IS18] K. Ichihara and T. Saito, Cosmetic surgery and the $SL(2, \mathbb{C})$ Casson invariant for two-bridge knots, *Hiroshima Math. J.* **48** (2018), no. 1, 21–37.
- [IJ18] K. Ichihara and I. D. Jong, Cosmetic banding on knots and links, *Osaka J. Math.* **55** (2018), no. 4, 731–745.
- [IW19] K. Ichihara and Z. Wu, A note on Jones polynomial and cosmetic surgery, *Comm. Anal. Geom.* **27** (2019), no. 5, 1087–1104.
- [IIS] K. Ichihara, T. Ito and T. Saito, Chirally cosmetic surgeries and Casson invariants, to appear in *Tokyo J. Math.*
- [IJMS] Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries, preprint, arXiv:1909.02340.
- [It20] T. Ito, On LMO invariant constraints for cosmetic surgery and other surgery problems for knots in S^3 , *Comm. Anal. Geom.* **28** (2020), no. 2, 321–349.
- [Ki97] Problems in low-dimensional topology, Edited by Rob Kirby. AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.2, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 35–473, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [Math92] Y. Mathieu, Closed 3-manifolds unchanged by Dehn surgery, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), no. 3, 279–296.
- [Mati10] D. Matignon, On the knot complement problem for non-hyperbolic knots, *Topology Appl.* **157** (2010), no. 12, 1900–1925.
- [NW15] Y. Ni and Z. Wu, Cosmetic surgeries on knots in S^3 , *J. Reine Angew. Math.* **706** (2015), 1–17.
- [OZ04] P. Ozsváth and Z. Szabó, Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds, *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 3, 1027–1158.
- [Ro93] Y. W. Rong, Some knots not determined by their complements, in *Quantum topology*, 339–353, Ser. Knots Everything, 3, World Sci. Publ., River Edge, NJ.
- [Ti1908] H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Monatsh. Math. Phys.* **19** (1908), no. 1, 1–118.
- [Wu11] Z. Wu, Cosmetic surgery in L-space homology spheres, *Geom. Topol.* **15** (2011), no. 2, 1157–1168.

A spectral sequence for cohomology of knot spaces

森谷 駿二 (大阪府立大学)*

1. はじめに

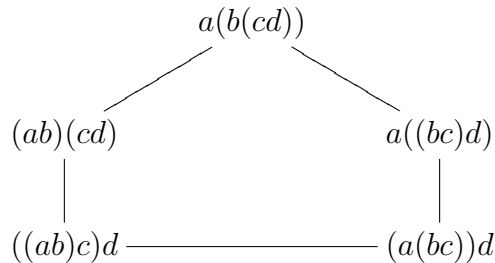
本稿では、近年の Goodwillie-Weiss の埋め込み解析を媒介としたオペラッドと埋め込みの空間の関連についての研究を概観した後、講演者の4次元以上単連結閉可微分多様体の中の結び目のなす空間の特異コホモロジーに関する結果を述べる。第2節および3節では講演の主結果と直接関係ないものも含めてオペラッドの例や近年の研究を紹介する。

2. オペラッド

オペラッドはホモトピーを伴う代数構造を扱うために May によってループ空間の研究で導入されたものである。ホモトピーを伴う代数構造の代表的な例として、基点付きループ空間 $\Omega(X)$ の積がある。

$$\Omega(X) = \{l : [0, 1] \rightarrow X \text{ 連続写像} \mid l(0) = l(1) = *\}$$

とする。ここで、 X は基点付き空間で、 $\Omega(X)$ に適当な位相を入れる。よく知られているようにループをつなぐ積 $a * b$ は厳密には結合的ではないが、ホモトピー $(a * b) * c \simeq a * (b * c)$ が存在する。さらに4つのループの積を考え、ホモトピーを用いてカッコを一つずつ付け替えていくと次のような5角形ができる(以下では簡単のため、 $a * b = ab$ と書く)。



ループ空間を研究する際に、この5角形の内部を埋めるようなホモトピーやさらに“高次の”ホモトピーが必要になる。このような高次のホモトピーを扱う枠組みがオペラッドである。

定義 1 ([18]). オペラッドとは、位相空間の列 $\{\mathcal{O}(n)\}_{n \geq 1}$ で、各 $\mathcal{O}(n)$ への対称群 Σ_n の作用と、部分合成 (partial composition) と呼ばれる写像 $(- \circ_i -) : \mathcal{O}(m) \times \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}(m+n-1)$ ($1 \leq i \leq m$) を伴うもので、次の条件を満たすものである。

1. (結合律) $x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}(l)$ に対して、

$$\begin{aligned}
 x \circ_i (y \circ_j z) &= (x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z & (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \\
 (x \circ_j z) \circ_i y &= (x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z & (1 \leq i < j \leq n)
 \end{aligned}$$

本研究は科研費 (課題番号:17K14192) の助成を受けたものである。

キーワード: 結び目のなす空間, オペラッド

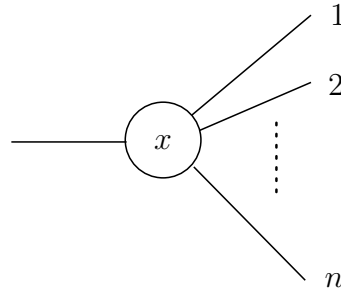
* 〒599-8531 大阪府堺市中区学園町1番1号 大阪府立大学 理学系研究科
e-mail: moriyasy@gmail.com

2. 単位元 $1 \in \mathcal{O}(1)$ があり, $x \in \mathcal{O}(n)$ に対して, $x \circ_i 1 = x, 1 \circ_1 x = x$.

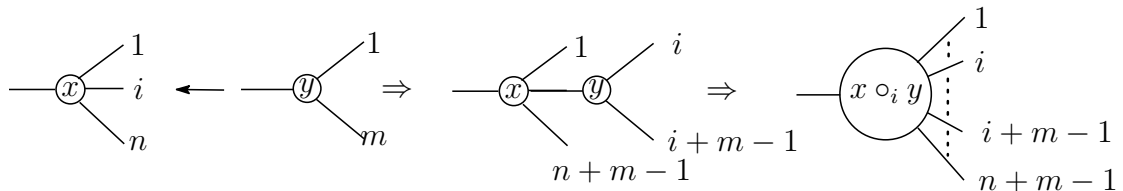
3. Σ_n の作用と部分合成の可換性に関する条件 (詳細略)

以下では, 部分合成のことを単に合成ということがある.

感覚的には $\mathcal{O}(n)$ の元は n 項演算を表す. 合成に関する定義1の結合律の意味は, tree を使うとわかりやすい. $x \in \mathcal{O}(n)$ を次のような n 枚の leaf を持つ tree とみなす.



すると, 部分合成 $(- \circ_i -)$ は次のような tree の結合とみなせる.



定義1の結合律の一つ目の式は, 次のように三つの元の合成の結果が合成を取る順序によらないことを意味する.

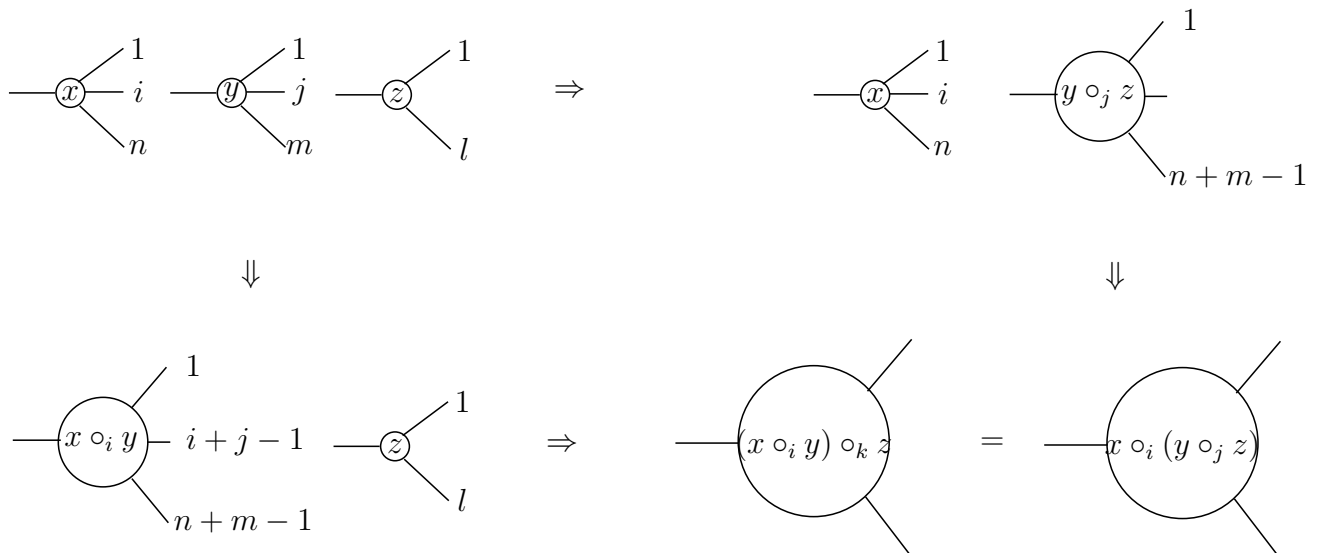


図 1: 結合律 $x \circ_i (y \circ_j z) = (x \circ_i y) \circ_k z$ ($k = i + j - 1$) の解釈

結合律のもう一つの式は x に対して y, z を並列に合成した結果が順序によらないことを意味する. また, 対称群の作用は leaf の番号の付け替えに対応し, 合成との可換性もこの tree を用いて理解できる.

例 2. 上で述べたループの積のホモトピーは associahedral operad \mathcal{K} の一部である。 $\mathcal{K}(1), \mathcal{K}(2)$ は一点, $\mathcal{K}(3)$ は区間 $[0, 1]$, $\mathcal{K}(4)$ は上記の五角形 (内部含む) で, 一般に $\mathcal{K}(n)$ は $n - 2$ 次元の多面体となる. 部分合成はある面への同相写像で与えられる. 例えば, $(- \circ_1 -) : \mathcal{K}(2) \times \mathcal{K}(3) \rightarrow \mathcal{K}(4)$ は面 (辺) $((ab)c)d - (a(bc))d$ に対応する. (ホモトピー $(a'c)d - a'(cd)$ に積 $a' = ab \in \mathcal{K}(2)$ を合成する写像である.) 正確には, この例は対称群の作用を持たない非対称オペラッドの例である.

例 3. k 次元小球体オペラッド (little balls operad または little disks operad) \mathcal{D}_k とは, 次のようにして定まるオペラッドである. D^k を \mathbb{R}^k の 0 を中心とする単位開球とする.

1. $\mathcal{D}_k(n) = \{\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \mid c_i \text{ は } \mathbb{R}^k \text{ の開球で, } c_i \subset D^k, i \neq j \text{ ならば } c_i \cap c_j = \emptyset\}$ とおく. つまり, $\mathcal{D}_k(n)$ は D^k 中の小球の順序付き配置空間である. $\mathcal{D}_k(n)$ は各小球 c_i に対してその中心と半径を対応させることによって $(D^k)^{\times n} \times \mathbb{R}^n$ の相対位相を入れる.
2. $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathcal{D}_k(n) \times \mathcal{D}_k(m)$ に対して, D^k を c_i に全単射に写す, (回転を含まない) 平行移動と相似縮小の合成写像 $\bar{c}_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ を取って, \mathcal{D}_k の部分合成を次のように定める (図 2 参照).

$$\mathbf{c} \circ_i \mathbf{d} = (c_1, \dots, c_{i-1}, \bar{c}_i(d_1), \dots, \bar{c}_i(d_m), c_{i+1}, \dots, c_n)$$

$$(\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n), \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m))$$

3. Σ_n の作用は小球の番号の付け替えで定める.

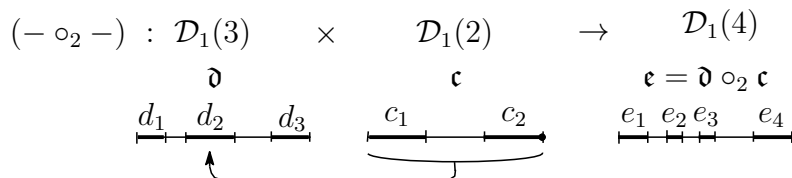


図 2: \mathcal{D}_1 の部分合成

また, 小球体オペラッドの変種として, 球の回転を含めた **枠付き小球体オペラッド** $f\mathcal{D}_k$ も定義できる. 詳細な定義は省略するが, $f\mathcal{D}_k(n) = \mathcal{D}_k(n) \times SO(k)^{\times n}$ で与えられる. 本稿では便宜上, $f\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$ とする.

\mathcal{K} や \mathcal{D}_1 は結合律に関するホモトピーをコントロールするもので, \mathcal{D}_k ($k \geq 2$) は結合律に加え, 可換性に関するある段階までのホモトピーを含むものである. オペラッドは May [18] によって導入され, 元来は多重ループ空間の代数的特徴づけのための概念だった. その後 2000 年ごろに Tamarkin[24] や Kontsevich[14] によって変形量子化との関係で新たに興味もたれ, ホモトピー論以外の人からも注目されるようになったようである. 現在では今回紹介する埋め込みの話題以外にも可微分多様体のモジュライ空間や配置空間の (secondary) homological stability など幾何学的な応用 [11, 16] も見つかっている.

3. Goodwillie-Weiss の埋め込み解析とオペラッド

Goodwillie-Weiss の埋め込み解析は手術理論などのホモトピー論における埋め込みの研究手法を拡張し、体系化したものである。これは次のように埋め込みの空間と多様体の中の球(または円盤)の配置空間を関連付ける。以下、本稿では M, N を可微分多様体とし、その次元をそれぞれ d, e とする。 $\text{Emb}(N, M)$ を N から M への可微分埋め込みのなす空間とする。空間の tower

$$\text{Emb}(N, M) \rightarrow \cdots \rightarrow T_k \text{Emb}(N, M) \rightarrow \cdots \rightarrow T_2 \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_1 \text{Emb}(N, M)$$

を次のように定義する。

$$T_k \text{Emb}(N, M) = \text{holim}_{V \in Ok(N)} \text{Emb}(V, M)$$

ここで、 $Ok(N)$ は D^e の k 個以下の非交和に微分同相な N の開部分多様体のなす包含関係による poset で、 holim は“ホモトピー型の補正を行った(逆)極限”である。 holim の普遍性から、標準的な写像 $\eta_k : \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_k \text{Emb}(N, M)$ が得られる。 Goodwillie-Weiss の収束定理は次のようなものである。

定理 4 ([12]). 標準的な写像 $\eta_k : \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_k \text{Emb}(N, M)$ は $(k(d - e - 2) + 1 - e)$ -連結である。特に、 $d - e \geq 3$ の時、 $\eta_\infty : \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_\infty \text{Emb}(N, M) (= \text{holim}_{k \geq 1} T_k \text{Emb}(N, M))$ は弱ホモトピー同値である。

$\text{Emb}(N, M)$ よりも $T_k \text{Emb}(N, M)$ や $T_\infty \text{Emb}(N, M)$ の方が扱いやすいのでこの定理は有用である。ただし、 $d - e \geq 3$ という条件があるので、この定理が使えるのは余次元が高い(3以上)の場合である。通常の3次元空間の中の(long) knot の場合には定理の弱同値は成り立たない。この場合については註釈 11 を参照のこと。

感覚をつかむために、 T_1, T_2 の具体的なモデルを挙げる。

例 5 ([12]). (1) $T_1 \text{Emb}(N, M)$ は N から M へのはめ込みのなす空間と弱ホモトピー同値である。

(2) $T_2 \text{Emb}(N, M)$ は次の図式のホモトピーファイバー積 F_2 に弱ホモトピー同値である。

$$i\text{vmap}^{\mathbb{Z}/2}(N \times N, M \times M) \rightarrow \text{map}^{\mathbb{Z}/2}(N \times N, M \times M) \leftarrow \text{map}(N, M)$$

ここで、 $N \times N$ などには $(x, y) \mapsto (y, x)$ で $\mathbb{Z}/2$ の作用を入れており、 $\text{map}^{\mathbb{Z}/2}$ は $\mathbb{Z}/2$ -同変な可微分写像、 $i\text{vmap}^{\mathbb{Z}/2}$ は $\mathbb{Z}/2$ -同変で、さらに $f^{-1}(\Delta_M) = \Delta_N$ 、 $Tf_x^{-1}(T_{f(x)}\Delta_M) = T_x\Delta_N$ ($x \in \Delta_M$) となる可微分写像の空間である (T は接空間を表す)。左の写像は自然な包含写像、右の写像は $f \mapsto f \times f$ で与えられる。また、Arone-Szymik[2] は T_2 の F_2 と異なるモデルを考え、knot の空間の位相不変性に応用している。

註釈 6. 埋め込み解析の「解析(calculus)」というのは「微積分」を意味する。 Goodwillie はこの理論の微積分との(形式的な)類似性のため、このように名付けた。例えば、 $T_k \text{Emb}(N, M)$ は N の有限個の開球の poset で決まるので、(有限個の点で決まる)多項式近似の類似物とみなせる。このため $\{T_k \text{Emb}(N, M)\}_{k \geq 0}$ は(Taylor 展開の類似で) Taylor tower と呼ばれる。「埋め込み解析」と呼ぶより、「埋め込みの微積分」と呼んだ方が雰囲気伝わりやすいかもしれない。

次のSinhaによる定理は上記の定理4を $N = S^1$ の場合に扱いやすい形に再構成したものだ。

定理 7 ([22]). 次のような *cosimplicial space* $\mathcal{C}^\bullet\langle[M]\rangle$ が存在する. (以下でこれを *Sinha の cosimplicial model* と呼ぶ.)

1. $\mathcal{C}^n\langle[M]\rangle$ は M における (接ベクトル付き) $n + 1$ 点の順序付き配置空間と同値
2. $d \geq 4$ の時, 弱ホモトピー同値 $\text{holim} \mathcal{C}^\bullet\langle[M]\rangle \simeq \text{Emb}(S^1, M)$ が存在する.

(厳密に言えば, [22] では両端とそこでの接ベクトルが固定された線分の埋め込みについて定理7に相当することが示されている.) さらに, このモデルを \mathbb{R}^d 中の long knot の場合について考えることにより, knot の空間と operad との関係が得られる. ここで, long knot とは埋め込み $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ で $[0, 1]$ の外では固定された直線に一致するもののことである. より正確には, long knot modulo immersion の空間 $\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ を考える. これは, immersion を通しての unknot へのホモトピーが付随する long knot の空間である.

定理 8 ([23]). あるオペラッドの射 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}_d$ があり, 次が成り立つ.

1. $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}_d$ は小球体オペラッドの間の自然な射 $\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_d$ と (適当な意味で) 弱同値である.
2. このオペラッドの射に自然に付随する *cosimplicial space* \mathcal{K}_d^\bullet について, $d \geq 4$ のとき, 弱ホモトピー同値 $\text{holim} \mathcal{K}_d^\bullet \simeq \overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ が成り立つ.

この定理の前には Turchin による Vassiliev のスペクトル系列と Poisson オペラッドの Hochschild cohomology との組み合わせ論的なレベルでの類似性の発見 [25] があった.

定理8の特筆すべき応用として, Lambrechts-Turchin-Volić [17] による Vassiliev のスペクトル系列に関する予想の肯定的解決がある. Vassiliev は long knot の空間 $\text{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ のコホモロジーに関するスペクトル系列を構成した. $d = 3$ のとき, このスペクトル系列の E_∞ -項の対角部分 (次数0の部分) に有名な Vassiliev 不変量 (有限型不変量) が出てくる. Vassiliev はこのスペクトル系列が E_1 項で退化する, 対角部分でいえば, chord 図と Vassiliev 不変量が対応することを予想した. Kontsevich は対角部分についてこの予想を有理係数で証明したが, 他の部分の退化については未解決のままだった. Lambrechts-Turchin-Volić は定理8と小球体オペラッドの formality という性質を用いて有理数係数, $d \geq 4$ の場合にこの Vassiliev の予想を肯定的に解決した.

定理 9 ([17]). long knot のコホモロジーに関する Vassiliev のスペクトル系列は $d \geq 4$, 有理係数の時 E_1 項で退化する.

註釈 10. 埋め込み解析と類似点のある埋め込みの研究手法として, 配置空間積分がある. Cattaneo-Cotta-Ramusino-Longoni [9] は $d \geq 4$ の場合に Kontsevich の指針に沿って配置空間積分を用いてグラフの複体から $\text{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ の deRham 複体へのチェーン写像を構成し, ある部分ではそれがコホモロジーの単射になっていることを示した. この構成はコサイクルの具体的で系統的な表示を与えるという利点がある. 境-渡邊 [21] はこの構成の $\text{Emb}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$ への拡張を与えている. また, [20, 28] など, 埋め込み解析が使いにくく余次元が低い場合でも情報を引き出すことができるようだ.

註釈 11. $d = 3$ の場合の Taylor tower と有限型不変量の関係については, [6, 5, 27] など
で研究されている. 例えば, [27] では任意の実数係数の有限型不変量が $T_\infty \text{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
を通過することを示している.

定理 7, 8 の任意の埋め込みの空間への拡張を述べるために, 次の概念を導入する.

定義 12. オペラッド \mathcal{O} に対して, 右 \mathcal{O} -加群とは, 空間の列 $\{X(n)\}_{n \geq 1}$ で, 各 $X(n)$ へ
の Σ_n への作用と, 部分合成と呼ばれる写像 $(- \circ_i -) : X(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow X(n+m-1)$
を伴うもので, オペラッドと同様の規則を満たすものである. 例えば, $u \in X(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}(l)$ に対して,
 $u \circ_i (y \circ_j z) = (u \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$ である.

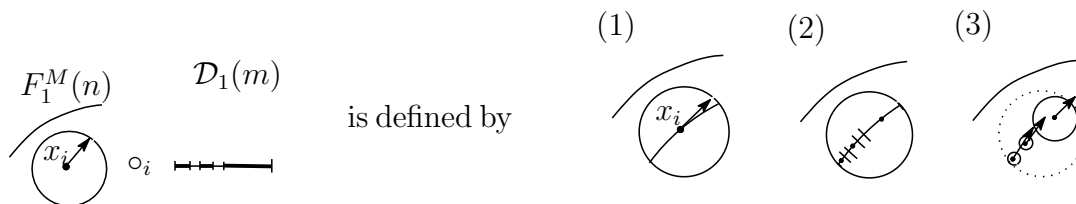
例 13. M に Riemann 計量を固定し, δ を M の単射半径とする.

$$\text{Ball}_n(M) = \{(D_1, \dots, D_n) \mid D_i \text{ は } M \text{ の半径 } \delta \text{ 以下の geodesic disk で } D_i \cap D_j = \emptyset\}$$

と定める. $V_k(M)$ を $x \in M$ 上のファイバーが $T_x M$ の orthonormal k -frame であるよう
なファイバー束とする. $F_k^M(n)$ を次の図式のファイバー積として定める.

$$\text{Ball}_n(M) \xrightarrow{\text{中心}} M^{\times n} \xleftarrow{\text{projection}} V_k(M)^{\times n}$$

$F_k^M = \{F_k^M(n)\}_{n \geq 1}$ は右 $f\mathcal{D}_k$ -加群の構造を持つ. 下図参照.



次の定理が一般的な埋め込みとオペラッド上の加群との関係を与える.

定理 14 ([26, 4]). 次の弱ホモトピー同値が存在する.

$$T_\infty \text{Emb}(N, M) \simeq \mathbb{R} \text{Map}_{\text{Mod-}f\mathcal{D}_e}(F_e^N, F_e^M)$$

ここで, $\text{Map}_{\text{Mod-}f\mathcal{D}_e}$ は右 $f\mathcal{D}_e$ -加群の射全体に適当な位相を入れた空間で, $\mathbb{R} \text{Map}$ は
そのホモトピー型の補正を行ったものを意味する.

例えば, [2] ではこの定理の類似物を用いて, N が \mathbb{R}^e の開部分多様体で余次元が高
い場合は, 特異ホモロジー $H_*(\overline{\text{Emb}}(N, \mathbb{R}^d), \mathbb{Q})$ は N の有理ホモトピー型にしか依存し
ないことを示している.

4. 動機

講演者の主結果は円周 S^1 から 4 次元以上の単連結閉多様体 M への埋め込みの空間
 $\text{Emb}(S^1, M)$ (M 中の結び目の空間) のコホモロジー群に収束するスペクトル系列の構
成とそれに基づく計算である. Sinha の cosimplicial model から即座に Bousfield-Kan
型のスペクトル系列が得られるが, それは E_2 項に一般には計算困難な配置空間のコホ
モロジーが含まれる. 個々の例に対する計算はある程度可能と思われるが, 一般的に,
代数的に計算可能なスペクトル系列を構成したいと思ったのが動機である. また, \mathbb{R}^d
内の long knot や long embedding の研究の拡張の方向として, $\text{Emb}(N, M)$ の M また

は N をユークリッド空間から一般の多様体にすることが考えられるが、 N (定義域) を一般にする方は [2] などによって、少なくとも有理係数ではかなり代数的な話に還元されているようなので、 M を一般にする方が面白そうだったのも動機の一つである。最初は有理係数で考えていたが、そのうちに Campos-Willwacher [8] と Idrissi [13] によって配置空間のオペラッド構造込みの実ホモトピー論のモデルが与えられたため、特色を出すために一般の係数で考えることにした。系 21 など、結果として一般で考えたために上手くいった部分もある。Emb(S^1, M) に関する Goodwillie-Weiss の解析を用いた研究が昨年秋ごろから Arone-Szymik [1], Budney-Gabai [7], Knudsen-Kupers [15] によって発表されており、これらとの関連や long knot の場合の正標数のスペクトル系列への応用など、考えてみたいことが最初思っていたよりは見つかってきている。

5. 主定理

以下で k は可換環とする。 k 係数の特異コホモロジーを $H^*(-)$ で表す。講演者の構成したスペクトル系列は、オイラー標数 $\chi(M)$ を環準同型 $\mathbb{Z} \rightarrow k$ により k の元と見なしたとき、 $\chi(M) = 0$ か $\chi(M) \in k^\times$ の時に E_2 ページのそれぞれ異なった代数的表示 (M のコホモロジーのポアンカレ代数を用いた表示) を持つ。(特に k が体ならば常に代数的表示を持つ。) 以下では $\chi(M) \in k^\times$ の場合のみ述べる。

定義 15. (1) 次元 d のポアンカレ代数 \mathcal{H}^* (または次数付フロベニウス代数) とは、 k -加群として自由で有限生成な次数付き可換代数 \mathcal{H}^* と線形同型写像 $\epsilon: \mathcal{H}^d \rightarrow k$ の組で、合成

$$\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* \xrightarrow{\text{積}} \mathcal{H}^* \xrightarrow{\epsilon} k$$

が線形同型 $\mathcal{H}^* \cong (\mathcal{H}^{d-*})^\vee$ を誘導するものをいう。

(2) \mathcal{H}^* を次元 d のポアンカレ代数とする。 $\{a_i\}_i$ を \mathcal{H}^* の (加群としての) 基底とする。 $(b_{ij})_{ij}$ を $(\epsilon(a_i \cdot a_j))_{ij}$ の逆行列とする。
 \mathcal{H}^* の対角類 $\Delta_{\mathcal{H}}$ を次の式で定義する。

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \sum_{i,j} (-1)^{|a_j|} b_{ji} a_i \otimes a_j.$$

(3) \mathcal{H}^* を次元 d のポアンカレ代数とする。
 $2d - 1$ 次元のポアンカレ代数 $S\mathcal{H}^*$ を次のように定める。

$$S\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^{\leq d-2} \oplus \mathcal{H}^{\geq 2}[d-1]$$

$$a \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

($a \in \mathcal{H}^{\leq d-2}, \bar{b} \in \mathcal{H}^{\geq 2}[d-1]$ は $b \in \mathcal{H}^{\geq 2}$ に対応する元を表す。)

例 16. M に向きが付いていて、 $H^*(M)$ が自由 k -加群の時、 $H^*(M)$ は $\epsilon: \text{基本類} \mapsto 1 \in k$ により、ポアンカレ代数と見なす。

定義 17. simplicial dga $B_n^{**}(\mathcal{H})$ を次のように定める。ここで、simplicial dga とは、面写像 d_i や退化写像 s_i を持つ可換な微分次数付き代数のことである。

- (2重) 次数付き代数として、

$$B_n^{**}(\mathcal{H}) := (S\mathcal{H}^*)^{\otimes n+1} \otimes \bigwedge \{h_{ij}, g_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq n\} / \mathcal{J}$$

($\deg g_{ij} = (-1, \mathbf{d})$, $\deg h_{ij} = (-1, 2\mathbf{d} - 1)$). イデアール \mathcal{J} は次の関係式で生成される.

$$\begin{aligned} g_{ij}^2 = h_{ij}^2 = 0, \quad h_{ii} = g_{ii} = 0, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad h_{ij} = -h_{ji} \\ (e_i a - e_j a) g_{ij} = 0, \quad (e_i a - e_j a) h_{ij} = 0 \quad (a \in S\mathcal{H}^*), \\ \text{3-term relations for } g_{ij} \text{ and for } h_{ij}, \quad (h_{ij} + h_{ki}) g_{jk} = (h_{ij} + h_{jk}) g_{ik} \end{aligned}$$

ここで, 3-term relation for g_{ij} とは, $g_{ij}g_{jk} + g_{jk}g_{ki} + g_{ki}g_{ij} = 0$ ($0 \leq i, j, k, \leq n$) のことで, h_{ij} についても同様.

- 微分は次式で定める. $\partial a = 0$ ($a \in S\mathcal{H}^{\otimes n+1}$), $\partial(g_{ij}) = f_{ij}\Delta_{\mathcal{H}}$, $\partial(h_{ij}) = f_{ij}\Delta_{S\mathcal{H}}$.
ここで, $f_{ij}: H \otimes H \rightarrow H^{\otimes n+1}$ は第 i と j 成分への挿入である.
- 面写像 $d_i: B_n^{**}(\mathcal{H}) \rightarrow A_{n-1}^{**}(\mathcal{H})$ ($0 \leq i \leq n$) は次式で定める.

$$d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & (0 \leq i \leq n-1) \\ \pm a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} & (i = n) \end{cases} \quad (a_i \in S\mathcal{H}),$$

$$d_i(g_{j,k}) = g_{j',k'}, \quad d_i(h_{j,k}) = h_{j',k'}. \quad \text{ここで, } j' = \begin{cases} j & (j \leq i) \\ j-1 & (j > i) \end{cases}, \quad k' \text{ も同様である.}$$

- 退化写像 $s_i: B_n^{**}(\mathcal{H}) \rightarrow B_{n+1}^{**}(\mathcal{H})$ は $S\mathcal{H}^{\otimes n+2}$ の第 i 成分への 1 の挿入と, g_{jk} , h_{jk} の添え字 $i+1$ のスキップで定める.

$B_{\bullet}^{**}(\mathcal{H})$ をもとからある微分 ∂ と $\Sigma_i(-1)^i d_i$ によって 2 重複体とみなし, その全コホモロジーを $H(B_{\bullet}^{**}(\mathcal{H}))$ とする. 次が本稿の主定理である.

定理 18 ([19]). M を単連結閉多様体とし, 次元は $\mathbf{d} \geq 4$ とする. $\mathcal{H}^* = H^*(M)$ とおき, \mathcal{H}^* は自由 \mathbf{k} -加群で, $\chi(M) \in \mathbf{k}^\times$ と仮定する. この時, 次のようなスペクトル系列 $\{\check{\mathbb{E}}_r^{p,q}\}$ が存在する.

$$\check{\mathbb{E}}_2^{p,q} \cong H(B_{\bullet}^{**}(\mathcal{H})) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Emb}(S^1, M)),$$

次数は $p = *$, $q = * - \bullet$ で与えられる.

この証明には定理 7 の cosimplicial model と例 13 の右 \mathcal{D}_1 -加群 F_1^M を用いる. 上記のスペクトル系列を Čech スペクトル系列と呼ぶことにする.

6. 計算例

この節では定理 18 またはその $\chi(M) = 0$ の場合の類似物に基づいた計算を紹介する.

6.1. M が球面の直積の場合

系 19. \mathbf{k} を \mathbb{Z} または \mathbb{F}_p (p 素数) とする. k を奇数, l を偶数とし, 条件 $(k+5 \leq l \leq 2k-3$ かつ $|3k-2l| \geq 2)$ または $(l+5 \leq k \leq 2l-3$ かつ $|3l-2k| \geq 2)$ を満たすとする. $H^* := H^*(\text{Emb}(S^1, S^k \times S^l))$ とおくと, 次のが成り立つ

1. 同型 $H^i = \mathbf{k}$ ($i = k-1, k, 2k-2, 2k-1, k+l$).

2. もし $k = \mathbb{F}_p$ で $p \neq 2$ ならば, 同型

$$H^i = k^2 \quad (i = k + l - 2, k + l - 1, 2k + l - 3, 2k + l - 2, 2k + l - 1).$$

系 20. $2 \in k^\times$ とする. k, l を二つの偶数とし, $k + 2 \leq l \leq 2k - 2$ かつ $|3k - 2l| \geq 2$ が成り立つとする. $H^* := H^*(\text{Emb}(S^1, S^k \times S^l))$ とおくと, 次の同型が成り立つ.

$$H^i = k \quad (i = k - 1, k, l - 1, l, k + l - 3, k + l - 2, k + l - 1, 3k).$$

他の次数 $i \leq 2k + l$ については, $H^i = 0$. □

6.2. M が 4 次元の場合

$\text{Imm}(S^1, M)$ をはめ込み $S^1 \rightarrow M$ のなす空間とする. Arone-Szymik[1] は次の問題を提起した.

問題: 包含写像 $i_M : \text{Emb}(S^1, M) \rightarrow \text{Imm}(S^1, M)$ が π_1 で非自明なカーネルを持つような単連結な 4 次元多様体は存在するか?

(正確には彼らは “It would be interesting to see a calculation showing an example of a simply-connected 4-manifold N for which the map $\text{Emb}(S^1, N) \rightarrow \text{Imm}(S^1, N)$ has a non-trivial kernel on π_1 ” と述べている. また, N が非単連結の場合には彼らの結果や Budney-Gabai[7] によって $N = S^1 \times S^3$ の場合に大きな核を持つことが知られている.) 定理 18 を用いて, 次のようにこの問題の範囲を狭めることができた.

系 21. M を単連結四次元閉多様体とする. $H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ とし, $H_2(M; \mathbb{F}_2)$ 上の交叉形式を表す行列は対角成分のうち少なくとも一つは 0 ではない逆行列を持つとする. このとき, 包含写像 i_M は基本群の同型を誘導する. 特に, $\pi_1(\text{Emb}(S^1, M)) \cong H_2(M; \mathbb{Z})$ である.

例えば, $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は系 21 の条件を満たし, $M = S^2 \times S^2$ は条件を満たさない. また, この系の仮定を満たさない場合については, $H_2(M) = 0$ の場合には, Arone-Szymik によって $\text{Emb}(S^1, M)$ が単連結であることが示されており, 対角成分がすべて 0 の場合は講演者の知る限り未解決である.

7. ポアンカレ双対性と積

この節では定理 18 のスペクトル系列の構成のアイデアを説明する. 主なアイデアは Sinha の cosimplicial model と Bendersky-Gitler[3] のスペクトル系列の構成を組み合わせることである. Bendersky-Gitler はポアンカレ-レフシェッツ双対性 $H^*(C_n(M)) \cong H_*(M^{\times n}, \cup_{i,j} \Delta_{ij})$ と被覆 $\{\Delta_{ij}\}_{ij}$ に関する Čech 複体を用いてスペクトル系列を構成した. ここで, $\Delta_{ij} = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^{\times n} \mid x_i = x_j\}$ である. Bendersky-Gitler の構成を Sinha の cosimplicial model に組み込む際に本質的には次のような問題を考えることになる.

問題：次の図式を可換にするような，“幾何学的な描写を持つ”，チェインレベルの結合的な交叉積 $I : C_*(M) \otimes C_*(M) \rightarrow C_*(M)$ は存在するか？

$$\begin{array}{ccc} C^*(M) \otimes C^*(M) & \xrightarrow{P.D.} & C_*(M) \otimes C_*(M) \\ \downarrow \cup & & \downarrow I \\ C^*(M) & \xrightarrow{P.D.} & C_*(M) \end{array}$$

ここでは $P.D$ は基本類によるキャップ積， \cup はカップ積を表す．講演者は(高次のホモトピーを許しても)このような交叉積を知らない．管状近傍の Thom 類と切除同型を使ってホモロジーでは交叉積が定義できるが，その構成をチェインレベルに持ち上げて上記のような可換性を満たす積を定義するのは困難である．この問題に関してストリング・トポロジーにおけるある構成が解決策となった．Cohen[10] はループ積と Hochschild cohomology の積の同型を構成する際に，(安定ホモトピーの意味での) スペクトラの圏における上記のような交叉積の代替物を構成していた．これを応用することでスペクトル系列を構成した．上記のような交叉積の存在が問題になることはこれまであまりなかったと思われるが，Campos-Willwacher[8] や Idrissi[13] による配置空間の実代数的モデルにおいてもポアンカレ dg 代数や cyclic C_∞ -代数というチェインレベルの積と双対性を両立させるためのモデルが用いられており，配置空間の研究には双対性の乗法的性質がかかわってくるのかもしれない．また，この構成の過程で例 13 の右 D_1 -加群 F_1^M を用いた．Cohen の構成を適用するにあたり，cosimplicial space では上手くいかない部分があり，より柔軟な枠組みとして右加群が必要になったためである．

8. 展望

今後はこのスペクトル系列への作用素の付加や， M が非単連結な場合のスペクトル系列の持つ情報の研究，同様のアイデアを用いた任意係数の Vassiliev スペクトル系列の研究を行う予定である．また，この研究の過程で配置空間のスペクトラを用いたモデルが得られたが，このモデルについても研究する．

参考文献

- [1] G. Arone, M. Szymik, *Spaces of knotted circles and exotic smooth structures*, preprint, arXiv:1909.00978 (2019).
- [2] G. Arone, Gregory, V. Turchin, *On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots*, *Geom. Top.* **18** (2014), no.3, 1261-1322.
- [3] M. Bendersky, S. Gitler, *The cohomology of certain function spaces*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **326** (1991), no. 1, 423-440.
- [4] P. Boavida de Brito, M. Weiss. *Manifold calculus and homotopy sheaves*, *Homology, Homotopy Appl.* **15** (2013), no.2, 361-383.
- [5] P. B. de Brito, G. Horel, *Galois symmetries of knot spaces*, preprint, arXiv:2002.01470 (2020).
- [6] R. Budney, R. Koytcheff, D. Sinha, *Embedding calculus knot invariants are of finite type*, *Algebr. Geom. Topol.* **17** (2017), no. 3, 1701-1742.
- [7] R. Budney, D. Gabai. *Knotted 3-balls in S^4* , preprint, arXiv:1912.09029 (2019).
- [8] R. Campos, T. Willwacher, *A model for configuration spaces of points*, preprint, arXiv:1604.02043 (2016).

- [9] A. S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimension*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 949–1000.
- [10] R. L. Cohen, *Multiplicative properties of Atiyah duality*, *Homology Homotopy Appl.* **6** (2004), no. 1, 269–281.
- [11] G. Galatius, A. Kupers, and O. Randal-Williams, *E_2 -cells and mapping class groups*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **130** (2019), 1–61.
- [12] T. G. Goodwillie, M. S. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory*, Part II, *Geometry and Topology* **3** (1999), 103–118.
- [13] N. Idrissi, *The Lambrechts-Stanley model of configuration spaces*, *Invent. Math.* **216** (2019) no.1, 1–68.
- [14] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Moshé Flato (1937–1998). *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), no. 1, 35–72.
- [15] B. Knudsen, A. Kupers, *Embedding calculus and smooth structures*, preprint, arXiv:2006.03109 (2020).
- [16] M. Krannich, *Homological stability of topological moduli spaces*, *Geom. Topol.* **23** (2019), no. 5, 2397–2474.
- [17] P. Lambrechts, V. Turchin, I. Volić, *The rational homology of spaces of long knots in codimension >2* , *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 4, 2151–2187.
- [18] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, *Lectures Notes in Mathematics*, **271**. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1972), viii+175 pp.
- [19] S. Moriya, *Models for knot spaces and Atiyah duality*, preprint, arXiv:2003.03815 (2020).
- [20] K. Sakai, *An integral expression of the first nontrivial one-cocycle of the space of long knots in \mathbb{R}^3* , *Pacific J. Math.* **250** (2011), no. 2, 407–419.
- [21] K. Sakai, T. Watanabe, *1-loop graphs and configuration space integral for embedding spaces*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **152** (2012), no. 3, 497–533.
- [22] D. P. Sinha, *The topology of spaces of knots: cosimplicial models*, *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 4, 945–980.
- [23] D. P. Sinha, *Operads and knot spaces*, *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006) no.2 461–486.
- [24] D. E. Tamarkin, *Formality of chain operad of little discs*, *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), no. 1–2, 65–72.
- [25] V. Turchin (Tourchine), *On the homology of the spaces of long knots*, *Advances in topological quantum field theory*, 23–52, *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, 179, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [26] V. Turchin, *Context-free manifold calculus and the Fulton-MacPherson operad*, *Algebr. Geom. Topol.* **13** (2013), no. 3, 1243–1271.
- [27] I. Volić, *Finite type knot invariants and the calculus of functors*, *Compos. Math.* **142** (2006), no. 1, 222–250.
- [28] T. Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$* , preprint, arXiv:1812.02448 (2018).

Characteristic classes of manifold bundles and graph homology

Alexander Berglund (Stockholm University)*

1. Background

In recent joint work with Ib Madsen [3], we found a surprising connection between differential topology of high dimensional manifolds and automorphisms of free groups. Namely, we found that the stable rational cohomology,

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(B\widetilde{\text{Diff}}_D(W_g); \mathbb{Q}),$$

of the block diffeomorphism group of the $2n$ -manifold ($2n \geq 6$)

$$W_g = \#S^n \times S^n,$$

relative to an embedded disk $D = D^{2n} \subset W_g$, could be computed in terms of the homology of automorphism groups of free groups. The connection is relayed by a certain graph complex, a version of which is described below.

In principle, this means that classes in the homology of automorphism groups of free groups, or equivalently graph homology classes, give rise to characteristic classes of block bundles with fiber W_g , relative to a disk. However, the computation in [3] does not yield a workable definition of such characteristic classes and it does not show whether similar classes can be defined for manifolds other than W_g .

The overall goal of the work presented here is to solve these problems: We introduce new families of rational characteristic classes of M -bundles associated to graph homology classes, defined for arbitrary simply connected closed oriented manifolds M . When specialized to W_g , the new classes lead to a better understanding of the computation of [3]. In particular, we are able to solve the main conjecture of [3] about the relation to the generalized Miller-Morita-Mumford classes.

1.1. The graph complex

The graph complex we study will be denoted \mathbf{F}^m and is defined as a certain twisted Feynman transform of the Lie operad, in the sense of Getzler-Kapranov [5]. More concretely, \mathbf{F}^m is a direct sum of finite dimensional chain complexes $\mathbf{F}^m((g, n))$ that may be described as follows. Let $\mathbf{F}^m((g, n))^i$ be the vector space over \mathbb{Q} spanned by connected graphs G with

- $\dim H_1(G) = g$,
- n univalent external vertices, or ‘hairs’, labeled $1, \dots, n$,
- i internal vertices of valence ≥ 3 , each equipped with a cyclic order of its adjacent half-edges,

This document is, up to minor changes, identical to the extended abstract for an invited talk at the Autumn Meeting of the Mathematical Society of Japan 2020 (Topology Section).

The work was supported by the Swedish Research Council through grant no. 2015-03991.

2000 Mathematics Subject Classification: 18G85, 55P62, 57R20.

Keywords: Graph complexes, characteristic classes, rational homotopy theory.

* e-mail: alexb@math.su.se

- an orientation of the vertices and an orientation of each edge. If m is odd, then add an orientation of $H_1(G)$.

We furthermore impose certain ‘shuffle relations’ locally at each internal vertex, but we omit the details here. There is a differential $\partial: \mathbf{F}^m((g, n))^i \rightarrow \mathbf{F}^m((g, n))^{i+1}$ given by ‘edge expansions’, e.g.,

This yields a finite cochain complex,

$$\mathbf{F}^m((g, n))^1 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathbf{F}^m((g, n))^{2g+n-2}.$$

We regrade it in order to view it as a chain complex:

$$\mathbf{F}^m((g, n))_{2g+n-3} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathbf{F}^m((g, n))_0.$$

The homology of this graph complex turns out to be expressible in terms of the homology of automorphism groups of free groups. To state this more precisely, let $A_{g,n}$ denote the discrete group of homotopy classes of homotopy self-equivalences of a bouquet of g circles, relative to n marked points. Then

$$A_{g,0} \cong \text{Out}(F_g), \quad A_{g,1} \cong \text{Aut}(F_g), \quad A_{g,n} \cong \text{Aut}(F_g) \times F_g^{n-1},$$

where F_g is the free group on g generators. The following can be deduced from results of Kontsevich [8, 9] and Conant-Kassabov-Vogtmann [4].

Theorem 1.1 (Kontsevich, Conant-Kassabov-Vogtmann). *Suppose m is even. For all $g + n \geq 2$ and all k ,*

$$H_k(\mathbf{F}^m((g, n))) \cong H_k(A_{g,n}; \mathbb{Q}).$$

The homology groups $H_k(A_{g,n}; \mathbb{Q})$ have been studied extensively, but they remain largely unknown.

1.2. TM -fibrations

Let M be a closed oriented manifold with tangent bundle TM . The new characteristic classes will be defined not only for smooth M -bundles but for a generalization that we call TM -fibrations [2].

Definition 1.2. A TM -fibration over a space B consists of

- a fibration $M \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, and
- an oriented vector bundle $T_\pi E$ over the total space E such that $T_\pi E|_{\pi^{-1}(b)} \sim TM$ for every $b \in B$.

Every smooth oriented M -bundle (i.e., fiber bundle $\pi: E \rightarrow B$ with fiber M and structure group $\text{Diff}^+(M)$) gives rise to a TM -fibration by letting $T_\pi E$ be the fiberwise tangent bundle. One can also show that block bundles give rise to $T^s M$ -fibrations, where $T^s M$ is the stable tangent bundle. We remark that not every TM -fibration comes from a smooth bundle.

1.3. Characteristic classes

A characteristic class λ of TM -fibrations is the association of a cohomology class

$$\lambda(\pi) \in H^*(B)$$

to each TM -fibration $M \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, such that

$$f^*(\lambda(\pi)) = \lambda(f^*(\pi)) \in H^*(B')$$

for every map $f: B' \rightarrow B$. By specialization, every characteristic class of TM -fibrations gives rise to a characteristic class of smooth M -bundles.

The well-known Miller-Morita-Mumford classes, originally defined and studied for surface bundles, may be generalized to give characteristic classes of TM -fibrations, one class κ_c for each $c \in H^*(BSO(m))$, defined by

$$\kappa_c(\pi) := \int_M c(T_\pi E) \in H^{*-m}(B).$$

2. Results

The following gives more precise statements of our main results. These will appear in forthcoming work [1].

2.1. Characteristic classes associated to graph homology classes

Theorem 2.1. *Let M be a simply connected closed oriented m -manifold. For every graph homology class $\alpha \in H_k(\mathbb{F}^m((g, n)))$, there is a family κ^α of rational characteristic classes of TM -fibrations $M \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ of simply connected spaces, one class*

$$\kappa_{c_1, \dots, c_n}^\alpha(\pi) \in H^*(B; \mathbb{Q})$$

for every n -tuple $c_1, \dots, c_n \in H^*(BSO(m); \mathbb{Q})$.

The cohomological degree is given by

$$|\kappa_{c_1, \dots, c_n}^\alpha(\pi)| = |c_1| + \dots + |c_n| - k + m(g - 1).$$

Remark 2.2. The characteristic classes κ^α associated to ‘vacuum’ graph classes, $\alpha \in H_k(\mathbb{F}((g, 0)))$, are defined for arbitrary fibrations with fiber M (no bundle over the total space is required). In this case, we recover classes introduced by Matsuyuki [10].

2.2. Detection theorem

A natural question is whether the new classes are non-trivial. We have the following detection result.

Theorem 2.3. *Let $m \geq 4$ be even. If the graph homology class $\alpha \in H_k(\mathbb{F}^m((g, n)))$ is non-zero, then the family κ^α is non-trivial, i.e., there exists a simply connected m -manifold M , a TM -fibration of simply connected spaces, $\pi: E \rightarrow B$, and cohomology classes $c_1, \dots, c_n \in H^*(BSO(m))$, such that*

$$\kappa_{c_1, \dots, c_n}^\alpha(\pi) \neq 0 \in H^*(B; \mathbb{Q}).$$

The case m odd is work in progress. It is an open problem to decide whether graph homology classes α can be detected by evaluating the characteristic classes $\kappa_{c_1, \dots, c_n}^\alpha$ on smooth manifold bundles, rather than on TM -fibrations.

2.3. Zero dimensional graph homology and Miller-Morita-Mumford classes

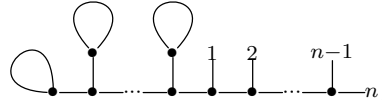
It will be clear from the construction that if $1 \in \mathbf{F}^m((0, 1)) \cong \mathbb{Q}$ denotes a generator, then we recover the generalized Miller-Morita-Mumford class,

$$\kappa_c^1 = \kappa_c.$$

More generally, we have the following. For m even,

$$H_0(\mathbf{F}^m((g, n))) \cong H_0(A_{g,n}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q},$$

and a generator $\epsilon_{g,n}$ may be taken to be the class of the graph



Theorem 2.4. *We have that*

$$\kappa_{c_1, \dots, c_n}^{\epsilon_{g,n}} = \kappa_{e^g c_1 \dots c_n},$$

where e is the fiberwise Euler class of [6].

By applying the above result to the $T^s W_g$ -fibration associated to the universal block bundle over a suitable cover of $\widetilde{BDiff}_D(W_g)$, and by tracing the new classes through the computation in [3], we are able to solve Conjecture 1.11 of [3].

Our approach is algebraic. To define the new classes and prove our results, we use rational homotopy theory. In particular, we develop a theory of relative C_∞ -algebra models for fibrations. We comment that some of our techniques are similar to techniques used by Kajiuura, Matsuyuki and Terashima [7].

References

- [1] A. Berglund, *Characteristic classes of manifold bundles and graph homology*, in preparation.
- [2] A. Berglund, *Rational models for automorphisms of fiber bundles*. Doc. Math. **25** (2020), 239–265.
- [3] A. Berglund, I. Madsen, *Rational homotopy theory of automorphisms of manifolds*. Acta Math. **224** (2020), 67–185.
- [4] J. Conant, M. Kassabov, K. Vogtmann, *Hairy graphs and the unstable homology of $\text{Mod}(g, s)$, $\text{Out}(F_n)$ and $\text{Aut}(F_n)$* . J. Topol. **6** (2013), no. 1, 119–153.
- [5] E. Getzler, M. M. Kapranov, *Modular operads*. Compositio Math. **110** (1998), no. 1, 65–126.
- [6] F. Hebestreit, M. Land, W. Lück, O. Randal-Williams, *A vanishing theorem for tautological classes of aspherical manifolds*. To appear in Geometry & Topology.
- [7] H. Kajiuura, T. Matsuyuki, Y. Terashima, *Homotopy theory of C_∞ -algebras and characteristic classes of fiber bundles*. Preprint, arXiv:1605.07904 [math.GT]
- [8] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*. First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 97–121, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [9] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*. The Gelfand Mathematical Seminars, 1990–1992, 173–187, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [10] T. Matsuyuki, *Double graph complex and characteristic classes of fibrations*. Pacific J. Math. **301** (2019), no. 2, 547–574.

COBORDISM THEORY OF MORSE FUNCTIONS AND APPLICATIONS

DOMINIK J. WRAZIDLO (KYUSHU UNIVERSITY)

ABSTRACT. This is a survey talk on recent developments in the cobordism theory of Morse functions. We present results on the computation of several cobordism groups of Morse functions of compact manifolds possibly with boundary.

1. INTRODUCTION

We are concerned with differentiable¹ maps between differentiable manifolds. Cobordism groups of differentiable maps with prescribed singularities are generally studied by means of stable homotopy theory (see e.g. the works of Rimányi and Szűcs [13], Ando [1], Kalmár [10], Sadykov [14], and Szűcs [19]). Historically, the topic was pioneered in the middle of the 20th century by René Thom [20], who applied the Pontryagin-Thom construction to study embeddings of manifolds into Euclidean spaces up to cobordism. In doing so, Thom reduced the study of cobordism groups of closed differentiable manifolds to the computation of homotopy groups of certain spaces. In the sequel, the structures of the n -dimensional oriented cobordism group Ω_n^{SO} and its unoriented version Ω_n^O have been completely determined by several authors. It remains an interesting problem to study cobordism theory of differentiable maps with concrete prescribed types of singularities.

In this short note, we shall focus on cobordism theory of Morse functions. Recall that Morse functions of closed differentiable manifolds are real valued differentiable functions whose critical points are all nondegenerate. We point out that Morse theory is a fundamental tool in the study of differentiable manifolds, for example by virtue of Smale's h -cobordism theorem. Thus, when studying Morse functions up to suitable notions of cobordism, we expect that we can still detect important information about algebraic topology and differential topology of manifolds.

Cobordism groups of various types of Morse functions have been studied by several authors by applying explicit methods of global singularity theory of differentiable maps. For instance, Ikegami [4] used Levine's cusp elimination technique to compute cobordism groups of Morse functions on closed manifolds (this generalized results of Ikegami-Saeki [5] and Kalmár [9]). An application of Ikegami's techniques to the construction of topological invariants of generic differentiable map germs was found by Ikegami and Saeki [6]. Saeki and Yamamoto [17, 18] studied Morse functions on compact surfaces with boundary up

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP18F18752 and a JSPS International Postdoctoral Fellowship.

¹In this note, "differentiable" always means differentiable of class C^∞ .

to so-called admissible cobordism by using the cohomology of the universal complex of singular fibers in [17], as well as a combinatorial argument based on labeled Reeb graphs in [18]. By using similar techniques, Yamamoto [26] studied versions of these cobordism groups without cusps. Saeki [15] applied the technique of Stein factorization and Cerf’s pseudoisotopy theorem to study cobordism groups of so-called special generic functions, i.e., Morse functions with only maxima and minima as their critical points. In [22], the author has imposed more general index constraints on the Morse functions, and studied the resulting cobordism relations for such “constrained” Morse functions by means of the two-index theorem of Hatcher and Wagoner, as well as handle extension techniques for fold maps due to Gay and Kirby. As an application to high-dimensional topological field theory (compare [21]), the author has shown how exotic Kervaire spheres can be distinguished in infinitely many dimensions from other exotic spheres as elements of the cobordism group of constrained Morse functions.

Let $n \geq 2$ be an integer. In this note, we consider several variants of cobordism relations for Morse functions of compact n -dimensional manifolds possibly with boundary. In principle, one defines cobordisms of such Morse functions to be certain differentiable maps of $(n + 1)$ -dimensional cobordisms (with corners) into the plane. Following Saeki and Yamamoto [17, 18], we impose the natural requirement that these maps are locally modeled on C^∞ stable map germs into the plane. At interior points, it is well-known that the possible C^∞ stable map germs $(\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ are

$$(1.1) \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (x_0, x_1), & \text{regular point,} \\ (x_0, \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2), & \text{fold point,} \\ (x_0, x_0 x_1 + x_1^3 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2), & \text{cusp.} \end{cases}$$

At boundary points, we point out that the possible C^∞ stable map germs $(\mathbb{R}^n \times [0, \infty), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ are given by

$$(1.2) \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (x_0, x_1), & \partial\text{-regular point,} \\ (x_0, \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 + x_n), & \partial\text{-fold point,} \\ (x_0, x_0 x_1 + x_1^3 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 + x_n), & \partial\text{-cusp,} \\ (x_0, \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2 + x_0 x_n), & B_2 \text{ point,} \end{cases}$$

where the first three types are regular map germs that are named after their restrictions to the boundary $(\mathbb{R}^n \times \{0\}, 0) \subset (\mathbb{R}^n \times [0, \infty), 0)$, while the so-called B_2 point² is a singular map germ. In Definition 1.2 below, we introduce various cobordism relations of Morse functions by requiring that cobordisms are locally modeled on prescribed subsets of the possible C^∞ stable map germs into the plane. On the technical side, we note that our definition of cobordism relations differs from that of Saeki and Yamamoto [17, 18]

²According to [26], the terminology “ B_2 point” has its origin in the case of dimension $n = 3$, where the map germ is a versal unfolding of the function germ $B_2 = \pm x^2 \pm y^2$ (see Arnold [2]).

in that we do *not* assume Morse functions and their cobordisms to be proper C^∞ stable maps. Nevertheless, by means of slight perturbations we see that both definitions result in isomorphic cobordism groups.

Next, we introduce the cobordism relations that will be discussed in this note. Let M be an n -dimensional compact differentiable manifold possibly with boundary. By a *Morse function of M* we mean a real valued differentiable function $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ which is a submersion near the boundary ∂M , and such that the critical points of both f and $f|_{\partial M}$ are all nondegenerate. We consider the following notion of oriented generic cobordisms between two Morse functions $f_0: M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ of oriented compact n -dimensional manifolds possibly with boundary.

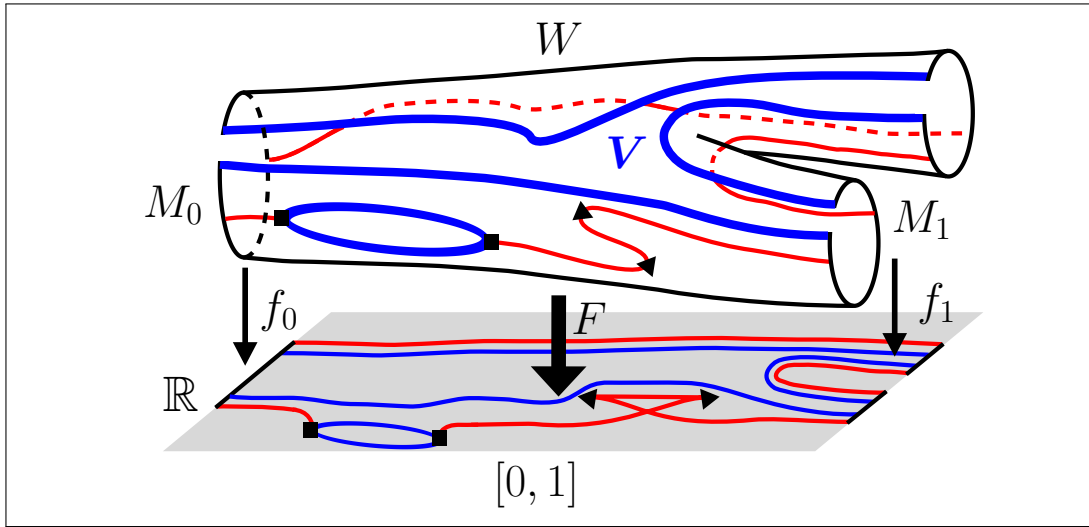


FIGURE 1. Illustration of an oriented generic cobordism (W, V, F) from f_0 to f_1 . The singular point set of F and its image in the plane are indicated as follows. Fold lines are red, cusps are triangles, and B_2 points are squares.

Definition 1.1. An *oriented generic cobordism* from $f_0: M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ to $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ is a triple (W, V, F) (see Figure [1](#)), where

- the pair (W, V) is an oriented cobordism (with corners) from M_0 to M_1 , that is, W is a compact oriented $(n + 1)$ -dimensional manifold with corners such that³ $\partial W = M_0 \cup_{\partial M_0} V \cup_{-\partial M_1} -M_1$, where M_0 , $-M_1$ and V are oriented codimension 0 submanifolds of ∂W such that $M_0 \cap M_1 = \emptyset$, $V \cap M_0 = \partial M_0$ and $V \cap M_1 = \partial M_1$, V is an oriented cobordism from ∂M_0 to ∂M_1 (that is, V is a compact oriented n -dimensional manifold with boundary $\partial V = \partial M_0 \cup -\partial M_1$), and W has corners precisely along ∂V , and
- $F: W \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}$ is a differentiable map such that

³For an oriented manifold X , the manifold with opposite orientation is denoted by $-X$.

- there exist collars (with corners) $[0, \varepsilon) \times M_0 \subset W$ of $M_0 \subset W$ and $(1 - \varepsilon, 1] \times M_1 \subset W$ of $M_1 \subset W$ such that $F|_{[0, \varepsilon) \times M_0} = \text{id}_{[0, \varepsilon)} \times f_0$ and $F|_{(1 - \varepsilon, 1] \times M_1} = \text{id}_{(1 - \varepsilon, 1]} \times f_1$, and
- at every point $x \in W \setminus (M_0 \sqcup M_1)$, the map germ of F at x is C^∞ right-left equivalent^[4] to a C^∞ stable map germ into \mathbb{R}^2 (see (1.1) and (1.2)).

Similarly, we can define an unoriented version of the notion of oriented generic cobordism by ignoring orientations of manifolds in the above definition.

As it turns out, oriented generic cobordism (or its unoriented version) is not an interesting cobordism relation to study because any Morse function $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ is *nullcobordant*, i.e., there exists an oriented generic cobordism from f to the unique function on the empty set. (In fact, the double $M \cup_{\partial M} -M$ of M is oriented nullcobordant, and any oriented nullcobordism W can be considered as an oriented cobordism (W, M) (with corners) from M to the empty set. Then, the desired differentiable map $W \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}$ is obtained by a generic extension of the $\{0\} \times M$ -germ of the map $\text{id}_{[0, \varepsilon)} \times f$ defined on a collar (with corners) $[0, \varepsilon) \times M \subset W$.) Nevertheless, we can use the above notion of (oriented) generic cobordism to define the following more interesting cobordism relations^[5].

Definition 1.2. An (oriented) generic cobordism (W, V, F) is called

- (i) an *(oriented) admissible cobordism* if F has no B_2 points.
- (ii) an *(oriented) fold cobordism* if F has no cusps and no ∂ -cusps.
- (iii) an *(oriented) admissible fold cobordism* if F has no cusps, no ∂ -cusps, and no B_2 points.

The oriented cobordism relations of the previous definition clearly define equivalence relations on the set $b\mathcal{M}_n$ of Morse functions of oriented compact n -dimensional manifolds possibly with boundary. Let $b\mathfrak{C}_n$, $b\mathfrak{F}_n$, and $b\mathfrak{A}_n$ denote the sets of equivalence classes $[f: M \rightarrow \mathbb{R}]$ of Morse functions in $b\mathcal{M}_n$ up to oriented admissible cobordism, oriented fold cobordism, and admissible fold cobordism, respectively. Disjoint union “ \sqcup ” induces an additive group law on each of the sets $b\mathfrak{C}_n$, $b\mathfrak{F}_n$, and $b\mathfrak{A}_n$ as follows. The identity element is represented by the unique map $\emptyset \rightarrow \mathbb{R}$, and the inverse of a class $[f: M \rightarrow \mathbb{R}]$ is represented by $-f: -M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$, where $-M$ denotes the manifold M equipped with the opposite orientation. We call $b\mathfrak{C}_n$ (resp. $b\mathfrak{F}_n$, $b\mathfrak{A}_n$) the *n -dimensional oriented admissible (resp. fold, admissible fold) cobordism group of Morse functions*. Similarly, we can define $b\mathcal{M}_n^O$ by ignoring orientations of manifolds, and the unoriented versions

⁴Given differentiable manifolds N possibly with boundary and P without boundary, two differentiable maps $f, g: N \rightarrow P$ are called C^∞ right-left equivalent if there exist diffeomorphisms $\Phi: N \rightarrow N$ and $\Psi: P \rightarrow P$ such that $\Psi \circ f = g \circ \Phi$.

⁵More generally, it seems interesting to study cobordism relations for Morse functions on compact differentiable manifolds *with corners*. As this problem is beyond the scope of the methods presented in this note, we mention it as an interesting direction of future research.

$b\mathfrak{C}_n^O$, $b\mathfrak{F}_n^O$, and $b\mathfrak{A}_n^O$ of the oriented cobordism groups $b\mathfrak{C}_n$, $b\mathfrak{F}_n$, and $b\mathfrak{A}_n$ by using the unoriented versions of the cobordism relations of Definition 1.2.

Saeki and Yamamoto [17, 18] introduced the cobordism groups $b\mathfrak{C}_n$, $b\mathfrak{A}_n$ and their unoriented versions $b\mathfrak{C}_n^O$, $b\mathfrak{A}_n^O$. In [18], they showed that $b\mathfrak{C}_2^O \cong \mathbb{Z}_2$ by means of a geometric method using Reeb graphs which is based on [5, 9, 16]. Moreover, they posed the problem to study the group structures of $b\mathfrak{C}_n$, $b\mathfrak{A}_n$, and $b\mathfrak{C}_n^O$, $b\mathfrak{A}_n^O$ for arbitrary $n \geq 2$ (see Section 6 in [18]). Based on similar techniques, Yamamoto [26] showed that $b\mathfrak{F}_2^O \cong \mathbb{Z}_2$ and $b\mathfrak{A}_2^O \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

In the following sections, we outline our results on the computation of the oriented cobordism groups $b\mathfrak{C}_n$, $b\mathfrak{F}_n$, and $b\mathfrak{A}_n$, and their unoriented versions $b\mathfrak{C}_n^O$, $b\mathfrak{F}_n^O$, and $b\mathfrak{A}_n^O$ for arbitrary $n \geq 2$.

2. ADMISSIBLE COBORDISM GROUP OF MORSE FUNCTIONS

Our Theorem 2.1 below answers the problem of Saeki and Yamamoto [18] to determine the group structures of the (oriented) admissible cobordism groups of Morse functions $b\mathfrak{C}_n$ and $b\mathfrak{C}_n^O$ for all $n \geq 2$. Our proof is based on a geometric method that combines Levine’s cusp elimination technique [12] with the complementary process of creating pairs of cusps along fold lines.

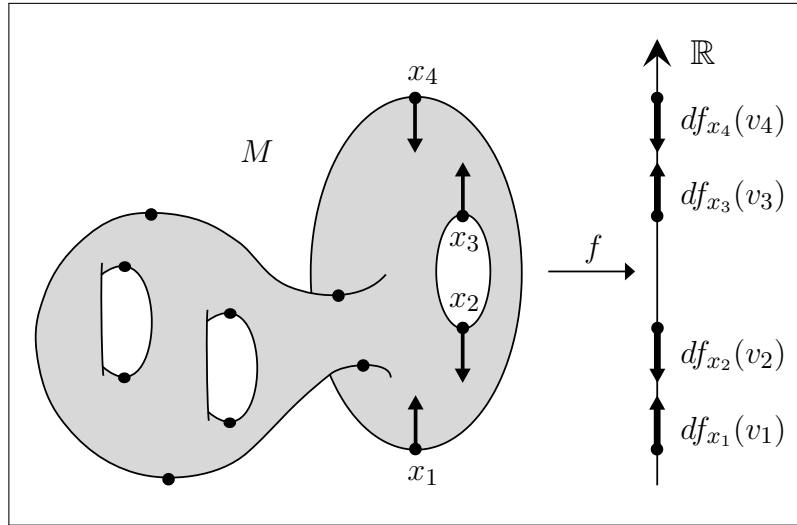


FIGURE 2. Illustration of a Morse function $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ of a compact surface with boundary induced by the height function in \mathbb{R}^3 . The surface M is the connected sum of two tori with two small open 2-disks removed. The critical points of $f|_{\partial M}$ are x_1 , x_2 , x_3 , and x_4 . Using the indicated inward pointing tangent vectors $v_i \in T_{x_i}M$, we see that $\sigma_f(x_i) = +1$ if and only if $i \in \{1, 3\}$. Hence, we have $S_0^+[f] = \{x_1\}$, $S_1^+[f] = \{x_3\}$, and thus $\chi^+[f] = 1 - 1 = 0$.

In order to present our result, we need to introduce some more notation for Morse functions $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ defined on p -dimensional manifolds possibly with boundary, $p \geq 1$.

Following Curley [3], we assign to every critical point $x \in \partial N$ of the Morse function $g|_{\partial N}$ a sign $\sigma_g(x) \in \{\pm 1\}$ (see Figure 2) that is uniquely determined by requiring that for an *inward* pointing tangent vector $v \in T_x N$ the tangent vector

$$\sigma_g(x) \cdot dg_x(v) \in T_{g(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

points into the *positive* direction of the real axis. Let $S(g|_{\partial N})$ denote the set of critical points of the Morse function $g|_{\partial N}$. We note that the resulting assignment $\sigma_g: S(g|_{\partial N}) \rightarrow \{\pm 1\}$ depends only on the map germ $[g]$ of g near ∂N . Let $S_i^+[g] \subset S(g|_{\partial N})$ denote the subset of those critical points x of the Morse function $g|_{\partial N}$ of index i for which $\sigma_g(x) = +1$. If ∂N is compact, then $S(g|_{\partial N})$ is finite, and we define in analogy with a well-known Euler characteristic formula⁶ the integer

$$\chi^+[g] = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \cdot \nu_i^+[g],$$

where $\nu_i^+[g]$ denotes the cardinality of the finite set $S_i^+[g]$ (for example, see Figure 2).

Theorem 2.1 (W. [23], 2019). *Let $n \geq 2$ be an integer. The assignment $b\mathcal{M}_n^{(O)} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(f: M \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \chi(M) - \chi^+[f]$, induces group isomorphisms*

$$b\mathfrak{C}_n^{(O)} \xrightarrow{\cong} \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n \text{ even,} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ odd.} \end{cases}$$

In particular, $b\mathfrak{C}_n^O \cong b\mathfrak{C}_n$ for all $n \geq 2$.

3. ADMISSIBLE FOLD COBORDISM GROUP OF MORSE FUNCTIONS

In this section, we discuss a structural relationship between admissible fold cobordism groups of Morse functions and *SKK*-groups of compact differentiable manifolds possibly with boundary (see Theorem 3.2 below). The concept of *SKK*-groups of manifolds goes back to Jänich [7, 8], who observed that the index of elliptic operators is invariant under natural cutting and pasting operations on manifolds. This operation cuts a closed n -dimensional manifold along a submanifold Q of codimension 1 with trivial normal bundle, and pastes back together the two resulting copies of Q in the boundary by means of some gluing automorphism $Q \rightarrow Q$. The resulting notion of *SK*-invariants⁷ of closed n -manifolds was studied systematically in [11] by viewing *SK*-invariants as homomorphisms on a universal *SK*-group SK_n with values in some abelian group. As a generalization,

⁶If $h: P \rightarrow \mathbb{R}$ is a Morse function on a closed $(p-1)$ -dimensional manifold, then the Euler characteristic of P can be computed as $\chi(P) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \cdot \nu_i(h)$, where $\nu_i(h)$ denotes the number of critical points of h of index i .

⁷from German “Schneiden und Kleben” = “cutting and pasting”

the notion of SKK -invariants⁸ and the corresponding universal SKK -group SKK_n incorporate a correction term that may depend on the gluing automorphism $Q \rightarrow Q$.

In Theorem 3.2 below, we compute the (oriented) admissible fold cobordism groups of Morse functions, $b\mathfrak{A}_n$ and $b\mathfrak{A}_n^O$, in terms of the (oriented) SKK -groups of compact manifolds possibly with boundary, which we will denote by $bSKK_n$ and $bSKK_n^O$. The underlying $bSKK$ -relations are a version with boundary of the SKK -relations which are studied systematically in the manuscript [11] by Karras, Kreck, Neumann, and Ossa.

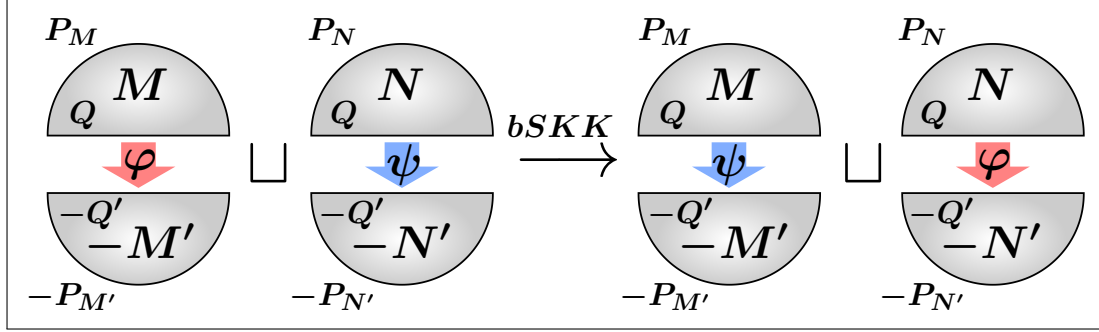


FIGURE 3. $bSKK$ -related oriented n -dimensional manifolds X and Y .

Definition 3.1. Two compact oriented n -dimensional differentiable manifolds possibly with boundary X, Y are called $bSKK$ -related, $X \xrightarrow{bSKK} Y$ (see Figure 3), if there exist

- compact oriented $(n-1)$ -dimensional differentiable manifolds possibly with boundary $P_M, P_{M'}, P_N, P_{N'}, Q, Q'$ such that $-\partial P_M = \partial Q = -\partial P_N$ and $-\partial P_{M'} = \partial Q' = -\partial P_{N'}$,
- compact oriented n -dimensional differentiable manifolds M, M', N, N' with boundaries $\partial M = P_M \cup_{\partial Q} Q, \partial M' = P_{M'} \cup_{\partial Q'} Q', \partial N = P_N \cup_{\partial Q} Q, \partial N' = P_{N'} \cup_{\partial Q'} Q'$, and corners along $\partial P_M, \partial P_{M'}, \partial P_N, \partial P_{N'}$, respectively, and
- orientation preserving diffeomorphisms $\varphi, \psi: Q \rightarrow Q'$ such that

$$\begin{aligned} X &= (M \cup_{\varphi} -M') \sqcup (N \cup_{\psi} -N'), \\ Y &= (M \cup_{\psi} -M') \sqcup (N \cup_{\varphi} -N'). \end{aligned}$$

Let $b\mathfrak{M}_n$ denote the set of oriented diffeomorphism classes of oriented compact n -dimensional differentiable manifolds possibly with boundary. We regard $b\mathfrak{M}_n$ as an abelian semigroup with addition $[M] + [N] = [M \sqcup N]$ and identity element $0 = [\emptyset]$.

While the $bSKK$ -relation on $b\mathfrak{M}_n$ given by Definition 3.1 is obviously symmetric, it might not be an equivalence relation. Nevertheless, we can use the $bSKK$ -relation to define an equivalence relation \sim_{bSKK} via stabilization as follows. Given two manifolds

⁸from German “ SK -Kontrollierbar” = “ SK -controllable”

M and N in $b\mathfrak{M}_n$, we define $[M] \sim_{bSKK} [N]$ if there exist manifolds X and Y in $b\mathfrak{M}_n$ such that $X \xrightarrow{bSKK} Y$ and $[M] + [X] = [N] + [Y]$ in $b\mathfrak{M}_n$. Then, it is straightforward to check that “ \sim_{bSKK} ” is an equivalence relation on $b\mathfrak{M}_n$. The quotient $b\mathfrak{M}_n / \sim_{bSKK}$ inherits an abelian semigroup structure from $b\mathfrak{M}_n$. We define the additive group $bSKK_n$ to be the Grothendieck group of $b\mathfrak{M}_n / \sim_{bSKK}$. In particular, note that an element of $bSKK_n$ is not always represented by a manifold, but can in general be written as a difference $[M] - [N]$. The group $bSKK_n$ is called the *n -dimensional oriented SKK-group of manifolds possibly with boundary*. Similarly, we can define an unoriented version $bSKK_n^O$ by ignoring orientations of manifolds.

By taking boundaries of manifolds, we obtain natural maps $bSKK_n^{(O)} \rightarrow SKK_{n-1}^{(O)}$ to the usual SKK -groups of closed manifolds. The groups $bSKK_n$ and $bSKK_n^O$ do not depend on singularity theory of differentiable maps, and will be computed in [24].

To relate admissible fold cobordism groups to $bSKK$ -groups, we define an assignment

$$(3.1) \quad \Sigma_n^{(O)} : b\mathcal{M}_n^{(O)} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (f : M \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} \nu_0(f) + \cdots + \nu_k(f), & n = 2k + 1, \\ \mu_{k-1}(f) + \frac{\sigma(M) - \chi(M)}{2}, & n = 2k, \end{cases}$$

where $\nu_i(f)$ denotes the number of critical points of f of index i , and $\mu_i(f) = \nu_{n-i}(f) - \nu_i(f)$. We also recall the definition of the assignment $b\mathcal{M}_n^{(O)} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f \mapsto \nu_i^+[f]$ from Section 2, and set $\mu_i^+[f] = \nu_{n-i}^+[f] - \nu_i^+[f]$.

Theorem 3.2 (W. [24], 2020). *Let $n \geq 2$ be an integer. The assignment*

$$\omega_n^{(O)} : b\mathcal{M}_n^{(O)} \rightarrow bSKK_n, \quad (f : M \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto [M] + \Sigma_n^{(O)}(f) \cdot [S^n] + \Sigma_{n-1}^{(O)}(f|_{\partial M}) \cdot [D^n],$$

induces a group isomorphism

$$\begin{aligned} b\mathfrak{A}_n^{(O)} &\cong bSKK_n^{(O)} \oplus \mathbb{Z}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \oplus \mathbb{Z}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} \oplus \mathbb{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}, \\ [f : M \rightarrow \mathbb{R}] &\mapsto (\omega_n^{(O)}[f], \boldsymbol{\mu}_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}(f), \boldsymbol{\mu}_{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}(f|_{\partial M}), \boldsymbol{\mu}_{\lfloor n/2 \rfloor}^+[f]), \end{aligned}$$

where we make use of the vector notation $\boldsymbol{\mu}_N^{(+)} = (\mu_0^{(+)}, \dots, \mu_{N-1}^{(+)})$.

4. FOLD COBORDISM GROUP OF MORSE FUNCTIONS

In Theorem 4.2 below, we determine the group structure of the (oriented) fold cobordism groups of Morse functions, $b\mathfrak{F}_n$ and $b\mathfrak{F}_n^O$ (except for $b\mathfrak{F}_n$ in the case $n \equiv 1 \pmod{4}$).

First, we need to review the group structure of the (oriented) fold cobordism group of Morse functions of *closed* manifolds. For this purpose, let \mathcal{M}_{n-1} denote the set of Morse functions of oriented closed $(n-1)$ -dimensional manifolds. An oriented generic cobordism between two Morse functions $f_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in \mathcal{M}_{n-1} is an oriented generic cobordism (W, V, F) from f_0 to f_1 (seen as elements of $b\mathcal{M}_{n-1}$) in the sense of Definition 1.1 such that $V = \emptyset$. We call (W, \emptyset, F) an *oriented fold cobordism* from f_0 to f_1 in \mathcal{M}_{n-1} if F is an oriented fold cobordism from f_0 to f_1 (seen as elements of

$b\mathcal{M}_{n-1}$) in the sense of Definition 1.2. This is obviously equivalent to requiring that all singular points of F are fold points. Oriented fold cobordism clearly defines an equivalence relation on \mathcal{M}_{n-1} , and we denote the set of equivalence classes by \mathfrak{F}_{n-1} . Disjoint union defines an additive group law on \mathfrak{F}_{n-1} in a similar way as for $b\mathfrak{F}_n$. We call \mathfrak{F}_{n-1} the *oriented fold cobordism group of Morse functions (on closed manifolds)*. We can also define the unoriented version \mathfrak{F}_{n-1}^O by ignoring orientations of manifolds.

Theorem 4.1 (Ikegami [4], 2004). *For $n \geq 2$, there are group isomorphisms of the form*

$$\mathfrak{F}_{n-1}^O \xrightarrow[\cong]{(\beta^O, \Phi^O)} \Omega_{n-1}^O \oplus \mathbb{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

and

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{n-1} \xrightarrow[\cong]{(\beta, \Phi)} \Omega_{n-1}^{SO} \oplus \mathbb{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor}, & n \not\equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathfrak{F}_{n-1} \xrightarrow[\cong]{(\beta, \Phi, \Lambda)} \Omega_{n-1}^{SO} \oplus \mathbb{Z}^{\lfloor n/2 \rfloor} \oplus \mathbb{Z}_2, & n \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

where $\beta^O : \mathfrak{F}_{n-1}^O \rightarrow \Omega_{n-1}^O$ (resp. $\beta : \mathfrak{F}_{n-1} \rightarrow \Omega_{n-1}^{SO}$) is the natural map $[f : M \rightarrow \mathbb{R}] \mapsto [M]$.

By construction, there is a natural map $\alpha^{(O)} : b\mathfrak{F}_n^{(O)} \rightarrow \mathfrak{F}_{n-1}^{(O)}$ induced by restriction to the boundary, $[f : M \rightarrow \mathbb{R}] \mapsto [f|_{\partial M}]$.

Theorem 4.2 (W. [25], 2020). *For $n \geq 2$, there are short exact sequences*

$$\begin{cases} 0 \rightarrow b\mathfrak{F}_n^O \xrightarrow{\alpha^O} \mathfrak{F}_{n-1}^O \xrightarrow{\beta^O} \Omega_{n-1}^O \rightarrow 0, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0 \rightarrow b\mathfrak{F}_n^O \xrightarrow{(\gamma^O, \alpha^O)} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathfrak{F}_{n-1}^O \xrightarrow{\beta^{O \circ \text{pr}_2}} \Omega_{n-1}^O \rightarrow 0, & n \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 0 \rightarrow b\mathfrak{F}_n \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F}_{n-1} \xrightarrow{\beta} \Omega_{n-1}^{SO} \rightarrow 0, & n \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ 0 \rightarrow b\mathfrak{F}_n \xrightarrow{(\gamma, \alpha)} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathfrak{F}_{n-1} \xrightarrow{\beta \circ \text{pr}_2} \Omega_{n-1}^{SO} \rightarrow 0, & n \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

where the map $\gamma^O : b\mathfrak{F}_{2k}^O \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (resp. $\gamma : b\mathfrak{F}_{4k} \rightarrow \mathbb{Z}_2$) is given by⁹

$$[f : M \rightarrow \mathbb{R}] \mapsto \chi(M) + \frac{1}{2} \#S(f|_{\partial M}) \pmod{2}.$$

REFERENCES

1. Y. Ando, *Cobordisms of maps with singularities of a given class*, Alg. Geom. Topol. **8** (2008), 1989–2029.
2. V.I. Arnold, *Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k, F_4 and singularities of evolutes*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), 91–105.
3. C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology **16** (1977), 89–97.
4. K. Ikegami, *Cobordism group of Morse functions on manifolds*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), 211–230.

⁹Here, $\#S(f|_{\partial M})$ is the cardinality of the set of critical points of the Morse function $f|_{\partial M}$.

5. K. Ikegami, O. Saeki, *Cobordism group of Morse functions on surfaces*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 1081–1094.
6. K. Ikegami, O. Saeki, *Cobordism of Morse maps and its application to map germs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **147** (2009), 235–254.
7. K. Jänich, *Charakterisierung der Signatur von Mannigfaltigkeiten durch eine Additivitätseigenschaft*, Invent. Math. **6** (1968), 35–40.
8. K. Jänich, *On invariants with the Novikov additive property*, Math. Ann. **184** (1969), 65–77.
9. B. Kalmár, *Cobordism group of Morse functions on unoriented surfaces*, Kyushu J. Math. **59** (2005), 351–363.
10. B. Kalmár, *Pontryagin-Thom-Szűcs type construction for non-positive codimensional singular maps with prescribed singular fibers*, The second Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, RIMS Kôkyûroku **1610** (2008), 66–79.
11. U. Karras, M. Kreck, W.D. Neumann, E. Ossa, *Cutting and Pasting of Manifolds; SK-groups*. Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1973. Mathematics Lecture Series, No. 1.
12. H.I. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3**, Suppl. 2 (1965), 263–296.
13. R. Rimányi, A. Szűcs, *Pontrjagin-Thom-type construction for maps with singularities*, Topology **37** (1998), 1177–1191.
14. R. Sadykov, *Bordism groups of solutions to differential relations*, Alg. Geom. Topol. **9** (2009), 2311–2349.
15. O. Saeki, *Cobordism groups of special generic functions and groups of homotopy spheres*, Japan. J. Math. (N. S.) **28** (2002), 287–297.
16. O. Saeki, *Cobordism of Morse functions on surfaces, the universal complex of singular fibers and their application to map germs*, Algebr. Geom. Topology **6** (2006), 539–572.
17. O. Saeki, T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps of 3-manifolds with boundary into surfaces and their applications*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), 1379–1402.
18. O. Saeki, T. Yamamoto, *Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary*, in: XIII International Workshop, Real and Complex Singularities, Universidade de São Paulo; Contemporary Mathematics **675** (2016), 279–297.
19. A. Szűcs, *Cobordism of singular maps*, Geom. Topol. **12** (2008), 2379–2452.
20. R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.
21. D.J. Wrazidlo, *Fold maps and positive topological quantum field theories*, Dissertation, Heidelberg (2017), <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:16-heidok-232530>.
22. D.J. Wrazidlo, *Bordism of constrained Morse functions*, preprint (2018), [arXiv:1803.11177](https://arxiv.org/abs/1803.11177).
23. D.J. Wrazidlo, *Cusp cobordism group of Morse functions*, preprint (2019), [arXiv:1905.05712](https://arxiv.org/abs/1905.05712).
24. D.J. Wrazidlo, *Relating SKK-relations to Morse theory*, in preparation.
25. D.J. Wrazidlo, *Fold cobordism of Morse functions and its application to map germs at boundary points*, in preparation.
26. T. Yamamoto, *Fold cobordism groups of Morse functions on surfaces with boundary*, preprint.

INSTITUTE OF MATHEMATICS FOR INDUSTRY, KYUSHU UNIVERSITY, MOTOOKA 744, NISHIKU, FUKUOKA 819-0395, JAPAN

E-mail address: d-wrazidlo@imi.kyushu-u.ac.jp

Pseudo-Anosov properties in cluster algebras

石橋 典 (京都大学)*

概 要

本稿では曲面上の写像類に対する擬 Anosov 性の拡張としてクラスター代数における変異ループに対する符号安定性という条件を導入し、

- 針孔付き曲面の写像類については擬 Anosov 性と一様な符号安定性が同値となること、
- 一般に符号安定な代表 path をもつ変異ループについて、誘導されるクラスター変換の代数的エントロピーが クラスター伸縮因子の対数で評価できること

を説明する. 本稿の内容は東京工業大学の狩野隼輔氏との共同研究に基づく.

1. 序

はじめにクラスター代数の基本概念に触れておく. 次の節で Teichmüller-Thurston 理論との関係を述べる. クラスター代数 (cluster algebra) とは, Fomin–Zelevinsky [FZ02] により定式化された組み合わせ論の一分野である. 中心的な概念は種子 (seed) と呼ばれる 3 つ組 $(B, \mathbf{A}, \mathbf{X})$ およびその変異 (mutation) と呼ばれる操作である. ここで $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ は反対称行列, $\mathbf{A} = (A_i)_{i=1}^N$ および $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1}^N$ はそれぞれ可換な変数の組である. 添字 $k \in \{1, \dots, N\}$ に対し, k 方向の変異 $\mu_k : (B, \mathbf{A}, \mathbf{X}) \rightarrow (B', \mathbf{A}', \mathbf{X}')$ は次のルールで新しい種子を作り出す:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + [b_{ik}]_+ [b_{kj}]_+ - [-b_{ik}]_+ [-b_{kj}]_+ & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$A'_i = \begin{cases} A_k^{-1} (\prod_{j \in I} A_j^{[b_{kj}]_+} + \prod_{j \in I} A_j^{[-b_{kj}]_+}) & \text{if } i = k, \\ A_i & \text{if } i \neq k, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$X'_i = \begin{cases} X_k^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i (1 + X_k^{-\text{sgn}(b_{ik})})^{-b_{ik}} & \text{if } i \neq k. \end{cases} \quad (1.3)$$

ここで実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a]_+ := \max\{a, 0\}$ と書いた.

これらの式は一見複雑であるが, ここでは変数 A_i および X_i たちの変換が引き算を用いない有理変換 (正有理変換, positive rational map) であること, どちらも変換式は行列 B で統制されていること, さらにその変換ルール B 自身が同時に変換されていること, などに着目されたい. 変換式 (1.2), (1.3) をそれぞれクラスター A 変換, クラスター X 変換と呼ぶ. クラスター代数の定式化以来, このような不思議な変換が表現論, 可積分系, ミラー対称性など数学の様々な分野に現れることが見出されてきた. 次の節では

本研究は JSPS 科研費 (18J13304) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 13F60

キーワード: 写像類群, クラスター代数, 擬 Anosov 性

* 〒606-8502 京都市左京区追分町北白川 京都大学 数理解析研究所

e-mail: ishiba@kyoto-u.ac.jp

これらの変換が曲面の Teichmüller 空間および測度付きラミネーションの空間における座標変換として自然に現れることを見る。

2. Teichmüller 理論からクラスター代数へ

Σ を種数 g および h 個の針孔をもつ向きづけられた曲面とする. Euler 数 $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - h < 0, h > 0$ を仮定する. Σ の Teichmüller 空間 $T(\Sigma)$ とは, Σ 上の面積有限, 完備な双曲構造全体の集合を恒等写像に isotopic な微分同相全体のなす群で割って得られる有限次元の多様体である. 写像類群 $MC(\Sigma)$ が $T(\Sigma)$ に自然に作用し, 商オービフォールド $T(\Sigma)/MC(\Sigma)$ は Riemann 面のモジュライ空間である.

2.1. Teichmüller 空間上のクラスター座標

Teichmüller 空間 (の 2 種の拡張) の上には曲面の理想三角形分割に付随した 2 種類の大域座標が存在する. 構成について詳しくは [Pen, Chapter 2] を参照されたい.

Σ 上の単純弧 α であって両端点が P 上にあるものの isotopy 類を理想弧 (ideal arc) と呼ぶ. P 以外の点で互いに交わらない理想弧の族 $\Delta = \{\alpha_i\}_{i=1}^N$ であって極大なものを理想三角形分割 (ideal triangulation) と呼ぶ. 本稿での仮定のもと理想三角形分割は常に存在し, それに含まれる理想弧 (辺とも呼ぶ) の数は常に $N = N(\Sigma) := 6g - 6 + 3h$ である. 与えられた理想三角形分割 Δ に対し, 各辺に付随した非調和比を用いて Fock–Thurston 座標

$$X_\Delta = (X_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\Delta \quad (\cong \mathbb{R}_{>0}^{6g-6+3h})$$

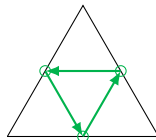
と呼ばれる大域座標 (埋め込み) が定義される. 詳細は割愛するが, 強化型 Teichmüller 空間 (enhanced Teichmüller space) と呼ばれるより大きな Teichmüller 空間 $\widehat{T}(\Sigma)$ 上にも非調和比による座標を拡張することができ, 微分同相

$$X_\Delta = (X_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : \widehat{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\Delta \quad (2.1)$$

が得られる.

次に, 理想三角形分割 Δ を取り替えた時の座標変換を考える. 針孔付き曲面 Σ を固定した時, その任意の 2 つの理想三角形分割はフリップと呼ばれる基本変形 (図 1) を有限回施すことで移り合うことが古典的に知られている. $\alpha \in \Delta$ に沿ったフリップを $f_\alpha : \Delta \rightarrow \Delta'$ とすると, 座標変換 $X_{\Delta'} \circ X_\Delta^{-1}$ は図 1 のように与えられる.

この変換公式は冒頭に述べたクラスター変換の一例となっている. 任意の反対称行列 $B = (b_{ij})$ は $b_{ij} = \#\{\text{arrows } i \rightarrow j\} - \#\{\text{arrows } j \rightarrow i\}$ となるような箭 Q で表せることに注意し, 理想三角形分割 Δ に付随した箭 Q_Δ を三角形上の箭



を貼り合わせて定義する. B^Δ を対応する反対称行列とすると, $f_\alpha : \Delta \rightarrow \Delta'$ について \mathcal{X} 種子 $(B^{\Delta'}, X_{\Delta'})$ は (B^Δ, X_Δ) から α に対応した方向の変異で得られることが確認できる.

クラスター座標を用いると, 写像類群 $MC(\Sigma)$ の強化型 Teichmüller 空間 $\widehat{T}(\Sigma)$ への作用を代数的な公式で記述することができる. ラベル付き Ptolemy グラフ (labeled Ptolemy graph) Tri_Σ を次のようなグラフとして定める:

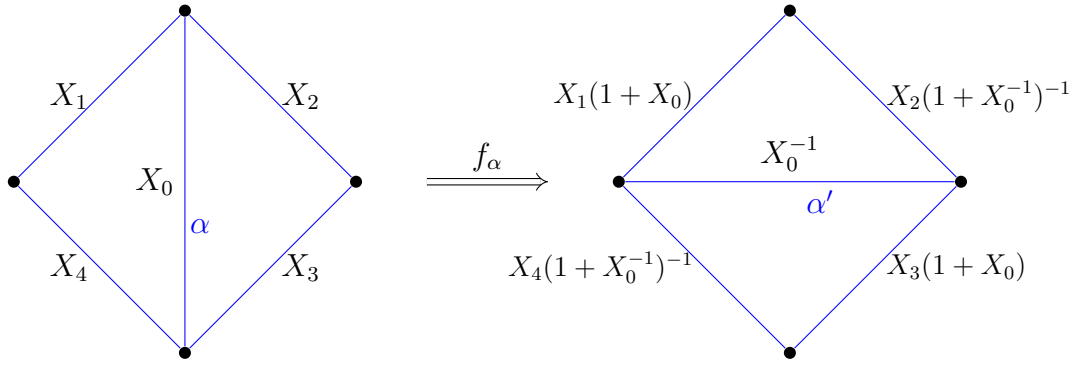


図 1: $\alpha \in \Delta$ に沿ったフリップに対応する座標変換 $X_{\Delta'} \circ X_{\Delta}^{-1}$.

- 頂点: ラベル付き理想三角形分割 (Δ, ℓ) . ここで $\ell: \{1, \dots, N\} \xrightarrow{\sim} \Delta$ は辺のラベル付けを与える全単射.
- 辺: 次の2種類の辺からなる.
 - (1) $k = 1, \dots, N$ に対し, ラベル付きフリップ $f_k: (\Delta, \ell) \rightarrow (\Delta', \ell')$. ここで $\Delta' := f_{\ell(k)}(\Delta)$ であり, ℓ' は $\ell'(i) := \ell(i)$ for $i \neq k$, $\ell'(k) \in \Delta' \setminus (\Delta \cap \Delta')$ として定まる Δ' のラベル付け.
 - (2) 互換 $\sigma = (i j) \in \mathfrak{S}_N$ に対し, ラベルの互換 $\sigma: (\Delta, \ell) \rightarrow (\Delta, \sigma.\ell)$. ここで $\sigma.\ell(i) := \ell(\sigma^{-1}(i))$.

ラベル付き Ptolemy グラフの頂点 (Δ, ℓ) に対して座標系 $X_{(\Delta, \ell)} = (X_{\ell(i)}^{\Delta})_{i=1}^N: \widehat{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}^N$ が定まり, 辺 $(\Delta, \ell) \xrightarrow{f_k} (\Delta', \ell')$ には k 方向の変異で与えられる座標変換 $f_k^x: \mathbb{R}_{>0}^N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^N$ が, 辺 $(\Delta, \ell) \xrightarrow{\sigma} (\Delta, \sigma.\ell)$ には座標の互換で与えられる座標変換 $f_{\sigma}^x: \mathbb{R}_{>0}^N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^N$ がそれぞれ付随する. Tri_{Σ} は連結であるから, 写像類 $\phi \in MC(\Sigma)$ および頂点 (Δ, ℓ) に対し, edge path

$$f_{\phi}: (\Delta, \ell) \xrightarrow{k_1} (\Delta_1, \ell_1) \dots \xrightarrow{k_m} (\Delta_m, \ell_m) = \phi^{-1}(\Delta, \ell)$$

が存在する. ここで各 k_i は番号 $1, \dots, N$ または互換であるとし, $\phi^{-1}(\Delta, \ell) := (\phi^{-1}(\Delta), \phi^{-1} \circ \ell)$. このとき座標の構成の $MC(\Sigma)$ 同変性から, 次の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_{>0}^N & \xrightarrow{f_{\phi}^x} & \mathbb{R}_{>0}^N & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}_{>0}^N \\ X_{(\Delta, \ell)} \uparrow & & \uparrow X_{\phi^{-1}(\Delta, \ell)} & & \uparrow X_{\Delta, \ell} \\ \widehat{T}(\Sigma) & \xlongequal{\quad} & \widehat{T}(\Sigma) & \xrightarrow{\phi} & \widehat{T}(\Sigma). \end{array}$$

ここで $f_{\phi}^x := f_{k_m}^x \circ \dots \circ f_{k_1}^x$ はクラスター変換と互換たちの合成であるから正有理変換である. この図式から, 写像類の $\widehat{T}(\Sigma)$ への自然な作用の座標表示は正有理変換で表されることが分かる.

注釈 2.1 (飾り付き Teichmüller 空間とクラスター \mathcal{A} 変換). クラスター \mathcal{A} 変換は飾り付き Teichmüller 空間 (decorated Teichmüller space) $\widehat{T}(\Sigma)$ 上の λ 長座標の座標変換とし

て現れる. Σ の理想三角形分割 Δ に対して $\alpha \in \Delta$ の λ 長の組は微分同相

$$A_\Delta = (A_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : \tilde{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}^\Delta$$

を定め, フリップ $f_\alpha : \Delta \rightarrow \Delta'$ に対する座標変換 $A_{\Delta'} \circ A_\Delta^{-1}$ はクラスター \mathcal{A} 変換である. 写像類 ϕ の作用は対応した正有理変換 f_ϕ^a として座標表示される. 各種の Teichmüller 空間たちの関係は次の図式にまとめられる:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}(\Sigma) & & \\ \downarrow & \searrow p & \\ T(\Sigma) & \longleftrightarrow & \widehat{T}(\Sigma) \end{array}$$

2.2. Thurston コンパクト化と測度付きラミネーション, 写像類の分類

次に, 写像類の分類定理である Nielsen–Thurston 分類について述べる. Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化 $\overline{T(\Sigma)} := T(\Sigma) \cup \mathcal{PML}(\Sigma)$ は閉円板に同相であり, Teichmüller 空間への写像類群作用はこの円板上に連続に拡張する. ここで $\mathcal{PML}(\Sigma)$ は Σ 上の測度付きラミネーション (measured lamination) の空間 $\mathcal{ML}(\Sigma)$ を, 測度への自然な $\mathbb{R}_{>0}$ 作用で割ったものである. $\mathcal{ML}(\Sigma)$ は $\mathbb{R}^{6g-6+2h}$ に同相な区分的線形多様体 (piecewise-linear manifold; 以下 PL 多様体と略記) であり, 正実数の重み付き multicurve (単純閉曲線の非交和の isotopy 類) 全体を稠密部分集合として含む.

定理 2.2 (Nielsen–Thurston 分類, e.g. [FLP]). Σ 上の任意の写像類 $\phi \in MC(\Sigma)$ は次のように 3 つの型に分類され, Thurston コンパクト化への作用の固定点の性質により特徴付けられる:

1. 周期的: ϕ は有限位数をもつ. 写像類が周期的となるのは Teichmüller 空間 $T(\Sigma)$ に固定点をもつことと同値.
2. 可約: ϕ は Σ 上のある multicurve を固定する. 写像類が可約となるのは $\mathcal{PML}(\Sigma)$ 内のある arational でない射影的測度付きラミネーションを固定することと同値.
3. 擬 Anosov: 2 つの測度付きラミネーション L_ϕ^\pm および実数 $\lambda_\phi > 1$ が存在し, ϕ は

$$\phi(L_\phi^\pm) = \lambda_\phi^{\pm 1} \cdot L_\phi^\pm$$

をみtas. 写像類が擬 Anosov となるのは $\mathcal{PML}(\Sigma)$ 内のある arational な射影的測度付きラミネーションを固定することと同値.

力学系の観点から興味深いのは擬 Anosov 写像類である. 実数 $\lambda_\phi > 1$ を伸縮因子 (stretch factor) と呼ぶ. 擬 Anosov 写像類 ϕ は Thurston 境界 $\mathcal{PML}(\Sigma)$ の上で南北力学系 (North-South dynamics) をもつ. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{\pm n}([L]) = [L_\phi^\pm]$$

が任意の射影的測度付きラミネーション $[L] \in \mathcal{PML}(\Sigma) \setminus \{[L_\phi^\mp]\}$ について成り立つ.

測度付きラミネーションの空間にも理想三角形分割 Δ に付随した座標 (剪断座標, shear coordinate) が存在する: $x_\Delta = (x_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : \widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\Delta$. 詳細は割愛するが, こ

ここで $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$ は強化型測度付きラミネーション (enhanced measured lamination) のなす PL 多様体である. また, フリップ $f_\alpha: \Delta \rightarrow \Delta'$ に付随する座標変換 $x_\Delta \circ x_{\Delta'}^{-1}$ は図 2 に示されているように図 1 のトロピカル類似で与えられる. 正有理変換 f の (max-plus) トロピカル類似 f^T は

$$f^T(x_1, \dots, x_N) := \lim_{t \rightarrow 0} t \log f(e^{x_1/t}, \dots, e^{x_N/t})$$

で定義される PL 写像である. 詳しくは [FG07] を参照されたい.

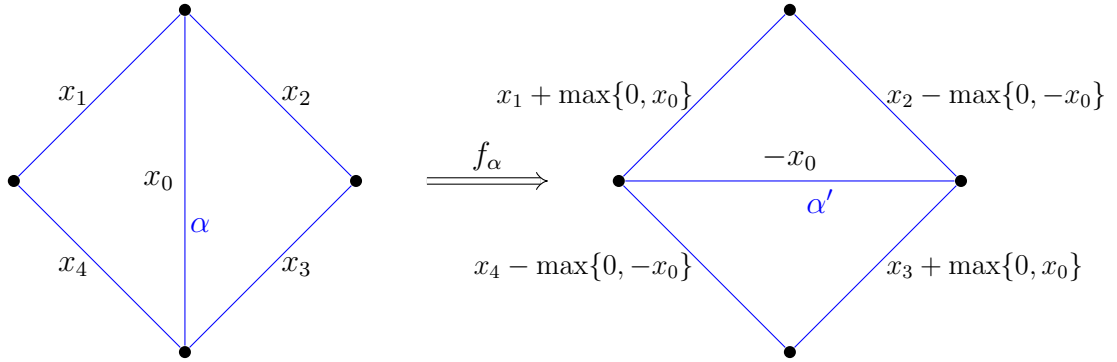


図 2: $\alpha \in \Delta$ に沿ったフリップに対応する座標変換 $x_{\Delta'} \circ x_\Delta^{-1}$.

写像類群の $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$ への自然な作用の x_Δ による座標表示は § 2.1 と同様の議論で計算でき, PL 写像 $(f_\phi^x)^T$ で表される. これらの事実から, 測度付きラミネーションの空間はある意味で Teichmüller 空間の “トロピカル類似” であり, これらの空間の背後には共通の代数構造が潜んでいることが見て取れる. これを抽出し, 一般化したものが次の節で述べるクラスター多様体の理論である. ここで, 筆者が本研究に取り組むきっかけとなった問いを挙げておく:

問題 2.3 (Papadoulos–Penner [PP93]). 写像類 ϕ の Nielsen–Thurston 分類を, 正有理変換 f_ϕ^x, f_ϕ^a あるいはそれらのトロピカル類似 $(f_\phi^x)^T, (f_\phi^a)^T$ を用いて特徴付けよ¹.

符号安定性の理論はこの問いに対するひとつの回答を与える².

3. クラスター多様体上の力学系

前節での観察をまとめると次のようになる:

- Teichmüller 空間 $\widehat{T}(\Sigma)$ は $(\Delta, \ell) \in \text{Tri}_\Sigma$ に付随した大域座標を持ち, 辺 $(\Delta, \ell) \xrightarrow{k} (\Delta', \ell')$ に付随した座標変換はクラスター \mathcal{A} 変換である.
- 測度付きラミネーションの空間 $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$ は $(\Delta, \ell) \in \text{Tri}_\Sigma$ に付随した大域座標を持ち, 辺 $(\Delta, \ell) \xrightarrow{k} (\Delta', \ell')$ に付随した座標変換はクラスター \mathcal{A} 変換のトロピカル類似である.

¹ [PP93] ではクラスター \mathcal{A} 変換およびそのトロピカル類似のみが考察されているが, 後述の符号安定性の理論においては \mathcal{A} 変換の符号が支配的であり, \mathcal{A} 変換の符号はアンサンプル射を通して副次的に決まることが分かる. また, クラスター代数における c -vector の符号一貫性 (sign coherence) [GHKK18] により, 変異ループの周囲性はトロピカル \mathcal{A} 変換のみで決定されることが知られている.

² ただし細かい点であるが, クラスター代数におけるトロピカル符号との整合性を優先し min-plus トロピカル類似 $f^{\text{top}}(x_1, \dots, x_N) := -f^T(-x_1, \dots, -x_N)$ を扱う.

- 上記の空間への写像類 $\phi \in MC(\Sigma)$ の作用の (Δ, ℓ) に付随した座標表示は, Tri_Σ 内の edge path $f_\phi : (\Delta, \ell) \rightarrow \phi^{-1}(\Delta, \ell)$ に付随したクラスター変換 f_ϕ^x およびそのトロピカル類似で与えられる.

クラスター多様体の理論はこれらの構造を代数的に抽象化したものと考えてよい.

3.1. クラスター多様体と変異ループ

§ 1で述べたクラスター代数の基本概念を Fock–Goncharov [FG09] に従って幾何学的に定式化する. 有限集合 I を固定する. 基底付き格子 $N = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}e_i$ およびその上の反対称双線形形式 $(\cdot, \cdot) : N \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ の組 $(N, (\cdot, \cdot))$ を (Fock–Goncharov の意味での) 種子 (seed) と呼ぶ³. $b_{ij} := (e_i, e_j)$ で定まる反対称行列 $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ を交換行列 (exchange matrix) と呼ぶ. 組 (N, B) を種子と呼ぶこともある.

例 3.1 (理想三角形分割に付随した種子). 針孔付き曲面 Σ の理想三角形分割 Δ に対し, 辺 $\alpha \in \Delta$ に付随した形式的な基底 e_α^Δ で生成される格子 $N^\Delta := \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}e_\alpha^\Delta$ および § 2.1 で定義した交換行列 B^Δ を考えると, (N^Δ, B^Δ) は種子である.

\mathbb{T}_I を, $|I|$ 価の正則木であって各辺が I の元でラベル付けられ, 各頂点のまわりでラベルが相異なるものとする. 種子形態 (seed pattern) とは \mathbb{T}_I の各頂点に種子を対応づける写像 $s : \mathbb{T}_I \ni t \mapsto (N^{(t)} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}e_i^{(t)}, B^{(t)})$ であって, 辺 $t \xrightarrow{k} t'$ について $B^{(t)}$ と $B^{(t')}$ が k 方向の行列変異 (1.1) で関連づけられているようなものである.

クラスター多様体. 各 $t \in \mathbb{T}_I$ に対し, $\mathcal{X}_{(t)} := \text{Hom}(N^{(t)}, \mathbb{G}_m)$ により代数的トーラスが定まる. ここで $\mathbb{G}_m := \text{Spec } \mathbb{Z}[z, z^{-1}]$ は乗法的群スキーム⁴. 基底 $e_i^{(t)}$ から座標関数 $X_i^{(t)} : \mathcal{X}_{(t)} \rightarrow \mathbb{G}_m, \varphi \mapsto \varphi(e_i^{(t)})$ が定まる. 辺 $t \xrightarrow{k} t'$ について, クラスター \mathcal{X} 変換 $\mu_k^x : \mathcal{X}_{(t)} \rightarrow \mathcal{X}_{(t')}$ を

$$(\mu_k^x)^* X_i^{(t')} := \begin{cases} (X_k^{(t)})^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i^{(t)} (1 + (X_k^{(t)})^{-\text{sgn}(b_{ik}^{(t)})} - b_{ik}^{(t)})^{-b_{ik}^{(t)}} & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

で定まる双有理写像とする. クラスター \mathcal{X} 多様体 (cluster \mathcal{X} -variety) はこれらの貼り合わせデータから定まるスキームである:

$$\mathcal{X}_s := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_I} \mathcal{X}_{(t)}.$$

双対的な構成として, 双対格子 $M^{(t)} := \text{Hom}(N^{(t)}, \mathbb{Z})$ に付随した代数的トーラス $\mathcal{A}_{(t)} := \text{Hom}(M^{(t)}, \mathbb{G}_m)$ たちをクラスター \mathcal{A} 変換 $\mu_k^a : \mathcal{A}_{(t)} \rightarrow \mathcal{A}_{(t')}$ により貼り合わせてクラスター \mathcal{A} 多様体 $\mathcal{A}_s = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_I} \mathcal{A}_{(t)}$ が得られる. 2つのクラスター多様体はアンサンブル射 (ensemble map) $p : \mathcal{A}_s \rightarrow \mathcal{X}_s, p^* X_i^{(t)} = \prod_{j \in I} (A_j^{(t)})^{b_{ij}^{(t)}}$ で関連づけられる. 注釈 2.1 と比較されたい.

交換グラフ, 変異ループとクラスターモジュラー群. 与えられた種子形態 s から, ラベル付き Ptolemy グラフの類似である交換グラフ (exchange graph) Exch_s を構成できる. 構成は紙数の関係で省略するが (詳しくは [IK] を参照), Exch_s の頂点は \mathbb{T}_I の頂点 t と

³ ここでは反対称種子であって氷結頂点 (frozen vertex を持たないものを考えている. 一般の定式化については [FG09, GHKK18] を参照されたい.

⁴ 体 K について $\mathbb{G}_m(K) = K^\times$ なので, 以下 \mathbb{G}_m を \mathbb{C}^\times などで読み替えても全く差し支えない.

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ の組 (t, σ) の適切な同値類 $v = [t, \sigma]_{\text{triv}}$ であって、順序付き座標トーラスの対応

$$\text{Exch}_s \ni v = [t, \sigma]_{\text{triv}} \mapsto \mathcal{X}_{(v)} := \mathcal{X}_{(t, \sigma)}$$

が一意的な同型を除いて上手く定まるようなものである。特にクラスター多様体は $\mathcal{X}_s = \bigcup_{v \in \text{Exch}_s} \mathcal{X}_{(v)}$ と書ける。 $k \in I$ について Exch_s 内の辺 $v \xrightarrow{k} v'$ およびクラスター変換 $\mu_k^x : \mathcal{X}_{(v)} \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}$ が、互換 $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ について辺 $v \xrightarrow{\sigma} v'$ および座標の置換 $\sigma^x : \mathcal{X}_{(v)} \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}$ が付随する。 Exch_s 内の edge path

$$\gamma : v = v_0 \xrightarrow{k_0} v_1 \xrightarrow{k_1} \dots \xrightarrow{k_m} v_m = v' \quad (3.1)$$

に対して (各 k_i は I の元または \mathfrak{S}_I 内の互換), クラスター変換および座標の互換の合成として正有理変換 $\mu_\gamma^x : \mathcal{X}_{(v)} \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}$ が定まる。閉曲線 γ については $\mu_\gamma^x = \text{id}$ である。

edge path (3.1) は $B^{(v')} = B^{(v)}$ をみたすとき、「変異ループを代表する」という。このとき、双有理自己同型

$$\mathcal{X}_{(v)} \xrightarrow{\mu_\gamma^x} \mathcal{X}_{(v')} \cong \mathcal{X}_{(v)} \quad (3.2)$$

が定まる。ここで、後者の同型は種子 $(N^{(v)}, B^{(v)})$ と $(N^{(v')}, B^{(v')})$ の間の自然な同型から誘導されるものである。変異ループを代表する2つの edge path は付随する双有理自己同型 (3.2) がクラスター多様体 \mathcal{X}_s 内の Zariski 開集合上で一致するとき同値であるといい、同値類 $\phi = [\gamma]_s$ を変異ループと呼ぶ。逆に、 γ は ϕ の代表 path (representation path) であるという。双有理自己同型 (3.2) は変異ループ ϕ と頂点 $v \in \text{Exch}_s$ の選択のみで決まる。これを ϕ の v における座標表示と呼び、 $\phi_{(v)}^x$ と書く。

変異ループ全体のなす群をクラスターモジュラー群と呼び、 Γ_s と表す。ここで群演算は代表 path の連結で定める: 任意の変異ループ ϕ は任意の頂点 $v \in \text{Exch}_s$ を始点とする代表 path を持つことから、これは上手く定義される。

各変異ループは双有理自己同型 $\phi_{(v)}^x$ の貼り合わせによりクラスター多様体 \mathcal{X}_s 上の (正則な) 自己同型を定め、 Γ_s の \mathcal{X}_s への作用が得られる。この作用から生じる力学系が本稿での興味の対象である。

半体値点の集合 任意の半体 (semifield) $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ および代数的トーラス $T = \text{Hom}(N, \mathbb{G}_m)$ に対し、その \mathbb{P} 値点の集合

$$T(\mathbb{P}) := \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P} \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}$$

が定まる。ここで M は N の双対格子である。正有理変換 $f : T \rightarrow T'$ は \mathbb{P} 値点の間の写像 $f(\mathbb{P}) : T(\mathbb{P}) \rightarrow T'(\mathbb{P})$ を誘導することが知られている。これをクラスター変換に適用することで、クラスター多様体の \mathbb{P} 値点の集合

$$\mathcal{X}_s(\mathbb{P}) := \bigcup_{v \in \text{Exch}_s} \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{P})$$

が定まる。 Γ_s は $\mathcal{X}(\mathbb{P})$ に自然に作用する。半体として次の2つの例がよく用いられる:

- 正実数の全体にふつうの和と積の構造を与えて得られる半体 $\mathbb{R}_{>0} = (\mathbb{R}_{>0}, +, \cdot)$.

- 実数全体に和として2項演算 \max を, 積としてふつうの和 $+$ を考えて得られる半体 $\mathbb{R}^T = (\mathbb{R}, \max, +)$. 同型な半体 $\mathbb{R}^{\text{trop}} = (\mathbb{R}, \min, +)$ もよく用いられる. どちらも実トロピカル半体と呼ばれる.

例 3.2 (針孔付き曲面). s_Σ を針孔付き曲面 Σ の理想三角形分割およびそのフリップから得られる種子形態とする. 付随した対象を下付き記号 Σ で表すことにする.

- 交換グラフ $\text{Exch}_\Sigma := \text{Exch}_{s_\Sigma}$ は Σ のタグ付き Ptolemy グラフ (tagged Ptolemy graph) と呼ばれるものに同型であり, Ptolemy グラフは Exch_Σ の部分グラフである. 写像類 $\phi \in MC(\Sigma)$ に付随した edge path f_ϕ は変異ループを代表し, 群埋め込み $MC(\Sigma) \rightarrow \Gamma_\Sigma$, $\phi \mapsto [f_\phi]_{s_\Sigma}$ が得られる.
- § 2.1 で触れた Teichmüller 空間 $\widehat{T}(\Sigma)$ 上の Fock–Thurston 座標により, $MC(\Sigma)$ 同変な同型 $X_\bullet : \widehat{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_s(\mathbb{R}_{>0})$ が得られる. 同様に測度付きラミネーションの空間 $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$ 上の剪断座標により, $MC(\Sigma)$ 同変な同型 $x_\bullet : \widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_s(\mathbb{R}^T)$ が得られる.

3.2. 変異ループの符号安定性

交換グラフの辺 $v \xrightarrow{k} v'$ に付随したトロピカルクラスター変換 $\mu_k^{\text{trop}} := \mu_k^x(\mathbb{R}^{\text{trop}}) : \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\text{trop}}) \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ は $w \in \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ に対し, 次のように書ける:

$$x_i^{(v')}(\mu_k(w)) = \begin{cases} -x_k^{(v)}(w) & \text{if } i = k, \\ x_i^{(v)}(w) + [\text{sgn}(x_k^{(v)}(w))b_{ik}^{(v)}]_+ x_k^{(v)}(w) & \text{if } i \neq k. \end{cases} \quad (3.3)$$

特に, $\epsilon \in \{+, -\}$ に対して $\epsilon x_k^{(v)} \geq 0$ で定義される半空間 $\mathcal{H}_{k,\epsilon}^{(v)}$ 上線形であることがわかる. この線形写像の座標系 $(x_i^{(v)})_{i \in I}$ に関する表現行列を $E_{k,\epsilon}^{(v)}$ と書く.

Exch_s 内の edge path (3.1) の点 $w \in \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ における符号を, 次で定まる符号列 $\epsilon_\gamma(w) = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_{h-1}) \in \{+, 0, -\}^h$ として定義する:

$$\epsilon_\nu := \text{sgn}(x_{k_{i(\nu)}}^{(v_i(\nu))}(\mu_{\gamma_{\leq i(\nu)}}(w))), \quad \nu = 0, \dots, h-1.$$

ここで $\gamma_{\leq i} : v_0 \xrightarrow{(k_0, \dots, k_{i-1})} v_i$ は v_0 から v_i までの部分 path, $(k_{i(0)}, \dots, k_{i(h-1)})$ は添字の列 $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_{m-1})$ の中で I の元に対応する部分列である.

符号 $\epsilon_\gamma(w)$ が strict, つまり $\epsilon_\gamma(w) \in \{+, -\}^h$ が成り立つときには PL 写像 $\mu_\gamma^{\text{trop}} := \mu_\gamma^x(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ は w の近傍上で線形であり, その表現行列は $E_\gamma^{\epsilon_\gamma(w)} = J_{k_m} \cdots J_{k_1}$ と分解される. ここで

$$J_{k_i} := \begin{cases} E_{k_{i(\nu)}, \epsilon_\nu}^{(v_i(\nu))} & (k_i = k_{i(\nu)} \in I \text{ のとき}), \\ P_{k_i} & (k_i \text{ が互換のとき}). \end{cases}$$

P_σ は互換 σ の表現行列である.

定義 3.3 (符号安定性). Exch_s 内の edge path (3.1) が変異ループ $\phi := [\gamma]_s$ を代表すると仮定する. $\Omega \subset \mathcal{X}_{(v_0)}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ を $\mathbb{R}_{>0}$ による定数倍作用で不変な部分集合とする. このとき γ が Ω 上符号安定 (sign-stable) であるとは, strict な符号列 $\epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}} \in \{+, -\}^h$ が存在して, 任意の $w \in \Omega \setminus \{0\}$ に対して自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ であって

$$\epsilon_\gamma(\phi^{n_0}(w)) = \epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}}$$

が全ての $n \geq n_0$ について成り立つものが取れることをいう. 符号 $\epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}}$ を γ の Ω における安定符号と呼ぶ. 行列 $E_{\phi, \Omega}^{(v_0)} := E_{\gamma}^{\epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}}(w)}$ を安定表現行列と呼ぶ.

定理 3.4 (Perron–Frobenius 性). Exch_s 内の edge path (3.1) が変異ループ $\phi = [\gamma]_s$ を代表し, Ω 上符号安定であると仮定する. このとき安定表現行列 $E_{\phi, \Omega}^{(v_0)}$ のスペクトル半径は正固有値 $\lambda_{\phi, \Omega} \geq 1$ で実現される. また, 対応する固有ベクトルが Ω 内に存在する.

各 $v_0 \in \text{Exch}_s$ に対し, $\mathcal{C}_{(v_0)}^{\pm} := \{w \in \mathcal{X}_{(v_0)}(\mathbb{R}^{\text{trop}}) \mid \pm x_i^{(v_0)}(w) \geq 0, i \in I\}$ とおく. 任意の path $\gamma : v_0 \rightarrow v$ はこれらの錐の内部で一定の符号を持ち, 種子形態 $\pm s$ に対するトロピカル符号と呼ばれるものに一致する. この意味で $\mathbb{R}_{>0}$ 不変集合

$$\Omega_{(v_0)}^{\text{can}} := \text{int } \mathcal{C}_{(v_0)}^+ \cup \text{int } \mathcal{C}_{(v_0)}^-$$

での符号安定性は最も基本的である. 変異ループ ϕ が $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$ 上符号安定な代表 path を持つとき, 正固有値 $\lambda_{\phi} := \lambda_{\phi, \Omega_{(v_0)}^{\text{can}}}$ をクラスター伸縮因子 (cluster stretch factor) と呼ぶ.

上述の符号安定性は代表 path の選択に依存することに注意する. 変異ループ ϕ は任意の代表 path $\gamma : v_0 \rightarrow v$ が $\mathbb{R}_{>0}$ 不変集合 $\mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{X}_{(v_0)}(\mathbb{Q}^{\text{trop}})$ 上で符号安定なとき, 一様に符号安定 (uniformly sign-stable) であるという. ここで $\mathbb{Q}^{\text{trop}} := (\mathbb{Q}, \min, +) \subset \mathbb{R}^{\text{trop}}$. 定義の仕方から, これは変異ループ自身の性質である. このとき特に各代表 path $\gamma : v_0 \rightarrow v$ が $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$ 上で符号安定なことが分かり, クラスター伸縮因子が定まる.

3.3. 主定理

(1) 擬 Anosov 性と符号安定性. s_{Σ} を針孔付き曲面から定まる種子形態とする (例 3.2). 特に各写像類 $\phi \in MC(\Sigma)$ は変異ループ $\phi = [f_{\phi}]_{s_{\Sigma}} \in \Gamma_{\Sigma}$ を定める (同じ記号で表す). 次が写像類の擬 Anosov 性の符号安定性による特徴付けである:

定理 3.5 ([IK]). 針孔付き曲面 Σ 上の写像類 ϕ に対し, 次は同値である:

1. 写像類 ϕ は擬 Anosov.
2. 変異ループ ϕ は一様に符号安定.
3. 写像類 ϕ は $S\mathcal{X}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ 上で南北力学系をもち, 吸い込み/湧き出し点はいずれもアンサンブル射の像 $\mathcal{U}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}}) := p^{\text{trop}}(\mathcal{A}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}})) \subset \mathcal{X}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$ に属する.

このとき, 変異ループ ϕ のクラスター伸縮因子は伸縮因子 λ_{ϕ} に一致する.

また, 一般の種子形態において一様に符号安定な変異ループは [Ish19] の意味でクラスター擬 Anosov である (逆は成り立たない).

(2) クラスター変換の代数的エントロピー. 代数的トーラス上の双有理写像 $\varphi : \mathbb{G}_m^N \rightarrow \mathbb{G}_m^N$ の代数的エントロピーは

$$\mathcal{E}_{\varphi}^{\text{alg}} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\deg(\varphi^n))$$

により定義される. $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$ 上で符号安定な代表 path をもつ変異ループ ϕ については, その座標表示 $\phi_{(v_0)}^z$, $z \in \{a, x\}$ の代数的エントロピーを次のように評価できる. 代数的エントロピーは双有理写像による共役で不変であり, $\mathcal{E}_{\phi}^z := \mathcal{E}_{\phi_{(v_0)}^z}^{\text{alg}}$ は頂点 v_0 の選択によらないことに注意する.

定理 3.6 ([IK19]). $\phi = [\gamma]_s$ を $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$ 上符号安定な代表 $\text{path } \gamma : v_0 \rightarrow v$ をもつ変異ループとすると,

$$\begin{aligned}\log \rho(\check{E}_\phi) &\leq \mathcal{E}_\phi^a \leq \log R_\phi, \\ \log \rho(E_\phi) &\leq \mathcal{E}_\phi^x \leq \log R_\phi.\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで安定表現行列 $E_\phi := E_{\phi, \Omega}^{(v_0)}$ に対して $\check{E}_\phi := (E_\phi^T)^{-1}$, $R_\phi := \max\{\rho(E_\phi), \rho(\check{E}_\phi)\}$ である.

この評価は次の予想のもと, 等式に強められる:

予想 3.7 (スペクトル双対性予想). 任意の変異ループ ϕ の一般の代表 $\text{path } \gamma$ に対し, 各点での表現行列 $E_\gamma^{\epsilon_\gamma(w)}$ と $\check{E}_\gamma^{\epsilon_\gamma(w)}$ の特性多項式は全体の符号を除いて等しい. 特にこれらの行列のスペクトル半径は等しい.

針孔付き曲面に付随する種子形態 s_Σ においては, 予想 3.7 は任意の変異ループ, その代表 path および $\mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\text{top}})$ 上の任意の点における符号について正しい. 特に擬 Anosov 写像類 ϕ について, 定理 3.5 および定理 3.6 から

$$\mathcal{E}_\phi^a = \mathcal{E}_\phi^x = \log \lambda_\phi = \mathcal{E}_\phi^{\text{top}}$$

が結論される. ここで $\mathcal{E}_\phi^{\text{top}}$ は ϕ を代表する擬 Anosov 微分同相の位相的エントロピーである. また, s_Σ に対するクラスター多様体の幾何学的な記述から, \mathcal{E}_ϕ^a (resp. \mathcal{E}_ϕ^x) は Σ 上の飾り付き捻れ SL_2 局所系 (resp. 枠付き PGL_2 局所系) のモジュライ空間への作用の代数的エントロピーと解釈できる.

参考文献

- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [FG07] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichmüller theory, Vol. I, 647–684; IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [FG09] —, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., **42** (2009), 865–930.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poénaru, *Thurston’s work on surfaces*, Mathematical Notes, **48**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [GHKK18] M. Gross, P. Hacking and S. Keel and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 497–608.
- [IK19] T. Ishibashi and S. Kano, *Algebraic entropy of sign-stable mutation loops*, arXiv:1911.07587.
- [IK] —, *Sign stability of mapping classes on marked surfaces*, in preparation.
- [Ish19] T. Ishibashi, *On a Nielsen–Thurston classification theory for cluster modular groups*, Annales de l’Institut Fourier, **69** (2019), 515–560.
- [Pen] R. C. Penner, *Decorated Teichmüller theory*, QGM Master Class Series, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.
- [PP93] A. Papadopoulos and R. C. Penner, *The Weil–Petersson symplectic structure at Thurston’s boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), 891–904.

Topological groups described by their continuous homomorphisms or small subgroups

Víctor Hugo Yañez (Ehime University)*

Abstract

Continuing the classical work of Bohr on almost periodic functions, in 1940 von Neumann introduced the concept of a *minimally almost periodic* (MinAP) group. A topological group is MinAP if all its non-trivial homomorphisms to a compact group are discontinuous. Around the same time, the 5th problem of Hilbert was resolved in the works of Gleason, Montgomery-Zippin and Yamabe who proved that Lie groups are precisely the locally compact NSS groups. A topological group is NSS if it has a neighbourhood of its identity containing no non-trivial subgroup. We examine the history of MinAP groups, from von Neumann to the recent progress of Dikranjan and Shakhmatov. By looking for a connection between NSS and MinAP topological groups, we are led to compare groups described by their small subgroups, with those described by their continuous homomorphisms.

1. Notations and preliminaries

We assume that every topological space is Hausdorff. If X is a topological space, given $A \subseteq X$ we denote by $cl_X(A)$ the *closure* of A in X . If G is a group and $g \in G$ is an element of G we denote by $\langle g \rangle$ the smallest subgroup of G containing g . A group is said to be *Abelian* if its operation is commutative.

For a group G with an operation \cdot_G , there is a natural product mapping $m_G : G \times G \rightarrow G$ such that $m_G(x, y) = x \cdot_G y$ for all $x, y \in G$. Similarly, there is an *inversion* mapping $in_G : G \rightarrow G$ such that $in_G(x) = x^{-1}$ for all $x \in G$.

A topology τ defined on a group G is a *group topology* on G if the product mapping m_G and the inversion mapping i_G are continuous in the topological product $(G, \tau) \times (G, \tau)$ and in the topology τ for G respectively. The pair (G, τ) of a group with such a topology is called a *topological group*. In what follows, when we refer to a group G as being a topological group (without specifying τ), we assume the group G to be equipped with some Hausdorff group topology.

Symbols \mathbb{Z} and \mathbb{C} denote the groups of integer and complex numbers, respectively.

This talk was presented as part of the author's Ph.D. studies at the Graduate School of Science and Engineering of Ehime University. The author was supported by the Research Fellowship for Young Scientists (DC2) no. 19J14198 of the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS).

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 22A05, Secondary 20K27, 54H11.

Keywords: Minimally almost periodic group, locally compact group, NSS group, Lie group, small subgroup generating property.

*e-mail: victor_yanez@comunidad.unam.mx

web: https://researchmap.jp/hugo_yanez

\mathbb{N} denotes the set of natural numbers, and \mathbf{P} its subset of prime numbers.

Definition 1.1. Let G be an Abelian group and $p \in \mathbf{P} \cup \{0\}$.

- (i) A subset X of G is said to be *p-independent* provided that for every $n \in \mathbb{N}$, each pairwise distinct elements $x_1, \dots, x_n \in X$ and arbitrary integers $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, the equation $\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$ implies that $m_i \equiv 0 \pmod{p}$ for all $i = 1, \dots, n$.
- (ii) The symbol $r_p(G)$ denotes the maximal cardinality of a *p-independent* subset of G (which exists by Zorn's lemma).
- (iii) The cardinal $r_p(G)$ is called the *p-rank* of G .
- (iv) The cardinal $r(G) = r_0(G) + \sum_{p \in \mathbf{P}} r_p(G)$ is called the *rank* of G .

2. Hilbert's Fifth Problem and topological groups without small subgroups (NSS groups)

Definition 2.1. Let G be a topological group. We say that G has *no small subgroups* (commonly abbreviated to NSS) if there exists an open neighbourhood of the identity of G containing no non-trivial subgroups of G .

The class of NSS groups played a fundamental role for the solution of the classical 5th problem of Hilbert from the 1900s. This classical problem was in regard to a characterization for locally compact groups which are simultaneously topological manifolds (known commonly as *Lie groups*). The solution, which is due to Gleason [11], Montgomery-Zippin [15] and Yamabe [26], involved the class of groups from Definition 2.1:

Theorem 2.2. *A topological group is Lie if and only if it is both locally compact and NSS.*

3. Topological groups described by their continuous homomorphisms

3.1. Von Neumann's work on almost periodic functions

For a topological space X , the set $B(X)$ denotes the family of all bounded complex-valued continuous functions on X equipped with the topology of uniform convergence. Given a topological group G , an element $g \in G$ and a complex-valued function f on G , we define the translation of f by g as the function $f_g : G \rightarrow \mathbb{C}$ satisfying $f_g(x) = f(xg)$ for all $x \in G$.

Definition 3.1. Let G be a topological group. A function $f \in B(G)$ is almost periodic if every sequence $\{f_{g_n} : n \in \mathbb{N}\}$ of translations of f by elements $g_n \in G$ ($n \in \mathbb{N}$) has a subsequence which is uniformly convergent in $B(G)$.

Real-valued almost periodic functions play a central role in the works of Bohr pertaining to harmonic analysis, and years later the same concept was considered by von Neumann in the context of complex-valued functions. In [17, Theorem 36(i)], von Neumann proved that the family of all almost periodic functions of a topological group G separate its points when G is either compact or locally compact Abelian (and separable). This result motivated the following two concepts:

Definition 3.2 ([17, Definition 16]). A topological group G is called:

- (a) *maximally almost periodic* (MAP) if its family of almost periodic functions separates its points.
- (b) *minimally almost periodic* (MinAP) if its family of almost periodic functions is comprised of only the constant functions.

The above mentioned result of von Neumann implies that compact groups and (separable) locally compact Abelian groups are MAP. von Neumann also showed that almost periodic functions can be replaced by continuous homomorphisms in Definition 3.2:

Theorem 3.3 ([17, Theorem 3](i)). *Let G be a topological group.*

- (i) *G is MinAP if and only if it admits no non-trivial continuous homomorphism to a unitary group.*
- (ii) *G is MAP if and only if the family of continuous homomorphisms to unitary groups separate its points.*

By the classical Peter-Weyl-van Kampen theorem, every compact group is isomorphic to a closed subgroup of a product of unitary groups, so Theorem 3.3 can be reformulated as follows:

Corollary 3.4. *Let G be a topological group.*

- (i) *G is MinAP if and only if it admits no non-trivial continuous homomorphism to a compact group.*
- (ii) *G is MAP if and only if the family of continuous homomorphisms to compact groups separate its points.*

In [18], von Neumann and Wigner focus on the class of minimally almost periodic groups. In their paper, they construct a handful of examples of minimally almost periodic groups [18, Section 5] via linear transformations. They note, however, that constructing groups in this class is not a trivial effort.

The class of minimally almost periodic groups gained a great deal of attention from experts in topological group theory thanks to two high-profile open problems which we shall describe in the next two subsections.

3.2. The connection of MinAP groups to extreme amenability

The first problem is related to the concept of *extremely amenable* groups.

Definition 3.5. A topological group is *extremely amenable* (or satisfies the *fixed point in compacta property*) if every continuous action of it on a compact space admits a fixed point.

Extremely amenable groups appeared in the context of Harmonic Analysis and Dynamical Systems (see [10, 19]). These groups are intimately connected to the class of MinAP groups by the following fact:

Fact 3.6. Every extremely amenable group is minimally almost periodic.

It is known that the converse implication does not hold in general. However, whether the converse implication holds or not in the realm of Abelian groups remains as a major open problem to this day:

Problem 3.7 (Pestov, 1998). Is every Abelian MinAP topological group extremely amenable?

A topological group is *monothetic* if it contains a dense subgroup which is isomorphic to the group of integers. Every monothetic group is Abelian. The following particular version of Problem 3.7 was posed by Glasner as far back as 1988:

Problem 3.8 (Glasner, 1988). Must every monothetic MinAP topological group be extremely amenable?

This particular version of Glasner has important implications in number theory. A negative answer to Problem 3.8 of Glasner would provide an answer to the following ancient problem (see [24]) of combinatoric number theory:

Problem 3.9. If S is a big set of the integers, is it true that the difference $S - S$ is a Bohr neighbourhood of 0?

Problems 3.7, 3.8 and 3.9 are still open.

3.3. Algebraic structure of MinAP groups

The difficulty in the construction of MinAP groups sparked a great deal of interest in regards to their algebraic structure. First examples of MinAP groups were the additive groups of some topological vector spaces [3], as explained in [14]. Nienhuys [16] constructed a connected monothetic group of cardinality at most continuum which is minimally almost periodic. This implies the existence of a MinAP group topology on the group \mathbb{Z} of integers.

In 1984 Protasov posed the question of whether *every* Abelian group admits a minimally almost periodic group topology. In 1989 Remus provided an example of a bounded Abelian group which does not admit a MinAP group topology, so Comfort proposed the following modification of the original question of Protasov:

Problem 3.10 (Comfort, 1990 [1, Question 521]). Does every Abelian group which is not of bounded order admit a minimally almost periodic group topology?

The bounded case was resolved by Gabrielyan [9] who showed that a bounded Abelian group admits a minimally almost periodic group topology if and only if all of its leading Ulm-Kaplansky invariants are infinite. The general case was resolved by Dikranjan and Shakhmatov [6] in 2014:

Theorem 3.11 (Dikranjan-Shakhmatov [6, Theorem 3.3]). *For an Abelian group G , the following conditions are equivalent:*

- (i) G admits a minimally almost periodic group topology;
- (ii) G is connected with respect to its Markov-Zariski group topology [5];
- (iii) for every $n \in \mathbb{N}$, the subgroup $nG = \{ng : g \in G\}$ of G is either trivial or infinite.

3.4. Classes $\text{MinAP}(\mathcal{C})$ for various classes \mathcal{C} of topological groups

The author proposed the following terminology in [25]:

Definition 3.12. Let \mathcal{C} denote a class of topological groups. We say that a topological group is $\text{MinAP}(\mathcal{C})$ (or satisfies the $\text{MinAP}(\mathcal{C})$ property) if the only continuous homomorphism to a group contained in the class \mathcal{C} is the trivial homomorphism.

The following remark is obtained from Corollary 3.4 in this new terminology:

Remark 3.13. The class of $\text{MinAP}(\text{Compact})$ topological groups coincides with the class of MinAP topological groups of von Neumann.

We are interested in finding natural classes \mathcal{C} of topological groups for which the class of $\text{MinAP}(\mathcal{C})$ groups becomes a proper subclass of MinAP groups. A necessary condition for this is that \mathcal{C} has at least one group which is not MAP .

Naturally, if a class \mathcal{D} is a subclass of \mathcal{C} , then

$$\text{MinAP}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{MinAP}(\mathcal{D}).$$

Theorem 3.14 ([25]). *The following diagram describes implications for all topological groups. In Figure 1 below LC stands for “locally compact”.*

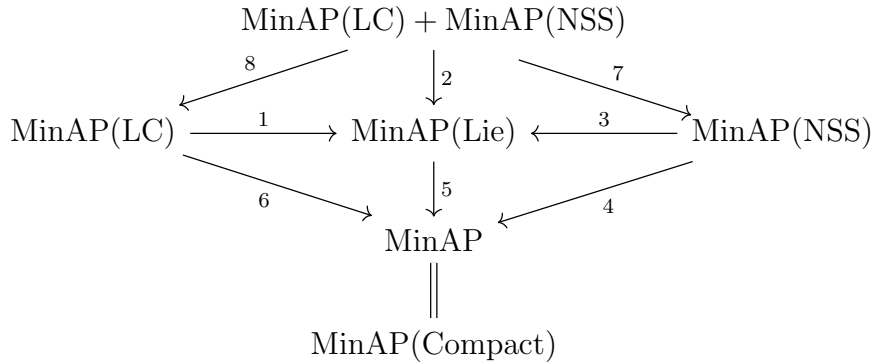


Figure 1: Diagram of implications between $\text{MinAP}(\mathcal{C})$ properties

Arrows 2–7 are not reversible in general. The reversibility of arrow 1 is unclear. For Abelian groups, arrows 1 and 5 of Figure 1 become reversible:

Theorem 3.15 ([25]). *For an Abelian topological group G , properties MinAP , $\text{MinAP}(\text{Locally compact})$ and $\text{MinAP}(\text{Lie})$ are equivalent.*

4. Topological groups with many small subgroups

4.1. The property DW of Dierolf and Warken

Definition 4.1 (Implicitly used in [4]). Let G be a topological group. We say that G satisfies property DW if for every open neighbourhood U of the identity of G , every element $g \in G$ can be written as $g = \prod_{i=1}^n x_i$ for some $x_1, \dots, x_n \in G$ such that $\langle x_i \rangle \subseteq U$ for $i = 1, \dots, n$.

In [4, Proof of Theorem 1.1], Dierolf and Warken essentially prove the following

Proposition 4.2. *A topological group with property DW is MinAP.*

The original theorem of Dierolf and Warken [4] can thus be stated as follows:

Theorem 4.3 ([4, Theorem 1.1]). *Every topological group G is topologically isomorphic to a closed subgroup of some topological group H_G (depending on G) which satisfies property DW. As a consequence, the group H_G is MinAP.*

4.2. The SSGP property of Gould

Gould [12] isolated Proposition 4.2 from the result of Dierolf and Warken and considered the following class of topological groups:

Definition 4.4 (Originally by Gould [12]). A topological group G has the *small subgroup generating property* (SSGP) if and only if for every open neighbourhood U of the identity of G , the set of all $g \in G$ such that $g = \prod_{i=1}^n x_i$ for some elements $x_1, \dots, x_n \in U$ satisfying $\langle x_i \rangle \subseteq U$ ($i = 1, \dots, n$), is dense in G .

The difference between the SSGP property of Gould and property DW used by Dierolf and Warken is subtle, but none the less non-trivial. Property DW is an algebraic expression for all elements of the group depending on the neighbourhoods of the identity. Meanwhile, in Definition 4.4, the requirement is that the set of elements which can be represented in the way proposed in property DW is topologically dense. Gould [12] proved that every SSGP topological group is MinAP, so

$$\text{DW} \rightarrow \text{SSGP} \rightarrow \text{MinAP}. \quad (1)$$

Theorem 4.5 ([22]). *For groups of bounded order, properties SSGP and DW coincide.*

4.3. A family of $\text{SSGP}(\alpha)$ properties of Dikranjan and Shakhmatov

Dikranjan and Shakhmatov invented an operator-based approach to define an entire series of SSGP-type properties in [8]. This operator (denoted by \mathbf{S}_G for a topological group G) was designed along with a series of very carefully crafted iterations (which are denoted by $\mathbf{S}_G^{(\alpha)}$ for every ordinal α). The iterations of this operator are monotone with respect to subsets and with respect to ordinals:

Proposition 4.6 ([8, Lemma 4.5, Lemma 4.8]). *The following hold:*

- (i) *The operator $\mathbf{S}_G^{(\alpha)}$ is monotone with respect to subsets. So $X \subseteq Y \subseteq G$ implies that $\mathbf{S}_G^{(\alpha)}(X) \subseteq \mathbf{S}_G^{(\alpha)}(Y) \subseteq \mathbf{S}_G^{(\alpha)}(G)$.*
- (ii) *The operators $\mathbf{S}_G^{(\alpha)}$ are monotone with respect to ordinals. So $\beta \leq \alpha$ implies that $\mathbf{S}_G^{(\beta)}(X) \subseteq \mathbf{S}_G^{(\alpha)}(X)$ for all $X \subseteq G$.*

With this iterated operator, they define the following:

Definition 4.7 (Dikranjan-Shakhmatov [8]). A topological group G is $\text{SSGP}(\alpha)$ (or satisfies the $\text{SSGP}(\alpha)$ property) for some ordinal α if and only if $\mathbf{S}_G^{(\alpha)}(U) = G$ is satisfied for every neighbourhood of the identity of G .

The above definition is an extension of the SSGP property, as it was shown in [8] that the $\text{SSGP}(1)$ property coincides with the original SSGP property of Gould. Comfort and Gould had pioneered a concept of a countable number of $\text{SSGP}(n)$ properties (for every integer $n \in \mathbb{N}$) in [2]. The series of properties defined by Dikranjan and Shakhmatov, however, are substantially more general as they are defined for every ordinal (including infinite ones). Moreover, these two concepts were shown to coincide in the realm of Abelian groups ([8, Corollary 6.3]) when the index is a natural number.

Dikranjan and Shakhmatov prove in [8, Proposition 5.3(ii)] that every $\text{SSGP}(\alpha)$ group admits no non-trivial continuous homomorphism to an NSS group, i.e. it is $\text{MinAP}(\text{NSS})$ in the terminology of Definition 3.12. Combining this with the hierarchy described in [8, Proposition 5.1] and arrow 4 of Figure 1, we obtain the following transfinite chain of implications:

$$\begin{aligned} \text{SSGP} = \text{SSGP}(1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{SSGP}(n) \rightarrow \text{SSGP}(n+1) \cdots \rightarrow \text{SSGP}(\alpha) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \text{SSGP}(\alpha+1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{MinAP}(\text{NSS}) \rightarrow \text{MinAP}. \end{aligned} \quad (2)$$

Definition 4.8 ([25]). We say that a topological group is $\text{SSGP}(\infty)$ if and only if it is an $\text{SSGP}(\alpha)$ group for some ordinal α .

As an application of a theorem of Yamabe [26], we proved the following

Theorem 4.9 ([25]). *Every $\text{SSGP}(\infty)$ group is $\text{MinAP}(\text{Locally compact})$.*

Combining this with (1), (2) and terminology from Definition 4.8, we get

$$\text{DW} \rightarrow \text{SSGP} \rightarrow \text{SSGP}(\infty) \rightarrow \text{MinAP}(\text{NSS}) + \text{MinAP}(\text{Locally compact}). \quad (3)$$

Therefore, the implications in (3) can be added “on top” of Figure 1.

4.4. Abelian $\text{MinAP}(\text{NSS})$ groups are precisely $\text{SSGP}(\infty)$

The following theorem bridges topological groups described by continuous homomorphisms with those described by abundance of small subgroups.

Theorem 4.10 ([25]). *Properties $\text{SSGP}(\infty)$ and $\text{MinAP}(\text{NSS})$ are equivalent for abelian topological groups.*

Theorems 3.15 and 4.10 lead to the following diagram for Abelian groups:

$$\begin{array}{ccccc} \text{MinAP}(\text{NSS}) & \xleftarrow[\text{Abelian}]{7} & & \xrightarrow{} & \text{SSGP}(\infty) \\ & \downarrow 3 & & & \downarrow 9 \\ \text{MinAP} & \xleftarrow[\text{Abelian}]{} & \text{MinAP}(\text{Lie}) & \xleftarrow[\text{Abelian}]{} & \text{MinAP}(\text{Locally compact}) \end{array}$$

Figure 2: Simplified diagram of implications in Abelian topological groups

Corollary 4.11 ([25]). *An Abelian topological group G satisfies the equivalence*

$$\text{MinAP}(\text{Locally compact}) + \text{MinAP}(\text{NSS}) \iff \text{MinAP}(\text{Lie})$$

if and only if G has the $\text{SSGP}(\infty)$ property.

The following example shows that the converse of Theorem 4.9 does not hold, and Theorem 4.10 fails for non-Abelian topological groups.

Example 4.12 (Shakhmatov). Let $S(\mathbb{N})$ be the group of all bijections of \mathbb{N} with the composition of maps as its group operation, equipped with the subspace topology it inherits from the Tychonoff product $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ when \mathbb{N} is considered with its discrete topology. Then, $S(\mathbb{N})$ is a complete separable metric (Polish) group which is both $\text{MinAP}(\text{NSS})$ and $\text{MinAP}(\text{Locally compact})$ but is not $\text{SSGP}(\infty)$.

4.5. Algebraic structure of SSGP-type groups and $\text{MinAP}(\text{NSS})$ groups

The following problem is a natural heir of Problem 3.10 of Comfort and Protasov:

Problem 4.13 ([2, Comfort and Gould]). Which Abelian groups admit an SSGP group topology?

In the series of papers [12, 13, 2] Gould constructs a variety of SSGP groups. He also provides several examples of groups which can never be equipped with an SSGP group topology. One aspect of note, however, is that the results of Gould required very careful manual manipulation of group metrics, highlighting the difficulty of obtaining a full answer of Problem 4.13.

Definition 4.14 ([7, Definition 7.2]). For an Abelian group the cardinal $r_d(G) = \min\{r(nG) : n \in \mathbb{N}^+\}$ is called the *divisible rank* of G .

Problem 4.13 of Comfort and Gould was solved even for the wider class of $\text{SSGP}(\infty)$ topological groups. The result was achieved in three steps. The first step concerning torsion groups was made by Comfort and Gould themselves, by showing that a torsion group admits an SSGP group topology if and only if it admits a MinAP group topology. The second step concerning groups of infinite divisible rank was done by Dikranjan and Shakhmatov in [8]. The remaining case of positive finite divisible rank was then reduced by them to a very specific question, which in turn was recently resolved in [20].

Theorem 4.15 ([8, 20]). *The following are equivalent for an Abelian group G :*

- (a) G admits an SSGP group topology,
- (b) G admits an $\text{SSGP}(\infty)$ group topology, and
- (c) one of the two conditions is satisfied:
 - (i) G is of infinite divisible rank, or
 - (ii) the quotient $H = G/t(G)$ of G by its torsion part $t(G)$ has finite free rank $r_0(H)$ and $r(H/A) = \omega$ for some (equivalently, every) free subgroup A of H such that H/A is torsion.

Combining this with Theorem 4.10, we obtain a complete description of Abelian groups which admit a $\text{MinAP}(\text{NSS})$ group topology:

Corollary 4.16 ([25]). *An Abelian group G admits a $\text{MinAP}(\text{NSS})$ group topology if and only if G satisfies condition (c) of Theorem 4.15.*

4.6. Algebraic structure of DW groups

Thanks to Theorems 3.11 and 4.5, it only remains to describe which unbounded groups admit property DW.

Theorem 4.17 ([22]). *A torsion Abelian group G admits a group topology with property DW if and only if every p -component of G admits a group topology with property DW.*

For Abelian groups of positive finite 0-rank we have the following necessary condition:

Theorem 4.18 ([22]). *Let G be an Abelian group such that $0 < r_0(G) < \infty$. If G admits a group topology with property DW, then there exists a prime number p such that the p -rank $r_p(G)$ of G is infinite.*

As for the construction of these topologies on Abelian groups, we have the following sufficient condition for countable groups:

Theorem 4.19 ([23]). *If a countable Abelian group G possesses one of the following properties, then it admits a metric group topology with property DW:*

- (i) G has infinite $r_0(G)$ rank,
- (ii) G is torsion and every non-trivial p -component G_p of G is either bounded with all of its leading Ulm-Kaplansky invariants infinite, or it has infinite divisible rank $r_d(G_p)$.

Theorem 4.20 ([23]). *Let G be an Abelian torsion group which is either divisible or countable. Then G admits a group topology with property DW if and only if each of its non-trivial p -components G_p admits an SSGP group topology.*

For non-Abelian groups, we have the following results for free groups:

Theorem 4.21 ([21, Theorem 2.2 and 2.3]). *The following hold:*

- (i) *A free group with a countably infinite set of generators admits a metric group topology with property DW.*
- (ii) *A free group with infinitely many generators admits a group topology with property DW.*

By contrast, the symmetric groups $S(X)$ with the topology of pointwise convergence do not admit an SSGP(∞) group topology by [8, Example 5.4(d)], so they cannot have a group topology with property DW by (3).

References

- [1] W. Comfort, *Problems on topological groups and other homogeneous spaces*, Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed, editors, North-Holland, Amsterdam, (1990), 313–347.
- [2] W. Comfort and F. R. Gould, *Some classes of minimally almost periodic topological groups*, Appl. Gen. Topol. 16 (2015), 141–165.
- [3] M. Day, *The spaces L_p with $0 < p < 1$* , Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816–823.

- [4] S. Dierolf and S. Warken, *Some examples in connection with Pontryagin's duality theorem*, Arch. Math. 30 (1978), 599–605.
- [5] D. Dikranjan and D. Shakhmatov, *The Markov-Zariski topology of an Abelian group*, J. Algebra 324 (2010), no. 6, 1125–1158.
- [6] D. Dikranjan and D. Shakhmatov, *Final solution of Protasov-Comfort's problem on minimally almost periodic group topologies*, preprint, arXiv:1410.3313.
- [7] D. Dikranjan and D. Shakhmatov, *A complete solution of Markov's problem on connected group topologies*, Adv. Math. 286 (2016), 286–307.
- [8] D. Dikranjan and D. Shakhmatov, *Topological groups with many small subgroups*, Topol. Appl. 200 (2016), 101–132.
- [9] S. Gabrielyan, *Finitely generated subgroups as von Neumann radicals of an Abelian group*, Mat. Stud. 38 (2012), no. 2, 124–138.
- [10] E. Glasner, *On minimal actions of Polish groups*, Topol. Appl. 85 (1998), 119–125.
- [11] A. M. Gleason, *Groups without small subgroups*, Ann. of Math. 56 (1952), 193–212.
- [12] F. Gould, *On certain classes of minimally almost periodic groups*, Thesis (Ph.D.), Wesleyan University (2009), 136 pp. ISBN: 978-1109-22005-6.
- [13] F. Gould, *An SSGP topology for \mathbb{Z}^ω* , Topology Proc. 44 (2014), 389–392.
- [14] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [15] D. Montgomery and L. Zippin, *Small subgroups of finite-dimensional groups*, Ann. of Math. 56 (1952), 213–241.
- [16] J. Nienhuys, *A solenoidal and monothetic minimally almost periodic group*, Fund. Math. 73 (1971), 167–169.
- [17] J. von Neumann, *Almost periodic functions in a group I*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 445–492.
- [18] J. von Neumann and E. Wigner, *Minimally almost periodic groups*, Ann. Math. 41 (1940), 746–750.
- [19] V. Pestov, *Some universal constructions in abstract topological dynamics*, Topological Dynamics and Applications. A Volume in Honor of Robert Ellis, Contemp. Math. 215 (1998), 83–99.
- [20] D. Shakhmatov and V.H. Yañez, *SSGP topologies on abelian groups of positive finite divisible rank*, Fundam. Math. 244 (2019), 125–145.
- [21] D. Shakhmatov and V.H. Yañez, *SSGP topologies on free groups of infinite rank*, Topol. Appl. 259 (2019), 384–410.
- [22] D. Shakhmatov and V.H. Yañez, *On algebraic structure of groups with a property of Dierolf and Warken*, (2020), in progress.
- [23] D. Shakhmatov and V.H. Yañez, *A general construction of metric (algebraic) SSGP group topologies*, (2020), in progress.
- [24] W.A. Veech, *The equicontinuous structure relation for minimal Abelian transformation groups*, Amer. J. Math. 90 (1968), 723–732.
- [25] V.H. Yañez, *Strengthening minimal almost periodicity via the classical triad resolving Hilbert's fifth problem*, submitted to Topol. Proc. (2020).
- [26] H. Yamabe, *A Generalization of A Theorem of Gleason*, Ann. of Math. 2nd Series 58 no.2 (1953), 351–365.

symplectic field theory とその構成について

石川 卓 (京都大学数理解析研究所助教)*

1. 導入

簡単に説明するならば symplectic field theory (SFT) とは contact 多様体やその間の symplectic cobordism に対しての Floer homology のことである。その代数が適切な概正則曲線の数で構成されることは symplectic 多様体の Floer homology などと同様である。その構成のためには他の Floer homology の構成と同様の困難——例えば数を数えるために概正則曲線の空間を0次元の多様体にするにはどうすればよいか、あるいは多様体にできない場合にどのように数えるのか——といったことをケアする必要もあるが、SFT 特有の問題もいくつか存在する。今回の講演ではこの SFT 特有の問題についての説明を行う。

SFT の代数的な理論に関しては Eliashberg, Givental, Hofer らにより [2] で詳しく調べられており、そこにおいて多くの応用の可能性が示されている。SFT の一部である contact homology は Pardon ([6]) や Bao, Honda ([1]) により構成されていたが、一般の SFT に関しては私の [5] まで構成ができていなかった。本稿では、この論文で説明し、解決した SFT 特有の問題のうちの一つについて説明する。

まずは contact 多様体や symplectic cobordism についての基本的なことから説明する。 Y を $(2n-1)$ 次元閉多様体、 $\xi \subset TY$ を余次元1の(余方向を持つ)部分束とする。 (Y, ξ) が contact 多様体であるとは、 Y の1次微分形式 λ があって $\text{Ker } \lambda = \xi$ かつ $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ が0をとらないことをいう。(λ の向きは ξ の余方向に一致するものみ考える。) このような微分形式 λ を contact form とよぶが、これは ξ に対して一意には定まらない。実際、任意の正值函数 $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $f\lambda$ も同様の条件を満たし、逆に他の contact form は必ずこの形にかける。

一つ contact form λ を選んだとき、 Y 上のベクトル場 R_λ が $i_{R_\lambda}\lambda = 1, i_{R_\lambda}d\lambda = 0$ により定まる。このベクトル場を Reeb ベクトル場とよぶ。SFT ではこの周期解を考える。本稿では周期解とは滑らかな閉曲線 $\gamma: S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow Y$ であってある実数 $L > 0$ に対して方程式

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = L \cdot R_\lambda(\gamma(t))$$

を満たすものをいう。(L をこの周期解 γ の周期とよぶ。)

この周期解は次のようにある汎関数の臨界点ともみなせる。函数

$$\mathcal{A}: C^\infty(S^1, Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

を

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^*\lambda$$

により定めれば、この臨界点がちょうど周期解であり、そこでの値 $\mathcal{A}(\gamma)$ がちょうど周期解に一致することは容易に確かめられる。定義域 S^1 の平行移動により臨界点集合 $P = \text{Crit } \mathcal{A} \subset C^\infty(S^1, Y)$ には S^1 が作用する。この商 $\bar{P} = P/S^1$ はパラメータ付きでない周期解の空間となる。

contact form λ が Bott-Morse 条件を満たすとは、 P が多様体であって $TP = \text{Ker } D^2\mathcal{A}$ を満たすことをいう。さらに P が S^1 の和集合のとき、 λ は Morse 条件

本研究は科研費(課題番号19K23404)の助成を受けたものである。

* 〒606-8317 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: suguru@kurims.kyoto-u.ac.jp

を満たすという。任意の contact 多様体について generic な contact form は Morse 条件を満たす。

さて、SFT とはこの函数 A を Morse 函数とみなした時の Morse 複体の理論である、と述べるのはいささか強引である。symplectic 多様体の Hamiltonian に対する Floer homology などでは汎関数に対する Morse 理論と違って差し支えないものが構成され、SFT の場合にもそれをまねて理論、代数が構成されるのであるが、出来上がる代数はより複雑なものとなる。この代数に関しては [2] などを参照されたい。

次は私が実際に示したのものよりもやや弱い主張ではあるが、[5] では次が示されている。

定理 A ([5]). λ が Bott-Morse 条件を満たすとき、SFT のチェイン複体を構成することができる。そのホモロジー $H_{\text{SFT}}(Y, \xi)$ は (Y, ξ) のみにより定まり、contact form λ や構成に用いる概複素構造等の取り方によらない。

実際にはより強く、[2] の意味での generating function を、contact 多様体、symplectic cobordism、symplectic cobordisms の族に対して構成している。(これらから、それぞれチェイン複体、チェイン写像、チェインホモトピーに相当するものが構成される。)

さらに、Reeb ベクトル場の flow $\varphi_t^\lambda : Y \rightarrow Y$ が S^1 -作用を生成する場合、つまりある $L > 0$ があって $\varphi_L^\lambda = \text{id}$ のときには、ホモロジーを計算することが可能である。

定理 B ([5]). ある $L > 0$ があって $\varphi_L^\lambda = \text{id}$ のとき、 $H_{\text{SFT}}(Y, \xi)$ は $H_*(\bar{P}; \mathbb{R})$, $H_c^*(\bar{P}; \mathbb{R})$ および変数 \hbar により生成される代数のある完備化 (Novikov completion) となる。その積は次の例外を除き超可換である。

$$[p_c, q_\alpha] = \langle c, \alpha \rangle \hbar$$

ここで $c \in H_*(\bar{P}; \mathbb{R})$, $\alpha \in H_c^*(\bar{P}; \mathbb{R})$ に対応する元をそれぞれ p_c, q_α としている。

本講演では SFT の代数についてはほとんど説明しない予定である。これについては先に挙げた [2] にも詳述されているので、それを参照されたい。

2. Floer homology の一般的な話

Morse 複体では臨界点が代数の生成元であり、チェイン複体の構成のためには臨界点の間の connecting orbit を数える必要がある。例えば多様体 M 上の Morse 函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対する Morse チェイン複体では、(Sard-Smale 条件の下では)境界作用素

$$\partial \langle p \rangle = \sum_{\text{ind } q = \text{ind } p - 1} c_{p,q} \langle q \rangle \quad (1)$$

(ここで $\langle p \rangle$ は f の臨界点 $p \in M$ に対応する生成元) の係数 $c_{p,q}$ は、

$$\frac{d\ell}{dt}(t) + \nabla f(\ell(t)) = 0 \quad (2)$$

かつ

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \ell(t) = p, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \ell(t) = q \quad (3)$$

を満たす曲線 $\ell : \mathbb{R} \rightarrow M$ を、定義域 \mathbb{R} に関する平行移動を除いて数えた数に一致する。この曲線 $\ell : \mathbb{R} \rightarrow M$ たちがこの場合の connecting orbit である。(正確には

各生成元 $\langle p \rangle$ の向きを定めることで、connecting orbit も符号をつけて数えることになる。))

Floer homology においてもこの connecting orbit を数えることで代数が構成される。例としてまずは SFT や contact homology よりも簡単な Hamiltonian に対する Floer homology について考える。

symplectic 多様体 (M, ω) とは偶数次元多様体 M (その次元を $2n$ とする) とその上の 2 次閉微分形式 ω であって ω^n が 0 を取らないようなものの組であった。この場合に函数 $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ を Hamiltonian とみると、 M 上の Hamilton ベクトル場 X_H が $i_{X_H}\omega = -dH$ で定まるのであった。Hamiltonian の Floer homology では、生成元はこの Hamilton flow の周期 1 の周期解、つまり閉曲線 $\gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ であって

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X_H(\gamma(t))$$

を満たすものである。(通常は可縮な周期解のみを生成元とする。) Floer homology の場合、connecting orbit の定義にはまず概複素構造を一つ決める必要がある。この場合には M の概複素構造 J であって $\omega(\cdot, J\cdot)$ が正定値内積になるものを一つ固定して用いる。このとき周期解 γ_+ から γ_- への connecting orbit とは滑らかな曲線 $u = u(s, t) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M$ であって

$$\partial_s u + J(u)(\partial_t u - X_H(u)) = 0 \tag{4}$$

かつ

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = \gamma_-, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} u(s, \cdot) = \gamma_+ \tag{5}$$

を満たすものである。

Morse 函数の複体の場合には Sard-Smale 条件を満たすように計量を摂動することができ、その場合には $\text{ind } q = \text{ind } p - 1$ を満たす臨界点の組 p, q に対して p から q への connecting orbit は有限個となり、それを用いて (1) で定まる境界作用素はチェイン複体を構成する。一方一般に Floer homology の場合には概複素構造の変動等では connecting orbit が数えられる状況(つまり connecting orbit の空間が 0 次元の閉多様体になる状況)にはできない。([3] などを参照。) この場合を扱うために virtual technique とよばれる技術がいくつか開発されており、[3] ではそのうち倉西理論とよばれるものが論じられ、それを用いている。

倉西理論の詳細については [3] や [4] などを参照してもらうことにして、ここではそれを用いるために何を調べる必要があるのかについて簡単に説明する。

まずは考えている空間(この場合は connecting orbit の空間)のコンパクト化を考える。(「閉」多様体に対応するものを構成する。) ただし、倉西理論のためには Morse 複体の時の「 $\text{ind } q = \text{ind } p - 1$ 」のような場合(仮想次元が 0 次元になる場合)のみではなくすべての connecting orbit の空間を扱う必要がある。この場合にはコンパクト化の中には broken trajectory とよばれるもの (connecting orbit をいくつかつなげてできるもの) も含まれている。

次に、このコンパクト化した空間に倉西構造を与える。(倉西空間にする。) 倉西空間とはおおよそ次のようなものである。倉西空間 X とは、コンパクト Hausdorff 空間であって、各点が倉西近傍とよばれる局所座標に対応するものを持ち、それら倉西近傍の間に座標変換の代わりに embedding とよばれる関係が与えられているものである。

点 $p \in X$ の倉西近傍 (V, E, s, ψ, G) とは、有限群 G 、有限次元 G -ベクトル束 $\pi : E \rightarrow V$ 、 G -不変可微分切断 $s : V \rightarrow E$ および点 p の近傍の上への位相同相 $\psi : s^{-1}(0)/G \rightarrow X$ からなる組をいう。ただし G の V への作用が効果的であ

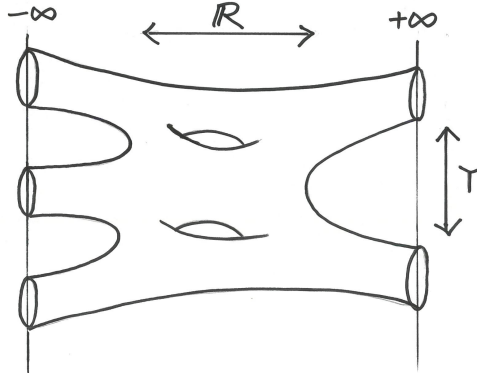


Figure 1: SFT での connecting orbit

ると仮定する。 (V', E', s', ψ', G') を別の倉西近傍とすると、 (V, E, s, ψ, G) から (V', E', s', ψ', G') への embedding $(\varphi, \hat{\varphi})$ とは、 orbifold の間の写像 $\varphi : V/G \rightarrow V'/G'$ および $\hat{\varphi} : E/G \rightarrow E'/G'$ の組であって次を満たすものをいう。

- $(\varphi, \hat{\varphi})$ はある束写像 $(\phi, \hat{\phi}) : (V, E) \rightarrow (V', E')$ から導かれる。ただし $\phi : V \rightarrow V'$ は埋め込み。
- 次はともに可換。

$$\begin{array}{ccc}
 E/G & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & E'/G' & & s^{-1}(0)/G & \xrightarrow{\psi} & X \\
 \uparrow s & & \uparrow s' & & \downarrow \varphi & \nearrow \psi' & \\
 V/G & \xrightarrow{\varphi} & V'/G' & & (s')^{-1}(0)/G' & &
 \end{array}$$

- $d^\perp s' : TV'|_V / TV \xrightarrow{\cong} E'|_V / E$ は $s^{-1}(0)$ 上で同型を与える。

(embedding は一方向の関係であり、正確な倉西構造の定義には、それがいつ存在するか等の条件がある。) $\dim V - \dim E$ は連結成分上一定であり、これを X の次元という。 X の倉西構造が与えられると、倉西理論の一般論により切断 s たちを embedding に関して整合性を持つように(多価切断として)摂動することができる。さらに X の向きと呼ばれるものが与えられるならば、 $\dim X = 0$ の場合には $\#X$ を定義することができることが知られている。(一般の次元の場合には X からほかの位相空間 Y への strong continuous map と呼ばれるものが与えられたときに Y の特異チェーンとして X の基本類に相当するものを定義することができる。)

3. SFT の場合

contact 多様体 (Y, ξ) の SFT の場合を考える。簡単のため λ が Morse 条件を満たす場合のみ考える。生成元として用いるのはこの場合 \bar{P} となる。(より正確には \bar{P} の元のすべてを生成元とは考えず、そのうちある条件を満たすもののみが生成元に対応する。また、SFT 場合は加群ではなく代数としての生成元である。) connecting orbit に対応するのは $\mathbb{R} \times Y$ 中の概正則曲線である。ここで、 $\mathbb{R} \times Y$ の概複素構造 J は次のように得られるもののみを考える。まず ξ の複素構造 J を、 $d\lambda(\cdot, J\cdot)$ が正定値の内積になるようにとる。分解 $T(\mathbb{R} \times Y) = (\mathbb{R}\partial_\sigma \oplus \mathbb{R}R_\lambda) \oplus \xi$ (ただし σ は \mathbb{R} -成分の座標) を用いて、 $\mathbb{R} \times Y$ の概複素構造 J をこの拡張として $J\partial_\sigma = R_\lambda$ により定める。

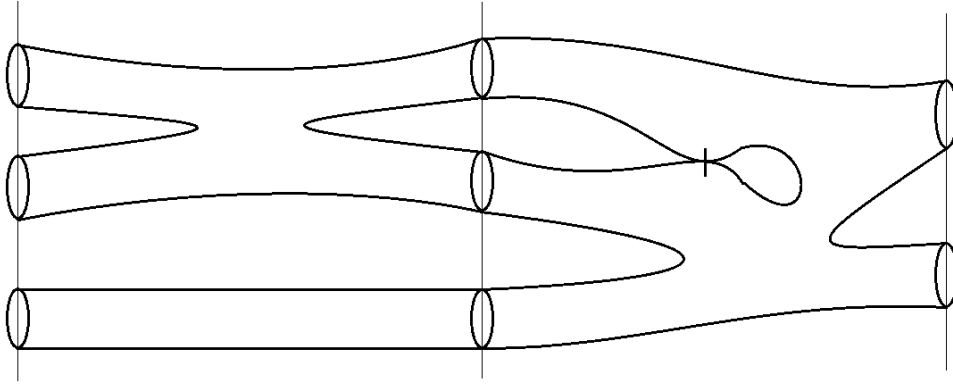


Figure 2: holomorphic building

SFT において考える connecting orbit は、この概複素構造 J に関する $\mathbb{R} \times Y$ の概正則曲線 $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ たちであり、その定義域 Σ としては閉 Riemann 面からいくつかの点を除いて得られる曲面を考える。SFT においては任意の種数の曲面を扱う。Figure 1 のように、一般には曲面は $\{+\infty\} \times Y$ 、 $\{-\infty\} \times Y$ 両方向にいくつかのエンドをもっており、条件 (3) や (5) の代わりに、これらすべてのエンドで Reeb flow の周期解に収束する。

J の \mathbb{R} -方向不変性から、

$$u(z) = (\sigma, y) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times Y$$

が概正則ならば任意の定数 $b \in \mathbb{R}$ に対して

$$z \mapsto (\sigma + b, y) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times Y$$

も概正則である。このような値域 $\mathbb{R} \times Y$ の \mathbb{R} 平行移動や、定義域 Σ の自己同型で得られる曲線は、同一のものとしてみなす。

倉西理論を用いるために、上のような曲線の空間のコンパクト化を考える必要がある。そのコンパクト化には概正則曲線を扱う場合に通常現れるバブルのみではなく、Figure 2 のような、値域が $\mathbb{R} \times Y$ ではなくそれをいくつか並べたものになるものが含まれる。(いわゆる broken orbit に対応する。) このような曲線を含めたコンパクト化の元を holomorphic building とよぶ。

4. local chart の構成の一般

倉西近傍の構成の説明のために簡単な場合としてまずは symplectic 多様体 (M, ω) の中の stable map の空間 $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}(M, \omega, J)$ の場合を説明する。(stable map の説明など詳しくは [3] 等を参照。ここで stable map の定義のために (M, ω) には一つ概複素構造 J が固定されている。) stable map $(\Sigma, z, u) \in \overline{\mathcal{M}}$ の倉西近傍の構成を考える。

stable map の空間は基本的には楕円型方程式の解の空間であるので、その方程式を Sobolev 空間等の Banach 空間の間の Fredholm 写像とみなし、その Fredholm map の零点集合として解空間を表示するというのは基本方針であるが、これにはいくつか問題がある。一つは、stable map の定義域の変形を許していることから来るもので、異なる定義域の上での方程式を、一組の Banach 空間の間の Fredholm 写像として表示できないことである。これは避けようがないので、定義域の変形ごとに Banach 空間の組とその間の Fredholm 写像を構成し、全体の空間をそれら Fredholm 写像の族の零点集合たちの和集合として表示する。図式的に書けば、

以下のように、定義域の変形空間 X 上の fibration の形で表示しておき、その各ファイバーを零点集合として表示する、ということになる。(ただし定義域の自己同型を無視している。)

$$\begin{array}{c} \overline{\mathcal{M}} \supset \bigcup_{a \in X} \{F^a = 0\} \\ \downarrow \\ X \ni a \end{array}$$

ここで各 $a \in X$ に対して $F^a : W_a \rightarrow L_a$ は $a \in X$ に対応する定義域写像の概正則条件の方程式を表す Fredholm 写像であり、 W_a, L_a はそれを定義するための適切な Banach 空間の組を表している。

一般には stable map の定義域は自己同型を持つ。これが有限群であれば実際に $\overline{\mathcal{M}}$ 中にあるのはこの fibration 全体をその有限群で割ったものとなる。有限群でない場合はそもそも変形空間自体良い構造を持たないので、定義域にいくつか marked point をつけて自己同型が有限群になるようにしてからその変形空間を代わりに用いる。この場合には marked point をつけたことによって増えた自由度を相殺するために方程式 $F^a : W_a \rightarrow L_a$ にさらに連立方程式を加えるなどして調整することになる。いずれにせよ、このようにしてまずは $\overline{\mathcal{M}}$ の各点の近傍は、Fredholm 写像の零点集合をファイバーとする fibration の有限群による商として表せる。

次に、一般にはこれらの Fredholm 写像が 0 に横断的ではないので、適切な有限次元ベクトル空間 E と線形写像の族 $K^a : E \rightarrow L_a$ を取り、 $F^a \oplus K^a : W_a \oplus E \rightarrow L_a$ たちが 0 に横断的になるようにする。

$$\begin{array}{c} V = \bigcup_{a \in X} \{F^a \oplus K^a = 0\} \\ \downarrow \\ X \ni a \end{array}$$

により V を定め、写像 $s : V \rightarrow E$ を E への射影とすれば、 s の零点が元の、 $\overline{\mathcal{M}}$ における近傍となる。 V の各ファイバーは $F^a \oplus K^a$ の零点集合として可微分構造を持っているが、実は V 全体にもこれらに整合的な可微分構造を入れることができる。

以上より、結局構成されたのは多様体 V 、有限次元ベクトル空間 E 、そしてその間の可微分写像 $s : V \rightarrow E$ であり、その零点集合 $s^{-1}(0)$ を自己同型に対応する有限群 G で割ったものが、 $\overline{\mathcal{M}}$ における近傍と同相になっている。つまり、これらが $\overline{\mathcal{M}}$ の各点の倉西近傍になっている。marked point のつけ方や有限次元ベクトル空間 E と線形写像の族 $K^a : E \rightarrow L_a$ の取り方を適切なものとすれば、倉西近傍間の embedding も正しく定義される。詳しくは [5] あるいは [3] を参照せよ。

5. SFT の場合の問題と解決

前章で倉西近傍の構成の一般的な流れを簡単に説明したが、SFT の場合には一つ問題となることがある。それを説明するためにまずは Figure 3 のような holomorphic building が存在すると仮定し、このまわりの倉西近傍の構成を考えることにする。この holomorphic building の値域は $\mathbb{R} \times Y$ を二つ並べたものであり、もともとは $\mathbb{R} \times Y$ への写像であった概正則写像たちの極限として現れたもの(より正確にはコンパクト化により新しく追加されたもの)である。その近傍には一般には $\mathbb{R} \times Y$ が分裂する前の、 $\mathbb{R} \times Y$ を値域とする holomorphic building が含まれる。この近傍を前章でのように fibration の形に表示するとき、以前と同様に定義

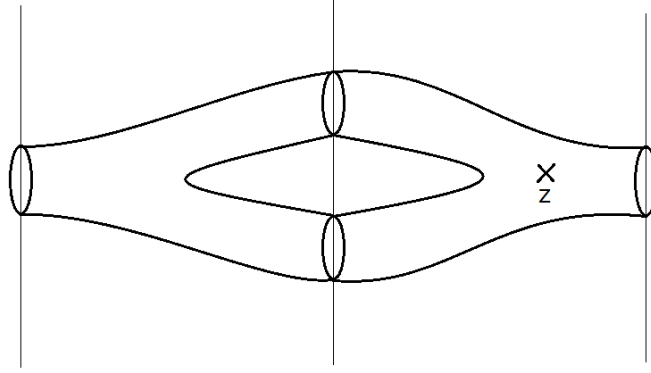


Figure 3: (Σ^0, z^0)

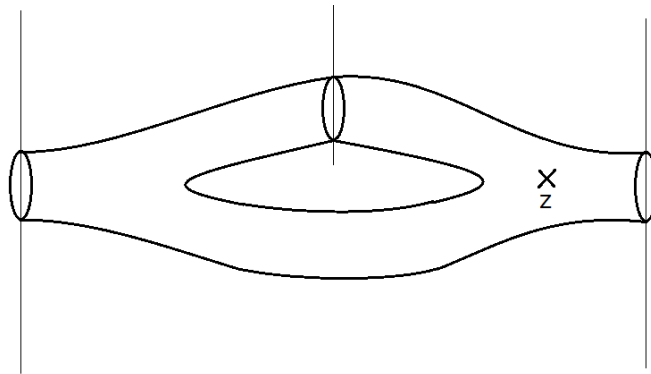


Figure 4: (Σ^1, z^1)

域(あるいはそれに marked point をつけたもの)の変形空間を底空間に用いようとすると、問題が起こる。これは、定義域の変形空間には Figure 4 のような曲面も含まれるからである。

Figure 4 のような曲面に対しては、 $\mathbb{R} \times Y$ またはそれを二つ並べたもののどちらかを値域としても、写像を考えることができない。そのため当然概正則条件の方程式を立てることもできず、対応する Fredholm 写像も定義できない。このようなことが起こる原因は、定義域の曲面が変形するだけでなく値域 $\mathbb{R} \times Y$ も同時に変形することにある。

なお、このことは、種数 0 の曲面のみを扱っている場合(contact homology など)にははっきりとは現れず、私の [5] 以前の、Pardon [6] などでは定義域の変形空間を使う方針で、(多少のケアを行って)構成を行っている。この部分が [6] 等の contact homology を扱ったものと、[5] の SFT との差の一つである。

このように単に定義域の変形空間を使うのではうまくいかない、というのが SFT 特有の問題の一つである。[5] では、これを解決するために、定義域と値域の変形を同時にパラメータづける空間を構成したうえで、それをファイブレーションの底空間に用いた。(必要なのは局所的なパラメータ空間のみで、大域的なものには構成する必要はない。)この空間 \dot{X} はおおよそ次のような空間である。(正確な定義は少し複雑であり、それについては [5] を参照せよ。)

\dot{X} 自体は定義域の変形空間 X と、 \mathbb{R} いくつかの直積の部分多様体である。 $(\mathbb{R}$ の数は、中心の holomorphic building の、 $\mathbb{R} \times Y$ のつなぎ目にあるエンドの数になる。) $\dot{X} \subset X \times \prod \mathbb{R}$ の \mathbb{R} -成分は、基本的には $(\mathbb{R} \times Y$ が分裂した状態のものに

対しては)対応するエンドでの収束の速さを表すパラメータになっている。二つ(以上)の $\mathbb{R} \times Y$ がくっついて一つの $\mathbb{R} \times Y$ になる場合、つまりその二つの $\mathbb{R} \times Y$ にある曲面の無限に伸びるエンドの部分がすべてそれぞれくっついて有限のシリンダーになるときは、 \mathbb{R} -成分たちは基本的には $\mathbb{R} \times Y$ の変形を表している。上の、Figure 3 と Figure 4 の例に近い例を考えれば、定義域のエンドの変形については、写像の収束の速さとの関係が整合的でないと、たとえ $\mathbb{R} \times Y$ の数が一致したとしてもうまく一つの曲面としてつながらないことは容易にわかる。 $\mathring{X} \subset X \times \prod \mathbb{R}$ を部分多様体として定める定義式は、これがうまくいくように、定義域の変形パラメータ(X -成分)と \mathbb{R} -成分に与えるものである。なお、この条件式は $\mathbb{R} \times Y$ が分裂した状態のものに対してはいつでも成立する自明な式となっており、この場合には \mathbb{R} -成分はすべて自由なパラメータになっている。

このように定義される、定義域と地域の変形をパラメータづける空間を用いることで、SFT において種数1以上の曲面を扱うことで現れるこの問題は解決される。講演においては、この部分についてもう少し詳しく説明する予定である。

References

- [1] E. Bao and K. Honda, Semi-global Kuranishi charts and the definition of contact homology, arXiv: 1512.00580.
- [2] Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, Introduction to symplectic field theory, *Geom. Funct. Anal.* 2000, Special Volume, Part II, 560–673.
- [3] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, *Topology* 38 (1999), no. 5, 933–1048.
- [4] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part II, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, 46.2. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2009. pp. i–xii and 397–805. ISBN 978-0-8218-4837-1.
- [5] S. Ishikawa, Construction of general symplectic field theory, arXiv:1807.09455.
- [6] J. Pardon, Contact homology and virtual fundamental cycles, (2015) arXiv: 1508.03873.

トラス束の変形量子化と格子版 Atiyah-Singer 指数定理

山下真由子 (京都大学数理解析研究所)*

1. 概要

本講演では, Atiyah-Singer の指数定理の「格子版」([14], [13])を紹介する. この研究は素粒子物理学の格子ゲージ理論と呼ばれる分野の問題から着想を得たものである. 応用として, 格子ゲージ理論における「Wilson-Dirac 作用素の指数の収束問題」を取り上げる.

2. 背景: 格子ゲージ理論からのモチベーション

格子ゲージ理論においては, 興味のある多様体を格子つまり有限個の点で近似し, 多様体上の作用素を扱う代わりに格子上の作用素の解析に置き換えて計算をする, ということが行われる. 格子上のどのような作用素のどのような情報を考えたら元の多様体の興味のある情報を正しく復元するのか, という問題については, 物理学で経験的に知られているが数学的に十分解明されていない側面がたくさんあり, 数学の立場からも非常に面白いテーマであると思われる. 本講演で取り上げるのは, 多様体上の楕円型微分作用素の Fredholm 指数をどうやって格子上の作用素の情報から復元するか? という問題である.

閉多様体 M 上の楕円型作用素 D に対してその Fredholm 指数 $\text{Ind}(D)$ が

$$\text{Ind}(D) := \dim \ker D - \dim \text{coker} D$$

と定義される. 楕円型作用素は幾何学において様々な場面で現れ, その Fredholm 指数が重要な役割を果たしてきたのは言うまでもない. 場の理論においても, スピン多様体上の Dirac 作用素の指数は理論の「アノマリー」に関連するなど重要な量である.

では, 多様体 M を有限個の点で近似したときに, どのように Fredholm 指数を復元するか考えてみよう. 以下では M を n 次元トラス $M := T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ とし, 各自然数 k に対して M の格子近似 $B_k := (\frac{1}{k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n \subset M$ を考える. M 上にベクトル束 S_+ と S_- が与えられ, 楕円型作用素 $D: C^\infty(M; S_+) \rightarrow C^\infty(M; S_-)$ が与えられたとする. この Fredholm 指数 $\text{Ind}(D)$ を $\{B_k\}_k$ 上の作用素の情報から復元したい. ここで第一の問題が現れる.

問 1. D の「離散近似」として, $\{B_k\}_k$ 上でどのような作用素の族 $\{D^k\}_k$ を考えるべきか?

微分作用素を近似するのだから, 自然に差分作用素に置き換えて近似すればよいように思われる. しかし実は, 後述するように, このようなナイーブな近似ではうまくいかない.

問 1 が解けたとしよう. 第二の問題は以下である.

本研究は科研費 (課題番号:20K14307) の助成を受けたものである.

* 〒 606-8317 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: mayuko@kurims.kyoto-u.ac.jp

web: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mayuko/index.html>

問 2. 族 $\{D^k\}_k$ に対するどのような不変量を考えれば, 連続極限 $k \rightarrow \infty$ で *Fredholm* 指数 $\text{Ind}(D)$ を復元するか?

これも非自明な問題である. 有限次元 Hilbert 空間の間の線形作用素の *Fredholm* 指数は Hilbert 空間の次元のみで決まってしまうため, D^k たちの *Fredholm* 指数そのものを使ってはいけなことがわかる.

問 1 と問 2 に対しては, 格子ゲージ理論でよく知られた解がある ([8], [7]). 問 1 の解は **Wilson-Dirac** 作用素と呼ばれる作用素 D_{DW}^k (定義 25) を用いることである. ここで D_{DW}^k は以下のような形をしている.

$$D_{DW}^k = D_{\text{naive}}^k + \gamma W^k: l^2(B_k; (S_+ \oplus S_-)|_{B_k}) \rightarrow l^2(B_k; (S_+ \oplus S_-)|_{B_k}).$$

ここで D_{naive}^k は元の D の微分を差分で置き換えたナイーブな近似でできる作用素である. 一方, γW^k は「Wilson 項」と呼ばれる有限次元近似特有の項である. そして問 2 の解は, Wilson-Dirac 作用素にさらに「質量項」 $mk\gamma$ を加えた作用素 $D_{DW}^k + mk\gamma$ の正の固有空間の次元 $\text{rank}(E_{>0}(D_{DW}^k + mk\gamma))$ を考えればよい, というものである. つまり, 格子ゲージ理論でよく知られた事実は以下のものである.

事実 3 (Adams [1] 2001, Y [13] 2020, Kubota [9] 2020, Fukaya-Furuta-Matsuo-Onogi-Yamaguchi-Y (in preparation)). $0 < m < 2$ なる実数 m に対して, 以下が成立する.

$$\text{Ind}(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \text{rank}(E_{>0}(D_{DW}^k + mk\gamma)) - \dim l^2(B_k; (S_+ \oplus S_-)|_{B_k}) \}. \quad (4)$$

この事実自体には, すでに Adams([1]) による数学的に厳密な証明が知られている. 彼の証明は, 熱核の収束を局所的な計算により示すものである.

本講演で問題にしたいのは以下の第三の間である.

問 5. 事実 3 に対して, トポロジカルな証明を与えることはできないか?

このようなことを期待する理由は以下の通りである. (4) の左辺に現れる連続極限での *Fredholm* 指数は, Atiyah-Singer の指数定理により K 理論的な情報で表すことができる.

事実 6 (Atiyah-Singer の指数定理, Atiyah-Singer [5] 1968). 閉多様体 M 上の楕円型擬微分作用素 D に対して, その *Fredholm* 指数 $\text{Ind}(D)$ は以下を満たす.

$$\text{Ind}(D) = \pi_1[\sigma(D)].$$

ここで $[\sigma(D)] \in K^0(T^*M)$ は D の主シンボルの定める K 理論の元, $\pi_1: K^0(T^*M) \rightarrow K^0(pt) = \mathbb{Z}$ は T^*M の自然な $spin^c$ 構造から定まる K 理論の *push-forward* 写像である.

したがって, (4) の右辺に対しても, 対応するトポロジカルな公式があることが期待される. つまり, このような細かくなっていく格子の上で定まっている作用素の族のスペクトルの振る舞いに対する, 「格子版」Atiyah-Singer 指数定理を定式化して, それを使って事実 4 を理解したい, というのが本研究のモチベーションであり, 本講演のテーマである.

3. 主定理：格子版 Atiyah-Singer 指数定理

この節では、主結果である格子版 Atiyah-Singer 指数定理について説明する。これは、多様体 M が格子の列 $\{B_k\}_k$ で近似されている状況で、格子上に定まった自己共役作用素の列 $\{D_k\}_k$ に対して、その正の固有空間の次元の $k \rightarrow \infty$ における挙動を、その「シンボル」の K 理論的情報を用いて記述するものである。定理を記述するためには、まず格子版の「微分作用素とシンボルの対応」を作る必要がある。これを小節 3.2 で行う。それを用いて小節 3.3 において主定理を述べる。小節 3.4 で説明するように、証明には symplectic 多様体の変形量子化の理論を用いる。

3.1. 設定

まず主定理の設定を述べる。「格子近似」を持つ多様体のクラスとして、**整 affine** 多様体を考える。

定義 7. n 次元多様体 M の **整 affine 構造** とは、 M の局所座標系であって、座標変換が $GL(n; \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$ の元で与えられるものである。整 affine 構造の入った多様体 M を **整 affine 多様体** と呼ぶ。

整 affine 多様体には、局所的には「格子点集合」が平行移動の差を除いて定まる。この格子点集合を大域的に定義するための補助データとして、余接トーラス束の前量子化を考える。整 affine 構造から、接束 $TM \rightarrow M$ の格子部分束 $\Lambda \rightarrow M$ 、つまり各ファイバー Λ_x ($x \in M$) が $T_x M$ の \mathbb{Z}^n に同型な部分群であるファイバー束が定まる。 $\Lambda^* \subset T^*M$ を Λ に双対な部分束とする。 T^*M の標準的な symplectic 構造から、余接トーラス束 $X := T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ にも symplectic 構造 ω が誘導される。 $\mu: X \rightarrow M$ は非特異な Lagrange トーラス束である。 X 上に、 $U(1)$ 接続付きの hermitian 直線束 (L, ∇) であって $\nabla^2 = -\sqrt{-1}\omega$ を満たすものを固定する (これを **前量子化束** と呼ぶ)。前量子化束が存在することは前量子化条件 $[\omega] \in 2\pi H^1(X; \mathbb{Z})$ と同値である。

この設定のもと、 M の標準的な「格子点近似」が以下で定義される。

定義 8 (Bohr-Sommerfeld 点). 正整数 k に対して、 $b \in M$ が **レベル k の Bohr-Sommerfeld 点** であるとは、 (L^k, ∇^k) を b 上のファイバー $X_b := \mu^{-1}(b)$ に制限したとき、自明接続付きの自明束 (\mathbb{C}, d) と同型であることとする。 B_k をレベル k の Bohr-Sommerfeld 点全体の集合とする。

B_k は B の離散部分集合をなし、実際上で「局所的に定まる」と書いた $1/k$ -格子点集合が大域的に貼りあったものになっている。

例 9. $M = \mathbb{R}^n$ とし、標準的な整 affine 構造を入れる。このとき余接トーラス束は $(X, \omega) = (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n, dx \wedge d\theta)$ となる。この場合前量子化束として $(L, \nabla^L) = (\mathbb{C}, d - \sqrt{-1}dx d\theta)$ が取れる。するとレベル k の Bohr-Sommerfeld 点の集合は $B_k = \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$ となり、実際 $1/k$ -格子点集合と一致している。Arnold-Liouville の定理 ([3]) により、非特異な Lagrange トーラス束とその上の前量子化束は、局所的には上のものと同型である。

$M = T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ に標準的な整 affine 構造が入っている場合は、上の \mathbb{R}^n の場合の構成を \mathbb{Z}^n 作用

$$(x, \theta, v) \mapsto (x + m, \theta, e^{\sqrt{-1}\langle m, \theta \rangle} v)$$

で割ったものが余接トーラス束と前量子化束を与え、レベル k の Bohr-Sommerfeld 点の集合は $B_k = (\frac{1}{k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n \subset (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ である。

3.2. 格子版「微分作用素とシンボルの対応」

主定理を述べるために、私が [14] で構成した、格子版「微分作用素とシンボルの対応」について説明する。 M を整 affine 多様体とし、 $\mu: X = T^*M/(2\pi\Lambda^*) \rightarrow M$ を余接トーラス束とする。前小節のように、前量子化束 (L, ∇) が与えられているとし、レベル k の Bohr-Sommerfeld 点集合を $B_k \subset M$ とおく。

これから構成したいのは、線形写像の列 $\{\phi^k\}_k$,

$$\phi^k: C_c^\infty(X) \rightarrow \mathbb{B}(l^2(B_k)), \quad (10)$$

である。ここで Hilbert 空間 \mathcal{H} に対して $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は有界線形作用素の空間を表す。したがって、余接トーラス束上の関数 $f \in C_c^\infty(X)$ に対して格子上の作用素の列 $\{\phi^k(f)\}_k$ が対応することになるが、この f が「格子版のシンボル」であり、 $\{\phi^k(f)\}_k$ はその「作用素による実現」とみなすべきものである。通常が多様体上の微分作用素からシンボルを与える写像とは向きが逆になっていることに注意されたい。

ここで、構成のモチベーションを説明するために、通常が多様体上のシンボル写像について復習する。多様体 M 上の微分作用素 D に対して、主シンボル $\sigma(D) \in C^\infty(T^*M)$ が余接束上の関数として定義されるのであった。局所的には、

$$D = \sum_I a_I(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^I \mapsto \sigma(D) = \sum_{I: \text{top degree}} a_I(x) \xi^I$$

なる対応である。今回重要なのは、これが T^*M の「ファイバー方向のフーリエ変換」で与えられているということである。この類似を考え、格子 B_k 上の作用素と余接トーラス束 $X = T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ 上の関数とが、「ファイバー方向のフーリエ展開」によって対応する、というのが構成のアイデアである。まず局所的なモデルとして、 $M = \mathbb{R}^n$ に標準的な整 affine 構造を入れた場合に以下のように定義する。

定義 11 ($M = \mathbb{R}^n$ の場合の定義). $M = \mathbb{R}^n$ とし、余接トーラス束を $X = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ とおく。 $C_b^\infty(X)$ で、 C^∞ -ノルムが一様に有界である関数のなす線形空間をあらわす。正整数 k に対して、線形写像

$$\phi^k: C_b^\infty(X) \rightarrow \mathbb{B}(l^2(B_k))$$

を以下で定義する。 $f \in C_b^\infty(X)$ が与えられたとき、 $f(x, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f_m(x) e^{\sqrt{-1}\langle m, \theta \rangle}$ とフーリエ展開したうえで、 $\phi^k(f)$ の「行列要素」が

$$\langle \psi_b, \phi^k(f) \psi_c \rangle = f_{k(b-c)}((b+c)/2) \quad (12)$$

であるように定める。ここで、 $b, c \in B_k$ であり、 $\psi_b \in l^2(B_k)$ は $\psi_b(b) = 1$, $\psi_b(c) = 0$ ($c \neq b$) なる元とする。

次に簡単な例を見てみる。

例 13. $f(x, \theta) = f_0(x)$ の場合、つまり f がファイバー方向に定数である場合、 $\phi^k(f)$ は f_0 による掛け算作用素である。

例 14. ある $m \in \mathbb{Z}^n$ に対して $f(x, \theta) = e^{\sqrt{-1}\langle m, \theta \rangle}$ という形をしているとき、 $\phi^k(f)$ は「 (m/k) -シフト作用素」である。つまり、 $g \in l^2(B_k)$ に対して、

$$\left(\phi^k(e^{\sqrt{-1}\langle m, \theta \rangle}) g \right) (x) = g(x - m/k).$$

例 15 (差分作用素のシンボル). この構成の利点のひとつは, 多様体の格子近似で自然に現れる「差分作用素」のシンボルが簡単に書けることである. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, i 方向の前向き差分作用素 $\nabla_i^k \in \mathbb{B}(l^2(B_k))$ を,

$$(\nabla_i^k g)(x) := \frac{g(x + e_i/k) - g(x)}{1/k}$$

と定める. ここで $e_i \in \mathbb{R}^n$ は i 方向の単位ベクトルである. このとき,

$$k\phi^k \left(e^{-\sqrt{-1}\theta_i} - 1 \right) = \nabla_i^k$$

であることが簡単にわかる. つまり関数 $e^{-\sqrt{-1}\theta_i} - 1 \in C_b^\infty(X)$ は作用素の列 $\{k^{-1}\nabla_i^k\}_k$ のシンボルである.

定義 11 は一見 \mathbb{R}^n の座標の取り方に依存しているように見えるが, 実は \mathbb{R}^n の整 affine 構造のみによって定まっている. 実際, 格子点を固定する整 affine 変換 $x \mapsto Ax + b$, $(A, b) \in GL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^n$ によって余接トーラス束の座標は $(x, \theta) \mapsto (Ax + b, {}^t A^{-1}\theta)$ と変換されることに注意すると, $f \in C_c^\infty(X)$ を与えたとき, $b, c \in B_k$ に対して (12) の右辺の値はこの座標変換で不変である. この座標不変性と, 各 f に対して $\phi^k(f)$ は $k \rightarrow \infty$ で局所化していくことを合わせると, 定義 11 の局所的な構成を「貼り合わせる」ことによって, 任意の (余接トーラス束上の前量子化束付きの) 整 affine 多様体 M に対して格子版「微分作用素とシンボルの対応」(10) が構成できる.

3.3. 主定理

小節 3.2 で構成した「格子版シンボル」を用いて, 「格子版 Atiyah-Singer 指数定理」を述べる. 前小節 3.2 の設定に加えて, この小節では M が閉であることを仮定する. 線形写像 (10) は自然に行列値関数に対しても拡張され, 格子上の自明なベクトル束上の作用素が与えられる¹:

$$\phi^k: M_N(C^\infty(X)) \rightarrow \mathbb{B}(l^2(B_k) \otimes \mathbb{C}^N).$$

また, 以下では Hilbert 空間上の自己共役作用素 D に対して, $E_{>0}(D)$ により区間 $(0, \infty]$ に対応するスペクトル射影 (正の固有空間への射影) をあらわす.

定理 16 (格子版 Atiyah-Singer 指数定理, [13]). N を任意の自然数とする. $f \in M_N(C^\infty(X))$ を可逆かつ自己共役な行列値関数とし, $\{\phi^k(f)\}_k$ を対応する格子上の作用素の族 $\phi^k(f) \in \mathbb{B}(l^2(B_k) \otimes \mathbb{C}^N)$ とすると, 十分大きな k に対して以下が成立する.

$$\text{rank} (E_{>0}(\phi^k(f))) = \pi_! ([f] \otimes [L]^k). \quad (17)$$

ここで $[L] \in K^0(X)$ は前量子化束のクラス, $\pi_!: K^0(X) \rightarrow K^0(pt) = \mathbb{Z}$ は X の自然な $spin^c$ 構造から定まる K 理論の *push-forward* 写像である. また, $[f] \in K^0(X)$ は f の正の固有束 ($x \in X$ に対して $f(x)$ の正の固有空間を対応させることによりできる X 上のベクトル束) のクラスである.

¹一般のベクトル束上の作用素を扱いたいときは, 自明束に埋め込めばよいので, この場合を考えれば十分である.

右辺をコホモロジーによる表式に書き直せば, (17) は以下と同値である.

$$\text{rank}(E_{>0}(\phi^k(f))) = (2\pi\sqrt{-1})^{-\dim M} \int_X \text{ch}(f) \text{td}(\omega) e^{\sqrt{-1}k\omega} \quad (18)$$

例 19. 一番簡単な例として, $f = 1 \in C^\infty(X)$ の場合を見てみる. この場合 $\phi^k(1) = \text{id}_{l^2(B_k)}$ であるから, (17) の左辺は $\dim l^2(B_k) = \sharp B_k$, つまりレベル k の Bohr-Sommerfeld 点の個数となる. 一方, 右辺 $\pi_1([L]^k)$ は L^k で捻った X 上の spin^c -Dirac 作用素の指数 $\text{Ind}(D_{S \otimes L^k})$ であり, コホモロジーによる表示を用いれば $(2\pi)^{-n} \int_X \text{td}(\omega) e^{k\omega}$ となる. したがって定理 16 は, 十分 k が大きいとき,

$$\sharp B_k = \text{Ind}(D_{S \otimes L^k}) \quad (20)$$

が成立するという主張になる. 実際, 例えば $M = T^n$ の場合には, 両辺は k^n であり任意の k で等式が成立する. 実は一般に等式 (20) は任意の k で成立する ([2]).

3.4. 証明について: 変形量子化の理論の応用

定理 16 の証明には, symplectic 多様体の変形量子化の理論を用いる. 変形量子化という数学的に歴史ある研究対象が, この一見関係のない問題に応用できたというのが本研究の面白く新しい部分である.

symplectic 多様体 (X, ω) が与えられたとき, 関数環 $C^\infty(X)$ には Poisson 括弧積 $\{\cdot, \cdot\}$ が, $f, g \in C^\infty(X)$ に対して

$$\{f, g\} := \omega(H_f, H_g)$$

で定まる. ここで H_f, H_g はそれぞれ f, g の Hamiltonian ベクトル場 ($\omega(H_f, \cdot) = df$ で定まるベクトル場) をあらわす.

今回 (X, ω) の変形量子化とよぶのは, 一般に結合的な代数の族 $\{\mathcal{A}_\hbar\}_\hbar$ (formal な族も許す) と, 線形写像 $\text{Op}_\hbar: C^\infty(X) \rightarrow \mathcal{A}_\hbar$ の組であって, 次の条件

$$\begin{aligned} \text{Op}_\hbar(f) \text{Op}_\hbar(g) &= \text{Op}_\hbar(fg) + O(\hbar), \\ [\text{Op}_\hbar(f), \text{Op}_\hbar(g)] &= \hbar \text{Op}_\hbar(\{f, g\}) + O(\hbar^2), \end{aligned}$$

を満たすものである. 具体的には, 以下の2種類の変形量子化を考える.

- **formal な変形量子化.**

$C^\infty(X)[[\hbar]]$ の結合的な積構造 \star であって, 1 が単位元であり,

$$\begin{aligned} f \star g &= fg + O(\hbar), \\ f \star g - g \star f &= \hbar \{f, g\} + O(\hbar^2), \end{aligned}$$

を満たすものを **formal な変形量子化** とよぶ. これは $\{\mathcal{A}_\hbar\}_\hbar = (C^\infty(X)[[\hbar]], \star)$, $\text{Op}_\hbar(f) = f$ としたものに对应する.

- **strict な変形量子化.**

Hilbert 空間の列 $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^\infty$ と随伴を保つ線形写像の列 $Q^k: C_c^\infty(X) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_k)$ の組であって,

$$\begin{aligned} \|Q^k(f)\| &\rightarrow \|f\|_{C^0}, \\ \left\| [Q^k(f), Q^k(g)] + \frac{\sqrt{-1}}{k} Q^k(\{f, g\}) \right\| &= O\left(\frac{1}{k^2}\right), \end{aligned}$$

を満たすものを **strict** な変形量子化とよぶ. これは上の定義で $\hbar = -\sqrt{-1}/k$ とし, $\mathcal{A}_{-\sqrt{-1}/k} = \mathbb{B}(\mathcal{H}_k)$, $\text{Op}_{-\sqrt{-1}/k} = Q^k$ としたものに对应する.

実は, 小節 3.2 で構成した格子版「微分作用素とシンボルの対応」(10) は, 余接トラス束 X の **strict** な変形量子化になっている.

命題 21. *Hilbert* 空間の列 $\{l^2(B_k)\}_k$ と式 (10) の線形写像 $\phi^k: C_c^\infty(X) \rightarrow \mathbb{B}(l^2(B_k))$ の組は, (X, ω) の *strict* な変形量子化を与える.

一方多くの場合, 変形量子化というと formal な変形量子化のことを指し, こちらの方が主に研究されてきた. 特に, formal な変形量子化に対しては, Atiyah-Singer の指数定理の「代数版」である, Nest-Tsygan による「代数的指数定理」が知られている.

事実 22 (代数的指数定理, Nest-Tsygan [11] 1995). 閉 *symplectic* 多様体 (X, ω) の *formal* な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]], \star)$ が与えられたとする. \star に関するべき等元 $e \in M_N(C^\infty(X)[[\hbar]])$ が与えられたとき, $e = e_0 + O(\hbar)$ とあらわすと, 以下が成立する.

$$\tau(e) = \int_X ch(e_0) td(\omega) e^{-c_1(\omega)/2} e^{\theta/\hbar}.$$

ここで $\tau: C^\infty(X)[[\hbar]] \rightarrow \mathbb{C}[[\hbar^{-1}, \hbar]]$ は標準的なトレース汎関数 ($\tau(f \star g) = \tau(g \star f)$) を満たす $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -線形写像であり, 標準的な選び方が存在する) である. また, $ch(e_0) \in \Omega^{\text{even}}(X)$ は $M_N(C^\infty(X))$ のべき等元 e_0 の *Chern* 指標, $\theta \in H^2(X; \mathbb{C}[[\hbar]])$ は変形量子化 \star の定める特性類 ([11] 参照) である.

定理 16 (あるいはコホモロジーによる公式 (18)) と事実 22 はとても似た構造をしている. というのも, 両者ともに *symplectic* 多様体の変形量子化を与えた上で, 変形された代数 $\{\mathcal{A}_\hbar\}_\hbar$ におけるべき等元のトレース (左辺) を, 対応する可換代数 $C^\infty(X)$ の元 (シンボルの) コホモロジー類により表す (右辺) 公式とみることができるところからである. ここで, 定理 16 の左辺は作用素のトレース (代数 $\mathbb{B}(l^2(B_k))$ のトレース汎関数) を用いて

$$\text{rank}(E_{>0}(\phi^k(f))) = \text{Trace}(E_{>0}(\phi^k(f)))$$

と表示できることを用いた. そこで, 格子版 Atiyah-Singer 指数定理 (定理 16) を代数的指数定理 (事実 22) の「**strict** 版」とみなして, **strict** な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$ を formal な変形量子化と「対応づける」ことで, 代数的指数定理を応用しよう, というのが証明のアイデアである.

実際, **strict** な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$ は以下の意味で formal な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]], \star_{MY})$ を誘導することが示される. ここで \star_{MY} は Moyal-Weyl 積² である. Moyal-Weyl 積を

$$f \star_{MY} g = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j \mathcal{C}_j(f, g).$$

とあらわすと, 以下が成立する.

² $(\mathbb{R}^{2n}, dx \wedge d\theta)$ に入る最も標準的な formal な変形量子化が Moyal-Weyl 積と呼ばれている ([12] などを参照). 今回 $X = T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ には平坦な *symplectic* 接続が入るため, Moyal-Weyl 積を大域的に貼り合わせる事ができる. ここではこの formal な変形量子化を Moyal-Weyl 積と呼んでいる.

命題 23. 任意の $f, g \in C^\infty(X)$ と $l \in \mathbb{N}$ に対して, $k \rightarrow \infty$ において以下が成立する.

$$\left\| \phi^k(f)\phi^k(g) - \sum_{j=0}^l \left(\frac{-\sqrt{-1}}{k} \right)^j \phi^k(\mathcal{C}_j(f, g)) \right\| = O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right)$$

これがわかると, strict な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$ と formal な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]], \star_{MY})$ には以下の対応ができる.

strict な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$	formal な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]], \star_{MY})$
作用素の合成 $\phi^k(f)\phi^k(g)$	Moyal-Weyl 積 $f \star_{MY} g$
作用素のトレース Trace	トレース汎関数 τ

この対応を用いると, 定理 16 は代数的指数定理 (事実 22) を直接適用することで従う.

4. 格子ゲージ理論への応用

この節では, 節 2 で述べた格子ゲージ理論の問題に対して, 格子版 Atiyah-Singer 指数定理 (定理 16) を応用することでトポロジカルな解法を与える.

4.1. 設定

まず設定を述べる.

- n を偶数とし, $M = T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ とする. M 上には標準的な計量と平行移動不変なスピン構造を入れる. $B_k = (\frac{1}{k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n \subset M$ をレベル k の格子点集合とする.
- $\mathbb{C}l_n$ を n 次複素クリフォード環とする. これは n 個の生成元 $\{c_i\}_{i=1}^n$ と関係式 $c_i c_j + c_j c_i = -2\delta_{ij}$ で \mathbb{C} 上生成された環である. $c_i^* = -c_i$ によって $*$ -代数構造を入れる. $\gamma := c_1 c_2 \cdots c_n$ とおくと, $\gamma c_i + c_i \gamma = 0$ が成立する.
- S を n 次スピノル空間, つまり $\mathbb{C}l_n$ の既約表現空間とする ([10]などを参照). これは γ の作用により $S = S_+ \oplus S_-$ と \mathbb{Z}_2 -次数付けられる. M 上のスピノル束は自明束 $\underline{S} = M \times S$ である.
- (E, ∇^E) を M 上の接続付き hermitian ベクトル束とする.

ベクトル束 E で捻った M 上の Dirac 作用素の Fredholm 指数を離散近似から復元したい, というのが問題である. ここで, Dirac 作用素 (連続側の作用素) は以下で定義される.

定義 24. M 上の E で捻った Dirac 作用素 $D: L^2(M; \underline{S} \otimes E) \rightarrow L^2(M; \underline{S} \otimes E)$ を以下で定義する.

$$D := \sum_{i=1}^n c_i \nabla_{\partial_i}^{\underline{S} \otimes E}.$$

ここで $\nabla^{\underline{S} \otimes E}$ は ∇^E と \underline{S} 上の自明接続のテンソル積で定まる接続である. これは γ による \mathbb{Z}_2 次数付けに関して odd かつ自己共役な楕円型微分作用素である.

一方, 格子側の作用素としては, 以下のものを考える.

定義 25. 各正整数 k に対して, $l^2(B_k; (\underline{S} \otimes E)|_{B_k})$ 上の作用素 $\nabla_i^k, D_{\text{naive}}^k, W^k$ を以下で定義する.

- 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, i -方向の前向き差分作用素 ∇_i^k を例 15 と同様に定める. ただし今回は ∇^E による平行移動を用いる必要がある.
- レベル k の格子 Dirac 作用素 D_{naive}^k を以下で定める.

$$D_{\text{naive}}^k := \sum_{i=1}^n c_i \frac{\nabla_i^k - (\nabla_i^k)^*}{2}.$$

これは \mathbb{Z}_2 次数付けに関して odd な作用素である.

- Wilson 項 W^k を以下で定める.

$$W^k := \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i^k + (\nabla_i^k)^*}{2}.$$

これは \mathbb{Z}_2 次数付けに関して even な作用素である.

格子 Dirac 作用素と Wilson 項の和をとってできた作用素 $D_{DW}^k := D_{\text{naive}}^k + \gamma W^k$ を **Wilson-Dirac 作用素** とよぶ. さらに, 正の定数 $m > 0$ に対して「質量項」 $mk\gamma$ を加えた作用素 $D_{DW}^k + mk\gamma$ を **質量付き Wilson-Dirac 作用素** とよぶ. これは自己共役な作用素であるが, 連続の Dirac 作用素が \mathbb{Z}_2 次数付けに関して odd であったのに対して, 質量付き Wilson-Dirac 作用素は格子特有の項である Wilson 項と質量項の影響で odd ではない. つまり, $\underline{S} \otimes E = (S_+ \otimes E) \oplus (S_- \otimes E)$ という分解に関してそれぞれの作用素は以下の形をしている.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_+ \\ D_- & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{DW}^k + m\gamma = \begin{pmatrix} W_+^k + mk & D_+^k \\ D_-^k & -W_-^k - mk \end{pmatrix}.$$

質量付き Wilson-Dirac 作用素の正の固有空間の次元が連続の Dirac 作用素の Fredholm 指数を $k \rightarrow \infty$ で復元する, という事実 3 に対して, 新しい証明を与えるのが目標である.

4.2. 証明の概略

事実 3 は, 連続側の解析的指数 (左辺) と格子側の解析的指数 (右辺) の一致, と見ることができる. そこで証明のアイデアは, 連続側には Atiyah-Singer の指数定理を, 格子側には格子版 Atiyah-Singer 指数定理を適用し, 両者の位相的指数つまりシンボルを比較することに帰着する, というものである. ここで鍵となるのが, 以下の可換図式である.

$$\begin{array}{ccc} K^0(T^*M) & \xrightarrow{i_{T^*M!}} & K^0(X) \\ & \searrow \pi_! & \swarrow \pi_! \\ & & K^0(pt) \end{array} \quad (26)$$

ここで, $i_{T^*M}: T^*M \hookrightarrow X = T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ は零切断 $M \subset X$ の近傍への開埋め込みである. (26) の可換性は, push-forward の関手性よりわかる. 左側の写像が連続側の指数写像, 右側の写像が格子側の指数写像であることより, 連続版と格子版のシンボルが $i_{T^*M!}: K^0(T^*M) \rightarrow K^0(X)$ でどう関係するかを調べればよい. 具体的には証明は以下のステップからなる.

- (1) 質量付き Wilson-Dirac 作用素に対応するシンボル $f_{DW}(m, E) \in M_N(C^\infty(X))$ を見つける.
- (2) 次の等式を示す.

$$\begin{aligned} i_{T^*M}([\sigma(D)]) &= [f_{DW}(m, E)] - [-\gamma] \otimes [E] \\ &= ([f_{DW}(m, E)] - [-\gamma] \otimes [E]) \otimes [L]^k \end{aligned} \quad (27)$$

- (3) Atiyah-Singer 指数定理 (事実 6) と格子版 Atiyah-Singer 指数定理 (定理 16), さらに可換図式 (26) と式 (27) を組み合わせると, 事実 3 が従う.

各ステップについて, 簡単に説明する.

(1) について. まず E が自明束 $(E, \nabla^E) = (\underline{\mathbb{C}}, d)$ の場合を考える. $f_{DW}(m) \in C^\infty(X) \otimes \text{End}(S)$ を以下で定義する.

$$f_{DW}(m) := \sum_{i=1}^n \{-\sqrt{-1}c_i \sin \theta_i + \gamma(\cos \theta_i - 1)\} + m\gamma. \quad (28)$$

例 15 と同様の計算により, 以下がわかる.

$$\phi^k(f_{DW}(m)) = k^{-1}(D_{DW}^k + mk\gamma).$$

したがって $f_{DW}(m)$ は質量付き Wilson-Dirac 作用素の k^{-1} 倍に対応するシンボルである. ここで, 定理 16 の条件であった, シンボルの可逆性を確かめる.

$$(f_{DW}(m))^2 = \left\{ \sum_{i=1}^n \sin^2 \theta_i + \left(\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i - 1) + m \right)^2 \right\}$$

であることより, $m \notin \{0, 2, \dots, 2n\}$ であれば $f_{DW}(m)$ は可逆であることがわかる.

ここで, Wilson 項や質量項を導入しなかった場合, つまりナイーブな格子 Dirac 作用素 D_{naive}^k を考えたならば, 対応するシンボルが $\theta_i \in \{0, \pi\}$ なる点で可逆でなくなってしまうため, 定理が適用できないことに注意する. これが, 問 1 において「ナイーブな近似ではうまくいかない」ことの理由と解釈できる.

E が一般の場合, 同様にして $\{k^{-1}(D_{DW}^k + mk\gamma)\}_k$ に対応するシンボルのなす K 理論のクラスは $[f_{DW}(m)] \otimes [E] \in K^0(X)$ で与えられることがわかる.

(2) について. 鍵となるのは次の事実である. これが, 「連続版 Dirac 作用素のよい格子近似が Wilson-Dirac 作用素である」ことの理由と解釈できる.

補題 29. $0 < m < 2$ とする. 式 (28) で定義される $f_{DW}(m)$ を $C^\infty((\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n) \otimes \text{End}(S)$ の元とみなしたとき, $K^0((\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n)$ において以下の等式が成立する.

$$i_{pt}([1]) = [f_{DW}(m)] - [-\gamma].$$

ここで $i_{pt}: \{pt\} \hookrightarrow (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n$ は 1 点の埋め込みであり $[1] \in K^0(pt)$ は生成元をあらわす.

補題 29 を認めると, 等式 (27) は, $i_M: M \hookrightarrow T^*M$ を零切断への埋め込みとすると連続側の Dirac 作用素のシンボルのクラスが

$$[\sigma(D)] = i_M([E])$$

で与えられていたこと, および零切断が X の Lagrange 部分多様体であるため前量子化束 L の制限が平坦束であること, より簡単に従う.

5. 未解決問題

本研究では、閉である整 affine 多様体の格子近似上での指数定理という、多様体の離散近似という観点からは最も基本的な状況を扱ったといえる。関連して未解決である問題はたくさんあるが、以下に2つの問題を挙げる。

問 30. 整 affine 多様体とは限らない多様体の離散近似に対しても、「格子版シンボルと作用素の対応」を構成できないか？それを用いて同様の「格子版 Atiyah-Singer 指数定理」をより一般に確立できないか？

多様体の離散近似といった場合様々なクラスのもの考えられるが、今回の手法と同様にトラス束の変形量子化の理論を応用しようとするならば、特異ファイバーを許す Lagrange トラス束の底空間として現れるような、特異性を許す整 affine 多様体を考えるのが自然である。このような対象にも理論を拡張できれば、例えば $M = S^2$ の場合など、扱える多様体が格段に増えて物理側からも数学側からも非常に面白いと思われる。

問 31. 境界つき多様体上の Atiyah-Patodi-Singer 指数定理 ([4]) に対しても、同様の「格子版」ができないか？それを用いて、Wilson-Dirac 作用素の指数の収束問題の APS 版 ([6]) に対しても数学的証明を与えることはできないか？

境界つき多様体上の楕円型作用素に対する Atiyah-Patodi-Singer 指数は、物理においても最近注目を集めている。深谷-川井-松木-森-中山-大野木-山口 ([6]) は、「ドメインウォール」を導入した Wilson-Dirac 作用素を考えることで、事実3の APS 版が成立することを物理的議論により予想した。本講演で紹介した格子版 Atiyah-Singer 指数定理の APS 版を構成することで、彼らの予想に対して数学的証明を与えることはできないか？というのが問である。

参考文献

- [1] David H. Adams. On the continuum limit of fermionic topological charge in lattice gauge theory. *J. Math. Phys.*, 42(12):5522–5533, 2001.
- [2] Jørgen Ellegaard Andersen. Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations. *Communications in mathematical physics*, 183(2):401–421, 1997.
- [3] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1989. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.
- [4] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:43–69, 1975.
- [5] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Ann. of Math.*, 87(2):484–530, 1968.
- [6] Hidenori Fukaya, Naoki Kawai, Yoshiyuki Matsuki, Makito Mori, Katsumasa Nakayama, Tetsuya Onogi, and Satoshi Yamaguchi. The Atiyah-Patodi-Singer index on a lattice. *PTEP. Prog. Theor. Exp. Phys.*, (4), 2020.
- [7] Peter Hasenfratz, Victor Laliena, and Ferenc Niedermayer. The Index theorem in QCD with a finite cutoff. *Phys.Lett.B.*, 427:125–131, 1998.
- [8] S. Itoh, Y. Iwasaki, and T. Yoshie. The $u(1)$ problem and topological excitations on a lattice. *Phys.Rev.D.*, (36):527, 1987.
- [9] Yosuke Kubota. The index theorem of lattice Wilson-Dirac operators via higher index theory. *preprint. arXiv:2009.03570*.

- [10] Jr. Lawson, H. Blaine and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*. Number 38 in Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [11] Ryszard Nest and Boris Tsygan. Algebraic index theorem. *Comm. Math. Phys.*, 172(2):223–262, 1995.
- [12] Alan Weinstein. Deformation quantization. *Astérisque*, 227:389–409, 1995.
- [13] Mayuko Yamashita. A lattice version of the atiyah-singer index theorem. *preprint. arXiv:2007.06239*, 2020.
- [14] Mayuko Yamashita. A new construction of strict deformation quantization for Lagrangian fiber bundles. *preprint. arXiv:2003.06732*, 2020.