

# 結び目に沿った矯飾的手術について

市原 一裕 (日本大学文理学部)\*

## 1. 導入

本稿の目的は、3次元多様体内の結び目に沿った矯飾的手術 (cosmetic surgery)<sup>1</sup>に関するこれまでの研究を概観し、その中で主に筆者が関わった [IS18, IJ18, IW19, IIS, IJMS] を中心に解説を行うことである。これらの論文は、筆者と、伊藤哲也氏 (京都大学)、鄭仁大氏 (近畿大学)、Thomas Mattman 氏 (カリフォルニア州立大学チコ校)、斎藤敏夫氏 (上越教育大学)、Zongtao Wu 氏 (香港中文大学) との共同研究に基づく。

以下、全ての多様体は向き付け可能であるとし、一つの向きが与えられているとする。本稿では、向きづけられた多様体  $M$  に対して、逆の向きが与えられた多様体を  $-M$  で表す。また、2つの向きづけられた多様体  $M, M'$  に対して、向きを保つ同相写像  $h: M \rightarrow M'$  が存在するとき  $M \cong M'$  と表す。従って、向きを逆転する同相写像  $h': M \rightarrow M'$  が存在するとき  $M \cong -M'$  と表される。

## 2. 背景

本節では、結び目に沿った矯飾的手術の研究動機となった「結び目補空間予想」およびその一般化について解説した後、結び目に沿った矯飾的手術の定義を与え、その研究の中心的課題である「矯飾的手術予想」を紹介する。

3次元多様体  $M$  内の結び目とは、 $S^1$  から  $M$  への埋め込み写像の像と定義される。そして通常、 $M$  内の2つの結び目  $K, K'$  が同値であるとは、ある  $M$  上の自己同相写像  $h$  が存在して  $h(K) = K'$  を満たすことである。従って、1つの多様体内の2つの結び目が同値であるとき、その補空間は同相になる。

1908年に [Ti1908, pp.82] において、Tietze はこの逆が成り立つかという問いを提起した。これが後に長く未解決となった「結び目補空間予想」である。

結び目補空間予想: 3次元球面内  $S^3$  内の2つの結び目が同相な補空間をもつならば、それらは同値であろう<sup>2</sup>。

およそ80年後の1989年に、この予想は Gordon と Luecke によって肯定的に証明された [GL89]。ただし実際に証明されたのは次の定理である。

**定理 1** ([GL89]). 非自明な結び目に沿った非自明なデーン手術は  $S^3$  を生じない。

ここで、 $S^3$  内の結び目  $K$  に沿ったデーン手術とは、次の操作である。まず  $K$  の開管状近傍を取り除く。ここで得られた境界付き3次元多様体を、その結び目の外部空間  $E(K)$  と呼ぶ。この外部空間  $E(K)$  にソリッド・トーラス  $V \cong D^2 \times S^1$  を埋め戻す。

---

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 57M25

キーワード: デーン手術, 矯飾的手術

\* 〒156-8550 東京都世田谷区桜上水3-25-40 日本大学文理学部

e-mail: [ichihara.kazuhiro@nihon-u.ac.jp](mailto:ichihara.kazuhiro@nihon-u.ac.jp)

web: <http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/index-j.html>

<sup>1</sup> cosmetic の訳語として筆者は矯飾的を提案している (矯飾: 偽りかざること。うわべをかざること。)

<sup>2</sup> Tietze は3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内で問うているが、ここではその後の研究に合わせて  $S^3$  内とした。

正確には、 $V$  の境界  $\partial V$  と  $E(K)$  の境界  $\partial E(K)$  はトーラスであり同相なので、その同相写像によって  $\partial V$  と  $\partial E(K)$  を同一視する。

もし結び目補空間予想の反例となる結び目が存在したとすると、その結び目に沿った非自明なデーン手術（脚注を参照）で  $S^3$  が生じる。しかし、Gordon-Luecke の定理より、そのようなことは起こらないので、結び目補空間予想が正しいことが従う。

一方で、ほぼ同時期に、 $S^3$  内ではなく  $S^2 \times S^1$  や  $S^1$  上のトーラス束内の結び目についても、同じことが成り立つことが Gabai によって（余次元1の葉層構造を用いて）示されている [Ga87]。

このようなことから、結び目補空間予想の一般化として、次のことが予想された。

予想：（[Go90, Conjecture 6.2], [Ki97, Problem 1.81(D)]）向きづけられた閉3次元多様体  $M$  内の2つの結び目  $K_1$  と  $K_2$  について、もし、 $M - K_1 \cong M - K_2$  ならば、 $K_1$  と  $K_2$  は同値であろう。

この予想を導くような、デーン手術を用いて表された予想を簡潔に述べるために、次の定義を準備する。

**定義 1.** 結び目  $K$  での2つの手術スロープ  $r_1$  と  $r_2$  に沿ったデーン手術<sup>3</sup>が矯飾的 (*cosmetic*) であるとは、得られた2つの閉3次元多様体  $K(r_1)$  と  $K(r_2)$  が同相となることをいう。特に、 $K(r_1) \cong K(r_2)$  が成り立つとき純矯飾的 (*purely cosmetic*)、 $K(r_1) \cong -K(r_2)$  が成り立つとき対掌矯飾的 (*chirally cosmetic*) という。

このとき、上の一般化された結び目補空間予想は、次の矯飾的手術予想 (Cosmetic Surgery Conjecture) から導かれる。

矯飾的手術予想：（[Go90, Conjecture 6.1], [Ki97, Problem 1.81(A)]）閉3次元多様体内の結び目  $K$  での2つの手術スロープ  $r_1$  と  $r_2$  に沿ったデーン手術は、 $r_1$  と  $r_2$  が同値でないならば純矯飾的でないであろう。（つまり  $K(r_1) \not\cong K(r_2)$  であろう。）

ここで、結び目外部空間  $E(K)$  の境界上の2つのスロープが同値であるとは、それぞれを代表する単純閉曲線が  $E(K)$  の自己同相写像で写りあうことをいう。

この予想は現在でも未解決であるが、いくつかのアプローチにより、近年、大きく研究が進んでいる。以降では、それらについて解説をしていく。

### 3. 知られている結果

この節では、結び目補空間予想の解決後、およそ2015年頃までの矯飾的手術に関する研究を概観する。

$S^3$  内の結び目に沿った矯飾的手術の非自明な最初の例は、1990年に Mathieu によって与えられた。

<sup>3</sup> デーン手術において、 $V$  内で円板を張る  $\partial V$  上の単純閉曲線  $\mu$  を1つとり、それと貼り合わされる  $\partial E(K)$  上の単純閉曲線  $\gamma$  を考える。貼り合わせ方を変えても、 $\mu$  と貼り合わされる単純閉曲線が  $\gamma$  とイソトピックであれば、得られる閉3次元多様体の同相類は変わらない。そこで、 $\gamma$  の  $\partial E(K)$  上でのイソトピー類を、そのデーン手術の手術スロープと呼ぶ。一般に2次元トーラス  $T^2$  上の単純閉曲線のイソトピー類をスロープと呼ぶが、それらは  $H_1(T^2, \mathbb{Z})$  の生成系を固定したとき、 $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$  でパラメーター付けされる。 $S^3$  内の結び目でのデーン手術については、通常、 $H_1(\partial E(K))$  の生成系として、 $K$  のメリディアン ( $K$  の管状近傍内でディスクをはる単純閉曲線) で代表される元と、 $K$  のロンジチュード ( $K$  の外部空間内で向き付け可能な曲面をはる単純閉曲線) で代表される元をとり、 $1/0$  に対応するのがメリディアン、 $0/1$  に対応するのがロンジチュードであるようにする。特に  $r = 1/0$  に沿ったデーン手術を自明なデーン手術という。以降、本稿では、手術スロープを有理数で表すことにし、手術スロープ  $r$  に沿った  $K$  でのデーン手術で得られる多様体を  $K(r)$  で表すことにする。

**定理 2** ([Math92]).  $S^3$  内の三つ葉結び目  $T_{2,3}$  について<sup>4</sup>, 任意の  $k \geq 0$  に対して,  $T_{2,3}(\frac{18k+9}{3k+1}) \cong -T_{2,3}(\frac{18k+9}{3k+2})$  が成り立つ。

なお, このスロープ  $\frac{18k+9}{3k+1}$  と  $\frac{18k+9}{3k+2}$  は同値ではない。このことから, 矯飾的手術予想において, 向きを保つという仮定が外せないことがわかる。

さらに上の例の拡張として, Rong により, レンズ空間<sup>5</sup>以外の閉3次元多様体内の結び目で, 外部空間がザイフェルト多様体<sup>6</sup>であるものについて, 矯飾的手術をもつものの分類が与えられた [Ro93]。この系として, 例えば次のことがわかる ([IIS, Appendix A])。  $S^3$  内の  $(r, s)$  型のトーラス結び目  $T_{r,s}$  が矯飾的手術をもつのは,  $s = 2$  かつ  $r \geq 3$  (奇数) のときに限る。このとき, その矯飾的手術は全て対掌的であり, 任意の正の整数  $m$  について, 次が成り立つ。

$$T_{r,s}\left(\frac{2r^2(2m+1)}{r(2m+1)+1}\right) \cong -T_{r,s}\left(\frac{2r^2(2m+1)}{r(2m+1)-1}\right)$$

その後, さらにレンズ空間内の非双曲的結び目に対しては, Matignon により矯飾的手術の完全な分類が与えられている [Mati10]。これらの結果において, 実際には, 純矯飾的手術は存在しなく, そこで与えられた矯飾的手術は全て対掌的であった。

以上は全て, 実は矯飾的手術という用語が明確に導入される以前の結果である。矯飾的手術について, 最初に明確に定義を述べ, その研究の出発点となったのは, 1999 年に出版された論文 [BHW98] である。そこでは, 非自明な矯飾的手術を許容する双曲結び目の初めての具体例が1つ与えられている。それは  $S^2 \times S^1$  内の具体的な1つの結び目として与えられ, 矯飾的手術は対掌的で, 得られた閉3次元多様体はレンズ空間  $L(49, -19) \cong -L(49, -18)$  であった。

一方, 与えられた結び目が矯飾的手術をもつかどうかの判定については, 明確な形で最初に得られたのは, 次の Boyer-Lines の結果だと思われる。

**定理 3** ([BL90]).  $S^3$  内の結び目  $K$  に対して  $\Delta_K(t)$  を  $K$  のアレクサンダー多項式とする。ただし,  $\Delta_K(1) = 1$  となるように正規化しておく。このとき,  $\Delta_K''(1) \neq 0$  ならば,  $K$  は矯飾的手術をもたない。

この定理は, 有理係数ホモロジー球面のキャッソン不変量を計算する手術公式を用いて計算されている。実際, この後から, 3次元多様体の不変量とその手術公式を用いて, 矯飾的手術の非存在を示すことが, 主な手法となった。なお, この  $\Delta_K''(1)$  の値は, 結び目  $K$  のコンウェイ多項式の2次の係数  $a_2(K)$  と一致することがよく知られており, 結び目の2次の有限型不変量にもなっている。

21世紀に入り, Ozsváth と Szabó により [OZ04] において導入されたヒーガード・フレア・ホモロジーは, 矯飾的手術の研究にも精力的に応用された。Ozsváth と Szabó 自身によるものも含めて幾つかの結果が得られていたが, ヒーガード・フレア・ホモロジーのみでなく, その他の不変量を組み合わせるとより強い結果が得られることが次第にわかってきた。例えば, まず [Wu11] において Wu が,  $S^3$  内の結び目  $K$  に沿っ

<sup>4</sup> 三つ葉結び目は,  $(2, 3)$  型のトーラス結び目であるので, このような表記をする。なお,  $S^3$  内に標準的に埋め込まれたトーラス上に描かれる結び目をトーラス結び目という。

<sup>5</sup> 2つのソリッド・トーラスを貼り合わせて得られる閉3次元多様体。以降,  $L(p, q)$  で  $(p, q)$  型のレンズ空間を表す。

<sup>6</sup>  $S^1$  による葉層構造を許容するコンパクト3次元多様体。

たデーン手術について、その手術スロープが異符号ならば純矯飾的にならないことを、ヒーガード・フレア・ホモロジーとキャッソン不変量を合わせて用いることで示した。

さらに、[NW15]において、3次元多様体のキャッソン-ゴードン不変量も合わせて、次の非常に強い結果が得られた。

**定理 4** ([NW15, Theorem 1.2]).  $S^3$  内の結び目  $K$  と異なる手術スロープ  $r_1, r_2$  に対して、もし  $K(r_1) \cong K(r_2)$  となるならば、次が成り立つ。(a)  $r_1 = -r_2$ , (b)  $r_1 = p/q$  と表したとき、 $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$ , (c)  $\tau(K) = 0$  ( $\tau$  は Ozsváth-Szabó によって定義された  $\tau$ -不変量)。

ここで、結び目  $K$  が交代的結び目 (交点の上下が交代的に現れる図式をもつ結び目) の場合は、 $\tau$ -不変量は、よく知られた結び目の符号数  $\sigma(K)$  と一致することが知られており、比較的容易に計算することができる (4.2 節で説明する)。

## 4. 得られた結果

### 4.1. ジョーンズ多項式

本節では、不変量を用いた矯飾的手術の存在の判定について、[IW19] で得られた、結び目のジョーンズ多項式に関する結果を紹介する。参考文献も含め、詳細については [IW19] を参照。

**定理 5** ([IW19, Theorem 1.1]).  $S^3$  内の結び目  $K$  に対して  $V_K(t)$  を  $K$  のジョーンズ多項式とする。このとき、 $V_K''(1) \neq 0$  または  $V_K'''(1) \neq 0$  が成り立つならば、 $K$  は矯飾的手術をもたない。

この定理は、定理 3 で用いられた  $\Delta_K''(1)$  に対して  $V_K''(1) = -3\Delta_K''(1)$  が成り立つことから、定理 3 の 1 つの拡張と見ることができる。さらに、3次元多様体の有限型不変量から見ても、結び目の有限型不変量から見ても、定理 3 の拡張となっている。

定理 5 の証明で用いたのは、Lescop によって定義された  $\lambda_2$ -不変量と呼ばれる 3次元多様体の不変量である。これは有理ホモロジー球面に対して定義された Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量  $Z_n$  の 2 次のパートに対応する。この  $Z_n$  は整ホモロジー球面に対して定義された有限型不変量の普遍不変量となっており、非常に強力な不変量である。なおキャッソン不変量は 1 次の有限型不変量であり  $Z_1$  に対応している。

この  $\lambda_2$ -不変量の明示的な手術公式は Lescop について、次のように与えられている。 $S^3$  内の結び目  $K$  での手術スロープ  $p/q$  に沿ったデーン手術で得られた多様体  $K(p/q)$  に対して、次が成り立つ。

$$\lambda_2(K(\frac{p}{q})) = (\frac{q}{p})^2 \lambda_2''(K) + (\frac{q}{p}) w_3(K) + c(\frac{q}{p}) a_2(K) + \lambda_2(L(p, q))$$

ここで  $\lambda_2''(K)$  と  $c(\frac{q}{p})$  は  $K$  及び手術スロープ  $p/q$  で決まる定数を表す。本質的なのは、Lescop によって  $w_3(K)$  と表された結び目の不変量である。この  $w_3$  について、Lescop は結び目の交差交換に関するスケイン関係式を与えている。そのスケイン関係式と次数 3 以下の有限型不変量の関係式を比較することによって

$$w_3(K) = \frac{1}{72} V_K'''(1) + \frac{1}{24} V_K''(1)$$

が成り立つことを示すことができ、これから定理の証明が従う (最後に定理 4 も使う)。

なお  $w_3$  は結び目の不変量として次数3の有限型不変量であるので、結び目の有限型不変量を用いて定理5を書き換えることもできる ([IW19, Theorem 3.5])。

定理5は3次元多様体の有限型不変量に基づくものであり、定理4などヒーガード・フレア・ホモロジーによる結果とは独立になる。実際、具体的な結び目  $9_{44}$  (よく知られた結び目表を参照) に対しては、デーン手術で得られる多様体  $K(1)$  と  $K(-1)$  が同型なヒーガード・フレア・ホモロジーを持つことが知られているが、定理5によってこれらの多様体を区別することができる。

以上の結果は、Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量  $Z_n$  を基にした Lescop の結果によっているが、もう一つの有限型不変量の普遍不変量である LMO 不変量を用いた拡張が、最近、伊藤によって得られている ([It20])。

#### 4.2. 2橋結び目

本節では [IJMS] で得られた2橋結び目に関する以下の結果を紹介する。また一部では、それ以前に開発された [IS18] の手法を用いているので、その解説も含める。参考文献も含め、詳細については [IJMS] を参照。

**定理 6** ([IJMS, Theorem 1.1]).  $S^3$  内の2橋結び目は純矯飾的手術をもたない。

さらに同様の手法を用いて、代数的ファイバー結び目、代数的プレッツェル結び目が純矯飾的手術をもたないことも示される ([IJMS, Theorem 1.2])。

ここで2橋結び目とは、 $S^3$  内の結び目で、極大点・極小点をそれぞれ2点のみもつような図式をもつものである。そのような図式でより見やすく整形したものをコンウェイ図式と言い、有限整数列を用いて表すことができる。この整数列を連分数展開の成分として計算し得られた有理数を用いると、2つのコンウェイ図式が表される2橋結び目が同型かどうかなど、様々な情報を得ることができる。また連分数展開として特に、偶数のみによるものや、各成分の値が正で最後の項が2以上になるものなどを取ることもできる。さらに、このことから2橋結び目は代数的結び目であることもわかる。

さて定理6は、次の Hanselman の結果に大きく依存している。

**定理 7** ([Ha, Theorem 2]).  $S^3$  内の結び目  $K$  での異なる手術スロープ  $r, r'$  に沿ったデーン手術が純矯飾的ならば次が成り立つ。(i)  $\{r, r'\} = \{\pm 2\}$  または  $\{\pm 1/q\}$ , (ii)  $\{r, r'\} = \{\pm 2\}$  のとき  $g(K) = 2$ , (iii)  $\{r, r'\} = \{\pm 1/q\}$  のとき、次が成り立つ。

$$q \leq \frac{th(K) + 2g(K)}{2g(K)(g(K) - 1)}$$

ここで、 $g(K)$  は  $K$  の種数 ( $K$  が張るザイフェルト曲面の最小種数)、 $th(K)$  はヒーガード・フレア・ホモロジーの厚み (*thickness*) と呼ばれる不変量。

特に、代数的結び目  $K$  については  $th(K) = 0$  となるので (iii) より  $q = 1$  がわかる。つまり、定理4と合わせると次がわかる。

**補題 1.**  $S^3$  内の代数的結び目  $K$  での異なる手術スロープ  $r, r'$  に沿ったデーン手術が純矯飾的ならば、 $g(K) = 2$ ,  $\sigma(K) = 0$ ,  $\{r, r'\} = \{\pm 1\}$  または  $\{\pm 2\}$ 。

以下、上の補題を基に定理6の証明の概略を説明する。

まず、定理 5 の系として [IW19, Corollary 4.5] において、次のことを示してあった。もし種数 2 の 2 橋結び目  $K$  が純矯飾的手術をもつならば、 $K$  に対応する連分数は  $[2x, 2y, -2(x+y), 2x]$  である。さらに、 $x > 0$  かつ  $y \neq 0$  も成り立つ。これは 2 橋結び目のコンウェイ図式からスケイン関係式により  $w_3$  を計算することで得られる。

そこでこの連分数  $[2x, 2y, -2(x+y), 2x]$  に対応する 2 橋結び目  $K$  を考える。次に補題 1 により、結び目の符号数について  $\sigma(K) = 0$  とならなければならない。このことからさらに、 $y < 0$  かつ  $(x+y) > 0$  とならなければいけないことがわかる。ここで、交代的結び目の符号数については、Lee と Traczyk により独立に  $\sigma(K) = o(D) - y(D) - 1$  という公式が知られているので、これを利用した。この左辺は結び目  $K$  の符号数、右辺はそれぞれ  $K$  の交代図式  $D$  から決まる量であるが、ここでは説明を省略する。

以上より、 $[2x, 2y, -2(x+y), 2x]$  ( $x > 0, y < 0, (x+y) > 0$ ) に対応する 2 橋結び目  $K$  を考えれば良い。このとき、全ての成分が正となる連分数展開に書き換えると  $[2x-1, 1, -(2y+1), 2(x+y)-1, 1, 2x-1]$  のようになる。

ここで、[IS18] で用いた  $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量を利用する。

$SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量とは、非常に大雑把な言い方をすれば、閉 3 次元多様体  $\Sigma$  に対して、 $\pi_1(\Sigma)$  の  $SL(2, \mathbb{C})$  表現の符号付同値類の個数を与えるものであり、オリジナルのキャッソン不変量の変種として、2001 年に Curtis により導入された。その後、Boden-Curtis によって、2 橋結び目  $K$  に対して、手術スロープ  $p/q$  に沿った  $K$  でのデー手術で得られた多様体  $K(p/q)$  について、 $\lambda_{SL(2, \mathbb{C})}(K(p/q))$  が total Culler-Shalen セミノルム とほぼ一致することが示されている。このセミノルムは大槻の結果により、 $K$  の境界スロープ (外部空間  $E(K)$  に埋め込まれた本質的曲面の境界で定まるスロープ) の集合から求められることがわかる。さらに、2 橋結び目の境界スロープは Mattman-Maybrun-Robinson によって、全ての成分が正となる連分数展開から計算するアルゴリズムが与えられている。これらを基に [IS18] では、ある 2 橋結び目のクラスでの手術が矯飾的とならないことを示していた (その結果は後に [IW19] で拡張されたので、ここでは省略する)。

ここでは、連分数展開  $[2x-1, 1, -(2y+1), 2(x+y)-1, 1, 2x-1]$  ( $x > 0, y < 0, (x+y) > 0$ ) に対応する 2 橋結び目  $K$  に対して、手術スロープ  $\{\pm 1\}$  または  $\{\pm 2\}$  に沿ったデー手術で得られる多様体の  $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量を具体的に計算することによって、もしその  $K$  が純矯飾的手術をもつならば  $x = -2y$  とならなければいけないことを示した。実際、 $x = -2y$  の場合には、対応する 2 橋結び目はもろ手型 (amphicheiral)<sup>7</sup> になり、 $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量は、3 次元多様体とその鏡像で値が一致するので、この場合は利用できない (6 節も参照)。

最後に、 $x = -2y$  として上記の連分数展開を計算すると  $[4n, -2n, -2n, 4n]$  ( $n > 0$ ) と書き換えられるので、この連分数展開に対応する 2 橋結び目  $K$  を考える。この  $K$  については、[It20] で得られた結果を利用する。そこでは 3 次元多様体の LMO 不変量の次数 3 のパートから、結び目が純矯飾的手術をもつための条件が、4 次と 6 次の結び目の有限型不変量を用いて得られている。あとは上記の連分数展開に対応する  $K$  について計算すれば良いが、結局、本質的に残るのは  $j_4(K)$  という値であった。これはジョーンズ多項式  $V_K(t)$  で  $t = e^h$  として展開した時の 4 次の係数である。この値を計算することによって、最終的に全ての 2 橋結び目が純矯飾的手術をもたないことが証明された。

<sup>7</sup>  $S^3$  内の結び目  $K$  は、その鏡像と向きを保って同値である時、もろ手型であるという。

## 5. 最近の結果について

本稿を執筆している現在（2020年9月）までに、前述の Hanselman の結果を基に様々な結び目に対して結果が得られている。現時点では全てプレプリントだと思われるので、arXiv の番号と共に列挙しておく。

- [arXiv:1906.06773] J. Hanselman, Heegaard Floer homology and cosmetic surgeries in  $S^3$ .
- [arXiv:1909.02340] K. Ichihara, I. D. Jong, T. W. Mattman, T. Saito, Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries.
- [arXiv:1909.05048] R. Tao, Connected sums of knots do not admit purely cosmetic surgeries.
- [arXiv:2005.07278] K. Varvarezos, 3-braid knots do not admit purely cosmetic surgeries.
- [arXiv:2005.12795] I. Petkova, B. Wong, Twisted Mazur pattern satellite knots and bordered Floer theory.
- [arXiv:2006.06765] A. I. Stipsicz, Z. Szabó, Purely cosmetic surgeries and pretzel knots.
- [arXiv:2009.00522] B. Boehnke, C. Gillis, H. Liu, S. Xue, The purely cosmetic surgery conjecture is true for the Kinoshita-Terasaka and Conway knot families.

## 6. 対掌矯飾の手術

この節では、対掌矯飾の手術について [IJ18, IIS] で得られた結果を解説する。

純矯飾の手術については、矯飾の手術予想があり研究の方向性が示されているが、対掌矯飾の手術については、Mathieu の結果 [Math92] などによって、より複雑な状況が起こりうると考えられている。以下では、先に [IIS] によって得られた結果を説明してから、[IJ18] において得られた新しい例について紹介する。

### 6.1. 種数1の交代的結び目

結び目  $K$  での2つの手術スロープ  $r_1$  と  $r_2$  に沿ったデーモン手術で得られた2つの閉3次元多様体  $K(r_1)$  と  $K(r_2)$  について、 $K(r_1) \cong -K(r_2)$  が成り立つとき対掌矯飾的 (chirally cosmetic) というのであった。

単純な例として、もろ手型結び目に沿ったデーモン手術がある。 $K$  を  $S^3$  内のもろ手型結び目とすると、 $\{0, 1/0\}$  を除く任意のスロープ  $r$  と  $-r$  について、 $K$  の外部空間に向きを逆転する自己同相写像が存在して、スロープ  $r$  の代表元を  $-r$  の代表元に写す。従って、 $r$  と  $-r$  は同値になり、 $K(r) \cong -K(-r)$  が成り立つ。よって、 $r$  と  $-r$  に沿ったデーモン手術は対掌矯飾的である。

また一方、3節で紹介したように、 $S^3$  内のトーラス結び目は非自明な対掌矯飾の手術をもつ。

現時点で知られている  $S^3$  内の結び目に沿った矯飾の手術はこれだけであり、実際、[IIS] において、種数1の交代的結び目については、これで尽きることを示した。

**定理 8** ([IIS, Theorem 6.4]).  $S^3$  内の種数1の交代的結び目  $K$  での異なる手術スロープ  $r, r'$  に沿ったデーモン手術が対掌矯飾的ならば次のいずれかが成り立つ。(i)  $K$  はもろ手型であり  $r = -r'$ , (ii)  $K$  は三つ葉結び目であり  $r, r'$  は Mathieu が与えたスロープ。

[IIS]ではまず、キャッソン不変量とキャッソン-ゴードン不変量を用いて、スロープの分母とデデキント和に関する等式を導き、それに有限型不変量の計算を合わせて主に証明をしている。ただし、最後の段階で例外的に残ってしまった結び目については、 $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量とヒーガード・フレア・ホモロジーで得られた結果 (Ozsváth-Szabó, Ni による) を利用した。

この定理から、次の問題が自然に生じる (楽観的過ぎるかもしれないが)。

**問題.** もろ手型でなくトーラス結び目でもない  $S^3$  内の結び目が対掌矯飾的手術をもつことがあるか?

この問題は現時点でどちらとも言えない。実際, [IJ18]において非自明な対掌矯飾的手術をもつ双曲結び目を構成している (ただし,  $S^3$  内の結び目ではない)。次に, この結果 (例) を紹介する。

## 6.2. 対掌矯飾的手術をもつ双曲結び目

矯飾的手術という用語を導入し, その研究の出発点となった [BHW98] では, 非自明な矯飾的手術を許容する双曲結び目の初めての具体例が1つ与えられていた。それは  $S^2 \times S^1$  内の具体的な1つの結び目として与えられ, 矯飾的手術は対掌的で, 得られる多様体はレンズ空間  $L(49, -19) \cong -L(49, -18)$  である。その構成は非常に特殊なソリッド・トーラス内の結び目を利用しており, 一般化するのは非常に困難であるように思われていた。実際, [BHW98] では, 次のような予想が述べられている。

**予想:** ( [BHW98, Conjecture 3], [Ki97, Problem 1.81(B)] ) 閉3次元双曲多様体を生じるような矯飾的手術をもつ双曲結び目は存在しないだろう。

この予想の反例を与えたのが次の結果である。

**定理 9** ([IJ18, Theorem 5.1]). 閉3次元双曲多様体を生じるような矯飾的手術をもつ双曲結び目が存在する。

この矯飾的手術は対掌的であり, 互いに鏡像であるような双曲多様体を生成する。以下, この例の構成方法と, その双曲性などをどのように示したか, 説明する。

まず, 例の記述にはいわゆるモンテシノス・トリックを用いた。モンテシノス・トリックとは,  $S^3$  内の結び目が強可逆的<sup>8</sup>であるとき, それに沿ったデー手術で得られる多様体を2重分岐被覆としてもつような絡み目を構成する方法である。具体的には, 与えられた強可逆的結び目を回転対称性で割って得られる絡み目から, バンド手術によってデー手術後の多様体を2重分岐被覆としてもつ絡み目を構成する。

[BHW98]で構成された例は, デー手術によって表示されていたため, まずその例のモンテシノス・トリックを用いた表示を求めた。その表示を鏡像対称性および回転対称性が「見える」ように変形したのが図1である。

図の左の結び目  $K$  から緑のバンドに沿って切って変形する (バンド手術する) と右の結び目  $K'$  になる。一方で, 中央の水平面に関して  $K$  の鏡像をとり  $2/3\pi$  回転すると  $K'$  が得られる。つまり, バンド手術によって鏡像が得られる結び目が見つかった。実はこの結び目は,  $9_{27}$  と呼ばれる2橋結び目で, その2重分岐被覆はレンズ空間となる。従って, [BHW98]の例の対掌矯飾的手術で得られる多様体がレンズ空間になるのである。

<sup>8</sup>結び目の向きを逆転するような  $180^\circ$  の回転対称性をもつ結び目を, 強可逆的結び目という。

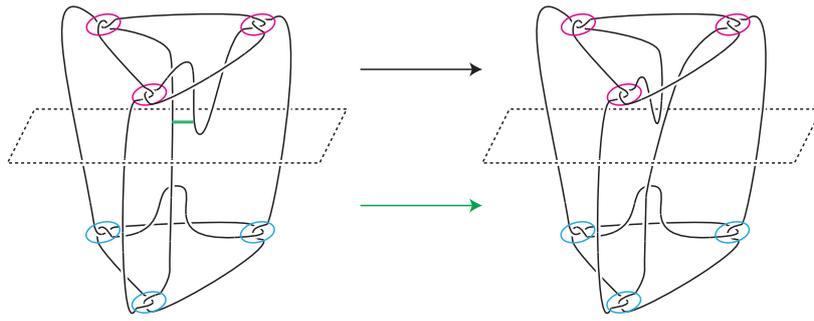


図 1: Bleiler-Hodgson-Weeks の例 (結び目  $9_{27}$ )

Bleiler-Hodgson-Weeks の例を図示することができたので、あとは2重分岐被覆が双曲多様体になるようにこの例を一般化すれば良い。実際には、図 1で3角柱上に配置されていた結び目を5角柱状に配置して例を構成した。

図の構成から、得られた結び目が対掌矯飾的手術をもつことは直ちに従う。あとは、その結び目が双曲的であること、得られた多様体が双曲的であること、さらに非自明な例であることを示すために、2つの手術スロープが同値でないことを示す必要がある。

今回は一つでも具体的な例を与えることを目的としたので、これらのことをコンピュータを使ってチェックした。結び目および得られた多様体の双曲性については、以前に [HIKMOT16] で開発したプログラム “hikmot” を利用した。このプログラムは、3次元多様体の理想四面体分割から立てられる貼り合わせ方程式を精度保障付き数値計算を用いて解くことにより、解が見つかった場合には双曲的であることを数学的に保証する。さらに、手術スロープが同値でないことは、hikmot を応用して、正しく解が見つかった場合には3次元多様体の対称性を調べることができる [DHR15] で開発されたプログラムを利用した。これらの計算については、正井秀俊氏による [IJ18] の Appendix を参照して欲しい。

## 7. 終わりに

現状では、Hanselman の結果 [Ha] がヒーガード・フレア・ホモロジーによるアプローチの一つの到達点とされている（紹介できなかったが Gainullin や Ravenomanana による結果も重要である）。伊藤氏による LMO 不変量によるアプローチ [It20] は非常に強力であり有望であるが、具体的な計算上の難しさが残る。実は最近、双曲幾何を用いたアプローチにも進展があり紹介したかったのだが、紙面の都合上で割愛せざるを得なかった（Jeon による結果や Futer-Purcell-Schleimer による結果）。他にも関連する結果で紹介できなかったものもある（cable knot に関する研究（Ran Tao, 伊藤）、4次元のトポロジーを用いたアプローチ（Lidman））。

本稿では矯飾的手術を研究する動機として、結び目補空間予想およびその一般化から話を始めたが、他に、3次元多様体間の操作としてのデー手術理論の基礎としての位置付けもある。いずれにしても重要性が高く、新たな視点からのアプローチが望まれる。新規に取り組む（若い）研究者の参入を期待したい。

謝辞. 本稿を執筆するにあたって、共同研究者である伊藤哲也氏、斎藤敏夫氏、鄭仁大氏にはご協力をいただきました。この場をお借りして感謝申し上げます。

## 参考文献

- [BHW98] S. A. Bleiler, C. D. Hodgson and J. R. Weeks, Cosmetic surgery on knots, in *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, 23–34, Geom. Topol. Monogr., 2, Geom. Topol. Publ., Coventry.
- [BL90] S. Boyer and D. Lines, Surgery formulae for Casson’s invariant and extensions to homology lens spaces, *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), 181–220.
- [DHR15] N. M. Dunfield, N. R. Hoffman and J. E. Licata, Asymmetric hyperbolic  $L$ -spaces, Heegaard genus, and Dehn filling, *Math. Res. Lett.* **22** (2015), no. 6, 1679–1698.
- [Ga87] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds. II, *J. Differential Geom.* **26** (1987), no. 3, 461–478.
- [Go90] C. McA. Gordon, Dehn surgery on knots, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, 631–642, Math. Soc. Japan, Tokyo.
- [GL89] C. McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 2, 371–415.
- [Ha] J. Hanselman, Heegaard Floer homology and cosmetic surgeries in  $S^3$ , preprint, arXiv:1906.06773
- [HIKMOT16] N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi, and A. Takayasu, Verified Computations for Hyperbolic 3-Manifolds, *Exp. Math.* **25** (2016), no. 1, 66–78.
- [IS18] K. Ichihara and T. Saito, Cosmetic surgery and the  $SL(2, \mathbb{C})$  Casson invariant for two-bridge knots, *Hiroshima Math. J.* **48** (2018), no. 1, 21–37.
- [IJ18] K. Ichihara and I. D. Jong, Cosmetic banding on knots and links, *Osaka J. Math.* **55** (2018), no. 4, 731–745.
- [IW19] K. Ichihara and Z. Wu, A note on Jones polynomial and cosmetic surgery, *Comm. Anal. Geom.* **27** (2019), no. 5, 1087–1104.
- [IIS] K. Ichihara, T. Ito and T. Saito, Chirally cosmetic surgeries and Casson invariants, to appear in *Tokyo J. Math.*
- [IJMS] Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries, preprint, arXiv:1909.02340.
- [It20] T. Ito, On LMO invariant constraints for cosmetic surgery and other surgery problems for knots in  $S^3$ , *Comm. Anal. Geom.* **28** (2020), no. 2, 321–349.
- [Ki97] Problems in low-dimensional topology, Edited by Rob Kirby. AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.2, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 35–473, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [Math92] Y. Mathieu, Closed 3-manifolds unchanged by Dehn surgery, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), no. 3, 279–296.
- [Mati10] D. Matignon, On the knot complement problem for non-hyperbolic knots, *Topology Appl.* **157** (2010), no. 12, 1900–1925.
- [NW15] Y. Ni and Z. Wu, Cosmetic surgeries on knots in  $S^3$ , *J. Reine Angew. Math.* **706** (2015), 1–17.
- [OZ04] P. Ozsváth and Z. Szabó, Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds, *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 3, 1027–1158.
- [Ro93] Y. W. Rong, Some knots not determined by their complements, in *Quantum topology*, 339–353, Ser. Knots Everything, 3, World Sci. Publ., River Edge, NJ.
- [Ti1908] H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Monatsh. Math. Phys.* **19** (1908), no. 1, 1–118.
- [Wu11] Z. Wu, Cosmetic surgery in L-space homology spheres, *Geom. Topol.* **15** (2011), no. 2, 1157–1168.