

第66回

トポロジーシンポジウム

講演集

2019年8月7日～8月10日

於 秋田市・にぎわい交流館AU（あう）

令和元年度科学研究費補助金

基盤研究 (S)	研究課題/領域番号	15H05739
基盤研究 (S)	研究課題/領域番号	17H06128
基盤研究 (A)	研究課題/領域番号	16H02145
基盤研究 (B)	研究課題/領域番号	16H03928

はしがき

この講演集は 2019 年 8 月 7 日から 8 月 10 日までの 4 日間、秋田市・にぎわい交流館 AU（あう）において開催される第 66 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

令和元年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究 (S)
研究代表者 藤原 耕二 (京都大学)
研究課題名 幾何学的群論の深化と展開
研究課題/領域番号 15H05739

研究種目 基盤研究 (S)
研究代表者 佐伯 修 (九州大学)
研究課題名 幾何的トポロジーと写像の特異点論の革新的研究
研究課題/領域番号 17H06128

研究種目 基盤研究 (A)
研究代表者 大槻 知忠 (京都大学)
研究課題名 結び目と 3 次元多様体の量子トポロジー
研究課題/領域番号 16H02145

研究種目 基盤研究 (B)
研究代表者 下川 航也 (埼玉大学)
研究課題名 結び目理論とその諸科学への応用の研究
研究課題/領域番号 16H03928

世話人： 小林真人 (秋田大理工)
中江康晴 (秋田大理工)
山口祥司 (秋田大教育文化)
大本亨 (北大理)
佐伯修 (九大 IMI)

共催： 日本数学会トポロジー分科会
秋田大学

第66回 トポロジーシンポジウム

日時 2019年8月7日(水)午後～8月10日(土)午前

場所 秋田市・にぎわい交流館AU(あう)3階多目的ホール
〒010-0001 秋田市中通一丁目4番1号

プログラム

8月7日(水)

15:00–16:00 谷口 正樹(東京大学・数理科学研究科)

3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境界群と Chern-Simons 汎関数

16:30–17:30 川崎 盛通(京都大学・数理解析研究所)

ラグランジュ・フレアー理論から構成された部分擬準同型とその諸応用

8月8日(木)

9:30–10:30 Benjamin Bode(大阪大学・JSPS 外国人特別研究員)
Braids, polynomials and real algebraic links

11:00–12:00 本田 淳史(横浜国立大学・工学研究院)
光的点を持つ曲面の幾何学

13:30–14:30 加藤 本子(愛媛大学・理工学研究科)
有限次元非正曲率距離空間への群作用の固定点性質

15:00–16:00 若月 駿(東京大学・数理科学研究科)
Brane coproducts and their applications

16:30–17:30 企画講演 柘田 幹也(大阪市立大学・理学研究科)
群作用と多面体 – トーリックトポロジーの観点から –

8月9日(金)

9:40–10:40 大森 源城 (東京理科大学・理工学部)

向き付け不可能曲面の写像類群の無限表示について

11:10–12:10 福田 瑞季 (東京学芸大学・JSPS 特別研究員 PD)

2次元ファイバー結び目に対する Gluck twist について

13:30–14:30 Timo Essig (北海道大学・外国人特別研究員)

Sheaves for Intersection Space Cohomology

15:00–16:00 林 晋 (産業技術総合研究所・産総研特別研究員 PD)

Topological invariants and corner states for some Hamiltonians on a lattice

16:30–17:30 永野 幸一 (筑波大学・数理物質系)

On the topological regularity of spaces with an upper curvature bound

8月10日(土)

9:30–10:30 佐藤 光樹 (東京大学・JSPS 特別研究員 PD)

Heegaard Floer ホモロジーに由来する結び目のコンコーダンス不変量

11:00–12:00 新國 亮 (東京女子大学・現代教養学部)

Conway-Gordon の定理の精密化と一般化

3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境界群と Chern-Simons 汎関数

谷口正樹 (東京大学・学振DC)*

1. 序

本稿では、有向ホモロジー3球面¹ Y の無限大を許す実数値不変量 $\{r_s(Y)\}_{s \in [-\infty, 0]}$ を紹介する。この不変量は、インスタントン Floer ホモロジーの精密化を用いて定義される。その精密化には、Chern-Simons 汎関数の臨界値を用いる。さらに、その一部 $r_0(Y)$ を用いることで、3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境界群に、無限大を許す実数に添字づけられた部分群の列を導入する。その観点から、3次元ホモロジー同境界群についていくつかの新しい性質を導く。本稿で紹介する結果は、野崎雄太氏、佐藤光樹氏との共同研究である。

1.1. 背景 1: ホモロジー同境界群

ホモロジー同境界群は、位相多様体の PL 構造や三角形分割の存在問題に関わって定義された ([24], [18])。 (PL) ホモロジー同境界群は、次のように定義される;

$$\Theta_H^n := \{ \text{有向 PL ホモロジー } n \text{ 球面} \} / \sim_{H\text{-同境}} .$$

ここで、 Y_1 と Y_2 が H -同境 (homology cobordant) であるとは、有向コンパクト $(n+1)$ 次元 PL 多様体 W が存在して、 $\partial W = -Y_1 \amalg Y_2$ 、包含写像 $l_i : Y_i \rightarrow W (i = 1, 2)$ が整係数のホモロジーに同型を誘導することをいう。連結和は、 Θ_H^n に可換群の構造を与える。² 1969年、Kervaire ([20]) によって $n \neq 3$ とするとき、 $\Theta_H^n \cong \{0\}$ であることが示された。 $n = 3$ の時、 Θ_H^3 は、滑らかな多様体の圏で定義したものと同型になる。³ 以下、 Θ_H^3 は、滑らかな多様体の圏で定義したものと考える。任意の有向ホモロジー3球面 Y は、あるコンパクトスピン4次元多様体 W の境界となることが知られている。その W の交差形式の指数 $I(W)$ (正の固有値の個数 - 負の固有値の個数) を考えることによって準同型

$$\mu : \Theta_H^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, [Y] \mapsto I(W)/8 \pmod{2}$$

が定義され、**Rochlin 不変量** と呼ばれる。 $\mu(\Sigma(2, 3, 5)) = 1$ であるから、 μ は全射である。ただし、 $\Sigma(p, q, r)$ は、

$$\Sigma(p, q, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = 0\} \cap S^5$$

によって与えられる Seifert 3次元多様体である。 $(\Sigma(2, 3, 5))$ は Poincaré 球面と呼ばれる。) その後、1978・80年に、松本 ([24])・Galewski-Stern ([18]) は、「与えられた5以上の次元を持つ位相多様体 M が三角形分割を持つための必要十分条件は、あるコホモロジー

本研究は JSPS 科研費 17J04364, および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである。

* e-mail: masakit@ms.u-tokyo.ac.jp

¹ 一般に (PL) ホモロジー n 球面とは、整係数ホモロジーが S^n のホモロジーと同型である (PL) 閉 n 次元多様体のことを指す。この原稿では断らなければ、多様体は、滑らかなものとする。

² この群は、ホモトピー球面の群のホモロジー版と見做すこともできる。([21])

³ 3・4次元位相多様体に対して、PL 構造と微分構造に差はない。

類 $\delta(\Delta(M)) \in H^5(M, \ker \mu)$ が消えることである。」という定理を示した。これにより、 (Θ_H^3, μ) が三角形分割の存在問題と関わるということが明らかとなった。しかし、この時点では、 Θ_H^3 は、有限群であるかどうかも分かっていなかった。その後、1982年に Donaldson によって示された **Theorem A** ([5])、およびその古田による一般化 ([15]) を用いることで、 $\Sigma(2, 3, 5)$ が、 Θ_H^3 の中で torsion でないことが示される。また、この結果を一般化する形で、1990年、古田 ([16])・Fintushel-Stern([9]) は、 $\{\Sigma(p, q, pqk - 1)\}_{k=1}^\infty$ が Θ_H^3 の中で一次独立であることを示した。一方で、2002年に Frøyshov ([12]) は、全射準同型

$$h : \Theta_H^3 \rightarrow \mathbb{Z} : \text{Frøyshov 準同型}$$

を構成した。この不変量 h は、Theorem A を境界付き 4次元多様体に一般化する際に、自然に現れる不変量である。さらにその 10年後、Manolescu ([23]) は、Rochlin 不変量 $\mu : \Theta_H^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が split しないことを示すことで、高次元位相多様体の三角形分割予想を否定的に解決した。そして 2018年の去年、Dai-Hom-Stoffregen-Truong([4]) は、全射準同型 $\phi : \Theta_H^3 \rightarrow \mathbb{Z}^\infty$ を構成した。このことは、 Θ_H^3 に \mathbb{Z}^∞ -summand が存在することを意味する。以上、ホモロジー同境界群の歴史を、結果についてのみ述べた。[5], [8], [16], [9], [12] については、我々の手法と深く関わるため、1.2章において、より詳しく述べる。

1.2. 背景 2: ゲージ理論

数学におけるゲージ理論は、1982年に発表された Donaldson の論文を始まりとして、低次元トポロジーの未解決問題に多くの答えを与えてきた。ゲージ理論では、4次元多様体 X に対して定義される、解のモジュライ空間

$$M(X) := \{ \text{物理由来の非線形偏微分方程式の解} \} / \text{対称性}$$

を考察する。 $M(X)$ は、“多くの場合”，有限集合を除くと、有限次元多様体の構造を持つ。そして、 $M(X)$ の有限次元多様体の構造から、 X 自身の情報を得る、というのがゲージ理論で行われる議論の流れである。本稿では、主に **anti-self-dual** (以下、**ASD**) 方程式を用いて展開される理論について述べる。

1982年、Donaldson は、交差形式が負定値である、単連結有向閉 4次元多様体 X に対して、ASD 方程式の解のモジュライ空間 $M(X)$ を観察することにより、Theorem A を示した。Theorem A は、単連結有向閉 4次元多様体の交差形式が、負定値ならば、 $\oplus_{b_2(X)}(-1)$ と同型であることを主張する。その証明は、 $M(X)$ の端と商特異点を観察することで行われる。この Theorem A、およびその証明方法の、次の二つの派生に着目する。一つは、オービフォールドを含む 4次元多様体に対するゲージ理論であり、もう一つは、境界付き 4次元多様体への拡張である。前者について述べる。1985年、Fintushel-Stern は、 $\Sigma(p, q, pqk - 1)$ を境界を持つ 4次元オービフォールドを用いてゲージ理論を展開することにより、 $\Sigma(p, q, pqk - 1)$ が、 Θ_H^3 の中で torsion でないことを示した。議論の中で最も重要であったのは、 $\Sigma(p, q, pqk - 1)$ に付随するオービフォールドを用いることで、商特異点に対応する ASD 方程式の解の一意存在が保証できることである。さらに、この議論を拡張する形で、1990年、古田 ([16]) と Fintushel-Stern([9]) は、 $\{\Sigma(p, q, pqk - 1)\}_{k=1}^\infty$ が Θ_H^3 内で一次独立であることを示した。その証明は、Fintushel-Stern が用いた商特異点に対応する ASD 方程式の解の一意存在と、**Chern-Simons** 汎関数の臨界値から定まる解のモジュライ空間に対する制約を組み合わせることによって行われる。この議論は、Seifert 3次元多様体に付随するオービフォールドを用いているという点で、そのま

までは、一般のホモロジー3球面への拡張は、難しい。次に、Theorem Aの境界付き4次元多様体への拡張について述べる。Theorem Aは、“ S^3 を境界に持つ滑らかな4次元多様体 W の交差形式が負定値ならば、 $\oplus_{b_2(W)}(-1)$ と同型である”，という解釈ができる。 S^3 をホモロジー3球面 Y に取り換えた命題を拡張された**Theorem A**と呼ぶことにする。この時、次の問いを考える；

問 1 どのようなホモロジー3球面 Y に対して、拡張されたTheorem Aは成立するのか？

これに対する一つの答えとして、Donaldson([6])は、“障害類 $\theta_{-Y} \in I^*(-Y, \mathbb{Q})$ が消えている Y について、拡張されたTheorem Aが成立する”ことを示した。 $I^*(Y, \mathbb{Q})$ は、 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 次数つき有限次元 \mathbb{Q} -ベクトル空間であり、 Y のインスタントンFloerコホモロジーと呼ばれる。インスタントンFloer(コ)ホモロジーは、Floer([11])によって $Y \times \mathbb{R}$ に対するASD方程式のモジュライ空間を観察することで定義された。実際に定義する際、インスタントンFloerホモロジーは、Chern-Simons汎関数をMorse関数とする“Morseホモロジー”として構成される。また、問1に対するもう一つの同値な回答として、Frøyshov([12])は、“Frøyshov不変量 $h(Y)$ が0以下の Y に対して、拡張されたTheorem Aが成立する”ことを示した。 $h(Y)$ は、インスタントンFloer(コ)ホモロジーの“同変コホモロジー”としての構造を用いて定義される。

1.3. 我々の研究についての概要

インスタントンFloerホモロジー、および θ_Y の構成から、 θ_Y が消えていなければ、 $Y \times \mathbb{R}$ 上に商特異点を境界条件に持つようなASD方程式の解が存在する。我々は、この性質を観察することで、上記のFintushel-Sternが用いた、商特異点に対応するASD方程式の解の存在を、 $0 \neq \theta_Y \in I^*(Y)$ という条件を用いて代用できることを考察した。また、古田([16])・Fintushel-Stern([9])では、Chern-Simons汎関数の臨界値に関する制約を用いていたが、その議論も、フィルター付き⁴インスタントンFloer(コ)ホモロジー $I_{[s,r]}^*(Y)$ および、フィルター版の障害類 $\theta_Y^{[s,r]} \in I_{[s,r]}^*(Y)$ ⁵($-\infty \leq s \leq 0 \leq r \leq \infty$)を用いることで表現できることを観察した。フィルター付きインスタントンFloerホモロジーは、1992年、Fintushel-Stern([10])によって定義されていたものと、本質的に同じである。そして、フィルター版の障害類 $\theta_Y^{[s,r]} \in I_{[s,r]}^*(Y)$ を用いて不変量 $r_s(Y)$ を

$$r_s(Y) := \sup\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid 0 = \theta_Y^{[s,r]} \in I_{[s,r]}^1(Y, \mathbb{Q})\}$$

によって定義した。⁶これは、無限大を許す実数値不変量となり、古田([16])・Fintushel-Stern([9])・Floer([11])のテクニックを使うことで、ホモロジー同境不変量となることが示される。また、深谷([14])・Donaldson([6])によるインスタントンFloerホモロジーの連結和公式を、フィルター付きの場合に観察することによって、 $r_0(Y)$ に連結和公式を与えた。さらに、 $r_0(Y)$ の連結和公式を使うことで、 Θ_H^3 に図1にあるような部分群のフィルトレーションを与えた。古田・Fintushel-Sternの考察した列 $\{\Sigma(p, q, pqk-1)\}_{k=1}^\infty$ は、図1のように発散していくことが観察でき、それぞれが部分群として閉じていることから、 $\{\Sigma(p, q, pqk-1)\}_{k=1}^\infty$ が Θ_H^3 において一次独立であることは、視覚的に見て取れる。

⁴ Chern-Simons汎関数を用いたフィルター。

⁵ このような不変量は、[29]において最初に定義された。

⁶ この定義は、パーシステントホモロジーや、ECHにおけるspectral不変量([19])のインスタントンFloerホモロジーにおけるアナロジーと言える。

この観点, および, $r_0(Y)$ の連結和公式を用いて, Θ_H^3 に関するいくつかの新しい性質を導いた. (定理6, 定理8, 命題3)

2. 主結果

この章では, まず $\{r_s(Y)\}$ の性質に関する主定理を述べ, その後, $r_0(Y)$ を用いて, Θ_H^3 に部分群の増大系列を導入する. 図1は, その増大系列を絵にしたものである. 不変量

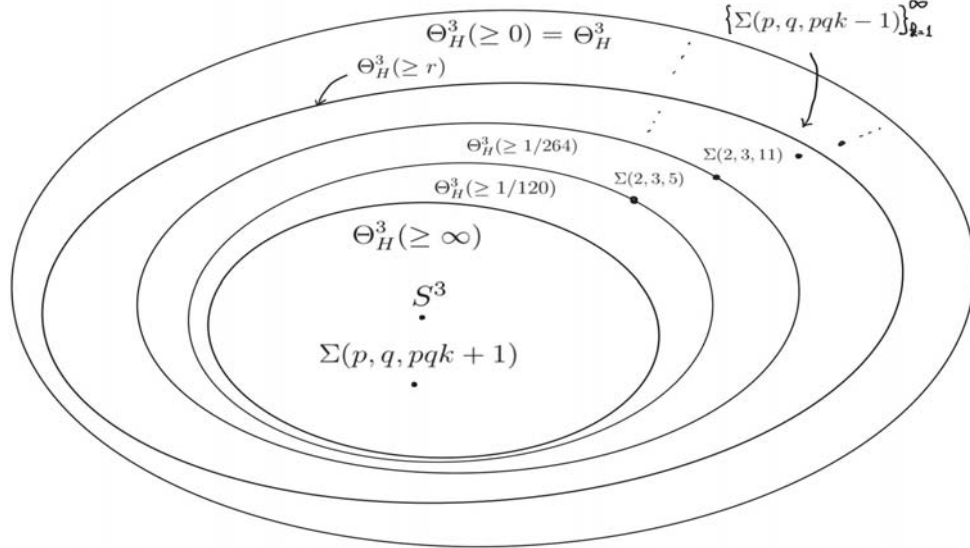


図1: Θ_H^3 の絵

の計算結果や, いくつかの応用は, 図1を使うことで, 視覚的に理解することができる.

2.1. 主定理

次が本稿の主定理である.

定理 1 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) $s \in \mathbb{R}_{\leq 0} \amalg \{-\infty\}$ と有向ホモロジー3球面 Y に対して, 無限大を許す正の実数値不変量 $r_s(Y)$ が定まり, 以下の性質を持つ.

1. (単調性) $s \leq s'$ ならば, $r_{s'}(Y) \leq r_s(Y)$ が成立する.
2. ($r_s(Y)$ の値) 全ての s に対して $r_s(Y)$ の値は,

$$\{SU(2)\text{-Chern-Simons 汎関数の既約な臨界点の臨界値}\} \amalg \{\infty\}$$

に含まれる.

3. (同境不等式) Y_1, Y_2 をホモロジー3球面とする. また, W を交差形式が負定値であるコンパクト有向4次元多様体あって, $\partial W = Y_1 \amalg -Y_2$ となっているとする. このとき,

$$r_s(Y_2) \leq r_s(Y_1)$$

が成立する. さらに, $r_s(Y_1)$ が有限で, W が単連結ならば,

$$r_s(Y_2) < r_s(Y_1)$$

が成立する.

4. (連結和公式) r_0 に対して,

$$r_0(Y_1 \# Y_2) \geq \min\{r_0(Y_1), r_0(Y_2)\} \quad (1)$$

が成立する.

5. (非自明性) Frøyshov 不変量 $h(Y)$ が負であることと, $r_{-\infty}(Y)$ が有限であることは同値である.

注意 1 まず, 二つの Remark を述べる.

- 2018年, Daemi ([1]) は, 有向ホモロジー3球面 Y と, $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\Gamma_Y(k)$ と呼ばれる, 無限大を許す正の実数値不変量を定義した. $\Gamma_Y(k)$ は k について, 単調増大列である;

$$\cdots \Gamma_Y(-1) \leq \Gamma_Y(0) \leq \Gamma_Y(1) \leq \cdots$$

さらに Daemi の構成はインスタントン Floer 理論を用いており, k が正ならば, $\Gamma_Y(k)$ は, 定理1の2,3,5を満たす. このことから, 次の問いは自然である.

問 2 $\Gamma_Y(k)$ と $r_s(Y)$ に関係はあるか?

これに対して, 我々は次のことを証明した;

定理 2 (野崎-佐藤-谷口,[26], 2019) 任意のホモロジー3球面 Y に対して

$$r_{-\infty}(Y) = \Gamma_{-Y}(1)$$

が成立する.

$\{r_s(Y)\}$ は, $\Gamma_{-Y}(1)$ への収束列を与えることも分かる. $\Gamma_Y(k) (k \leq 0)$ と, $\{r_s(Y)\}$ の関係は, 未だわかっていない.

- $Y = \Sigma(2, 3, 5) \# (-\Sigma(2, 3, 6k - 1))$ (k は自然数) とすると, $r_s(Y)$ は s について定数ではない. さらに, $Y_1 = \Sigma(2, 3, 5) \# (-\Sigma(2, 3, 6k - 1))$, $Y_2 = -\Sigma(2, 3, 5)$ について Daemi の不変量 $\Gamma_Y(k)$ (k は正の整数) は連結和公式 (1) を満たさない.
- 連結和公式は r_0 に対してのみ, 記述した. 一般の s については, 現在考察中である.⁷

不変量を定義した時, その計算可能性を保証することは重要である. 我々は, 次のクラスの Seifert 3次元多様体に対して計算を行った.

⁷ 次の形になることを予想している;

$$r_s(Y) \geq \min_{s=s_1+s_2} \{r_{s_1}(Y) - s_2, r_{s_2}(Y) - s_1\}$$

定理 3 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) (p, q) を互いに素な自然数のペアとする. また, k を自然数とする. この時, 任意の $s \in \mathbb{R}_{\leq 0} \amalg \{-\infty\}$ に対して

$$r_s(-\Sigma(p, q, pqk - 1)) = \frac{1}{4pq(pqk - 1)}, \quad r_s(\Sigma(p, q, pqk - 1)) = \infty$$

および,

$$r_s(-\Sigma(p, q, pqk + 1)) = r_s(\Sigma(p, q, pqk + 1)) = \infty$$

が成立する.

[26] には, Seifert ホモロジー 3 球面に関して, より多くの計算例がある. また, Seifert 3 次元多様体のいくつかの連結和に対して, 次のような振る舞いをする.

命題 1 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) Y を, Seifert 3 次元多様体の有限個の連結和で書かれるホモロジー 3 球面とする. この時, $r_s(Y) \in \mathbb{Q}_{>0} \amalg \{\infty\}$ が成立する.

2.2. Θ_H^3 のフィルトレーション

定義 1 $\Theta_H^3(\geq r)$ を,

$$\Theta_H^3(\geq r) := \{[Y] \in \Theta_H^3 \mid \min\{r_0(Y), r_0(-Y)\} \geq r\}$$

として定める.

$r_0(Y)$ の連結和公式によって, 次が示される.

定理 4 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) 任意の実数 $r \geq 0$ もしくは $r = \infty$ に対して, $\Theta_H^3(\geq r)$ は, Θ_H^3 の部分群となる.

注意 2 k を正の整数とする時, Daemi の不変量 $\Gamma_Y(k)$ に対して, 連結和公式 (1) を満たさない例が存在するため, 同様にフィルトレーションを定めることができない. また, 一般に, $\Gamma_Y(k)$ の連結和公式は, 未だ考えられていない. 加えて, k を 0 以下の整数とする時, $\Gamma_Y(k)$ の非自明な計算例は知られていない.

これにより, 部分群の列;

$$\Theta_H^3(\geq \infty) \subset \cdots \subset \Theta_H^3(\geq r) \subset \cdots \subset \Theta_H^3(\geq 0) = \Theta_H^3$$

が得られる. この部分群の列と定理 3 を合わせて書くと, 上記の図 1 のようになる. $\{\Sigma(p, q, pqk - 1)\}_{k=1}^{\infty}$ は, 無限遠に発散していき, それぞれの線で囲まれている領域が, 部分群であるため, $\{\Sigma(p, q, pqk - 1)\}_{k=1}^{\infty}$ が一次独立であるという事実を, 視覚的に捉えることができる. これらの列 $\Theta_H^3(\geq r)$ について分かっていることは, 多くない. 次の結果は, [16], [9] の結果の精密化と言える.

定理 5 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) 任意の $r > 0$ に対して, $\Theta_H^3/\Theta_H^3(\geq r)$ は, \mathbb{Z}^∞ を部分群として持つ.

また, 最も小さい部分群 $\Theta_H^3(\geq \infty)$ は, \mathbb{Z} を含むことがわかる.

3. 低次元トポロジーへの応用

この章にて, $\{r_s(Y)\}$ がもたらす応用について述べる.

3.1. 3次元ホモロジー同境界群

まず, ホモロジー同境界群における応用を述べる.

定理 6 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) K を S^3 内の結び目であって, $h(S_1^3(K)) < 0$ であるとする. この時, $\{S_{1/k}^3(K)\}_{k=1}^\infty$ は, Θ_H^3 の中で一次独立である.

$h(S_1(K)) < 0$ という条件は, 図1において, $S_1(K)$ が $\Theta_H^3(\geq \infty)$ の外にいることを意味する. そして, 列 $\{S_{1/k}^3(K)\}_{k=1}^\infty$ を図1にプロットした時, 段々と外側に離れていく様を示すことが, 証明のアウトラインである. この定理は, K をトーラス結び目 $T(p, q)$ とすることにより, 古田 ([16])・Fintushel-Stern ([9]) の結果を復元する. さらに, $h(S_1^3(K)) < 0$ を満たす結び目として, 双曲・サテライト結び目の無限系列を構成可能である.

命題 2 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) $h(S_1^3(K)) < 0$ を満たす双曲結び目, サテライト結び目の無限列が存在する.

Θ_H^3 の先行研究は, Seifert ホモロジー3球面に対するものがほとんどである. 一方で, Θ_H^3 の全ての元は, 双曲3次元多様体を代表元として持つことが知られている ([25]). その観点から, 次は自然な問いである.

問 3 Θ_H^3 の全ての元は, Seifert 3次元多様体を代表元として持つか?

この問いの答えは否である. これは2015年に **Seiberg-Witten(以下, SW) 理論**⁸ を用いて, Stoffregen が証明を与えた ([28]). 1.1章では ASD 方程式を用いて得られる, Yang-Mills(以下YM) 理論についてのみ, 述べたが, ゲージ理論には, SW 方程式を用いて得られる SW 理論がある. YM理論とSW理論は, 並行して発展してきた歴史があり, 常に両者の関係は意識されてきた. 閉4次元多様体に対しては, Donaldson 不変量とSW不変量が等価であるという **Witten 予想**があり, その一部が解かれている ([7]). また, Theorem A は, YM理論とSW理論の両理論において証明可能である. 一方で, 扱う多様体を非コンパクトとする場合, 両理論の同値性が確立されておらず, 実際に成立するのかわからないような多くの部分がある. 我々は, YM理論を用いて, 問3の答えが否であることの別証明を与えた;

定理 7 (Stoffregen, [28], SW理論, 2015, 野崎-佐藤-谷口, [26], YM理論, 2019) Θ_H^3 の元であって, Seifert ホモロジー3球面を代表元として含まないものが存在する.

また, “与えられたホモロジー3球面 Y に対して, Y がいかなる交差形式を持つ4次元多様体の境界となるか” という問題は, 1.2節で述べた拡張された Theorem A に関連し, 興味を持たれてきた. 例えば, Seifert ホモロジー3球面や結び目手術で書かれるホモロジー3球面は, 必ず, 交差形式が正定値, もしくは負定値であるコンパクト有向4次元多様体の境界となることが知られている. $r_0(Y)$ の連結和公式を用いると, 問3に答えるだけでなく, 次の問いにも答えを与えることができる;

問 4 交差形式が正定値, もしくは負定値であるコンパクト有向4次元多様体の境界になり得ない, ホモロジー3球面は存在するか?

これに対して, 次を示した.

定理 8 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) 交差形式が正定値, もしくは負定値である4次元多様体の境界になり得ない, ホモロジー3球面の族 $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する. 特に, $[Y_k]$ は,

⁸ $Pin(2)$ -monopole Floer ホモロジーを用いて定義される α, β, γ を用いて示された.

Seifert ホモロジー 3 球面, 結び目の手術でかけるホモロジー 3 球面を含まない. さらにそのような $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ を, $\{[Y_k]\}_{k=1}^{\infty}$ が Θ_H^3 において一次独立であるように選ぶことができる.

定理 8 の系として, 定理 7 が従う. この結果の SW 理論を用いた証明は知られていない. さらに, 問 3 をより一般化した問いとして,

問 5 Θ_H^3 の全ての元は, Seifert 3 次元多様体の線型結合で表記されるか?

という問いがある. 一方で, 命題 1 によって, $r_s(Y)$ は, Seifert 3 次元多様体の線型結合で書かれている時, 有理数であった. すなわち, $r_s(Y)$ が無理数であるような Y を発見すれば, 問 5 に答えを与えることができる. これを念頭に, 次のような計算を行った.

コンピュータ計算 1 任意の s に対して

$$r_s(S_{1/2}^3(5_2^*)) \approx 0.0017648904\ 7864885113\ 0739625897\ 0947779330\ 4925308209$$

が 10^{-50} オーダーで成立する. ただし, $S_{1/2}^3(5_2^*)$ は, Rolfsen のテーブルの結び目 5_2 の, 鏡像の $1/2$ 手術である.

この値を見ると, 小数点以下に周期性がない.

問 6 任意の s に対して, $r_s(S_{1/2}^3(5_2^*))$ は無理数か?

この問いが肯定的に解かれた場合, 示されることとして, 次がある.

命題 3 (野崎-佐藤-谷口, [26], 2019) もし問 6 が肯定的に解かれれば, Θ_H^3/Θ_S^3 は, \mathbb{Z} を部分群として含む. ただし, Θ_S^3 は, Seifert ホモロジー 3 球面に生成される Θ_H^3 の部分群とする.

4. 未解決問題

4.1. ホモロジー同境群について

Θ_H^3 の構造に関する未解決問題として次がある.

問 7 Θ_H^3 は, torsion を持つか?

この問題への一つのアプローチとして, 共同研究者の佐藤光樹氏は, 次のような可能性を提示した; K を S^3 内の有向結び目とする. $S(K, -K^*)$ を K と $-K^*$ ($*$ は鏡像の意) のスプライスとする. この時, $2[S(K, -K^*)] = 0 \in \Theta_H^3$ であることが知られている. よって, 有向結び目 K であって, $S(K, -K^*)$ が S^3 とホモロジー同境でないものを発見できれば, 位数 2 の torsion の存在が分かる. これについて, 不変量 $r_s(Y)$ は使えないだろうか;

問 8 $r_s(S(K, -K^*)) \neq \infty$ であるような有向結び目 K と s は, 存在するか?

この問いが肯定的に解かれれば, Θ_H^3 に torsion が見つかる. また, 我々の構成した部分群の列 $\Theta_H^3(\geq r)$ について, 次のような問題がある.

問 9 $r < r'$ に対して, $\Theta_H^3(\geq r)/\Theta_H^3(\geq r')$ は有限生成か? また, $\Theta_H^3(\geq \infty)$ は有限生成か?

この問題は、 Θ_H^3 を部分群の列に分解して理解する可能性に関わる。この問題へのアプローチとして、我々の手法を、SW理論で用いられている“局所同型”のテクニックと組み合わせてさらに深める方向性が考えられる。また、 $\Theta_H^3(\geq \infty)$ の \mathbb{Z}^∞ の生成元の候補として、 $\{\Sigma(p, q, pqk + 1)\}_{k=1}^\infty$ がある。

問 10 (p, q) は互いに素な自然数のペアとする時、 $\{\Sigma(p, q, pqk + 1)\}_{k=1}^\infty$ は、一次独立か？ SW理論を用いて導かれる、10/8定理 ([17]) を使うことで、 $\Sigma(2, 3, 7)$ が torsion でないことが分かる。一方、YM理論を用いて得られる h や $\{r_s(Y)\}$, $\Gamma_Y(k)$ は、 $\Sigma(2, 3, 7)$ に対して自明 (S^3 に対する値と同じ) となる。SW理論から得られる \mathbb{Z} を値を持つホモロジー同境不変量 α, β, γ ([23]), κ ([22]) は、 $\Sigma(2, 3, 7)$ に対して消えていないことが知られており、これらを用いることは、問 10 を肯定的に解く際には、一つの可能性を与える。

4.2. インスタントン Floer ホモロジーについて

我々は、 $S_{1/k}^3(K)$ が一次独立であるための十分条件を与えたが、 $S_{1/k}^3(K)$ のインスタントン Floer ホモロジーは、分かっていない。より一般の結び目 K に対して、インスタントン Floer 理論を自由に扱うためには、Floer ホモロジーの計算が重要となる。

問 11 2橋結び目 K と、0 でない整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $S_{1/k}^3(K)$ のインスタントン Floer ホモロジーを計算せよ。

特に $K = T(p, q)$ とするとき、その計算は、[9] で行われている。また、計算方法の一つの可能性として、手術完全列を用いるという方法がある ([3])。最後に、インスタントン Floer 理論における、基本的な問題を挙げる。

問 12 一般の3次元多様体 Y と $SU(2)$ 束に対して、摂動に依らない“同変”インスタントン Floer ホモロジーを構成せよ。

この問題には、多くの人々が特別な場合に挑戦している ([13], [2], [27]) が、未だ、決定的な定義は与えられていない。困難の所在は、“ゲージ群の固定点”に関わる部分にあり、固定点に寄与により、摂動に対する依存性や、“ $\partial^2 \neq 0$ ”に関する問題が現れる。

参考文献

- [1] Aliakbar Daemi. Chern-Simons Functional and the Homology Cobordism Group, 2018; arXiv:1810.08176.
- [2] David M. Austin and Peter J. Braam, *Equivariant Floer theory and gluing Donaldson polynomials*, Topology **35** (1996), no. 1, 167–200, DOI 10.1016/0040-9383(95)00004-6. MR1367280
- [3] P. J. Braam and S. K. Donaldson, *Floer’s work on instanton homology, knots and surgery*, The Floer memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 195–256. MR1362829
- [4] Irving Dai, Jennifer Hom, Matthew Stoffregen and Linh Truong. An infinite-rank summand of the homology cobordism group, 2018; arXiv:1810.06145.
- [5] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315. MR710056
- [6] ———, *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 147, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. With the assistance of M. Furuta and D. Kotschick. MR1883043
- [7] Paul M. N. Feehan and Thomas G. Leness, *An $SO(3)$ -monopole cobordism formula relating Donaldson and Seiberg-Witten invariants*, Mem. Amer. Math. Soc. **256** (2018), no. 1226, xiv+234. MR3897982

- [8] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 2, 335–364, DOI 10.2307/1971306. MR808222
- [9] ———, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. (3) **61** (1990), no. 1, 109–137, DOI 10.1112/plms/s3-61.1.109. MR1051101
- [10] ———, *Integer graded instanton homology groups for homology three-spheres*, Topology **31** (1992), no. 3, 589–604, DOI 10.1016/0040-9383(92)90053-K. MR1174261
- [11] Andreas Floer, *An instanton-invariant for 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), no. 2, 215–240. MR956166
- [12] Kim A. Frøyshov, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology **41** (2002), no. 3, 525–552, DOI 10.1016/S0040-9383(01)00018-0. MR1910040
- [13] Kenji Fukaya, *Floer homology for oriented 3-manifolds*, Aspects of low-dimensional manifolds, Adv. Stud. Pure Math., vol. 20, Kinokuniya, Tokyo, 1992, pp. 1–92, DOI 10.2969/aspm/02010001. MR1208307
- [14] ———, *Floer homology of connected sum of homology 3-spheres*, Topology **35** (1996), no. 1, 89–136, DOI 10.1016/0040-9383(95)00009-7. MR1367277
- [15] Mikio Furuta, *Perturbation of moduli spaces of self-dual connections*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), no. 2, 275–297. MR914023
- [16] ———, *Homology cobordism group of homology 3-spheres*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 339–355, DOI 10.1007/BF01231190. MR1047138
- [17] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291, DOI 10.4310/MRL.2001.v8.n3.a5. MR1839478
- [18] David E. Galewski and Ronald J. Stern, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 1, 1–34, DOI 10.2307/1971215. MR558395
- [19] Michael Hutchings, *Quantitative embedded contact homology*, J. Differential Geom. **88** (2011), no. 2, 231–266. MR2838266
- [20] Michel A. Kervaire, *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 67–72, DOI 10.2307/1995269. MR0253347
- [21] Michel A. Kervaire and John W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537, DOI 10.2307/1970128. MR0148075
- [22] Ciprian Manolescu, *On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 695–728, DOI 10.1007/s00208-014-1010-1. MR3231012
- [23] ———, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 1, 147–176, DOI 10.1090/jams829. MR3402697
- [24] Takao Matumoto, *Triangulation of manifolds*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, pp. 3–6. MR520517
- [25] Robert Myers, *Homology cobordisms, link concordances, and hyperbolic 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), no. 1, 271–288, DOI 10.2307/1999315. MR697074
- [26] Yuta Nozaki, Kouki Sato and Masaki Taniguchi. Filtered instanton Floer homology and the homology cobordism group, 2019; arXiv:1905.04001.
- [27] Hirofumi Sasahira, *Instanton Floer homology for lens spaces*, Math. Z. **273** (2013), no. 1-2, 237–281, DOI 10.1007/s00209-012-1003-2. MR3010159
- [28] Matthew Stoffregen. Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology of Seifert fibrations, 2015; arXiv:1505.03234.
- [29] Masaki Taniguchi, *Instantons for 4-manifolds with periodic ends and an obstruction to embeddings of 3-manifolds*, Topology Appl. **243** (2018), 1–32, DOI 10.1016/j.topol.2018.04.016. MR3811080

ラグランジュ・フレアー理論から構成された 部分擬準同型とその諸応用

川崎 盛通 (京都大学 学術振興会特別研究員 PD)*

令和元年八月七日

1. 導入

本稿では多様体は全て連結で境界のないものを考えるとする。また、本稿では常に C^∞ 級の多様体を考え、滑らかな写像といえば常に C^∞ 級とする。

定義 1.1 M を $2n$ 次元多様体とする。 M 上の二次微分形式 ω がシンプレクティック形式であるとは、 ω が閉形式、つまり $d\omega = 0$ であって、任意の $x \in M$ について $(\omega^n)_x \neq 0$ となることである。偶数次元多様体 M とその上のシンプレクティック形式 ω の組 (M, ω) をシンプレクティック多様体という。

初等的な線形代数の帰結として、シンプレクティック形式 ω と $x \in M$ について、 $\omega_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ は二次形式として非退化となることが知られている。

以下の例のように余接束には自然なシンプレクティック構造が入る。これこそがシンプレクティック幾何学が古典力学から誕生した歴史的起源である。

例 1.2 N を多様体とする。 N の余接束 T^*N は以下のような自然なシンプレクティック形式 ω_0 をもつ。

$\pi: T^*N \rightarrow N$ を自然な射影とする。このとき、一次微分形式 λ_0 を $\lambda_0(v) = p(\pi_*v)$ ($q \in N$, $p \in T_q^*N$, $v \in T_{(p,q)}(T^*N)$) により定義する。 $\omega_0 = d\lambda_0$ とすると、 ω_0 はシンプレクティック形式である。

シンプレクティック幾何学を考える他の動機は、測地流を通したリーマン幾何との関係、ミラー対称性の A 模型との関係、ケーラー幾何を通した代数幾何との関係など多岐に渡るが、ここでは割愛する。

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし、その上の C^∞ 級ベクトル場の成す集合を $X(M)$ とする。 M 上の関数 $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ について、そのハミルトン・ベクトル場 X_H を

$$\text{任意の } V \in X(M) \text{ について、 } \omega(X_H, V) = -dH(V)$$

によって定義する (ω は非退化二次形式なので、このような X_H は一意に定まる)。

円周 S^1 を $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ によって定める。また、本稿では時間依存しコンパクト台をもつハミルトン関数を考える。つまり本稿において、シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のハミルトン関数とは、滑らかな関数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ であって、その台 H が $[0, 1] \times M$ 内のコンパクト部分集合となるものを指す。また、ハミルトン関数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ について、その時間パラメータ t を固定したものを H_t で定める。つまり $H_t: M \rightarrow \mathbb{R}$ を $H_t(x) = H(t, x)$ によって定義する。

本研究は科研費 (課題番号:18J00765) の助成を受けたものである。

キーワード: 擬準同型, ハミルトン微分同相群, ラグランジュ・フレアー理論

* 〒606-8317 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: kawasaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

ハミルトン関数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ について、そのハミルトン・イソトピー $\{\phi_H^t\}_{t \in [0, 1]}$ を時間変化するベクトル場 $\{X_{(H_t)}\}_t$ による積分として定義する。つまり、微分方程式 $\phi_H^0 = \text{id}$, $\frac{d\phi_H^t}{dt} = X_{(H_t)}$ の解として定義する。更に、 ϕ_H^1 を ϕ_H と略記し、これを H により生成されたハミルトン微分同相写像と呼び、ハミルトン関数から生成される微分同相写像をハミルトン微分同相写像と呼ぶ。

シンプレクティック多様体 (M, ω) についてハミルトンの成す集合をハミルトン微分同相群と呼び、 $\text{Ham}(M, \omega)$ と表記する。これは名前の通り写像の合成について群を成す。(ただし、「ハミルトン関数で生成される」という形での定義のため、実際に群を成すことを証明するのは少し非自明である。)

さて、ここでシンプレクティック多様体上の自然な変換群としてハミルトン微分同相群を定義したわけだが、トポロジーや微分幾何の専門家からすればシンプレクティック構造を保つ微分同相写像の成す群であるシンプレクティック微分同相群も自然な概念であろう。任意のハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保存し、更にいえばハミルトン微分同相群はシンプレクティック微分同相群の正規部分群である。

ハミルトン微分同相群 $\text{Ham}(M, \omega)$ を「リー群」とみなす場合、その「リー環」である $\text{Lie}(\text{Ham}(M, \omega))$ はハミルトン・ベクトル場の成す線形空間となる。ハミルトン・ベクトル場がハミルトン関数の微分のみで決まることを考えると、 $\text{Lie}(\text{Ham}(M, \omega))$ は $C^\infty(M)/\mathbb{R}$ と同一視でき、特にハミルトン微分同相群は「無限次元リー群」である。

以下、シンプレクティック幾何学(ハミルトン力学系)における non-displaceability の問題を考えるのだが、変換群が無限次元となるハミルトン力学系が本稿で述べるような「剛性」を持つことにこの問題の面白さがある。 X, Y をシンプレクティック多様体 (M, ω) の部分集合とする。 X が Y から **displaceable** であるとは、ある $f \in \text{Ham}(M, \omega)$ が存在して、 $f(X) \cap \bar{Y} = \emptyset$ となることである。ここで、 \bar{Y} は Y の閉包である。単に X が **displaceable** といった場合には、 X が X 自身から displaceable であることを指す。

まずは二次元の場合を考えよう。二次元の場合、シンプレクティック形式は面積形式と一致するのもあって、この問題を易しく理解する上で有効である。

例 1.3 二次元球面 S^2 を $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ によって定義し、標準的なシンプレクティック形式(面積形式) ω_0 を考える。函数 $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $F(x, y, z) = z$ で定める。

このとき、 $F^{-1}(c)$ は $c \neq 0$ のとき **displaceable** で、 $c = 0$ のとき **non-displaceable** である。前者は $\text{SO}(3) \leq \text{Ham}(S^2, \omega_0)$ からしたがう(ここで、 $\text{SO}(3)$ は標準的な計量を入れた S^2 の向きを保つ等長変換の成す群と同一視)。後者はハミルトン微分同相写像がシンプレクティック形式=面積形式を保存することから従う。

$F^{-1}(0)$ は明らかに微分同相写像で **displaceable** であるので、この例からどうもシンプレクティック幾何特有の「剛性」がありそうなのが察せられるであろう。

例 1.4 二次元トーラス T^2 を $T^2 = S^1 \times S^1$ で定義し、標準的なシンプレクティック形式(面積形式) ω_0 を考える。このとき、任意の $c \in S^1$ について経線 $\{c\} \times S^1 \subset T^2$ は **non-displaceable** である。

この例は非専門家には驚かれることの多いものである。というのも $\{c\} \times S^1$ は T^2 上の平行移動 $(x, y) \mapsto (x + a, y)$ ($a \neq 0$) で容易に **displace** され、この平行移動はシンプレクティック形式 ω_0 を保つからである。つまり、これはシンプレクティック微分同相写像とハミルトン微分同相写像とで **displaceability** に差があることを示しており、ハミルトン

力学系特有の「剛性」の存在を強く示唆するものである。また、ハミルトン力学系にはホーファー幾何や不変測度・周期点の存在など他の「剛性」も知られているが、これらと non-displaceability との関係も研究されている (例えば [Po98, Po14]).

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の時間依存しないハミルトン函数 $F, G: M \rightarrow \mathbb{R}$ について、そのポアソン括弧 $\{F, G\}$ を $\omega(X_G, X_F)$ によって定義する。

定義 1.5 (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする。滑らかな写像 $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ が任意の i, j について $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$ を満たすとき、**運動量写像** であるという。

運動量写像のファイバーの (non-)displaceability は広く研究され、特にトーリック多様体の運動量写像のそれは 2000 年代以降様々な研究がなされている。運動量写像のファイバーの (non-)displaceability についての古典的結果で、本稿で特に重要となるのはエントフとポルテロヴィッチによる以下の定理である。

定理 1.6 ([EP06]) $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ を閉シンプレクティック多様体上の運動量写像とする。このとき、 Φ は non-displaceable なファイバーをもつ、つまり、ある $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して $\Phi^{-1}(y_0)$ は non-displaceable となる。

本稿の主題は上記定理の「相対版」を考えることである。定理 1.6 はハミルトン・フレアー理論を用いて証明されたが、その相対版を考えるにあたってはラグランジュ・フレアー理論を用いることになる。それにより生じる技術的困難については後に説明する。

定義 1.7 (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする。 M の部分多様体 L が (M, ω) のラグランジュ部分多様体であるとは、 L の次元が n で $\omega|_L = 0$ となることである。

例 1.8 多様体 N の余接束 T^*N の零切断 0_N は (T^*N, ω_0) のラグランジュ部分多様体。

本稿においては比較的「条件の良い」ラグランジュ部分多様体を主に考えるが、この先の議論を簡単にするために「良い条件」というものをここでまとめておく。

定義 1.9 (M, ω) のラグランジュ部分多様体 L が条件 (*) を満たすとは、以下の条件のいずれかを満たすことをいう。

- (i) (M, ω) がある閉多様体 N の余接束 T^*N とその標準的なシンプレクティック形式 ω_0 で、 L はその零切断 0_N である、
- (ii) (M, ω) が閉シンプレクティック多様体で $\pi_2(M, L) = 0$ 。

注意 1.10 本稿に登場する定理の多くはより一般の状況でも証明可能であるが、ややこしさを避けるために上のように書いた。専門家向けに注意すると、ラグランジュ・フレアーホモロジーの非自明性が本質的な条件である。

定理 1.11 L をシンプレクティック多様体 (M, ω) のラグランジュ部分多様体で条件 (*) を満たすものとする。 $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ を (M, ω) 上の運動量写像とする。このとき、ある $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して、 $\Phi^{-1}(y_0)$ は L から $\Phi^{-1}(y_0)$ から non-displaceable となる。

本稿では定理 1.11 を二通りの方法で精密化する形で話を進める。この二つの精密化は片方がもう片方を包含するものではなく、それぞれ特有の応用を持っているものである。

2. ポアソン括弧不変量

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の 1 の分割 $\vec{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$ に対し, $\kappa(\vec{F})$ を

$$\kappa(\vec{F}) = \max_{x, y \in [0, 1]^N} \|\{\sum_i x_i F_i, \sum_j y_j F_j\}\|,$$

により定義する. (M, ω) の有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ について, そのポアソン括弧不変量 $\text{pb}(\mathcal{U})$ を $\text{pb}(\mathcal{U}) = \inf \kappa(\vec{F})$ によって定義する. ここで下限 \inf は \mathcal{U} に付随する, つまり $\text{Supp}(F_i) \subset U_i (i = 1, \dots, N)$ となる 1 の分割 \vec{F} 上のものである.

注意 2.1 マグニチュード κ の背景には量子情報理論や量子測定理論がある. この不変量の量子化が「正作用素値測度の交換子」に対応し, これは「ノイズ」の下からの評価を与える ([PR] の Section 9, [P]). これは不確定性関係(原理)の「従兄弟」([PR])である.

命題 2.2 $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ を運動量写像とし, $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ を $\Phi(M)$ の有限開被覆とする. このとき, M の有限開被覆 $\Phi^{-1}\mathcal{V} = \{\Phi^{-1}(V_1), \Phi^{-1}(V_2), \dots, \Phi^{-1}(V_N)\}$ に対し $\text{pb}(\Phi^{-1}\mathcal{V}) = 0$ となる.

この命題は任意の運動量写像 $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ と任意の滑らかな函数 $A, B: \Phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ について $\{A \circ \Phi, B \circ \Phi\} = 0$ が成り立つことを用いれば容易に示せる.

ハミルトン函数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ のホーファー長 $\|H\|$ を以下のように定義する.

$$\|H\| = \int_0^1 (\max_{x \in M} H_t(x) - \min_{x \in M} H_t(x)) dt.$$

M の部分集合 X, Y について, X の Y からの **displacement energy** $E(X; Y)$ を以下のように定義する.

$$E(X; Y) = \inf \{\|H\|; H \in C_c^\infty([0, 1] \times M), \phi_H^1(X) \cap \bar{Y} = \emptyset\}.$$

X が Y から non-displaceable な場合には $E(X; Y) = +\infty$ とする. また, $\bar{E}(X; Y)$ を $\bar{E}(X; Y) = \min\{E(X; X), E(X; Y)\}$ により定義する. M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ について, $E(\mathcal{U})$, $\bar{E}(\mathcal{U}; L)$ をそれぞれ $E(\mathcal{U}) = \max_i E(U_i; U_i)$, $\bar{E}(\mathcal{U}; L) = \max_i \bar{E}(U_i; L)$ により定義する.

これについて, ポルテロヴィッチは以下を示した.

定理 2.3 ([P]) $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ は M の開被覆で, 各 U_i は displaceable であるとする. このとき, $\bar{E}(\mathcal{U}) > 0$ で,

$$\text{pb}(\mathcal{U}) \geq (2N^2 \cdot E(\mathcal{U}))^{-1} > 0.$$

命題 2.2 と定理 2.3 から定理 1.6 が従う. 項数の関係で証明は割愛するが, 「displaceable な閉集合の十分小さい開近傍は displaceable」いう事実を用いれば軽い練習問題である.

定理 2.4 ([Ka18]) L を条件(*)を満たすラグランジュ部分多様体とする. $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ は開被覆で, 各 U_i は L もしくは U_i から displaceable とする. このとき, $\bar{E}(\mathcal{U}; L) > 0$ で,

$$\text{pb}(\mathcal{U}) \geq (2N^2 \cdot \bar{E}(\mathcal{U}; L))^{-1} > 0.$$

命題 2.2 と定理 2.4 から定理 1.11 が従うのは定理 1.6 の場合と同様である.

例 2.5 $\{U_1, \dots, U_M, V_1, \dots, V_N\}$ と $\{W_1, W_2\}$ をそれぞれ S^1 の開被覆で以下を満たすとする.

- 任意の i, j と k について $U_i \neq S^1, V_j \neq S^1$ と $W_k \neq S^1$ が成立,
- 任意の $i = 1, \dots, M$ について $0 \in U_i$, 任意の $j = 1, \dots, N$ について $0 \notin V_j$ が成立.

このとき, T^2 の開被覆 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ を以下で定義する.

$$\mathcal{U}_1 = \{U_i \times S^1, V_j \times S^1\}_{i,j}, \mathcal{U}_2 = \{U_i \times W_k, V_j \times S^1\}_{i,j,k}, \mathcal{U}_3 = \{U_i \times W_k, V_j \times W_k\}_{i,j,k}.$$

このとき, $\text{pb}(\mathcal{U}_1) \leq \text{pb}(\mathcal{U}_2) \leq \text{pb}(\mathcal{U}_3)$ が知られており, 命題 2.2 より $\text{pb}(\mathcal{U}_1) = 0$, 定理 2.3 より $\text{pb}(\mathcal{U}_3) > 0$ となる. そして, 筆者の定理 2.4 より真ん中の $\text{pb}(\mathcal{U}_2) > 0$ が分かる.

3. 幹と相対的幹

定理 1.11 のもう一つの証明に話を移そう.

まずはエントフとポルテロヴィッチにより導入された幹という概念を説明する.

定義 3.1 ([EP06]) X をシンプレクティック多様体 (M, ω) のコンパクト部分集合とする. M のコンパクト集合 Y は以下の条件を満たす運動量写像 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k): M \rightarrow \mathbb{R}^k$ が存在するときに幹という.

- (i) ある $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して $Y = \Phi^{-1}(y_0)$,
- (ii) 任意の $y \neq y_0$ について $\Phi^{-1}(y)$ は displaceable である.

[EP06] においては (M が閉多様体の場合に) 任意の幹が non-displaceable であることが証明され, それからただちに定理 1.6 が得られた. その後, [EP09] において幹はさらに強い「剛性」をもつことが以下の定理の形で示された.

定理 3.2 ([EP09]) (M, ω) を閉シンプレクティック多様体とし, X, Y を (M, ω) の幹とする. このとき, X は Y から non-displaceable である.

上の定理で $X = Y$ の場合を考えれば幹の non-displaceability がしたがう.

幹の「相対版」として筆者が導入した概念は以下である.

定義 3.3 ([Ka18]) X をシンプレクティック多様体 (M, ω) のコンパクト部分集合とする. M のコンパクト集合 Y は以下の条件を満たす運動量写像 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k): M \rightarrow \mathbb{R}^k$ が存在するときに X -幹という.

- (i) $Y = \Phi^{-1}(0)$,
- (ii) 任意の $y \neq 0$ について $\Phi^{-1}(y)$ は X または $\Phi^{-1}(y)$ 自身から displaceable である.

例 3.4 リーマン多様体 (N, g) 上の余接束 T^*N 上で函数 $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|_g^2$ を考える. H は函数一個のみで構成されるので運動量写像で, $H^{-1}(0) = 0_N$ 以外のファイバーは 0_N と互いに交わらない, 特に 0_N から displaceable である. したがって, 零切断 0_N は 0_N -茎である.

この幹の「相対版」について定理 3.2 に該当するのは以下の定理である.

定理 3.5 ([Ka18, KO19b]) シンプレクティック多様体 (M, ω) のラグランジュ部分多様体 L は条件 (*) を満たすものとし, X, Y を L -幹とする. このとき, X は Y から non-displaceable である.

この定理から定理 1.11 がただちに従う. この定理より新たな L -幹を見つければそれが強い「剛性」を持つことが分かるのであるが, それを実際に見つけているのが筆者と折田龍馬氏との共同研究 [KO19c] である.

定義 3.6 滑らかな函数 $H: T^*N \rightarrow \mathbb{R}$ が条件 (★) を満たすとは, 以下の

- (i) 任意の $c \in \mathbb{R}$ について部分集合 $H^{-1}((-\infty, c]) \subset T^*N$ がコンパクト,
- (ii) 任意の $q \in N$ について,

$$H(q, 0) = \min_{p \in T_q^*N} H(q, p),$$

を満たすことである.

条件 (★) を満たす函数 $H: T^*N \rightarrow \mathbb{R}$ について,

$$m_H = \max_{q \in N} \min_{p \in T_q^*N} H(q, p) \quad (1)$$

として, T^*N の部分集合 S_H を以下のように定義する.

$$S_H = \{(q, p) \in T^*N \mid H(q, p) = m_H\}. \quad (2)$$

条件 (★) を満たす函数としては, エネルギー函数 $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|_g^2 + U(q)$ などがある. ただし, $\frac{1}{2}\|p\|_g^2$ は運動エネルギー (g はリーマン計量), $U(q)$ は位置エネルギーである.

定理 3.7 ([KO19c]) N を閉多様体とし, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k): T^*N \rightarrow \mathbb{R}^k$ を余接束上の運動量写像とする. 更に, Φ_1 は条件 (★) を満たしており, $\Phi(S_{\Phi_1})$ が単集合つまり, $y_0 \in \mathbb{R}^k$ が存在して $\Phi(S_{\Phi_1}) = \{y_0\}$ となると仮定する. このとき, $\Phi^{-1}(y_0)$ 以外の Φ のファイバーは零切断 0_N から displaceable である. 特に, $\Phi^{-1}(y_0)$ は 0_N -幹である. 定理 3.5, 例 3.4 より $\Phi^{-1}(y_0)$ は 0_N から $\Phi^{-1}(y_0)$ 自身からも non-displaceable である.

この定理によって, 例えば $T^*\text{SO}(3)$ 上の可積分系であるラグランジュの独楽 $T^*\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ の上で $0_{\text{SO}(3)}$ -幹を発見できる. 他には以下の系がある.

系 3.8 ([KO19c]) N を閉多様体 $H: T^*N \rightarrow \mathbb{R}$ は条件 (★) を満たす函数とする. このとき, $H^{-1}(m_H)$ は 0_N から $H^{-1}(m_H)$ 自身からも non-displaceable である.

H がエネルギー函数の場合に $H^{-1}(m_H)$ が non-displaceableなのは [CFP] により証明されているが, 0_N からの non-displaceability はおそらく知られていない結果である.

また, 定理 3.7 で行った議論を用いて以下の副産物が得られる. この不思議な定理がどれほど可積分系の専門家の興味を惹くものなのか, 本稿執筆時点では筆者もよく分かっていない.

定理 3.9 ([KO19c]) ハミルトン函数 $H_1, \dots, H_k: T^*N \rightarrow \mathbb{R}$ は条件 (★) を満たし, 任意の i, j について $\{H_i, H_j\} = 0$ も満たしているとする. このとき, $\bigcap_{i=1}^k S_{H_i} \neq \emptyset$.

4. 分裂長

この章ではラグランジュ・スペクトル不変量のもう一つの応用について考える. ハミルトン微分同相群は様々な距離を持つことが知られており, それが粗幾何的にどのような性質を持つかは広く研究されている. 中でも特に有名なものはホーファー距離や交換子長であるが, ここでは分裂長というものを扱う.

以下, ユークリッド空間 \mathbb{R}^n には通常の L^2 ノルム $\|\cdot\|$ を入れて考える. \mathbb{Z}^n では $\|\cdot\|$ の \mathbb{Z}^n への制限を考え, 同じく $\|\cdot\|$ と書く.

U をシンプレクティック多様体 (M, ω) の開集合とする. このとき, バンヤガの分裂補題 ([Ba]) により, 任意の $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ について, 非負整数 k , $[0, 1] \times U$ にコンパクト台を持つハミルトン関数 $H_1, \dots, H_k \in C_c^\infty([0, 1] \times U)$ とハミルトン微分同相写像 ψ_1, \dots, ψ_k が存在し, $\phi = \psi_1^{-1} \phi_{H_1} \psi_1 \cdots \psi_k^{-1} \phi_{H_k} \psi_k$ と書ける. ϕ の (U についての) 分裂長 $\|\phi\|_U$ をこのような k のうち最小のものとして定義する.

バンヤガの分裂補題は元々は閉シンプレクティック多様体のハミルトン微分同相群が単純であることの証明で用いられたもので, 分裂可能という性質はハミルトン微分同相群の群論的性質と深くかかわる. 近年だと円盤の測度保存同相群の単純性という長年の未解決問題が分裂長と関連することも知られている ([LR]).

Σ_g を種数 g の閉リーマン面とし, ω をその上のシンプレクティック形式とする. ブランデンブルスキは分裂長について以下のことを示した.

定理 4.1 ([Br]) g を 2 以上の正の数とし, U を Σ_g の可縮な開集合とする. このとき, 双リプシッツ単射準同型

$$I: (\mathbb{Z}^{2g-2}, \|\cdot\|) \rightarrow (\text{Ham}(\Sigma_g), \|\cdot\|_U),$$

が存在する.

ここで歴史的な説明を挟んでおくと, これ以前にブラゴ, イヴァノフとポルテロヴィッチ [BIP] が g が正の場合に $(\mathbb{Z}, \|\cdot\|)$ から $(\text{Ham}(\Sigma_g), \|\cdot\|_U)$ への双リプシッツ単射準同型を構成している. 彼らの構成はハミルトン・スペクトル不変量を用いる一方, ブランデンブルスキの方法はまるで異なる. 彼は基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ 上の擬準同型から $\text{Ham}(\Sigma_g)$ 上の擬準同型を構成するポルテロヴィッチ構成と呼ばれる手法によりこれを解決した. 彼の手法はフレアー理論を一切用いないものである.

上の定理 4.1 で埋め込まれたのは \mathbb{Z}^{2g-2} であったが, ブランデンブルスキは一般の正の数 N について \mathbb{Z}^N を埋め込めないかを問うた [Br, Remark 1.5]. この問題を筆者と折田龍馬氏は以下のように解決した.

定理 4.2 ([KO19a]) g, N を正の数とし, U を Σ_g の可縮な開集合とする. このとき, 双リプシッツ単射準同型

$$I: (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|) \rightarrow (\text{Ham}(\Sigma_g), \|\cdot\|_U),$$

が存在する.

ブランデンブルスキの問題が解けたのみならず, 種数 g の評価も良くした上に \mathbb{Z}^N の埋め込みを \mathbb{R}^N にまで拡張していることに注意する. 我々の手法は Σ_g 内の非可縮単純閉曲線についてのラグランジュ・スペクトル不変量を用いるものである. Σ_g 内の非可縮単純閉曲線は (ハミルトン・イソトピーでの差を除いても) 無限に存在し, それらについてのラグランジュ・スペクトル不変量は一次独立となるのが, この定理の証明の鍵である.

5. スペクトル不変量とフィルター付きフレアー理論

本稿の諸結果の証明においてはスペクトル不変量を用いる. 後に説明するように, これはハミルトン微分同相群上の擬準同型のようなものである. 簡単のため, 係数は全て $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする.

まずは有限次元モース理論における易しいモデルから話を始めるとする. (M, g) を閉リーマン多様体とし, その上のモース・スモール関数 $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について $\text{Crit}^r(F)$ を $F(x) < r$ となる F の臨界点の集合とする. $\text{Crit}^r(F)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可群を $CH_*^r(F)$ とし, この上でモース指数を考え, 勾配流の数え上げによりチェイン複体の微分を定義する. このチェイン複体のホモロジーを $HM_*^r(F)$ とする. つまり, HM_*^∞ が通常のもース・ホモロジーで各 $HM_*^r(F)$ は通常のもース・スモール複体の部分複体のホモロジーで, $r < s$ に対し写像 $i_{r,s}: HM_*^r(F) \rightarrow HM_*^s(F)$ が定まる (これはフィルター付きモースホモロジーと呼ばれ, 近年ではデータ解析での記法に合わせてパーシステントホモロジーと呼ばれることも多い). ここで非自明な $a \in H_*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対し, スペクトル不変量 $c_a(F)$ を $c_a(F) = \inf\{r \mid a \in \text{Im}(i_{r,+\infty})\}$ によって定義する. なお, 一般の関数 $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ については F をモース・スモール関数で近似することで $c_a(F)$ を定義できる.

次にハミルトン・スペクトル不変量について説明する. 本稿では簡単のため, (M, ω) を $\pi_2(M) = 0$ を満たす閉シンプレクティック多様体とする. ハミルトン・フレアー理論とは以下の空間の上での「モース理論」である.

$$\mathcal{L}_0(M) = \{z \in C^\infty(S^1, M); [z] = 0 \in [S^1, M]\}.$$

ハミルトン関数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ について, 以下の汎関数 $\mathcal{A}_H: \mathcal{L}_0(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

$$\mathcal{A}_H(z) = \int_0^1 H_t(z(t))dt - \int_{D^2} \hat{z}^* \omega.$$

ただし, $\hat{z}: D^2 \rightarrow M$ は $\hat{z}|_{\partial D^2} = z$ となる滑らかな写像で, $\pi_2(M) = 0$ より $\int_{D^2} \hat{z}^* \omega$ は \hat{z} の選び方に依らず, $\mathcal{A}_H(z)$ は well-defined となる. $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について集合

$$\mathcal{P}^r(H) = \{z \in \mathcal{L}_0(M); z(t) = \phi_H^t(z(0)), \mathcal{A}_H(z) < r\}.$$

を考えると, これは $\mathcal{A}_H(z) < r$ となる \mathcal{A}_H の臨界値 z の集合となる. H が「非退化」なハミルトン関数のときに, $\mathcal{P}^r(H)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可群についてコンレー・ゼンダー指数と微分を定めてホモロジーを考えると, フィルター付きハミルトン・フレアーホモロジー $HF^r(H)$ が定義できる. 量子ホモロジー $QH_*(M, \omega)$ の非自明な元 a に対し, 有限次元と同様にしてハミルトン・スペクトル不変量 $c_a(H)$ が定義される. 以上, 粗い説明になってしまったが, 詳しくは [Sch], [Oh05] など参照.

本稿では簡単のため, L を条件(*)を満たすラグランジュ部分多様体とする. ラグランジュ・フレアー理論とは以下の空間の上での「モース理論」である.

$$\Omega_0(L) = \{z \in C^\infty([0, 1], M); z(0), z(1) \in L, [z] = 0 \in \pi_1(M, L)\}.$$

ハミルトン関数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ について, 以下の汎関数 $\mathcal{A}_H^L: \Omega_0(L) \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

$$\mathcal{A}_H^L(z) = \int_0^1 H_t(z(t))dt - \int_{D^2} \hat{z}^* \omega.$$

ただし, $\hat{z}: D^2 \rightarrow M$ は「 z と L を張る円盤」で, $\pi_2(M, L) = 0$ と $\omega|_L = 0$ より $\int_{D^2} \hat{z}^* \omega$ は \hat{z} の選び方に依らず, $\mathcal{A}_H^L(z)$ は well-defined となる. $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について集合

$$\text{Ch}^r(H; L) = \{z \in \Omega_0(L); z(t) = \phi_H^t(z(0)), \mathcal{A}_H^L(z) < r\}.$$

を考えると, これは $\mathcal{A}_H^L(z) < r$ となる \mathcal{A}_H^L の臨界値 z の集合となる. H が「非退化」なハミルトン関数のときに, $\text{Ch}^r(H; L)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可群についてコンレー・ゼンダー指数と微分を定めてホモロジーを考えると, フィルター付きラグランジュ・フレアーホモロジー $HF^r(H; L)$ が定義できる. 量子ホモロジー $QH_*(L)$ の非自明な元 a に対し, 有限次元と同様にしてラグランジュ・スペクトル不変量 $c_a^L(H)$ が定義される. 以上, 粗い説明になってしまったが, 詳しくは [Oh97], [Oh99], [L], [LZ] など参照.

有限次元と同様に「非退化」関数による近似で一般の関数 H についても $c_a(H), c_a^L(H)$ は定義され, c_a, c_a^L を $C_c^\infty([0, 1] \times M)$ 上の汎関数と見なせる. 以下, こうして構成した $C_c^\infty([0, 1] \times M)$ 上の汎関数のことをそれぞれハミルトン・スペクトル不変量, ラグランジュ・スペクトル不変量と呼ぶとする.

6. 部分擬準同型と技術的困難

以上, スペクトル不変量を函数空間上で定義したが, これをハミルトン微分同相群の普遍被覆 $\widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ 上で定義する. ただし, $\text{Ham}(M, \omega)$ には C^∞ 位相を入れている. その上で(初等的な代数的位相幾何の授業で習うように) $\text{Ham}(M, \omega)$ 上の恒等写像 id を基点とする道の空間を適当な同値関係で割ることで普遍被覆 $\widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ を構成する. ハミルトン関数 $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ に対し $\tilde{\phi}_H$ は道 $\{\phi_H^t\}_{t \in [0, 1]}$ の代表する元を表すとする.

さて, $c: C_c^\infty([0, 1] \times M) \rightarrow \mathbb{R}$ をハミルトン・スペクトル不変量もしくはラグランジュ・スペクトル不変量とする. これについて, 同じ記号で恐縮だが, $c: \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ を $c(\tilde{\phi}) = c(H)$ により定義する. ここで, $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ は $\tilde{\phi}_H = \tilde{\phi}$ となるハミルトン関数であり, これは H の選び方によらず well-defined である. ただし, M が閉の場合には正規化条件 $\int_M H_t \omega^n = 0$ ($\forall t \in [0, 1]$) も課す.

定義 6.1 $c: \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ をシンプレクティック多様体 (M, ω) 上のハミルトン・スペクトル不変量, またはラグランジュ・スペクトル不変量とする.

M の開集合 U の c についてのスペクトル容量 $C_c(U)$ を以下のように定義する.

$$C_c(U) = \sup_{F \in C_c^\infty([0, 1] \times U)} \{c(\tilde{\phi}_F) + c(\tilde{\phi}_F^{-1})\}.$$

定理 1.6, 定理 2.3, 定理 3.2 の証明で鍵となるのは以下の補題である.

補題 6.2 U を閉シンプレクティック多様体 (M, ω) の displaceable な開集合, $c: C_c^\infty([0, 1] \times M) \rightarrow \mathbb{R}$ をハミルトン・スペクトル不変量とする. このとき, $C_c(U) \leq E(U; U) < +\infty$

一方でこれらの「相対版」である定理 1.11, 定理 2.4, 定理 3.5 の証明では以下の補題がカギとなる.

補題 6.3 L をシンプレクティック多様体 (M, ω) のラグランジュ部分多様体で条件 (*) を満たすものとする. U を L , もしくは U 自身から displaceable な開集合, $c: C_c^\infty([0, 1] \times M) \rightarrow \mathbb{R}$ を L についてのラグランジュ・スペクトル不変量とする. このとき, $C_c(U) \leq \bar{E}(U; L) < +\infty$.

補題6.3がまさに補題6.2の「相対版」なのがお分かりであろう. それでは補題6.3さえ証明できれば, 後はエントフやポルテロヴィッチらによる既存の議論を当てはめれば本稿の諸定理が自動的に得られるのだろうか. 実はそこに難点がある.

$c: \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ を (冪等元についての) ハミルトン・スペクトル不変量もしくはラグランジュ・スペクトル不変量とする. このとき, c の同次化 $\sigma_c: \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$\sigma_c(\tilde{\phi}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c(\tilde{\phi}^k)}{k}.$$

スペクトル不変量の三角不等式から上の極限の存在がいえる.

$\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ について, 不変量 $q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g})$ を以下のように定義する.

$$q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g}) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{c(\tilde{f}^{-k} \tilde{g} \tilde{f}^k)\} + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{c(\tilde{f}^{-k} \tilde{g}^{-1} \tilde{f}^k)\}.$$

簡単のために $q_{c, \text{id}}(\tilde{g})$ のことを $q_c(\tilde{g})$ と書く. これはスペクトル・ノルムと呼ばれ, スペクトル不変量の文脈では古くから知られているものである. なお, 任意の $\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ について $q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g}) < +\infty$ が成立するかは現在のところ分かっていない.

このとき, 以下の不等式が成り立つ.

命題 6.4 函数 $c: \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ をハミルトン・スペクトル不変量もしくはラグランジュ・スペクトル不変量とする. このとき, 任意の $\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ について以下が成立する.

$$|\sigma_c(\tilde{f}\tilde{g}) - \sigma_c(\tilde{f}) - \sigma_c(\tilde{g})| \leq q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g}).$$

さて, 問題となるのは $q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g})$ の評価である. まず, ハミルトン・スペクトル不変量には共役不変性がある, つまり任意の $\tilde{f}, \tilde{g} \in \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ について $c(\tilde{f}^{-1} \tilde{g} \tilde{f}) = c(\tilde{g})$ が成立する. これにより $q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g}) = q_c(\tilde{g})$ も従う. よって, 特に g が displaceable な開集合 U に台を持つハミルトン函数で生成される場合には補題6.2により

$$q_{c, \tilde{f}}(\tilde{g}) = q_c(\tilde{g}) < C_c(U) < E(U; U) < +\infty$$

が成立する. なお, このような群上の函数のことを部分擬準同型と呼ぶ. 「 g の台が小さい」場合には擬準同型のようにふるまうというのが理由である.

一方で, ラグランジュ・スペクトル不変量は共役不変ではないので, 補題6.3を用いて上と同様の式変形をしようとするとう最初の等式で破綻してしまうのである. これは本稿で述べた結果 (定理 1.11, 定理 2.4, 定理 3.5, 定理 4.2) を示す際に問題を生じさせる. この問題を解決したのが筆者の仕事であるが, 問題の解決策はアドホック, つまり問題ごとに上手い「抜け道」を探し出すもので, 統一的な解決策があるわけではない. したがって, 具体的な解決策については各論文に説明を譲りたい.

ハミルトン・スペクトル不変量で成立した共役不変性がラグランジュ・スペクトル不変量だと成立しない理由だが, これはラグランジュ・フレア理論が共役という操作について安定しないことによる. このことは例えば以下の事実に象徴的である.

事実 6.5 任意の $f, g \in \text{Ham}(M, \omega)$ について, $\#\text{Fix}(g) = \#\text{Fix}(f^{-1}gf)$ は常に正しいが, $\#(L \cap g(L)) = \#(L \cap f^{-1}gf(L))$ は一般には正しくない. ここで, $\text{Fix}(h)$ と書いた場合には写像 $h: M \rightarrow M$ の固定点集合を指す.

$\#\text{Fix}(h)$ がハミルトン・フレアー理論の生成元, $\#(L \cap h(L))$ がラグランジュ・フレアー理論の生成元に対応することを思い起こせば, 非専門家の読者にもある程度の問題の本質は伝わるであろう (と信じたい).

さて, 上で書いたラグランジュ・スペクトル不変量が共役不変でないことで生じる困難のいくつかを筆者は解決したわけだが, 全てが解決されたわけではない. 最後に, 今も未解決のまま残されている以下の問題を紹介する.

問題 6.6 g, N を正の数とし, C を Σ_g 内の非可縮単純閉曲線とする. C から displaceable な Σ_g の任意の開集合 U について, $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ から $(\text{Ham}(\Sigma_g), \|\cdot\|_U)$ への双リプシッツ単射準同型は存在するか.

注意 6.7 上の説明ではさも命題 6.4 から先行研究が従うかのように書いたが, これは数学的には正しくとも歴史的には正確な叙述ではない. 命題 6.4 自体は筆者の発見であり, 紹介した先行研究はそれ以前のものである.

注意 6.8 ラグランジュ・スペクトル不変量 c の同次化 σ_c の応用については既に先行研究 [MVZ] があるが, これは補題 6.3 の応用に重きを置く本稿の研究とは大きく方向性の異なるものである. ただし, 定理 4.2 は例外で, その証明には補題 6.3 ではなく [MVZ] のアイデアを用いる.

注意 6.9 本稿で触れた部分擬準同型という概念は, 筆者の知る限りエントフとポルテロヴィッチの仕事 [EP06] の中で初めて登場したものである. 彼らの構成はフレアー理論を用いたもので本稿での構成もそうであったが, 自然な問いとして (擬準同型でない) 部分擬準同型がフレアー理論を用いない文脈でも現れうるかというものがある.

この解答として, 筆者は実際にフレアー理論を用いずに $\text{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上に部分擬準同型を構成した [Ka16]. その後に木村 [Ki] が無限次元ブレイド群上で, ブランデンブルスキとケドラ [BK] が体積保存同相群上で部分擬準同型の構成に成功している. また, 部分擬準同型版のババア双対定理も特殊な群に対して証明されている [Ka17].

謝辞

まずは本稿執筆の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝いたします. 本稿でも紹介した論文のいくつかは折田龍馬氏との共同研究によるもので, この機会に彼にも感謝したく思います. また, 本研究は筆者が基礎科学研究院数理物理研究団 (大韓民国慶尚北道浦項市) にいた二年間の間に受けた刺激が元になっており, 最後に当時お世話になった呉龍根先生にも改めて感謝の念を記して, ここに筆を擱くものとします.

参考文献

- [Ba] A. Banyaga, Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978) no. 2 174–227.
- [Br] M. Brandenbursky, *Bi-invariant metrics and quasi-morphisms on groups of Hamiltonian diffeomorphisms of surfaces*, *Internat. J. Math.* **26** (2015) no. 9 1550066.
- [BK] M. Brandenbursky and J. Keđra, *Fragmentation norm and relative quasimorphisms*, arXiv:1804.06592., to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [BIP] D. Burago, S. Ivanov and L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, *Adv. Stud. Pure Math.* **52** (2008) 221–250.

- [CFP] K. Cieliebak, U. Frauenfelder and G. Paternain, *Symplectic topology of Mañé's critical values*, *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 3, 1765–1870.
- [En] M. Entov, *Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology*, The Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Seoul, 2014).
- [EP06] M. Entov and L. Polterovich, *Quasi-states and symplectic intersections*, *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), no. 1, 75–99.
- [EP09] M. Entov and L. Polterovich, *Rigid subsets of symplectic manifolds*, *Compos. Math.* **145** (2009), no. 3, 773–826.
- [Ka16] M. Kawasaki, *Relative quasimorphisms and stably unbounded norms on the group of symplectomorphisms of the Euclidean spaces*, *J. Symplectic Geom.*, **14** (2016), no. 1 297–304.
- [Ka17] M. Kawasaki, *Bavard's duality theorem on conjugation-invariant norms*, *Pacific J. Math.* **288** (2017), no. 1, 157–170.
- [Ka18] M. Kawasaki, *Function theoretical applications of Lagrangian spectral invariants*, Preprint (2018), arXiv:1811.00527.
- [KO19a] M. Kawasaki and R. Orita, *Disjoint superheavy subsets and fragmentation norms*, Preprint (2019), arXiv:1901.01647, to appear in *J. Topol. Anal.*
- [KO19b] M. Kawasaki and R. Orita, *Existence of pseudo-heavy fibers of moment maps*, Preprint (2019), arXiv:1901.09395.
- [KO19c] M. Kawasaki and R. Orita, *Rigid fibers of spinning tops*, Preprint (2019), arXiv:1905.13112.
- [Ki] M. Kimura, *Conjugation-invariant norms on the commutator subgroup of infinite braid group*, *J. Topol. Anal.*, **10** (2018), no. 2, 471–476.
- [L] R. Leclercq, *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory*, *J. Mod. Dyn.*, **2** (2008), no. 2, 249–286.
- [LZ] R. Leclercq and F. Zapolsky, *Spectral invariants for monotone Lagrangians*, *J. Topol. Anal.*, Online Ready, <https://doi.org/10.1142/S1793525318500267>.
- [LR] F. Le Roux, *Simplicity of $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2, \text{Area})$ and fragmentation of symplectic diffeomorphisms*, *J. Symplectic Geom.* **8** (2010) no. 1 73–93.
- [MVZ] A. Monzner, N. Vichery and F. Zapolsky, *Partial quasimorphisms and quasistates on cotangent bundles, and symplectic homogenization*, *J. Mod. Dyn.* **6** (2012), no. 2, 205–249.
- [Oh97] Y.-G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional. I. Relative Floer theory on the cotangent bundle.*, *J. Differential Geom.* **46** (1997), no. 3, 499–577.
- [Oh99] Y.-G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional. II. Pants product and cohomological invariants.*, *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999), no. 1, 1–54.
- [Oh05] Y.-G. Oh, *Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds*, in *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*, eds. J. E. Marsden and T. Ratiu (Birkhäuser/Springer, 2005), 525–570.
- [Po98] L. Polterovich, *Hofer's diameter and Lagrangian intersections*, *Int. Math. Res. Not.* **1998** (1998), no. 4, 217–223.
- [P] L. Polterovich, *Quantum unsharpness and symplectic rigidity*, *Lett. Math. Phys.*, **102**(3) (2012), 245–264.
- [Po14] L. Polterovich, *Symplectic intersections and invariant measures*, *Ann. Math. Qu. Not.* **38** (2014), no. 1, 81–93.
- [PR] L. Polterovich and D. Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, CRM Monograph Series, Vol. 34 (American Mathematical Society, 2014).
- [Sch] M. Schwarz, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, *Pacific J. Math.* **193** (2000), no. 2, 419–461.

Braids, polynomials and real algebraic links

Benjamin BODE (Osaka University)*

1. Introduction

In the last chapter of his seminal book [8] Milnor discusses the real analogue of links of isolated singularities of complex plane curves, later termed *real algebraic links*.

Definition 1.1. *A link L is real algebraic if there exists a polynomial $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that*

- $f((0,0,0,0)) = (0,0)$,
- $\nabla f((0,0,0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- *there is a neighbourhood B of $(0,0,0,0)$ such that $(0,0,0,0)$ is the only point in B where the rank of ∇f is not full,*
- $f^{-1}((0,0)) \cap S_\rho^3 = L$ for all small enough radii ρ .

The first three conditions state that f has an isolated singularity at the origin in \mathbb{R}^4 .

Milnor himself points out that it is highly challenging to construct examples of such links that do not come from complex plane curves $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Indeed, the family of links that is known to be real algebraic is still comparatively small [5, 7, 9, 10].

One difference between the complex and the real polynomials is that in general the argument of a real polynomial as in Definition 1.1 ($\arg f : S_\rho^3 \rightarrow S^1$) is not a fibration. However, Milnor established that the following is still true.

Theorem 1.2 (Milnor [8]). *If a link L is real algebraic, then L is fibred.*

According to Benedetti and Shiota, this implication should be an equivalence.

Conjecture 1.3 (Benedetti-Shiota [2]). *A link L is real algebraic if and only if L is fibred.*

In this short note we discuss a construction of real polynomial maps with isolated singularities as in Definition 1.1, following [5]. Section 2 reviews the this construction in a quite general setting, while Section 3 focuses on the class of homogeneous braids.

Definition 1.4. *A braid B on s strands is called homogeneous if for every $i = 1, 2, \dots, s-1$ the generator σ_i appears in the word B if and only if σ_i^{-1} does not appear.*

The 3-strand braid $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^2$ for example is homogeneous, because σ_1 always comes with a positive sign and σ_2 always comes with a negative sign. If we change one of the signs however, or if we consider the same braid word as a 4-strand braid, we obtain an inhomogeneous braid. Note that the homogeneous braids contain all alternating braids that do not close to split links.

Theorem 1.5 (Bode [5]). *Let B be a homogeneous braid. Then the closure of B^2 is real algebraic.*

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP18F18751 and a JSPS International Postdoctoral Fellowshipship.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 57M25; Secondary: 14J17, 32C05.

Keywords: homogeneous braid, singularity, algebraic link, Milnor fibration.

* e-mail: ben.bode.2013@my.bristol.ac.uk

web: <https://sites.google.com/my.bristol.ac.uk/benjaminbode/>

The proof that homogeneous braids close to fibred links is due to Stallings [12]. An important aspect of the proof in [5] is that for a loop in the space of complex polynomials, we can establish a close relation between the braid that is formed by the roots of the polynomials and the braid that is formed by their critical values. Here, we give more details on this relation and illustrate how this could be used to generalize the construction to a larger family of links.

Section 4 gives an example of the outlined construction.

2. Constructing real algebraic links

Let B be a braid on s strands. We denote by \mathcal{C} the set of connected components of the closure of B or equivalently the set of cycles of the image of B under the permutation representation. For every $C \in \mathcal{C}$ we write s_C for the number of strands that make up the component C or equivalently the length of that corresponding cycle. Then the total number of strands s equals $\sum_{C \in \mathcal{C}} s_C$. Suppose we have a parametrisation of B in $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ given by

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{j=1}^{s_C} \left(F_C \left(\frac{t+2\pi j}{s_C} \right) + iG_C \left(\frac{t+2\pi j}{s_C} \right), t \right), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

where $F_C, G_C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ are trigonometric polynomials. Such a parametrisation exists for every braid and in fact there are even some bounds on the Fourier degree of F_C and G_C [4].

Then we can define the polynomial $g_\lambda : \mathbb{C} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g_\lambda(u, t) = \prod_{C \in \mathcal{C}} \prod_{j=1}^{s_C} \left(u - \lambda \left(F_C \left(\frac{t+2\pi j}{s_C} \right) + iG_C \left(\frac{t+2\pi j}{s_C} \right) \right) \right) \quad (2)$$

with $\lambda > 0$ and the nodal set $g_\lambda^{-1}(0)$ is B for all values of λ .

Furthermore, expanding the product in Equation (2) results in a polynomial not only in the complex variable u , but also in e^{it} and e^{-it} .

We now replace every instance of e^{it} in the polynomial expression of g_λ by another complex variable v and every instance of e^{-it} by its conjugate \bar{v} . This identifies the variable t with the angular coordinate of v . We thus obtain a polynomial $f_\lambda : \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ in u, v and \bar{v} . In general, f_λ does not have an isolated singularity. However, it is an easy calculation to show the following.

Proposition 2.1 (Bode [5]). *Let $k \geq (\deg f_\lambda)/(2s)$. Then for all small enough $\lambda > 0$ the map $p_\lambda : \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ given by*

$$p_\lambda(u, v) = (v\bar{v})^{sk} f_\lambda \left(\frac{u}{(v\bar{v})^k}, \frac{v}{\sqrt{v\bar{v}}} \right), \quad (3)$$

or equivalently

$$p_\lambda(u, re^{it}) = \begin{cases} r^{2sk} g_\lambda \left(\frac{u}{r^{2k}}, t \right) & \text{if } r > 0, \\ u^s & \text{if } r = 0, \end{cases} \quad (4)$$

has an isolated singularity at the origin if and only if $\arg g_\lambda : (\mathbb{C} \times [0, 2\pi]) \setminus g_\lambda^{-1}(0) \rightarrow S^1$ is a fibration. The link of the singularity is the closure of B .

There are a couple of things to note here. Firstly, the condition on $\arg g_\lambda$ does not depend on λ . Secondly and very importantly, the map p_λ is in general not a polynomial because we have introduced square root terms. However if Equation (1) is a π -periodic parametrisation, then all of the exponents with non-zero coefficients in the trigonometric polynomials F_C and

G_C are even. This can be arranged if and only if B is a square, i.e., $B = A^2$ for some braid A . It follows that in this case all exponents of v and \bar{v} in f_λ can be taken to be even, so that all square roots in Equation (3) cancel.

Proposition 2.2. *If a braid B can be parametrised as in Eq. (1) such that $\arg g_\lambda$ gives a fibration over S^1 , then B^2 closes to a real algebraic link.*

We now want to investigate which braids satisfy the condition in Proposition 2.2 and study in particular the case of homogeneous braids.

3. Homogeneous real algebraic links

For every $t \in [0, 2\pi]$ the map $u \mapsto g_\lambda(u, t)$ is a monic complex polynomial. We denote by $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, s-1$, the critical values of $g_\lambda(u, t)$, i.e., the images $g_\lambda(c_i, t)$ of the critical points c_i of $u \mapsto g_\lambda(u, t)$, determined by the condition $\frac{\partial g_\lambda}{\partial u}(c_i, t) = 0$. It is again a simple calculation to show that $\arg g_\lambda$ is a fibration over S^1 if and only if for all $i = 1, 2, \dots, s-1$ the derivative $\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t}$ never vanishes. This has a nice geometric interpretation in terms of the movement of the critical values in the complex plane as t varies. Since $g_\lambda(u, t)$ has distinct roots, the critical values $v_i(t)$ are always non-zero. The inequality states that no critical value $v_i(t)$ ever changes the orientation in which it twists around the origin $0 \in \mathbb{C}$ as t increases from 0 to 2π . Every critical value moves either always clockwise $\left(\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t} < 0\right)$ or always counterclockwise $\left(\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t} > 0\right)$.

Proposition 2.2 can therefore be updated and rewritten in terms of polynomials and critical values. Let \tilde{X}_s be the space of monic complex polynomials of degree s with distinct roots. The fundamental theorem of algebra gives a straightforward identification of a polynomial $f = \prod_{j=1}^s (u - x_j) \in \tilde{X}_s$ with its unordered set of roots $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$. This allows us to identify a loop f_t in \tilde{X}_s with the (closed) braid that is formed by the roots of the polynomials

$$\bigcup_{j=1}^s (x_j(t), t) \subset \mathbb{C} \times S^1. \quad (5)$$

Proposition 3.1. *Let f_t , $t \in S^1$, be a loop in \tilde{X}_s such that for all $i = 1, 2, \dots, s-1$ the derivative $\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t}$ never vanishes. Let B be the braid that is formed by the roots of f_t . Then the closure of B^2 is real algebraic.*

In Proposition 3.1 we do not require explicitly that the parametrisation of B is given in terms of trigonometric polynomials. Since these are C^1 -dense in the space of 2π -periodic real C^1 -functions, we can always approximate a parametrisation as in Proposition 3.1 without losing the property that $\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t}$ does not vanish.

We can also assume that the critical values are distinct. This means that

$$(0, t) \cup \bigcup_{j=1}^{s-1} (v_j(t), t) \subset \mathbb{C} \times S^1 \quad (6)$$

forms a closed braid. Let $X_s \subset \tilde{X}_s$ be the space of those polynomials in \tilde{X}_s that have distinct critical values. Then the space of possible sets of critical values of a polynomial in X_s is given by

$$V_s = \{(v_1, v_2, \dots, v_{s-1}) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{s-1} : v_i \neq v_j \text{ if } i \neq j\} / S_{s-1}, \quad (7)$$

where S_{s-1} is the permutation group on $s-1$ elements. Then the braid in Equation (6) can be interpreted as a loop in V_s . Another interpretation of Proposition 3.1 is therefore asking

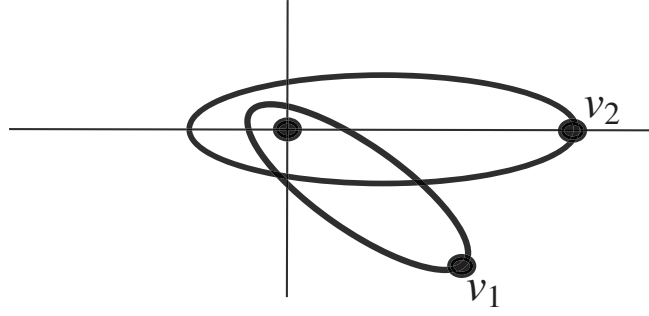


Figure 1: If the critical values $v_j(t)$ move on ellipses around the origin in the complex plane without ever changing direction (from clockwise to counterclockwise or vice versa) as t varies, the derivatives $\frac{\partial \arg v_j(t)}{\partial t}$ never vanishes.

which braids can be parametrized as loops in V_s satisfying the condition on $\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t}$ and such that this loop is the image of a loop in X_s under the map that sends a polynomial to the set of its critical values.

The words

$$A_{i,j} = \sigma_j \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \text{ with } i \leq j < s \quad (8)$$

are a set of generators for the braid group \mathbb{B}_s . The generator $A_{i,j}$ takes the strand $j+1$ and twists it around the strand i .

Lemma 3.2. *The s -strand braid $\prod_{j=1}^n A_{1,i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ can be parametrised as in Eq. (6) such that $\frac{\partial \arg v_i(t)}{\partial t}$, $i = 1, 2, \dots, s-1$, never vanishes if for every $k = 1, 2, \dots, s-1$ there is a j such that $i_j = k$.*

Proof. The parametrisation can be achieved if all $v_i(t)$ move on ellipses in the complex plane as t varies as indicated in Figure 1. Then for every j the generator $A_{1,j}$ can be parametrised such that $\frac{\partial \arg v_{j-1}(t)}{\partial t}$ does not vanish and all other strands are stationary. We can now concatenate the parametrisations for the $A_{1,j}$ to obtain the desired braid word.

The fact that the generator $A_{1,j}$ appears in the braid word if and only if $A_{1,j}^{-1}$ does not appear implies that none of the v_i ever turns around on its ellipse. The condition that for every $k = 1, 2, \dots, s-1$ there is a j such that $i_j = k$ means that every v_i moves at some point. We can thus slightly perturb the parametrisation of each $A_{1,j}$ such that none of the v_i is non-stationary. For example, for the parametrisation of $A_{1,j}$ every v_i with $i \neq j-1$ moves an ε -amount on its ellipse. \square

The braids in Lemma 3.2 allow for the desired kind of parametrisation. What we need to check now is that there is a loop in the space of polynomials X_s , whose critical values form that parametrisation. Then we want to know which braid is formed by the roots of these polynomials.

The following theorem is very useful for this. Recall that X_s is the space of monic polynomials with distinct roots and distinct critical values.

Theorem 3.3 (Beardon-Carne-Ng [1]). *Let $X_s^0 \subset X_s$ be the space of those polynomials in X_s that have constant term equal to 0. Then the map $\theta_s : X_s^0 \rightarrow V_s$ that sends a polynomial $f \in X_s^0$ to the set of its critical values $(v_1, v_2, \dots, v_{s-1})$ is a covering map of degree s^{s-1} .*

The map θ_s is well-defined even if the constant term is not equal to zero.

Corollary 3.4. *Let $\hat{X}_s \subset X_s$ be the space of those polynomials in X_s whose critical values are not equal to their constant terms, i.e. $v_i \neq f(0)$ for all $i = 1, 2, \dots, s-1$. Let γ be a loop in V_s and $\tilde{\gamma}$ a path in \hat{X}_s such that $\theta_s(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Then any homotopy of γ in V_s lifts to a homotopy of $\tilde{\gamma}$ in \hat{X}_s .*

The homotopy lifting property in Corollary 3.4 means that the properties that we want to check do not depend on the particular braid parametrisation, but only on the braid type. We are going to show that there is a braid that is conjugate to the braid in Lemma 3.2 for which it is relatively easy to determine that if it is interpreted as a loop in V_s , then it lifts to a loop in \hat{X}_s . Furthermore, determining the braid B that is formed by the roots of the corresponding polynomials is straightforward. Corollary 3.4 then implies that the braids in Lemma 3.2 also lift to a loop in \hat{X}_s and the braid that corresponds to the roots of the polynomials is conjugate to B .

We start with a polynomial f , whose roots are real. Then all of its critical points and critical values are real as well. This is depicted in Figure 2. Between each pair of roots there is exactly one critical point. We label the critical points $\{c_i\}_{i=1,2,\dots,s-1}$ such that c_i is the critical point between the i^{th} and $i+1^{\text{th}}$ smallest root. We set $v_i = f(c_i)$. We now consider a particular loop $\gamma_i : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in the target complex plane based at the origin. The loop stays close to the real line and encircles the critical value v_i in a counterclockwise direction. The loop γ_i does not intersect any critical values. When it is about to encounter a critical value v_j , it avoids it by moving into the upper or the lower half plane. If $j > i$ and $i \equiv s+1 \pmod 2$ or if $j < i$ and $i \equiv s \pmod 2$, then γ_i moves into the upper half plane. Otherwise, it avoids v_j by moving into the lower half plane. At the moment this choice might seem arbitrary (and to some degree it is), but we will come back to why this turns out to be a good rule. An example of γ_i is shown in Figure 2b).

Now we look at the preimage $f^{-1}(\gamma_i)$. These are $s-2$ distinct loops and two paths that exchange the i^{th} and $i+1^{\text{th}}$ smallest root. The braid that is formed by $f^{-1}(\gamma_i)$ forms the generator σ_i if we choose the convention that the overpassing strand corresponds to the root with the smaller imaginary part. Note that this braid is given by $(f^{-1}(\gamma_i(t)), t) = ((f - \gamma_i(t))^{-1}(0), t) \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$.

This gives us therefore a parametrisation of the generator σ_i as a loop in \hat{X}_s , whose critical values form the braid

$$(0, t) \cup \bigcup_{j=1}^{s-1} (v_j - \gamma_i(t), t) \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi], \tag{9}$$

depicted in Figure 3. We can consider the path $\gamma = \prod_{j=1}^{\ell} \gamma_{i_j}^{\varepsilon_j}$, which is the concatenation of γ_i . The path $f - \gamma(t)$ is a loop in the space of polynomials \hat{X}_s , whose roots form the s -strand braid $B = \prod_{j=1}^{\ell} \sigma_{i_j}^{\varepsilon_j}$ and whose critical values form a braid that is easily seen to be conjugate to $\prod_{j=1}^{\ell} Y_{i_j}^{\varepsilon_j}$, where

$$Y_j = \begin{cases} A_{1, \frac{j+1}{2}} & \text{if } j \text{ is odd,} \\ A_{1, \frac{j}{2} + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor} & \text{if } j \text{ is even.} \end{cases} \tag{10}$$

This is illustrated in an example in Figure 4.

We have shown the following.

Lemma 3.5. *For every s -strand braid $B = \prod_{j=1}^{\ell} \sigma_{i_j}^{\varepsilon_j}$ there is a conjugate of B that can be parametrised as a loop in \hat{X}_s whose image in V_s corresponds to the braid $\prod_{j=1}^{\ell} Y_{i_j}^{\varepsilon_j}$. Equiv-*

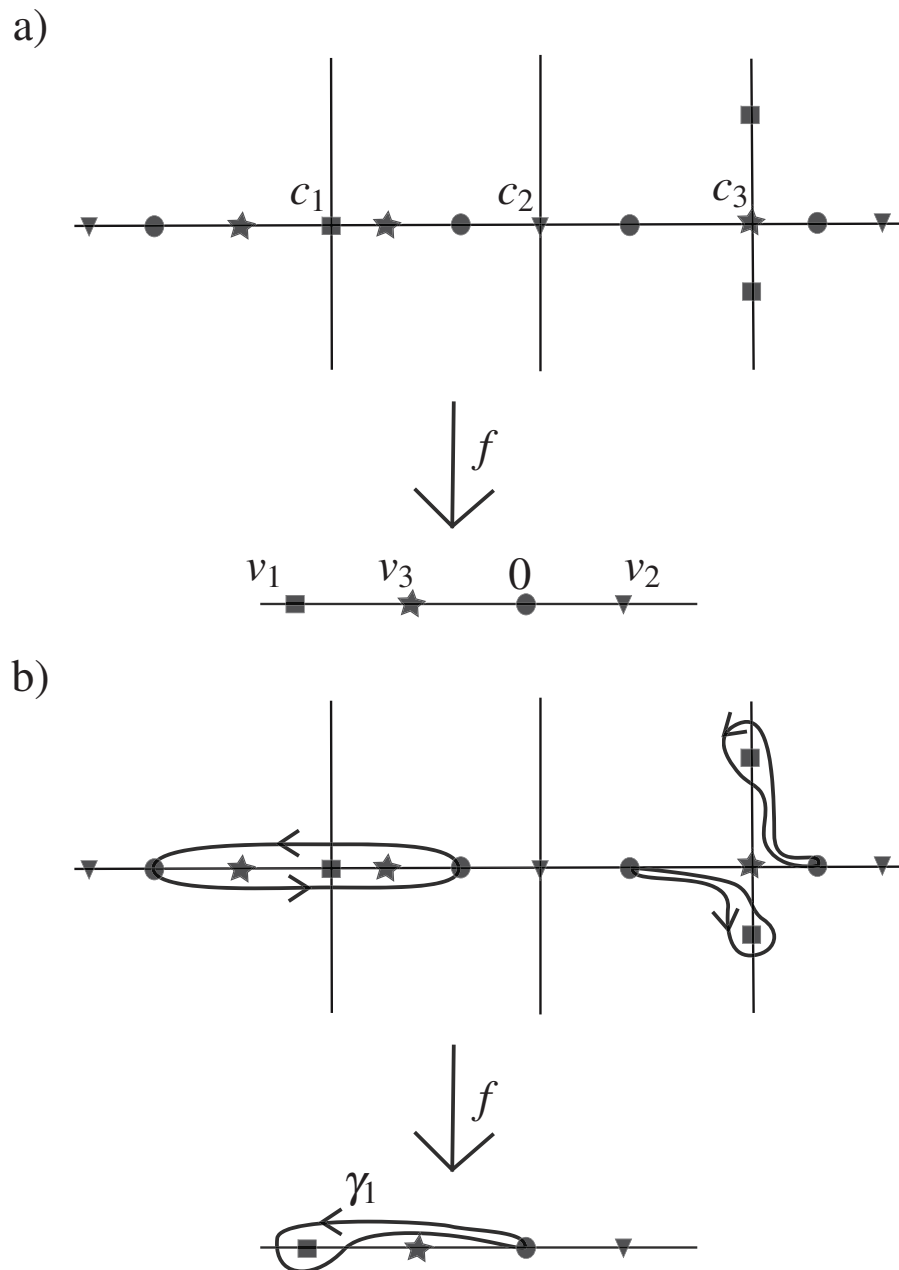


Figure 2: The definition of the loop γ_i . a) A real polynomial f has a critical point c_i between each pair of roots and the corresponding critical values $v_i = f(c_i)$ must be real too. Points with the same shape have the same image under f . E.g., the circles are the roots of f , all squares get mapped to v_1 and so on. The lines in the domain are the preimage set of the real line. b) The loop γ_1 encircles v_1 . Its preimage set under f consists of two loops and two paths exchanging the first and second root.

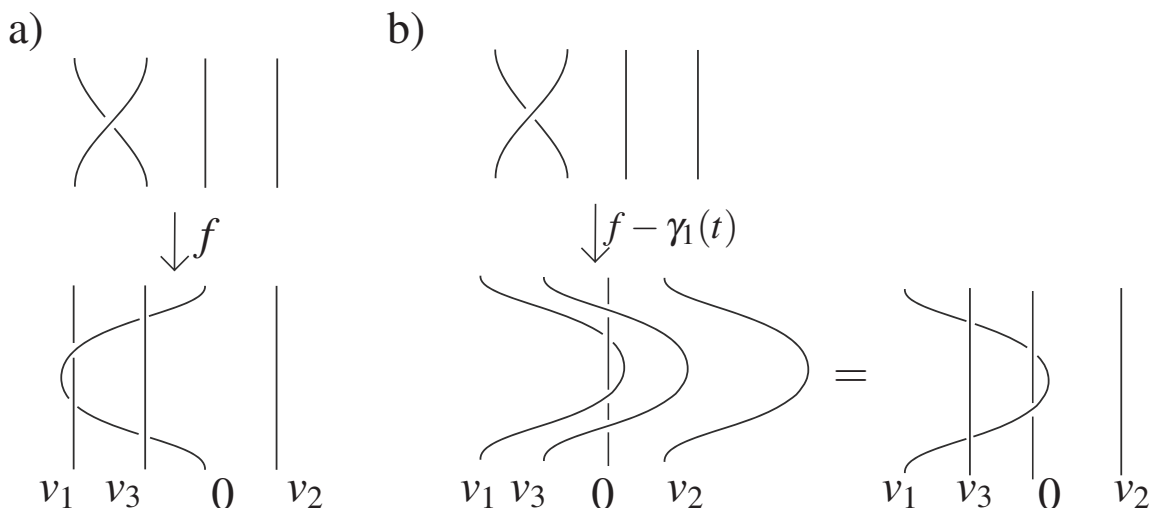


Figure 3: a) The relation between the braid of roots and the braid of critical values. a) The preimage set of $\gamma_1(t)$ under f forms the generator σ_1 , while $\gamma_1(t)$ itself forms the braid $\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$. (We read braid words from the bottom to the top.) b) We can interpret σ_1 as the roots of the loop of polynomials $f - \gamma_1(t)$. The braid of its critical values is isotopic to $\sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1$.

alently, every parametrisation of any braid that is conjugate to $\prod_{j=1}^{\ell} Y_{i_j}^{\epsilon_j}$ can be seen as a loop in V_s , which lifts to a loop in \hat{X}_s , which corresponds to a conjugate of B .

Note that if B is homogeneous, then the braid $\prod_{j=1}^{\ell} Y_{i_j}^{\epsilon_j}$ is as in Lemma 3.2. Recall the rule in the construction of the loop γ_i that determines if γ_i avoids a critical value v_j by moving into the upper half of the complex plane or the lower half. This rule is quite arbitrary. The only thing it changes is which generator Y_k corresponds to which generator σ_j . With our rule we have the nice correspondence that Y_j is directly related to σ_j .

Corollary 3.6. *Every parametrisation of $\prod_{j=1}^n A_{1,i_j}^{\epsilon_j}$ lifts to a loop in \hat{X}_s and the corresponding braid is conjugate to a homogeneous braid. Conversely, for every homogeneous braid there is such a braid of critical values $\prod_{j=1}^n A_{1,i_j}^{\epsilon_j}$.*

The construction that establishes this relation between the braid that is formed by the roots of a loop of polynomials and the braid that is formed by their critical values takes a lot of inspiration from work by Rudolph [11].

The main theorem now follows from Lemma 3.2 and Proposition 3.1:

Theorem 3.7. *If B is a homogeneous braid, then the closure of B^2 is real algebraic.*

It can also be shown that on 3-spheres of small radius $\arg p_\lambda$ is a fibration of the link complement of the circle, exactly as in the complex case [5].

4. Examples

In this section we give an example of the explicit construction of real polynomials with isolated singularities. If we wanted to strictly follow the procedure outlined in the proof of Theorem 1.5, we would first have to write down the parametrisation for the braid of critical values and then lift this loop in V_s to a loop in \hat{X}_s . This corresponds to solving a system of polynomial equations for every $t \in [0, 2\pi]$. In practice, this will be done for a discrete set in $[0, 2\pi]$ of sufficiently many data points. The resulting interpolating function gives a braid

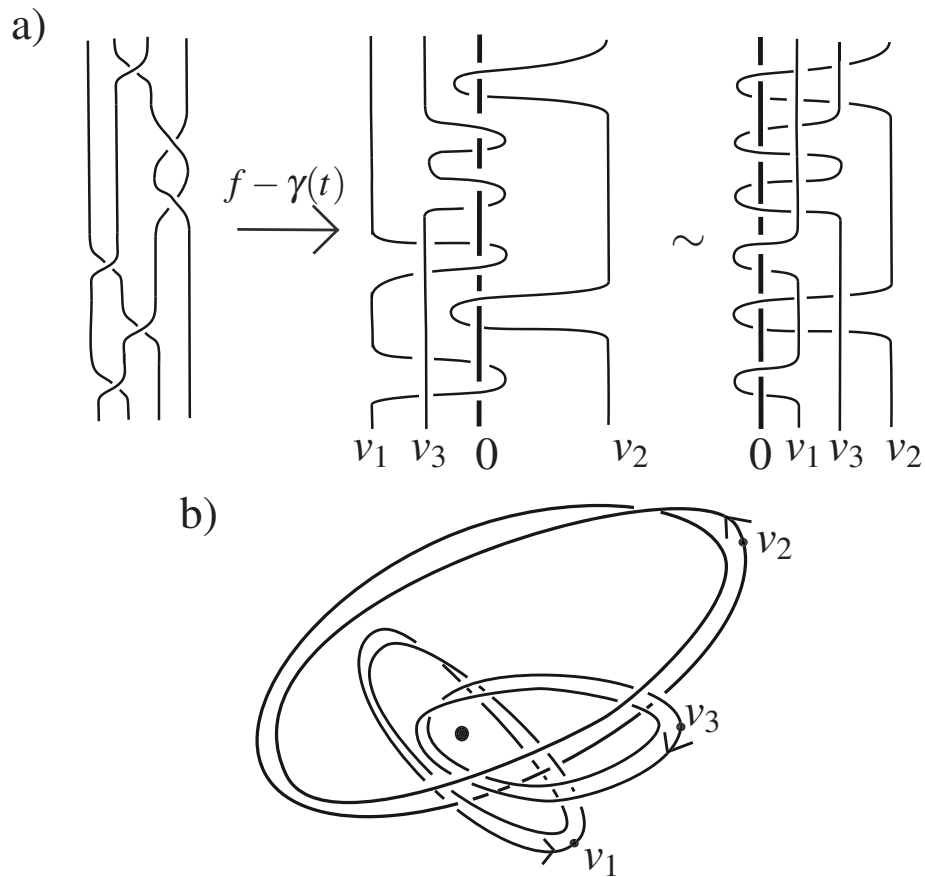


Figure 4: a) Concatenation of the loops γ_i allows us to construct any braid as the roots of a loop of polynomials in \hat{X}_s . Here we see the braid $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-2}\sigma_2$ as the roots of $f - \gamma(t)$. The corresponding critical values form a braid that is conjugate to $Y_1Y_2Y_1Y_3^{-2}Y_2$. The generator Y_j describes a movement of the strand labelled by the critical value v_j around the 0-strand. b) The resulting braid $Y_1Y_2Y_1Y_3^{-2}Y_2$ can be parametrised such that $\frac{\partial \arg v_i}{\partial t}$ never vanishes. This is possible because $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-2}\sigma_2$ is homogeneous.

parametrisation, which is then approximated by trigonometric polynomials, which we can use to define the functions g_λ and finally p_λ in Proposition 2.1.

Depending on the number of data points in $[0, 2\pi]$ this can be a computationally quite extensive process. For our purposes it is easier to start with a trigonometric parametrisation and vary some parameters until the resulting g_λ leads to a fibration.

For all values of $a, b > 0$ the parametric curves

$$\bigcup_{j=1}^4 \left(a \cos \left(\frac{t+2\pi j}{4} \right) + b i \sin \left(\frac{3(t+2\pi j)}{4} \right), t \right) \quad (11)$$

form the braid $(\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1})$.

We set $a = 1$ and $b = \frac{1}{2}$ and obtain

$$g_\lambda(u, t) = u^4 + \lambda^2 u^2 \left(\frac{1}{2} e^{-it} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} e^{it} \right) + \lambda^4 \left(-\frac{1}{256} e^{-3it} + \frac{1}{16} e^{-2it} - \frac{1}{4} e^{-it} + \frac{1}{128} - \frac{1}{16} e^{it} - \frac{1}{256} e^{3it} \right). \quad (12)$$

Figure 5 shows a plot $\arg v_1(t)$, $\arg v_2(t)$ and $\arg v_3(t)$, the critical values of $g_1(u, t)$. We see immediately that there are no stationary points. Therefore $\arg g_\lambda(u, t)$ is a fibration and this means that $(u, t) \mapsto \arg g_\lambda(u, nt)$ is also fibration for all n . This justifies our choice of a and b . Note that the nodal set of $(u, t) \mapsto \arg g_\lambda(u, nt)$ is $(\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1})^n$. For even exponents we obtain the following polynomials:

$$\begin{aligned} f_\lambda(u, v) &= u^4 + \lambda^2 u^2 \left(\frac{1}{2} \bar{v}^{2n} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} v^{2n} \right) \\ &\quad + \lambda^4 \left(-\frac{1}{256} \bar{v}^{6n} + \frac{1}{16} \bar{v}^{4n} - \frac{1}{4} \bar{v}^{2n} + \frac{1}{128} - \frac{1}{16} v^{2n} - \frac{1}{256} v^{6n} \right), \\ p_\lambda(u, v) &= (v\bar{v})^{4 \times 2n} f_\lambda \left(\frac{u}{(v\bar{v})^{2n}}, \frac{v}{\sqrt{v\bar{v}}} \right) \\ &= u^4 + \lambda^2 u^2 \left(\frac{1}{2} v^{7n} \bar{v}^{9n} - \frac{3}{8} (v\bar{v})^{8n} - \frac{1}{2} v^{9n} \bar{v}^{7n} \right) \\ &\quad + \lambda^4 \left(-\frac{1}{256} v^{5n} \bar{v}^{11n} + \frac{1}{16} v^{6n} \bar{v}^{10n} - \frac{1}{4} v^{7n} \bar{v}^{9n} + \frac{1}{128} (v\bar{v})^{8n} - \frac{1}{16} v^{9n} \bar{v}^{7n} - \frac{1}{256} v^{11n} \bar{v}^{5n} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Here we have chosen $k = 2n$, which is larger than $\deg f/s = 6n/4$. Note that all exponents of v and \bar{v} in f_λ are even, so that there are no square root terms in p_λ .

Therefore the braids $(\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1})^{2n}$ close to real algebraic links for all n . They belong to the family of lemniscate links which were studied in [3]. Note that the constructed functions are semiholomorphic, i.e., holomorphic in one complex variable u and $\deg_u p_\lambda = s$, the number of strands.

If we want to construct real algebraic links that are not in the family of closures of squares of homogeneous braids, it is important to recall that in our construction we only considered one lift of the braid of critical values $\prod_{j=1}^{\ell} A_{1,ij}^{\varepsilon_{ij}}$. If any of its other lifts in \hat{X}_s are also loops, then the closure of the squares of the corresponding braids are also real algebraic. Recently, this was studied in more detail [6], but since it is challenging to check if a given link is the closure of a homogeneous braid it remains unclear if the constructed families in [6] lead to new real algebraic links.

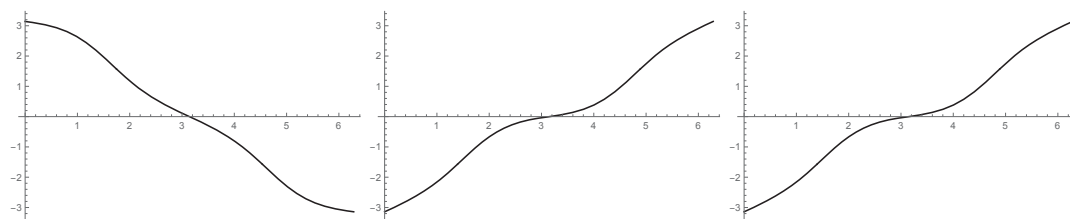


Figure 5: Plots of graphs of the arguments of the 3 critical values of g as functions of t . Because of symmetries of the braid parametrisations two of the three functions are identical. None of the functions have any stationary points.

References

- [1] A. F. Beardon, T. K. Carne and T. W. Ng. *The critical values of a polynomial*. *Constr. Approx.* **18** (2002), 343–354.
- [2] R. Benedetti and M. Shiota. *On real algebraic links on S^3* . *Bolletino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 8 Volume 1B* **3** (1998), 585–609.
- [3] B. Bode, M. R. Dennis, D. Foster and R.P. King. *Knotted fields and explicit fibrations for lemniscate knots*. *Proc. R. Soc. A* **473** (2017), 20160829.
- [4] B. Bode and M. R. Dennis. *Constructing a polynomial whose nodal set is any prescribed knot or link*. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **28**, no. 1 (2019), 1850082.
- [5] B. Bode. *Constructing links of isolated singularities of real polynomials $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$* . *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **28**, No. 1 (2019), 1950009.
- [6] B. Bode. *Braid group actions on the n -adic integers*. arXiv:1903.06308 (2019).
- [7] E. Looijenga. *A note on polynomial isolated singularities*. *Ind. Math. (Proc.)* **74** (1971), 418–421.
- [8] J. W. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton University Press (1968).
- [9] B. Perron. *Le nœud “huit” est algébrique réel*. *Inv. Math.* **65** (1982), 441–451.
- [10] L. Rudolph. *Isolated critical points of mappings from \mathbb{R}^4 to \mathbb{R}^2 and a natural splitting of the Milnor number of a classical fibred link : 1. Basic theory and examples*. *Comm. Math. Helv.* **62** (1987), 630–645.
- [11] L. Rudolph. *Some knot theory of complex plane curves*. arXiv:math/0106058 (2001).
- [12] J. R. Stallings. *Constructions of fibred knots and links*. Algebraic and geometric topology, Proc. Sympos. Pure Math. **32**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I (1978), 55–60.

光的点を持つ曲面の幾何学

本田 淳史 (横浜国大工)*

1. はじめに

ローレンツ多様体は理論物理学, とくに一般相対論において重要な役割を果たす一方で, 純粋な幾何学的対象としても興味深い. ローレンツ多様体の計量は非退化であるが, その部分多様体に誘導される計量は正定値計量や不定値計量, さらに退化することもあり, それらが混在する場合もある. ここでは, 3次元ローレンツ多様体内の連結な正則曲面を考える. とくに, 誘導計量が正定値である部分, 不定値である部分, さらに退化した部分を混在して持つような曲面, **混合型曲面**を対象とする. 混合型曲面の計量が退化する点 (光的点) は, 誘導計量の特異点とみなされる. 誘導計量が非退化である部分において定義される不変量や幾何構造は一般に発散し, 光的点の近傍における混合型曲面の構造は解明されていない部分が多い.

本稿では, 混合型曲面の光的点を写像の特異点のように扱い, とくに波面の微分幾何学的研究の手法を適用することで, ガウス曲率などの様々な幾何学的不変量の光的点における挙動を調べた結果を報告する. まず第2節において, 本研究の動機付けとなる混合型曲面の近年に至るまでの研究を紹介する. 第3節では, 混合型曲面の非退化な光的点におけるガウス曲率の有界性の特徴付けを与えるために, 光的特異曲率や光的法曲率などの基本的な不変量を導入する. さらに, 光的特異曲率の幾何学的意味や, 有界なガウス曲率を持つ混合型曲面に対するガウス・ボンネ型の定理を紹介する. 第4節では, 不変量の内在性・外在性を議論する. 一般に, 光的特異曲率は内的不変量であるが, 光的法曲率はそうとは限らない. まず, ガウス曲率の漸近挙動の系として, 光的特異曲率が恒等的に消える場合には光的法曲率が内的不変量であることを紹介する. さらに, 実解析的, かつ, 光的特異曲率が消えない場合には, 光的法曲率が外的不変量であることを導く.

本稿の内容は [17] と [18], および佐治健太郎氏 (神戸大学), 寺本圭佑氏 (九州大学) との共同研究 [19] に基づく.

2. 混合型曲面

(M^3, h) を向きづけられた3次元ローレンツ多様体とする ($h = \langle \cdot, \cdot \rangle$ はローレンツ計量). 点 $p \in M^3$ において, 接ベクトル $\mathbf{v} \in T_p M^3$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) が $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ を満たすとき, 空間的であるという. 同様に, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ (resp. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$) が成り立つとき, \mathbf{v} を時間的 (resp. 光的) と呼ぶ.

3次元ローレンツ多様体 $M^3 = (M^3, h)$ の**曲面**とは, 連結な2次元 C^∞ 級多様体 Σ のはめ込み $f: \Sigma \rightarrow (M^3, h)$ を表すこととする. このとき,

$$(ds^2)_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \langle df_p(\mathbf{v}), df_p(\mathbf{w}) \rangle \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p \Sigma, p \in \Sigma)$$

により定まる Σ のなめらかな計量 ds^2 を第1基本形式 (もしくは誘導計量) と呼ぶ.

本研究は科研費 (課題番号:19K14526) の助成を受けたものである.

* 〒240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-1 横浜国立大学大学院工学研究院
e-mail: honda-atsufumi-kp@ynu.jp

点 $p \in \Sigma$ が空間的点であるとは, $(ds^2)_p$ が $T_p\Sigma$ の正定値対称双線形形式を定めるときをいう. 同様に, $(ds^2)_p$ が不定値 (resp. 退化) のとき, $p \in \Sigma$ を時間的点 (resp. 光的点) と呼ぶ. 空間的点集合 (resp. 時間的点集合, 光的点集合) を Σ_+ (resp. Σ_-, LD) で表す. $\Sigma = \Sigma_+$ (resp. $\Sigma = \Sigma_-$) となるとき, 曲面 $f: \Sigma \rightarrow M^3$ は空間的 (resp. 時間的) と呼ばれる.

定義 1. 連結な 2次元 C^∞ 級多様体 Σ に対し, 空間的点集合 Σ_+ と時間的点集合 Σ_- がどちらも空でない曲面 $f: \Sigma \rightarrow M^3$ を **混合型曲面** と呼ぶ.

非光的点集合 $\Sigma_* := \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ 上では, ガウス曲率 K や平均曲率 H が定義されるが, 光的点集合 LD に近づくにつれて一般には発散する. 混合型曲面の第 1 基本形式は型変化計量 (signature-changing metric) を与える [1, 29, 30, 31, 21, 22, 12, 37, 38, 39, 11, 23, 34, 42, 36]. 型変化計量は量子重力理論や一般相対論においても考察されている [41, 3].

2.1. Carathéodory 予想

Carathéodory 予想とは, 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の閉凸曲面には少なくとも臍点が 2つ存在するのではないかというものである. Carathéodory 予想は未解決である一方, F. Tari [44] は \mathbf{R}^3 ではなく, 3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 の閉凸曲面の場合に, Carathéodory 予想を肯定的に解決した. ここで, 3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 とは, 3次元アファイン空間に標準ローレンツ内積

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x^2 + y^2 - z^2 \quad (\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}_1^3)$$

を備えた, 平坦な 3次元ローレンツ多様体である. 一般に, 臍点是非光的点集合 $\Sigma_* = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ において定義されるが¹, [44] では光的点に対しても臍点の概念を導入している. \mathbf{R}_1^3 にはめ込まれた閉曲面は混合型曲面であり, 光的点集合 LD の連結成分の個数は 2つ以上であることも示されている [44].

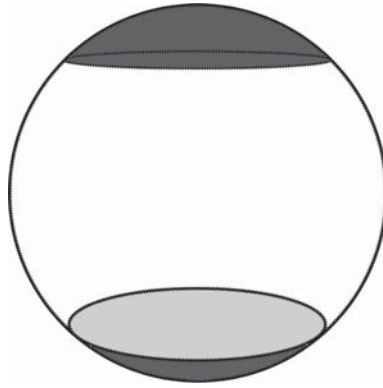


図 1: 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の単位球面 $S^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ は 3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 の凸な混合型閉曲面を与える.

2.2. 平均曲率零の混合型曲面

3次元ミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 のグラフ $z = \varphi(x, y)$ が

$$(1 - \varphi_x^2) \varphi_{yy} + 2\varphi_x \varphi_{xy} \varphi_y + \varphi_{xx} (1 - \varphi_y^2) = 0$$

¹ 第 1 基本形式と第 2 基本形式が比例する点を臍点という.

を満たすとき, $z = \varphi(x, y)$ は平均曲率零グラフ²³と呼ばれる. 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の極小曲面の場合, 「全平面で定義された極小グラフは平面に限る」という Bernstein の定理が成り立つ. 同様に, \mathbf{R}_1^3 の場合も, 全平面で定義された極大グラフ (つまり, 空間的な平均曲率零グラフ) は平面に限ることが Calabi により示された. しかし, 混合型の場合, 全平面で定義された混合型平均曲率零グラフで, 実解析的かつ平面でない例が存在する. [25] において与えられた

$$z = x \tanh y, \quad z = \log(\cosh x / \cosh y)$$

はそのような混合型平均曲率零グラフを与える. 近年, 全平面で定義された混合型平均曲率零グラフの系統的な構成法が [8] により与えられた (cf. [2]).

混合型の平均曲率零曲面は近年盛んに研究されている [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 24]. 平均曲率零曲面は流体力学においても興味深い対象であり, 型変化は音速から超音速への流れ関数の変化に対応することが知られている [6]. また, 混合型の零でない平均曲率一定超曲面は存在しない [20].

3. 光的点におけるガウス曲率の挙動

本節では, 混合型曲面の非退化な光的点におけるガウス曲率の挙動を調べた結果を紹介する. まず, カスプ辺をモデルとした光的点である **第1種光的点**を導入する. さらに, 第2種光的点 (第1種でない非退化光的点) の特別なクラスである L_3 -点も定義する. L_3 -点はツバメの尾をモデルとした光的点である. その後, 第1種光的点における不変量として, **光的特異曲率**, **光的法曲率**を導入し, それらがガウス曲率の有界性や曲面の形状に大きく影響することを示す. さらに, 有界なガウス曲率を持つ混合型曲面に対する Gauss-Bonnet 型の定理が成り立つことを紹介する.

3.1. 第1種光的点, L_3 -点

$f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面とする. Σ の座標近傍 $(U; u, v)$ において, $E := \langle f_u, f_u \rangle$, $F := \langle f_u, f_v \rangle$, $G := \langle f_v, f_v \rangle$ とおくと, 第1基本形式 ds^2 は

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

と表される. 関数 λ を

$$\lambda := EG - F^2$$

とおく. 点 $p \in U$ が光的点 (resp. 空間的点, 時間的点) であることと, $\lambda(p) = 0$ (resp. $\lambda(p) > 0$, $\lambda(p) < 0$) は同値である. $d\lambda(p) \neq 0$ である光的点 $p \in LD$ を **非退化** と呼ぶ. このとき,

- 陰関数定理より, ある正数 $\varepsilon > 0$ と Σ の正則曲線 $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) で $\gamma(0) = p$ かつ LD は p の近傍で $\gamma(t)$ によりパラメトライズされるようなものが存在する. $\gamma(t)$ を特性曲線と呼ぶ.
- 一方, $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $\eta(t)$ で $L(t) := df(\eta(t))$ は M^3 の光的ベクトル場を与えるものが存在する. $\eta(t)$ を特性曲線 $\gamma(t)$ に沿う退化ベクトル場と呼ぶ.

²非光的点集合 Σ_* 上では, 平均曲率零グラフは $H = 0$ を満たす.

³曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ が適当な合同変換を施したのちに局所的に平均曲率零グラフで与えられるとき, 平均曲率零曲面と呼ばれる.

定義 2. 非退化な光的点 $p \in LD$ に対して, $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) を $p = \gamma(0)$ を通る特性曲線, $\eta(t)$ を $\gamma(t)$ に沿う退化ベクトル場とする. このとき,

- $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次独立であるとき, p を **第 1 種光的点**⁴ と呼ぶ. そうでないとき, p を **第 2 種** と呼ぶ.
- $\delta(t) := \det(\gamma'(t), \eta(t))$ とおくとき, $p = \gamma(0)$ が第 1 種 (resp. 第 2 種) であるための必要十分条件は $\delta(0) \neq 0$ (resp. $\delta(0) = 0$) で与えられる. 非退化な光的点 $p \in LD$ が

$$\delta(0) = 0, \quad \delta'(0) \neq 0$$

を満たすとき, L_3 -点⁵ と呼ぶ.

特性曲線 $\gamma(t)$ の f による像を $\hat{\gamma}(t) := (f \circ \gamma)(t)$ とおくと, M^3 の正則曲線である. このとき, p が第 1 種 (resp. 第 2 種) であることと $\hat{\gamma}'(0) \in T_{f(p)}M$ が空間的 (resp. 光的) であることが同値である. p が第 1 種光的点であるとき, ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ も第 1 種光的点となる. つまり, $\hat{\gamma}(t)$ ($|t| < \varepsilon$) は M^3 の空間的な正則曲線である.

注意 3 (平均曲率の光的点における有界性と光的点の型). 一般に, 第 2 種光的点 $p \in LD$ に対し, $\hat{\gamma}'(0) \in T_{f(p)}M$ は光的であるが, $t \neq 0$ のとき $\hat{\gamma}'(t)$ は光的かどうかはわからない. ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\hat{\gamma}(t)$ ($|t| < \varepsilon$) は M^3 の光的な正則曲線であるとき, p を L_∞ -点 と呼ぶ. 非退化な光的点 $p \in LD$ が L_∞ -点 であるための必要十分条件は, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma'(t)$ と $\eta(t)$ が 1 次従属, つまり $\delta(t) \equiv 0$ となるような正数 $\varepsilon > 0$ が存在することである. 次の事実が知られている ([20, Proposition 3.5], [46]) :

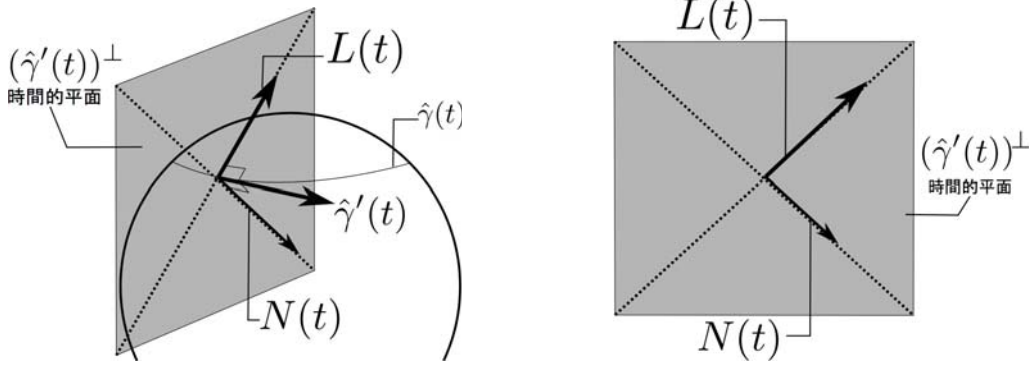
$f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面, $p \in LD$ を非退化な光的点とする. もし, 平均曲率 H が p の近傍で有界ならば, p は L_∞ -点 である.

とくに, 平均曲率零曲面の非退化な光的点は L_∞ -点 である. また, ローレンツ多様体内の平均曲率が有界である超曲面の光的点, とくに, 非退化でない場合の光的点の構造が [46] において調べられている.

3.2. 第 1 種光的点の不変量

$p \in LD$ を第 1 種光的点, $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) を $p = \gamma(0)$ を通る特性曲線とする. 必要ならば $\varepsilon > 0$ を十分小さくとることで, 一般性を失わずに, 任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ は第 1 種光的点であると仮定してよい. このとき, $\gamma(t)$ の f による像 $\hat{\gamma}(t) := (f \circ \gamma)(t)$ ($|t| < \varepsilon$) は M^3 の空間的曲線なので, t を弧長パラメータに取り直すことができる.

- 各 t において $\hat{\gamma}'(t) (\in T_{\hat{\gamma}(t)}M^3)$ は空間的ベクトルなので, $\hat{\gamma}'(t)$ の直交補空間 $(\hat{\gamma}'(t))^\perp$ は $T_{\hat{\gamma}(t)}M^3$ の時間的な 2 次元部分空間である.
- $L(t) = df(\eta(t))$ は $\hat{\gamma}'(t)$ に直交する M^3 の光的ベクトルなので, $L(t) \in (\hat{\gamma}'(t))^\perp$ である.
- このとき, $\hat{\gamma}(t)$ に沿う M^3 の光的ベクトル場 $N(t)$ で, $N(t) \in (\hat{\gamma}'(t))^\perp$ かつ $\langle N(t), L(t) \rangle = 1$ を満たすものが存在する.



光的点 $p \in LD$ において, $T_p\Sigma$ の退化ベクトル全体は1次元部分空間をなす. $p \in LD$ の近傍 U において定義されたベクトル場 η で, 各点 $q \in LD$ において $\eta_q \in T_q\Sigma$ は退化ベクトルを与える, つまり $L_q := df_q(\eta) \in T_{f(q)}M^3$ は光的ベクトルであるとき, $\eta \in \mathfrak{X}(U)$ を**退化ベクトル場**と呼ぶ.

補題 4 ([19, Proposition 2.6]). 光的点 $p \in LD$ が第1種光的点であるための必要十分条件は, $\eta_p \langle df(\eta), df(\eta) \rangle \neq 0$ で与えられる.

定義 5 ([19]). (M^3, h) の Levi-Civita 接続を ∇ で表す. 第1種光的点 $p \in LD$ に対して,

$$\kappa_L(p) := \frac{1}{(\eta_p \langle df(\eta), df(\eta) \rangle)^{\frac{1}{3}}} \langle \nabla_{d/dt} \hat{\gamma}'(0), L(0) \rangle,$$

$$\kappa_N(p) := (\eta_p \langle df(\eta), df(\eta) \rangle)^{\frac{1}{3}} \langle \nabla_{d/dt} \hat{\gamma}'(0), N(0) \rangle$$

とおく. $\kappa_L(p)$ を**光的特異曲率**, $\kappa_N(p)$ を**光的法曲率**と呼ぶ.

光的特異曲率 κ_L や光的法曲率 κ_N は $\gamma(t)$ や η のとり方に依らず定まる第1種光的点における不変量である. 光的特異曲率 κ_L と光的法曲率 κ_N は, [40] で導入されたカस्प辺に対する幾何学的不変量の特異曲率 κ_s , 極限法曲率 κ_ν にそれぞれ対応している. 特に, κ_L は κ_s に類似の性質を持つことを示すことができる. 例えば, κ_s は第1基本形式のみで表すことができる内的不変量であるが ([40, Proposition 1.18] を参照), κ_L も内的不変量である. また, [40, Corollary 1.14] で示されたように, κ_s はツバメの尾において $-\infty$ に発散するが, 同様のことが成り立つ.

定理 6 ([19, Theorem A]). 第2種光的点 $p \in LD$ に対して, 第1種光的点からなる点列 $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ とする. このとき, 光的特異曲率 κ_L は $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に沿って $-\infty$ に発散する. さらに, もし p が L_3 -点でない第2種光的点ならば, 光的法曲率 κ_N も $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に沿って $-\infty$ に発散する.

3.3. ガウス曲率の挙動

$p \in LD$ を第1種光的点とする. このとき, p の座標近傍 $(U; u, v)$ で, u -軸が光的点集合であり, $(\eta :=) \partial_v$ が退化ベクトル場であるようなものが存在する. このような座標系 (u, v) を**適合的 (adapted)** と呼ぶ. 適合的な座標系において, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

⁴ 第1種光的点はカस्प辺をモデルとしている. 例えば [26], [33, 14] を参照.

⁵ L_3 -点はツバメの尾をモデルとしている. 例えば [26], [14] を参照.

と表すとき,

$$\kappa_B(p) := \frac{-1}{2E^2(G_v)^{\frac{5}{3}}} \left(G_v (E (E_{vv} - 2F_{uv}) + E_u F_v) - \frac{1}{5} E_v (EG_{vv} - 2(F_v)^2) \right) \Big|_{(u,v)=(0,0)}$$

は適合的な座標系 (u, v) のとり方によらない. κ_B を**平衡曲率** (balancing curvature) と呼ぶ.

定理 7 ([19, Theorem B]). $f : \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面, $p \in LD$ を非退化な光的点とする. もし, ガウス曲率 K が p の近傍 U で有界ならば, p は第1種光的点である. さらに, $p \in LD$ を第1種光的点とすると, ガウス曲率 K が p の近傍 U で有界であるための必要十分条件は, U 内の特性曲線に沿って

$$\kappa_L = 0 \quad \text{かつ} \quad \kappa_N = \kappa_B$$

が成り立つことである.

定理 7 の証明の概要を紹介する. まず, 次のような特別な座標系の存在を示す:

補題 8. $f : \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面, $p \in LD$ を第1種光的点とする. このとき, p の座標近傍 $(U; u, v)$ で, (u, v) は適合的であり, $E(u, 0) = 1$, $\lambda_v(u, 0) = 1$ を満たすものが存在する. ここで, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ であり, $\lambda = EG - F^2$ とする.

補題 8 のような座標近傍 $(U; u, v)$ において

$$\hat{K} := \lambda^2 K$$

は U 上に滑らかなに延長される. さらに, ある滑らかな関数 $\Phi(u)$, $C_2(u, v)$ が存在して

$$\hat{K}(u, v) = -\frac{1}{2}\kappa_L(u) + \frac{1}{2}\{\kappa_N(u) - \kappa_B(u) + \kappa_L(u)\Phi(u)\}v + \frac{1}{2!}C_2(u, v)v^2 \quad (3.1)$$

と表されることがわかる. 一方, $\lambda(u, v) = v \hat{\lambda}(u, v)$ ($\hat{\lambda} \neq 0$) と表されことから, 定理 7 の後半が従う. このことに定理 6 を組み合わせると, 定理 7 の前半も従う.

また, 式 (3.1) から, もし $\kappa_L(p) > 0$ ならば $\hat{K}(0, 0) < 0$ であることがわかる. ここで, $\hat{K} = \lambda^2 K$ なので, ガウス曲率 K の符号と \hat{K} の符号は一致する. さらに, M^3 が 3 次元ミンコフスキー空間 $M^3 = \mathbf{R}_1^3$ の場合, $\text{sgn}(K) = -\text{sgn}(K_{\text{Euc}})$ が成り立つ. ここで, K_{Euc} は曲面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ をユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の曲面とみなした際のガウス曲率としている. つまり, $\kappa_L(p)$ の正負と $K_{\text{Euc}}(0, 0)$ の正負は一致する.

系 9 ([19, Corollary 5.7]). 埋め込まれた混合型曲面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対し, $p \in LD$ を第1種光的点とする. もし $\kappa_L(p)$ が正ならば, f の像は $f(p)$ の近くでお碗型である. 一方, $\kappa_L(p)$ が負ならば, f の像は $f(p)$ の近くで鞍状である.

第2種光的点に第1種光的点が集積している場合, 定理 6 より κ_L の符号は負である. したがって第2種光的点の近傍では曲面は鞍状であることがわかる.

また, Pelletier [36], Steller [42] により, ‘generic’ な計量で特異曲線が‘測地線’からなる場合には Gauss-Bonnet 型の定理が成り立つことが知られている. (詳細は [19] を参照.) 定理 7 から, ガウス曲率が有界ならばその仮定を満たすことがわかり, 以下を得る.

系 10 ([19, Corollary D]). Σ を連結で向きづけられた 2次元閉多様体, $f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面とする. もし, f の全ての光的点が非退化であり, f が有界なガウス曲率を持つならば,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K dA = \chi(\Sigma)$$

が成り立つ. ここで, $\chi(\Sigma)$ は Σ のオイラー数を表す.

4. 不変量の内在性・外在性

本節では, 光的特異曲率と光的法曲率の内在性・外在性を議論する. 光的特異曲率は内的不変量である一方で, 光的法曲率は内的不変量である場合やそうでない場合がある. ここでは, 光的法曲率は

- 光的特異曲率が恒等的に消えるとき内的不変量であること (系 11),
- 光的特異曲率が消えずに実解析的である場合には外的不変量であること (系 12)

を紹介する.

4.1. 光的特異曲率の内在性

$f: \Sigma \rightarrow M^3$ を混合型曲面とする. 関数 $I: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$, もしくは $I: LD \rightarrow \mathbf{R}$ を **不変量** という. つまり, I は Σ や LD の座標の取り方によらないものを指す. 不変量 $I: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$, もしくは $I: LD \rightarrow \mathbf{R}$ が **内的** であるとは, I は E, F, G とその微分による関数で与えられるときをいう. ここで, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ とし, (u, v) は ds^2 のみを用いて定まる座標系とする. 不変量 $I: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$, もしくは $I: LD \rightarrow \mathbf{R}$ が **外的** であるとは, 別の混合型曲面 \tilde{f} が存在して, f と \tilde{f} は等長的 (つまり, $ds_f^2 = ds_{\tilde{f}}^2$) だが, $I(f) \neq I(\tilde{f})$ となるときをいう. 例えば, ガウス曲率 K は内的不変量であり, 平均曲率 H は外的不変量であることが知られている.

与えられた不変量が内的か外的かどうかを決定することは基本的な問題である. まず, 光的特異曲率 κ_L は内的である. 実際,

$$\kappa_L(u) = -\frac{E_v(u, 0)}{2E(u, 0)\sqrt[3]{G_v(u, 0)}} \quad (4.1)$$

と表される. ただし, (u, v) は適合的, つまり $\gamma(u) = (u, 0)$, $\eta = \partial_v$ を満たす座標系としている.

4.2. 光的法曲率の内在性・外在性

一方, 光的法曲率 κ_N は光的特異曲率の (4.1) のような表示を持たず, 内的か外的かどうかを同様に判定することはできない. しかし, ガウス曲率 K の漸近展開 (3.1) より, LD 上で $\kappa_L = 0$ ならば

$$\kappa_N(u) = \kappa_B(u) + 2\hat{K}_v(u, 0)$$

と表され, 補題 8 のような特殊な適合的座標 (u, v) は第一基本形式 ds^2 のみによって定まるものなので, 以下のことがわかる.

系 11 ([19, Corollary C]). 混合型曲面 $f: \Sigma \rightarrow M^3$ に対して, 光的点集合 LD は第 1 種光的点からなるとする. もし, LD 上で

$$\kappa_L = 0$$

が成り立つならば、光的法曲率 κ_N は内的不変量である。

系 11 の仮定を満たさない場合、つまり光的特異曲率 κ_L が消えない場合には、光的法曲率 κ_N は外的不変量であることがわかる。

系 12 ([18]). 実解析的な混合型曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対して、 $p \in \Sigma$ を第 1 種光的点で

$$\kappa_L(p) \neq 0$$

を満たすとする。このとき、ある p の近傍 U と実解析的な混合型曲面 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ で、 f と \tilde{f} は同じ第一基本形式を持つが、 $\kappa_N(p) \neq \tilde{\kappa}_N(p)$ であるものが存在する。ただし、 $\tilde{\kappa}_N$ は \tilde{f} の光的法曲率を表す。とくに、光的法曲率 κ_N は外的不変量である。

以下、この証明の概要を紹介する。

補題 13 ([18]). 混合型曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対して、 $p \in \Sigma$ を第 1 種光的点とする。このとき、以下の条件を満たす p の座標近傍 $(U; u, v)$ が存在する：

- (u, v) は適合的、つまり p の近傍で u -軸は光的点集合 LD と一致し、 $\eta = \partial_v$ は退化ベクトル場を与える、
- (u, v) は直交座標系、つまり $(F =) \langle f_u, f_v \rangle = 0$ が成り立つ、かつ
- 光的点集合の像からなる \mathbf{R}_1^3 の空間的な正則曲線 $\hat{\gamma}(u) := f(u, 0)$ は弧長パラメータ表示である、つまり $\langle \hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}'(u) \rangle = E(u, 0) = 1$ である。

このとき、ある U 上の f に沿うベクトル場 ψ で

$$\langle \psi, f_u \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 0, \quad \langle \psi, f_v \rangle = 1$$

を満たすものが存在する。(ψ を **L-ガウス写像** と呼ぶ。)

このとき、 $\mathcal{F} := (f_u, f_v, \psi)$ は f に沿う \mathbf{R}_1^3 のフレームを与える。L-ガウス写像 ψ に対し、 $A := \langle f_{uu}, \psi \rangle$ 、 $B := \langle f_{uv}, \psi \rangle$ 、 $C := \langle f_{vv}, \psi \rangle$ とおくと、 \mathcal{F} は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}U, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}V, \quad (4.2)$$

ただし

$$U := \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{A}{E} \\ A & B & 0 \\ -\frac{E_v}{2} - AG & \frac{G_u}{2} - BG & -B \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} \frac{E_v}{2E} & -\frac{G_u}{2E} & -\frac{B}{E} \\ B & C & 0 \\ \frac{G_u}{2} - BG & \frac{G_v}{2} - CG & -C \end{pmatrix}$$

とする。式 (4.2) の可積分条件 $\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ は

$$A_v - B_u = \frac{1}{2E} (E_v A - E_u B) + B^2 - AC \quad (\text{Cod1})$$

$$B_v - C_u = -\frac{1}{2E} (G_u A + E_v B) \quad (\text{Cod2})$$

$$E_{vv} + G_{uu} - \frac{E_u G_u + E_v^2}{2E} = 2G(AC - B^2) - G_v A + 2G_u B + E_v C \quad (\text{Gauss})$$

と同値である. 逆にこの偏微分方程式系 (Cod1), (Cod2), (Gauss) を解くことができれば混合型曲面を構成することができるという, 混合型曲面に対する曲面論の基本定理を示すことができる [18].

適的な座標近傍 $(U; u, v)$ において, $p = (0, 0)$ で $\kappa_L(p) \neq 0$ が成り立つならば $E_v(0, 0) \neq 0$ であることがわかる. このとき, (Gauss) は

$$C = \frac{1}{2GA - E_v} \left(E_{vv} + G_{uu} - \frac{E_u G_u + E_v^2}{2E} - G_v A + 2G_u B + 2GB^2 \right)$$

と書き直されることから, (Cod1), (Cod2) は未知関数 A, B に対する正規形の偏微分方程式系に変形することができる. これに Cauchy-Kowalevski の定理を適用し, 空間的曲線に対する曲線論の基本定理 [17] を用いることで次を得る.

定理 14 ([18]). 実解析的な混合型曲面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対し, $p \in \Sigma$ を第1種光的点で $\kappa_L(p) \neq 0$ を満たすものとし, $\gamma(t)$ を $p (= \gamma(0))$ を通る特性曲線とする (ただし $|t|$ は十分小). さらに, I を $0 \in I$ を含む開区間, $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ を実解析的な空間的曲線で $\Gamma(0) = \mathbf{0}$, かつ曲率ベクトルが零でないもの⁶とし, その像を $C := \Gamma(I)$ とおく. このとき, $p \in \Sigma$ の近傍 U と実解析的な混合型曲面 $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ で, $\tilde{f}(p) = \mathbf{0}$ であり

- f と \tilde{f} は同じ第一基本形式を持ち,
- $\gamma(t)$ の \tilde{f} による像 $\text{Image}(\tilde{f} \circ \gamma)$ は Γ の像 C の部分集合である

ようなものが存在する. さらにそのような \tilde{f} は4つ存在する.

空間的曲線 $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ を適切に選ぶことによって, 混合型曲面の非自明な局所等長変形が得られ, 系 12 が導かれる.

参考文献

- [1] E. Aguirre, V. Fernandez and J. Lafuente, *On the conformal geometry of transverse Riemann-Lorentz manifolds*, J. Geometry and Physics **57** (2007), 1541–1547.
- [2] S. Akamine, *Causal characters of zero mean curvature surfaces of Riemann-type in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Kyushu J. Math. **71** (2017), 211–249.
- [3] B.L. Al'tshuler and A.O. Barvinski, *Quantum cosmology and physics of transitions with a change of spacetime signature*. Uspekhi Fiz. Nauk 166:5 (1996), 459.492; English transl. in Physics-Uspekhi 39, 429.
- [4] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in L^3 containing a light-like line*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 21-22, 975–978.
- [5] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 189–207.
- [6] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [7] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Osaka J. Math. **52** (2015), no. 1, 285–297.

⁶ 弧長パラメータ s に対する加速度ベクトル $d^2\Gamma/ds^2$ が零でないとき, Γ は曲率ベクトルが零でないという.

- [8] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Q. J. Math. **67** (2016), no. 4, 801–837.
- [9] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, Osaka J. Math. **54** (2017), no. 2, 249–272.
- [10] S. Fujimori, U. Hertrich-Jeromin, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Quadrics and Scherk towers*, Monatsh. Math. **186** (2018), no. 2, 249–279.
- [11] D. Genin, B. Khesin and S. Tabachnikov, *Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space*. Enseign. Math. **53** (2007), 307–331.
- [12] R. Ghezzi and A.O. Remizov, *On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics*, J. Dyn. Control Syst. **18** (2012), 135–158.
- [13] C.H. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta Math. Sinica (N.S.) **1** (1985), 173–180.
- [14] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.
- [15] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Preprint, 2019, arXiv:1710.02999.
- [16] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, Preprint, 2019, arXiv:1906.02556.
- [17] A. Honda, *Fundamental theorem of spacelike curves in Lorentz-Minkowski space*, Preprint, 2019, arXiv:1905.03367.
- [18] A. Honda, *Isometric deformations of mixed type surfaces in Lorentz-Minkowski space*, in preparation.
- [19] A. Honda, K. Saji and K. Teramoto, *Mixed type surfaces with bounded Gaussian curvature in three-dimensional Lorentzian manifolds*, Preprint, 2018, arXiv:1811.11392.
- [20] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times*, Differential Geometry and its Applications **52** (2017) 64–77.
- [21] S. Izumiya and F. Tari, *Self-adjoint operators on surfaces with a singular metric*, J. Dyn. Control Syst. **16** (2010), 329–353.
- [22] S. Izumiya and F. Tari, *Apparent contours in Minkowski 3-space and first order ordinary differential equations*, Nonlinearity **26** (2013), 911–932.
- [23] B. Khesin and S. Tabachnikov, *Pseudo-Riemannian geodesics and billiards*, Adv. Math. **221** (2009), 1364–1396
- [24] V.A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izv. Math. **67** (2003), 209–224.
- [25] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [26] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [27] M. Kossowski, *Pseudo-Riemannian metrics singularities and the extendability of parallel transport*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 147–154.
- [28] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–29.

- [29] M. Kossowski and M. Kriele, *Smooth and discontinuous signature type change in general relativity*, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993), 2363–2371.
- [30] M. Kossowski and M. Kriele, *Transverse, type changing, pseudo-Riemannian metrics and the extendability of geodesics*, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys.* 444:1921 (1994), 297–306.
- [31] M. Kossowski and M. Kriele, *The Einstein equation for signature type changing space-times*, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys.* 446:1926 (1994), 115–126.
- [32] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, *Canad. J. Math.* **68** (2016), no. 2, 445–462.
- [33] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, *Geometry and Topology of Manifold*, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.
- [34] T. Miernowski, *Formes normales d’une métrique mixte analytique réelle générique*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **16** (2007), 923–946.
- [35] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, *Tohoku Math. J. (2)* **68** (2016), 73–90.
- [36] F. Pelletier, *Pseudo métriques génériques et théorème de Gauss-Bonnet en dimension 2*, *Singularities and dynamical systems (Iraklion, 1983)*, 219–238, North-Holland Math. Stud., 103, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [37] A.O. Remizov, *Geodesics on 2-surfaces with pseudo-Riemannian metric: singularities of changes of signature*, *Mat. Sb.* 200:3 (2009), 75–94.
- [38] A.O. Remizov, *On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics*, *Differential Geom. Appl.* **39** (2015), 36–58.
- [39] A.O. Remizov and F. Tari, *Singularities of the geodesic flow on surfaces with pseudo-Riemannian metrics*, *Geom. Dedicata* **185** (2016), 131–153.
- [40] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, *Ann. of Math. (2)* **169** (2009), 491–529.
- [41] A.D. Sakharov, *Cosmological transitions with changes in the signature of the metric*, *Zh. Eksper. Teor. Fiz.* 87:2 (8) (1984), 375–383. English transl. in *Soviet Phys. JETP* **60** (1984), 214–218.
- [42] M. Steller, *A Gauss-Bonnet formula for metrics with varying signature*, *Z. Anal. Anwend.* **25** (2006), no. 2, 143–162.
- [43] F. Tari, *Caustics of surfaces in the Minkowski 3-space*, *Q. J. Math.* **63** (2012), 189–209.
- [44] F. Tari, *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*, *J. Math. Soc. Japan* **65** (2013), 723–731.
- [45] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications*, In: Cañadas-Pinedo M., Flores J., Palomo F. (eds) *Lorentzian Geometry and Related Topics. GELOMA 2016*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pp 253–273 (2017), vol 211. Springer, Cham.
- [46] M. Umehara and K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold*, to appear in the *Journal of Geometric Analysis*. <https://doi.org/10.1007/s12220-018-00118-7>

有限次元非正曲率距離空間への群作用の固定点性質

加藤本子 (愛媛大学)*

概要

群が位相次元有限の完備 CAT(0) 空間に等長かつ半単純に作用するとき、群のある元が常に固定点を持つための条件について述べる。またその条件を用いて、Richard Thompson の群 F の有限次元完備 CAT(0) 空間への等長かつ半単純な作用について、交換子部分群の任意の有限生成部分群が固定点を持つことを調べる。応用として、Kim, Koberda, Lodha によって考えられている単位区間 (もしくは単位円) の向きを保つ自己同相写像の成す有限生成群について、固定点性質を調べる。特に Thompson 群 T および Higman-Thompson の群 T_n については、有限次元完備 CAT(0) 空間への半単純な等長作用が大域的固定点を持つと言える (Farb の性質 FA_k)。

1. 導入

本稿では、有限生成群の「ある種の距離空間に等長に作用するとき常に大域的固定点を持つ」(すなわち、距離空間上の一点であって、群の任意の元によって固定されるものが存在する) という性質について述べる。このような性質を、群の固定点性質と呼ぶことにする。

群が固定点性質を持つということは、定義より、考えている距離空間にその群が“良い作用”(例えば自由な作用や固有な作用)を持たないということを意味している。また、特別な距離空間の族について固定点性質を考えることで、その群についてのさらに深い情報が得られることがある。このような現象の代表的な例は、群の単体的木への作用を考えることによって得られる。ある群の、単体的木への等長かつ単体的な作用が常に大域的固定点を持つとき、その群は Serre の性質 FA を持つという。Serre の性質 FA は、群の組み合わせ的な構造を記述していることが知られている。実際、ある群が Serre の性質 FA を持つことは、その群が非自明な融合積の構造を持たず、 \mathbb{Z} への全射を持たず、有限生成であることと同値である ([13])。

以下で扱う固定点性質は、Serre の性質 FA の“高次元化”に当たる一般化である。具体的には、次のようなものを考える: ある群の、 k 次元完備 CAT(0) 空間への等長な半単純作用が常に大域的固定点を持つとき、その群は性質 FA_k を持つという ([5])。ただし次元は位相次元を意味する (以下同じ)。作用が半単純であることの定義は2章で後述する。以下、CAT(0) 空間について定義を述べる。

CAT(0) 空間とは、測地的距離空間であって、任意の測地三角形がユークリッド空間内での比較三角形と比べて“太っていない”ものである。すなわち、測地的距離空間 (X, d) 内の任意の測地三角形 $\Delta(x, y, z)$ に対して、 \mathbb{R}^2 内に各頂点間の距離が等しい三角形 $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ が合同を除いて一意的に存在するが、 $\Delta(x, y, z)$ 上の任意の二点 a, b と、

本稿の内容は科研費 (課題番号:17J07711) の助成を受けた研究に基づいている。

2010 Mathematics Subject Classification: 20F65, 20F67

キーワード: 群作用の固定点性質, CAT(0) 空間, リチャード・トンプソンの群

* 〒790-8577 松山市文京町2番5号

e-mail: kato.motoko.yy@ehime-u.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/katomotoko>

$\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 上の対応する二点 \bar{a} , \bar{b} の間に

$$d(a, b) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{a}, \bar{b}) \quad (1.1)$$

の関係が成り立つ (図 1). 多くの重要な距離空間が CAT(0) 空間の性質を持つ. 例えば, 単体的木は 1 次元の CAT(0) 空間である. ここで単体的木への等長作用は常に半単純なので, 性質 FA_1 は Serre の性質 FA より強い. Hilbert 空間も完備 CAT(0) 空間の例である. また, 単連結で完備な Riemann 多様体の場合には, CAT(0) 空間であることは, 断面曲率が正でないという条件と一致する ([2] 参照). この意味で CAT(0) 性は, 距離空間に対して非正曲率性を記述する性質となっている.

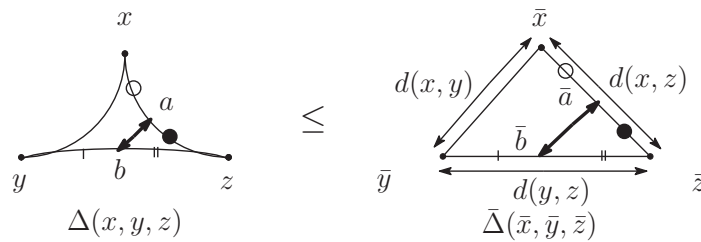


図 1: CAT(0) 空間の測地三角形と \mathbb{R}^2 の比較三角形.

CAT(0) 空間の様々な性質は, より一般的な **Busemann 非正曲率距離空間** (以下 **Busemann 空間**) についても成り立つ. Busemann 空間とは, 距離関数が凸であるような測地的距離空間を言う. すなわち, 測地的距離空間 (X, d) が Busemann 空間であるとは, X の任意の測地線分の組 $c_1 : [0, a_1] \rightarrow X$, $c_2 : [0, a_2] \rightarrow X$ に対して,

$$d(c_1(a_1 t), c_2(a_2 t)) \leq t d(c_1(a_1), c_2(a_2)) + (1 - t) d(c_1(0), c_2(0)) \quad (1.2)$$

が満たされるときを言う. CAT(0) 空間は Busemann 空間であり, 単連結完備 Riemann 多様体の場合には, これらの概念は共に断面曲率が正でないことを表す. しかし一般には, Busemann 空間であって CAT(0) 空間でない場合がある. 例えば p ノルムを入れた Banach 空間 l^p を考えると, これらは $1 < p < \infty$ のとき Busemann 空間であるが, $p \neq 2$ のときは CAT(0) 空間でない. 本稿では Busemann 空間への群作用の固定点性質については述べないが, Busemann 空間の場合にも空間の固有性などを仮定することで, 完備 CAT(0) 空間の場合と同様に議論することができる ([11]).

いくつかの重要な群については, 性質 FA_k が調べられている. 例えば, 任意の自然数 k と任意の 3 以上の自然数 n について, $SL_n(\mathbb{Z})$ は性質 FA_k を持つ ([5] 参照). Farb [5] は任意の 3 以上の自然数 n について, $SL_n(\mathbb{Z}[1/p])$ が性質 FA_{n-2} を持つことを示した. Bridson [1] は向き付け可能種数 g 閉曲面の写像類群が性質 FA_{g-1} を持つことを示した ($g \geq 1$ は自然数). Varghese [15] は自由群の自己同型群 $Aut(F_n)$ について, これらが性質 FA_k を持つことを, $n \geq 4$ かつ $k < \min\{i \lfloor n/(i+2) \rfloor \mid 2 \leq i \leq k+1\}$ のときに示した.

本稿では [10] に基づいて, 群に内在する条件のみを用いて性質 FA_k を保証する方法について述べる (定理 2.3). 次にその方法を応用し, **Richard Thompson の群** と呼ばれる群とその一般化について固定点性質を議論する (定理 3.1, 定理 3.3).

2. 有限次元 CAT(0) 空間への群作用の固定点

(X, d) を距離空間, γ を X の等長変換とする. X の部分集合 $\text{Min}(\gamma)$ を次式で定める:

$$\text{Min}(\gamma) = \{x \in X \mid d(x, \gamma(x)) = \inf_{x \in X} \{d(x, \gamma(x)) \mid x \in X\}\}. \quad (2.1)$$

$\text{Min}(\gamma)$ が空でないとき, γ は半単純と言う. 群の等長作用の半単純性は, 「群の任意の元が半単純な等長変換として作用していること」と定義する. 半単純な γ について, γ が X 内に固定点を持たないとき, 双曲的と言う. 完備 CAT(0) 空間の双曲的な等長変換 γ については, 以下の補題のように, $\text{Min}(\gamma)$ が「 γ が平行移動で作用する軸が平行に並んだ」構造を持つことが知られている.

補題 2.1 ([2] 参照). X を完備 CAT(0) 空間とし, γ を X の双曲的な等長変換とする. このとき $\text{Min}(\gamma)$ は直積距離空間 $\mathbb{R} \times Y$ (Y はある CAT(0) 空間) に等長同型.

さらに γ' が γ と可換な等長変換とすると, γ' は $\text{Min}(\gamma) = \mathbb{R} \times Y$ を直積の構造を込めて保つ. 制限 $\gamma'|_{\text{Min}(\gamma)}$ を $\text{Min}(\gamma)$ の等長変換とみなすと, 第一成分 \mathbb{R} の平行移動と第二成分 Y の等長変換に分解する.

半単純な等長作用を考える際は次が成り立つ.

補題 2.2 ([2] 参照). 補題 2.1 で γ' が X の半単純な等長変換だったとする. このとき $\gamma'|_{\text{Min}(\gamma)}$ は $\text{Min}(\gamma)$ の等長変換としても半単純. さらに, $\gamma'|_{\text{Min}(\gamma)}$ の定める Y の等長変換も半単純.

この章の主結果である定理 2.3 を述べるため, 群とその部分群の組についても固定点性質を定義しておく: 群と部分群の組 (G, H) が性質 FA_k を満たすとは, G が k 次元 CAT(0) 空間 X に等長かつ半単純に作用するならば, H が常に固定点を持つときを言う.

定理 2.3 ([10]). k を任意の自然数とする. G は群であって $g_0 \in G$ とする. G の元の列 $\{g_i\}_{1 \leq i \leq k}$ があって次を満たすとする:

- g_i は $\bigcap_{j=0}^{i-1} Z_G(g_j)$ に含まれる ($1 \leq i \leq k$). ただし $Z_G(h)$ は h の G での中心化群を表す.
- g_1 は g_0 と G 内で共役であり, g_{i+1} は g_i と $\bigcap_{j=0}^{i-1} Z_G(g_j)$ 内で共役 ($1 \leq i \leq k$).
- g_i は $\bigcap_{j=0}^{i-1} Z_G(g_j)$ のアーベル化の元として位数有限.

このとき組 $(G, \langle g_0 \rangle)$ は性質 FA_k を持つ.

証明. 背理法によって示す. そのため, G が k 次元完備 CAT(0) 空間 X に等長かつ半単純に作用しており, g_0 が固定点を持たないとする. 作用の半単純性の仮定より, g_0 は双曲的. 補題 2.2 より, $Z_G(g_0)$ は $\text{Min}(g_0)$ に半単純に作用する. 元 g_1 は g_0 の共役なので, 仮定より固定点を持たず, $g_1|_{\text{Min}(g_0)}$ は $\text{Min}(g_0)$ の双曲的な等長変換.

補題 2.1 より, $\text{Min}(g_0)$ は直積 $\mathbb{R} \times Y_1$ の構造を持ち, $Z_G(g_0)$ の $\text{Min}(g_0)$ への作用は \mathbb{R} の平行移動と Y_1 への等長作用に分解する. まず \mathbb{R} の平行移動について見てみると, g_1 は $Z_G(g_0)^{\text{ab}}$ 内で有限位数なので, g_1 の定める平行移動は長さ 0. 次に Y_1 への等長作用について見てみると, 補題 2.2 よりこの作用は半単純なので, g_1 は Y_1 の双曲的な等長変換を定める. Y_1 の位相次元は $k - \dim(\mathbb{R}) = k - 1$ 以下なので, X を Y_1 と置き換え, G を $Z_G(g_0)$ と置き換え, g_0 を g_1 と置き換えた上で同じ議論が可能になる. すると

$Y_1 \supset \text{Min}(g_1) = \mathbb{R} \times Y_2$ に対し, g_2 が Y_2 (次元 $k-2$ 以下) の双曲的な等長変換であることがわかる. 同様のプロセスを最大 $k+1$ 回繰り返すと, $g_{\leq k}$ が次元 0 の $Y_{\leq k}$ の双曲的な等長変換となる. $Y_{\leq k}$ は 1 点になるため, 矛盾する. \square

定理 2.3 は, 群のある元が固定点を持つことを保証している. 大域的な固定点の存在を示すには, 定理 2.3 に加えて次の補題を用いる. この補題は, 有限次元ユークリッド空間の凸集合族に関する「Helly の定理」の一般化として得られる.

補題 2.4 ([1], [15] 参照). k を自然数, X を位相次元 k の完備 CAT(0) 空間とする. $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ が $0 < k < \sum_{i=1}^n k_i$ を満たすとする. $\{S_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を, $\text{Isom}(X)$ の互いに可換かつ互いに共役な部分集合とする. 各 S_i の, 任意の k_i -元部分群が X に固定点を持つならば, 任意の S_i の任意の有限部分集合は共通の固定点を持つ.

3. Richard Thompson の群への応用

定理 2.3 で述べた性質 FA_k の判定条件は, **Richard Thompson の群** (以下 **Thompson 群**) への応用を念頭に置いている. Thompson 群には F, T, V の 3 種類があり, それぞれ単位区間, 単位円, カントール集合の同相写像の成す群として記述される. これらの群はいずれも有限表示群 (特に有限生成群) である. T と V は単純群であり, 有限表示単純群の歴史上初めての例として有名である. F は単純群ではないが, F の交換子部分群は単純群になっている. これらの群は様々な非自明な性質を持つことが知られており, 特に F が従順群であるかどうかは有名な未解決問題である. 以下では F, T とその一般化についてのみ, 定義と固定点性質を示すための議論を述べるが, V やその一般化の場合にも同様に議論できる ([10]).

Thompson 群 F は, 単位区間の向きを保つ自己同相写像全体の中で, 図 2 の元 x_0, x_1 から生成される ([4] 参照). これらの元は, 定義域と値域が同じ個数 (有限個) の区間にそれぞれ分割され, 各区間上アファインであるような写像になっている. 例えば図 2 の f_1 に関しては $[0, 1] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ (定義域) および $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ (値域) のように分割されている. これらの分割は全て, 単位区間から区間の二等分によって得られる分割である (以下二項分割と呼ぶ). 群 F には, このようにして得られる (すなわち定義域と値域の分割が有限の二項分割によって得られ, 写像が区分的にアファインであるような) $[0, 1]$ の向きを保つ自己同相写像が全て含まれる ([4] 参照). 同様に, Thompson 群 T は単位円の向きを保つ自己同相写像全体の中で, 図 2 の元 x_0, x_1, π から生成される. また, 定義域と値域の分割が有限の二項分割によって得られ, 写像が区分的にアファインであるような単位円の向きを保つ自己同相写像を全て含む.

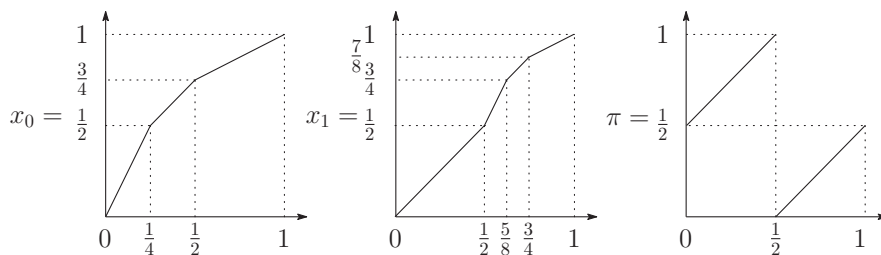


図 2: F, T の生成系. F は x_0 と x_1 から, T は x_0, x_1, π (単位区間の両端を同一視し, S^1 間の写像とみなす) から生成される.

以下、 F や T の複雑な元を表示するため、根付き二分岐木の組による表示を用いる。根付き無限二分岐木とは図3に示すグラフであり、その頂点は一つを除いて3価である。一つだけある2価の頂点を根と呼ぶ。根付き無限二分岐木の各頂点は、図3のように、単位区間の二項分割によって得られる区間と対応づけられているとする。この対応を介して、根付き有限二分岐木の1価の頂点たちは、単位区間 $[0, 1]$ の分割に対応している。したがって F, T の各元を根付き有限二分岐木の組を用いて表すことができる（例えば図4）。ただし T の元を表す際は、0を含む区間の写り先にラベル0を付して表すことにする。

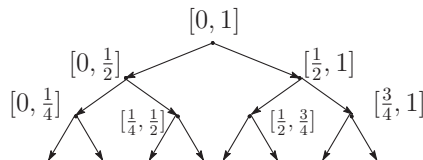


図 3: 根付き無限二分岐木の各頂点と区間の対応（見やすさのため、各辺に根から遠ざかる向きを入れて描いている）。

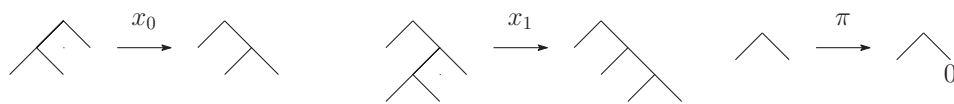


図 4: 図2の x_0, x_1, t と対応する根付き有限二分岐木の組。

Thompson 群の群作用の固定点性質についてはいくつかの先行研究がある。例えば Farley [7] は、 T と V が Serre の性質 FA を持つことを示した。ここで、 F は HNN 拡大の構造を持つため、Serre の性質 FA を持たない。また F, T, V は無限次元の CAT(0) 複体に等長かつ固有に（したがって大域的固定点を持たずに）作用することも、Farley [6] によって知られている。Genevois [8] は V の有限次元の CAT(0) 方体複体 (cubical complex) への作用が常に大域的固定点を持つことを示した。有限次元の CAT(0) 方体複体への等長な群作用は半単純作用なので、この結果は性質 FA_k (k は任意の自然数) よりも弱い結果である。これらの結果を踏まえると、 T や V の性質 FA_k を調べることは自然である。

定理 3.1 ([10]). k を任意の自然数とする。Thompson 群 F の交換子部分群 $[F, F]$ の任意の元 f に対して、組 $(F, \langle f \rangle)$ は性質 FA_k を持つ。

証明. 定理 2.3 と補題 2.4 を用いて議論する。交換子部分群 $[F, F]$ が F の部分集合として「 $0, 1$ の各近傍で傾き 1 となる写像の成す F の部分集合」と一致すること ([4] 参照) を用いると、任意の $f \in [F, F]$ に対して、 $(0, 1)$ 内の閉区間 J_1 が存在して $\text{supp}(f) \subset J_1$ を満たす。また、単位区間の二項分割によって得られる区間 J_2 であって $\text{supp}(f)$ と交わらないものが取れる。 F は単位区間の自己同相写像の成す群なので、開区間 $(0, 1)$ に自然な作用を持つ。この作用は、任意のコンパクト集合を任意の開集合内に写す作用である ([4] 参照)。したがって、 J_1 を J_2 の内部に写す元 $h_1 \in F$ が存在する。このとき $\text{supp}(f^{h_1}) = h_1(\text{supp}(f))$ は $\text{Int}(J_2)$ 内の閉区間 $h_1(J_1)$ に含まれる。台が J_2 に含まれる F の元全体は、 F の部分群を成す。この部分群を $F(J_2)$ とおく。 J_2 と $[0, 1]$ の同一視に

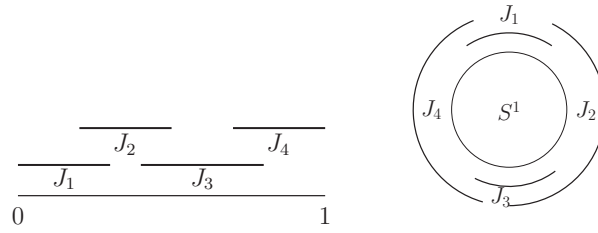


図 5: 区間の4-チェーンと4-リング. $J_i - J_{i+1}$ と $J_{i+1} - J_i$ (リングの場合, 添字は mod n) は空でなく, $J_i \cup J_k$ ($|i - k| \geq 2$) は空.

より, $F(J_2)$ と F の間の同型が得られる. この同型を介することで, f^{h_1} が $F(J_2)$ の交換子部分群に含まれていることがわかる. f と $F(J_2)$ は可換なので, $F(J_2)$ は $Z_F(f)$ に含まれる. したがって f^{h_1} は $[Z_F(f), Z_F(f)]$ に含まれる. 同じ議論を組 (G, f) の代わりに $(F(J_2), f^{h_1})$ について繰り返し, F の元 $\{h_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$ を得る. F の元の列 $\{g_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$ を $g_i = f^{h_1 \cdots h_i}$ で定めると, これらは定理 2.3 の仮定を満たす. \square

F の一般化や T の場合に性質 FA_k を議論するため, Kim, Koberda と Lodha [12] の導入した F, T の一般化の言葉を用いる. これらの一般化は $\text{Homeo}_+([0, 1])$ もしくは $\text{Homeo}_+(S^1)$ の有限生成部分群として定義される. $n \geq 2$ を自然数とする. 順序づけられた n 個の開区間の列 (J_1, \dots, J_n) が, 「添字が隣り合うときのみ共通部分が空でない」という条件を満たすとき, これらを n -チェーンと呼ぶ (図 5). $\mathcal{F} = \{f_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ を, 列 $(\text{supp}(f_1), \dots, \text{supp}(f_n))$ が n -チェーンを成すような元とする. 任意の n について $\langle f_i, f_{i+1} \rangle$ が Thompson 群 F と同型になるとき, \mathcal{F} で生成される $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ の部分群を n -チェーン群と呼ぶ. 开区間の添字を mod n で考えることで, 上と同様に n -リングおよび n -リング群を定義する (図 5). この定義の中で, 「隣り合う生成元が F を生成する」という仮定は, 次のような結果に基づいている.

補題 3.2 ([12]). $G_{\mathcal{F}}$ を, $\{f_1, f_2\} \subset \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ で生成される群とする. 生成元の台の組 $(\text{supp}(f_1), \text{supp}(f_2))$ が 2-チェーンを成すとする. このとき $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば, $\langle f_1^N, f_2^N \rangle$ は F と同型となる.

定理 3.3 ([11]). n を 2 以上の自然数とする. $\mathcal{F} = \{f_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ について, 开区間の列 $(\text{supp}(f_i))_{1 \leq i \leq n}$ が n -チェーンまたは n -リングを成すとする. $G_{\mathcal{F}}$ を, \mathcal{F} で生成される n -チェーン群または n -リング群とする. H を交換子部分群 $[G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}]$ の有限生成部分群とする. 組 $(G_{\mathcal{F}}, H)$ は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して FA_k を持つ.

証明. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $H_i = \langle f_i, f_{i+1} \rangle$ とおく. S を H の生成系とする. $[G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}]$ は $\{[f_i, f_{i+1}]\}_{1 \leq i \leq n}$ によって正規生成されるので, $S = \{s_{i'}\}_{1 \leq i' \leq n'}$ は $[f_i, f_{i+1}]$ の共役たちから成るとして良い. すると各 $1 \leq i' \leq n'$ に対して, $\text{supp}(s_{i'})$ は $(0, 1)$ 内の閉区間 $J_{i'}$ に含まれている. 2-チェーン群 $\langle k_1, k_2 \rangle$ は $\text{supp}(k_1) \cup \text{supp}(k_2)$ の任意の閉区間を任意の開集合内に写す ([12]) ので, 各 $1 \leq i' \leq n'$ に対して, $J_{i'}$ を $\text{supp}(H_n)$ 内に写す元 $g_{i'}$ が $g_{i'} = h_1^{i'} \cdots h_i^{i'} \cdots h_n^{i'}$ ($h_i^{i'} \in [H_i, H_i]$) のようにして取れる. ここで S を $S' = \{s_{i'}^{g_{i'}}\}_{1 \leq i' \leq n'} \cup \{h_i^{i'}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq i' \leq n'}$ と取り替える. S' は H の有限生成系のみである. S' の各元は $[H_i, H_i]$ の共役に含まれる.

$G_{\mathcal{F}}$ が k 次元完備 CAT(0) 空間 X に等長かつ半単純に作用しているとする. H_i は F と同型であるから, 誘導される H_i の作用に対して定理 3.1 を適用できて, S' の各元はそれ

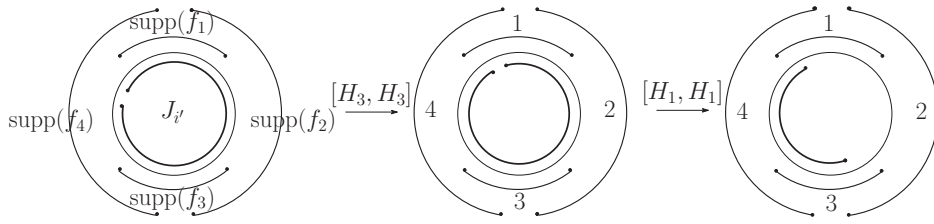


図 6: g_j の構成 (リング群の場合).

ぞれ固定点を持つとわかる. 任意の $m > n$, 任意の n -チェイン群 G に対して G と同型な m -チェイン群が存在する ([12]) ので, n が k に比べて十分大きいと仮定して良い. すると S' の任意の $(k+1)$ 元部分集合 S'_{k+1} に対して, S'_{k+1} に含まれる元の台の和は, $(0, 1)$ のある閉区間に含まれる. この閉区間を互いに交わらない開集合内に写すような $G_{\mathcal{F}}$ の元が $(k+1)$ 個取れる. 補題 2.4 を S' に適用して, S' の元たちが共通の固定点を持つことが従う. \square

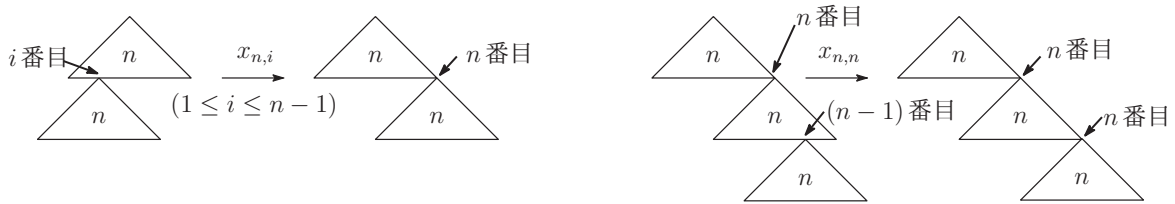


図 7: Higman-Thompson の群 F_n の生成系.

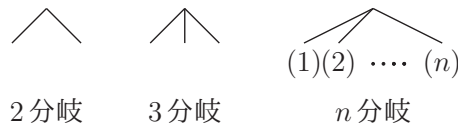


図 8: n 分岐のグラフ.

チェイン群とリング群は, F, T およびそれらの一般化であって *Higman-Thompson* の群 F_n と T_n と呼ばれるもの ([3], [9] 参照) を含んでいる. 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して, $[0, 1]$ および S^1 の n 項分割を考えると, F および T と同様の構成で $\text{Homeo}_+([0, 1])$, $\text{Homeo}_+(S^1)$ の部分群が得られる. これらを *Higman-Thompson* の群と呼び, F_n, T_n と表す. F_2, T_2 はそれぞれ F, T と一致する. F, T の場合と同様に, n 項分割を根付きの有限 n 分岐木と対応させることで, F_n, T_n の元を根付き有限 n 分岐木の組で表示できる. F_n は図 7 に示された n 個の写像 x_i ($1 \leq i \leq n$) で生成されている ([3], [4]). ただし, n でラベルづけられた三角形は n 分岐を表す (図 8). T_n は F_n および, S^1 の向きを保つ $2\pi/n$ 回転で生成されている.

補題 3.2 には次のような一般化がある.

補題 3.4 ([12]). n を 2 以上の自然数とする. $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ を, 开区間の列 $(\text{supp}(f_i))_{1 \leq i \leq n}$ が n -チェインであるような写像とする. $G_{\mathcal{F}}$ を $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ で生成される $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ の部分群とする. $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると, $G_{\mathcal{F}}$ の部分群 $\langle \{f_i^N\}_{1 \leq i \leq n} \rangle$ は n -チェイン群となり, さらに F_n に同型となる.

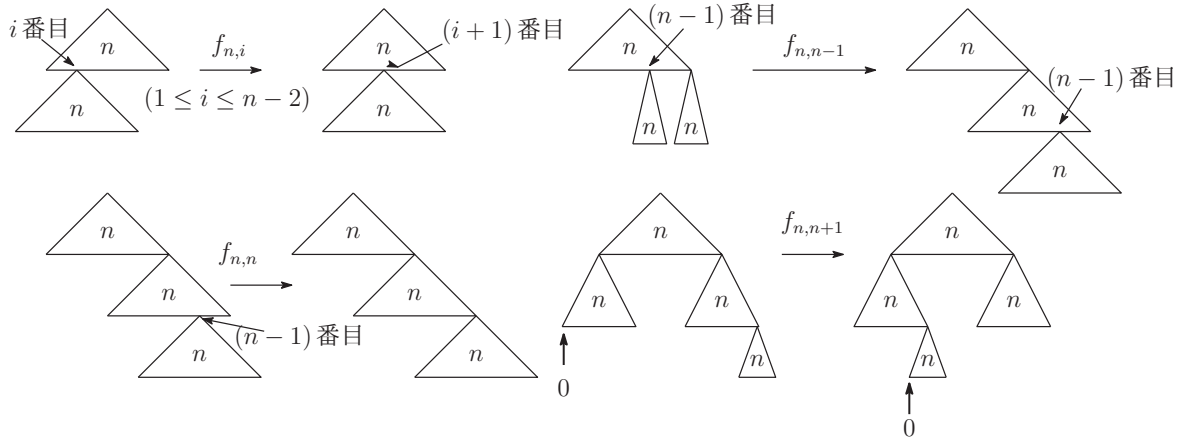


図 9: Higman-Thompson の群 T_n の新しい生成系.

補題 3.4 より, F_n と同型な n -チェーン群が存在するので, F_n について定理 3.3 が適用できる.

系 3.5. $n \geq 3$ とする. H を F_n の交換子部分群の有限生成部分群とする. 組 (F_n, H) は任意の $k \in \mathbb{N}$ について性質 FA_k を持つ.

T_n についても, リング群の構造を持つことが示せる.

補題 3.6 ([12]). $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ が $-\infty \leq x < y < z < w \leq \infty$ を満たすとする. $f, g \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ を, 台が開区間 $(x, z), (y, w)$ であるような元とする. $gf(y) \geq z$ ならば, $\langle f, g \rangle$ は F と同型.

補題 3.7 ([11]). 任意の $n \geq 2$ について, T_n は $(n+1)$ -リング群.

証明. y_n を $2\pi/n$ 回転であって, 0 を $1 - 1/n$ に写すものとする. T_n は図 7 の $\{x_{n,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ と $\{y_n\}$ で生成される. $f_{n,i} = x_{i+1}^{-1}x_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) とおき, $f_{n,n} = x_n$ とおくと, $\{f_{n,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ は F_n を生成する. また, y_n と F_n の元の積で表せる $f_{n,n+1}$ (図 9) を付け足すと, $\{\text{supp}(f_{n,i})\}_{1 \leq i \leq n+1}$ はリングを成し, T_n を生成する. また, 補題 3.6 により, $\langle f_{i,n}, f_{i+1,n} \rangle$ ($1 \leq i \leq n$) と $\langle f_{n,n+1}, f_{n,1} \rangle$ は F と同型. よって T_n は $(n+1)$ -リング群の構造を持つ. \square

補題 3.7 および T_n が有限生成実質的単純群であること ([3]) を用いると, 定理 3.3 より次がしたがう.

系 3.8. $n \geq 2$ とする. T_n は任意の $k \in \mathbb{N}$ について性質 FA_k を持つ.

参考文献

- [1] M. R. Bridson, *On the dimension of $CAT(0)$ spaces where mapping class groups act*, J. Reine Angew. Math. **673**, 55–68, 2012.
- [2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature*, Grundlehren der Math. Wiss. **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] K. S. Brown, *Finiteness properties of groups*, J. Pure Appl. Algebra, **44** (1-3), 45–75, 1987.
- [4] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42**, 215–256, 1996.

- [5] B. Farb, *Group actions and Helly's theorem*, Advances in Mathematics **222** 1574–1588, 2009.
- [6] D. S. Farley, *Actions of picture groups on $CAT(0)$ cubical complexes*, Geom. Dedicata **110**, 221–242, 2005.
- [7] D. S. Farley, *A proof that Thompson's groups have infinitely many relative ends*, J. Group Theory **14**, 649–656, 2011.
- [8] A. Genevois, *Hyperbolic and cubical rigidities of Thompson's group V* , J. Group Theory, published online, DOI: 10.1515/jgth-2018-0103.
- [9] G. Higman, *Finitely presented infinite simple groups*, Notes Pure Math. **8**, Australian National University, Canberra, vii+82, 1974.
- [10] M. Kato, *On groups whose actions on finite-dimensional $CAT(0)$ spaces have global fixed points*, Published Online, DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2018-0116>.
- [11] M. Kato, *Richard Thompson's groups from the viewpoint of geometric group theory*, Ph. D. Thesis, The University of Tokyo, 2019.
- [12] S. Kim, T. Koberda and Y. Lodha, *Chain groups of homeomorphisms of the interval and the circle*, Ann. Sci. de l'ENS, to appear.
- [13] J. P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Soc. Mat. France, Astérisque **46**, 1977.
- [14] C. Soulé, *Chevalley groups over polynomial rings*, Homological Group Theory, Proc. Sympos., Durham, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **36**, 359–367, 1977.
- [15] O. Varghese, *Fixed points for actions of $Aut(F_n)$ on $CAT(0)$ spaces*, Münster J. of Math. **7**, 439–462, 2014.

Brane coproducts and their applications

若月 駿 (東京大学 数理科学研究科)

概 要

本稿では、ストリング作用素、特にループ余積のプレートポロジへの一般化について解説する。一般化の鍵は、ある意味での写像空間の「有限次元性」であり、異なる観点に着目することで二種類の「ブレン余積」を構成する。また、それらを写像空間のコホモロジーにおけるカップ積のある種の消滅に応用する。

1. 研究の背景

Chas-Sullivan[CS99] は、 M が m 次元有向連結閉多様体の場合にその自由ループ空間 $LM = \text{Map}(S^1, M)$ のホモロジー群上にループ積 $H_*(LM \times LM) \rightarrow H_{*-m}(LM)$ を定義した。ループ積は、「基点付きループ空間の積構造から定義される Pontrjagin 積」と「多様体のホモロジー群における交叉積」を組み合わせたものである。Pontrjagin 積は M がどのような位相空間であっても存在するが、交叉積は M が多様体であること、特に有限次元性を使って定義されるものである。さらに Cohen-Godin[CG04] はループ積を一般化して、ループ余積 $H_*(LM) \rightarrow H_{*-m}(LM \times LM)$ などのストリング作用素を構成し、これらが $(1+1)$ 次元の位相的量子場の理論 (TQFT) をなすことを証明した。これらの作用素が自由ループ空間のホモロジーに豊富な代数的構造を与えることが期待されていた。ところが玉乃井 [Tam10] により、ループ余積がほとんど自明であることや、ループ余積とループ積の合成が常に自明であることが証明された。つまり、ストリング作用素は豊富な代数的構造ではないことが分かったのである。

そこで、2つの方向への一般化が行われた。1つは、Félix-Thomas[FT09] による、 M が Gorenstein 空間の場合への一般化である。ここで空間 M の持つ Gorenstein 性とは、多様体が持っていた有限次元性を拡張する性質であり、 M の特異コチェイン代数がある代数的な条件を満たすことで定義される。これは有向連結閉多様体、コンパクト連結リー群の分類空間、さらにはある種の Borel 構成などを含んでおり、空間の広いクラスを与える。Félix-Thomas の方法によるループ余積の定義の鍵は、fibration に沿って写像空間へと交叉積を持ち上げることである。ここでは「交叉積」は、ある種の Ext 加群の元であり、対角埋め込み $\Delta: M \rightarrow M \times M$ が Gorenstein 空間の意味で有限余次元であることから定まる shriek map である。

もう一方の一般化として、Sullivan-Voronov[CHV06, Section 5] によるブレン積が挙げられる。彼らは一般の次元の球面からの写像空間 $S^k M = \text{Map}(S^k, M)$ に対して、そのホモロジーの上にブレン積と呼ばれる積を定義した。これは、ループ積のときと同様に交叉積と Pontrjagin 積を組み合わせたものとして構成できる。ところが、 $S^k M$ 上の代数的構造はループ空間の場合と比べて乏しく、特に「ブレン余積」と呼ぶべき余積は $S^k M$ 上には構成されていなかった。

本稿では Félix-Thomas の手法を拡張することで二種類の「ブレン余積」を構成し、その応用として $H^*(S^k M)$ におけるカップ積のある種の消滅を証明する。

2. DGA 上の Ext 加群

まず準備として, DGA (differential graded algebra) 上の Ext 加群の定義と基本的な性質を説明する. 以下 \mathbb{K} を体とし, (A, d) を \mathbb{K} 上の DGA とする.

定義 1 (c.f. [FHT01, Section 6]). (A, d) 加群 (P, d) が (A, d) -semifree 加群であるとは, (P, d) の部分 (A, d) 加群の列

$$0 = P(-1) \subset P(0) \subset P(1) \subset \cdots \subset P(n-1) \subset P(n) \subset \cdots \subset P$$

が存在して, 次を満たすことをいう.

- $P = \bigcup_n P(n)$
- 各 n について $(P(n)/P(n-1), d)$ は自由 (A, d) 加群である.

これは, (通常)の環上の加群の理論における, 自由加群からなる複体の一般化であり, この場合にも以下のような同様の方法で Ext 加群が定義できる.

定義 2. $(L, d), (N, d)$ を (A, d) 加群とする.

- 擬同型 $\eta: (P, d) \xrightarrow{\sim} (L, d)$ であって (P, d) が (A, d) -semifree であるものを (L, d) の (A, d) -semifree 分解という.
- (A, d) -semifree 分解 $\eta: (P, d) \xrightarrow{\sim} (L, d)$ を用いて,

$$\text{Ext}_A(L, N) = H^*(\text{Hom}_A(P, N))$$

と定義する. このとき自然な線型写像 $\text{Ext}_A(L, N) \rightarrow \text{Hom}_{H^*(A)}(H^*(L), H^*(N))$ を $H^*(-)$ と書く.

続いて, pullback 図式と Ext 加群の関係について述べる. 以下本稿では, 全ての空間のコホモロジーは有限型であると仮定する. $p: E \rightarrow B$ が (Serre) fibration で, B が単連結であるような pullback 図式

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

を考える. このとき特異コチェイン代数 $C^*(-)$ について線形写像

$$p^*: \text{Ext}_{C^*(B)}^l(C^*(A), C^*(B)) \rightarrow \text{Ext}_{C^*(E)}^l(C^*(D), C^*(E))$$

が以下のようにして定義される. まず, $C^*(A)$ の $C^*(B)$ -semifree 分解 (P, d) をとる. このとき, $\text{id}_{C^*(E)}$ とのテンソル積をとることで線形写像

$$\text{Hom}_{C^*(B)}(P, C^*(B)) \rightarrow \text{Hom}_{C^*(E)}(C^*(E) \otimes_{C^*(B)} P, C^*(E) \otimes_{C^*(B)} C^*(B)) \quad (3)$$

が得られるが, Eilenberg-Moore の定理 [Smi67, Theorem 3.2] より $C^*(E) \otimes_{C^*(B)} P$ は $C^*(D)$ の $C^*(E)$ -semifree 分解である. 従って, (3) のコホモロジーをとることで, p^* が定義される.

最後に, Poincaré 双対性と Ext 加群の関係について述べる.

命題 4 ([FT09, Lemma 1]). N を n 次元の Poincaré 双対空間, X を弧状連結な空間とし, 連続写像 $f: X \rightarrow N$ を考える. このとき, 自然に定義される次の写像は同型である.

$$\text{Ext}_{C^*(N)}^l(C^*(X), C^*(N)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{n-l}(X), H^n(N))$$

3. 対称ブレーン余積

3.1. Gorenstein 空間

Gorenstein 空間とは, Poincaré 双対空間の一般化として以下のように定義される.

定義 5 ([FHT88]). 単連結な空間 M が

$$\text{Ext}_{C^*(M)}^k(\mathbb{K}, C^*(M)) \cong \begin{cases} \mathbb{K} & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

を満たすとき, M を次元 m の (\mathbb{K}) -Gorenstein 空間という.

基本的な具体例として, 以下の2つが挙げられる. 特に (b) より, Gorenstein 空間の次元は負の整数にも成り得ることが分かる.

例 6. (a) 命題 4 より, Poincaré 双対空間 (特に有向連結閉多様体) は Gorenstein 空間である. さらに Gorenstein 空間としての次元は, Poincaré 双対空間としての次元と一致する.

(b) コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG は Gorenstein 空間であり, その次元は $-\dim G$ である.

本稿, 特に対称ブレーン余積の定義において重要な役割を果たす Gorenstein 空間のクラスが, 以下の定理により与えられる.

定理 7 ([FHT88, Proposition 3.4, Proposition 5.2]). $\text{ch } \mathbb{K} = 0$ とし, M を単連結空間で, $\bigoplus_n \pi_n(M) \otimes \mathbb{K}$ が有限次元なものとする. このとき M は Gorenstein 空間であり, その次元は $\sum_j |y_j| + \sum_i (1 - |x_i|)$ で与えられる. ここで, $\{x_i\}_{i=1}^p$ は $\pi_{\text{even}}(M) \otimes \mathbb{K}$ の基底, $\{y_j\}_{j=1}^q$ は $\pi_{\text{odd}} \otimes \mathbb{K}$ の基底であり, $|x_i|$ や $|y_j|$ はそれらの次数を表す.

また, これと [FHT88, Proposition 1.7] より, 次の同値性が成り立つことを注意しておく.

命題 8. $k \geq 2$ とし, M を k 連結空間とする. このとき, $\Omega^{k-1}M$ が Gorenstein 空間であることと, $\bigoplus_n \pi_n(M) \otimes \mathbb{K}$ が有限次元であることは同値である.

3.2. 対称ブレーン余積の定義

この節では, 一つ目のブレーン余積, すなわち対称ブレーン余積 (の双対) の定義を与える. なおこの節の内容は, $k = 1$ の場合は Félix-Thomas [FT09] によるものであり, $k \geq 2$ の場合が講演者によって得られた一般化である.

以下 M を k 連結な空間とする. ブレーン余積の構成は, 次の図式を用いて行われる.

$$\begin{array}{ccc} S^k M & \xleftarrow{\text{comp}} & S^k M \times_M S^k M & \xrightarrow{\text{incl}} & S^k M \times S^k M \\ \downarrow \text{res}_0 & & \downarrow & & \\ S^{k-1} M & \xleftarrow{c} & M & & \end{array} \tag{9}$$

ここで, res_0 は赤道 $S^{k-1} \subset S^k$ への制限写像, $c: M \rightarrow S^{k-1}M$ は定値写像としての埋め込みであり, 左の四角形は pullback 図式である.

定義 10. 任意の元

$$\gamma \in \text{Ext}_{C^*(S^{k-1}M)}^l(C^*(M), C^*(S^{k-1}M))$$

を固定する. このとき γ に付随する対称ブレン余積 (の双対) δ_γ^\vee を以下の合成として定義する.

$$\delta_\gamma^\vee: H^*(S^k M \times S^k M) \xrightarrow{\text{incl}^*} H^*(S^k M \times_M S^k M) \xrightarrow{H^*(\text{res}_0^* \gamma)} H^{*+l}(S^k M)$$

対称ブレン余積は, 次の意味で対称的である.

命題 11 ([Wak19a, Proposition 6.4]). 任意の $\alpha, \beta \in H^*(S^k M)$ に対して,

$$\delta_\gamma^\vee(\alpha \times \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|} \delta_{\tau^* \gamma}^\vee(\beta \times \alpha)$$

が成立する. ここで, $\tau: S^{k-1}M \rightarrow S^{k-1}M$ は S^{k-1} の向きを反転させる写像から定まる写像であり, τ^* はそれが Ext 加群に誘導する線形写像である.

さて, ブレン余積を M の情報のみから定めるためには, Ext 加群の性質を調べて l と γ を「うまく」指定する必要がある. まず簡単な場合として, 以下の例が挙げられる.

例 12. $k = 1$ で, M が m 次元 Poincaré 双対空間の場合には, 命題 4 より

$$\text{Ext}_{C^*(M \times M)}^m(C^*(M), C^*(M \times M)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{2m-m}(M), H^{2m}(M \times M)) \cong \mathbb{K}$$

となるので, γ はこの 1 次元ベクトル空間の生成元として定めれば良い.

より一般の場合には, 次の定理を用いる.

定理 13 ([FT09, Theorem 12] ($k = 1$), [Wak, Theorem 3.1] ($k \geq 2$)).

以下のいずれかを仮定する.

- (a) $k = 1$ で, M は Gorenstein 空間である.
- (b) $k \geq 1$, $\text{ch } \mathbb{K} = 0$ で, $\Omega^{k-1}M$ は Gorenstein 空間である.

このとき, Gorenstein 空間としての次元を $\bar{m} = \dim \Omega^{k-1}M$ とおくと, 以下の同型が成立する.

$$\text{Ext}_{C^*(S^{k-1}M)}^l(C^*(M), C^*(S^{k-1}M)) \cong H^{l-\bar{m}}(M)$$

上の定理において特に $l = \bar{m}$ とすることで, 生成元

$$c_l \in \text{Ext}_{C^*(S^{k-1}M)}^{\bar{m}}(C^*(M), C^*(S^{k-1}M)) \cong \mathbb{K}$$

を得る. これを用いて $\gamma = c_l$ ととることで, 対称ブレン余積を $\delta^\vee = \delta_{c_l}^\vee$ と定義する.

3.3. ブレーン積の定義

M を k 連結な空間とする. このときブレーン積は, 図式

$$\begin{array}{ccc} S^k M \times S^k M & \xleftarrow{\text{incl}} & S^k M \times_M S^k M & \xrightarrow{\text{comp}} & S^k M \\ \downarrow \text{ev}_0 \times \text{ev}_0 & & \downarrow & & \\ M \times M & \xleftarrow{\Delta} & M & & \end{array}$$

を用いて合成

$$\mu^\vee: H^*(S^k M) \xrightarrow{\text{comp}^*} H^*(S^k M \times_M S^k M) \xrightarrow{H^*((\text{ev}_0 \times \text{ev}_0)^* \Delta_!)} H^{*+m}(S^k M \times S^k M)$$

として定義される. ここで, $\Delta_! \in \text{Ext}_{C^*(M \times M)}^m(C^*(M), C^*(M \times M)) \cong \mathbb{K}$ は, 定理 13 の $k=1$ の場合から定まる生成元である. ブレーン積は (ブレーン余積と違って) $k \geq 2$ であることに由来する困難はなく, ループ積と同様の方法によって定義されていることを注意しておく.

3.4. ブレーン (余) 積の性質と具体例

以下 $\text{ch } \mathbb{K} = 0$, M を k 連結空間とし, $\Omega^{k-1} M$ は Gorenstein 空間であると仮定する. このとき

$$\begin{aligned} \mu: H_*(S^k M \times S^k M) &\rightarrow H_{*-m}(S^k M) && (\text{ブレーン積}) \\ \delta: H_*(S^k M) &\rightarrow H_{*-m}(S^k M \times S^k M) && (\text{対称ブレーン余積}) \end{aligned}$$

が定義されるのであった. ループ積やループ余積の拡張として, これらは次の性質を満たす.

定理 14 ([Wak, Theorem 1.5]). ブレーン積と対称ブレーン余積は, 次数をずらしたホモロジー $\mathbb{H}_*(S^k M) = H_{*+m}(S^k M)$ に Frobenius 代数の構造を与える. すなわち, ブレーン積と対称ブレーン余積は (余) 結合的かつ (余) 可換であり, Frobenius 恒等式 $\delta \circ \mu = \pm(1 \otimes \mu) \circ (\delta \otimes 1) = \pm(\mu \otimes 1) \circ (1 \otimes \delta)$ を満たす.

また, ブレーン (余) 積の非自明性を示す結果として次の計算例を得た.

定理 15 ([Wak, Theorem 1.6]). $M = S^{2n+1}$ に対して, ブレーン積による代数 $\mathbb{H}_*(S^2 M)$ は, 次数 $|y| = -2n - 1$, $|z| = 2n - 1$ の元により生成される外積代数 $\wedge(y, z)$ と同型である. さらに, この同型の下で対称ブレーン余積は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \delta(1) &= 1 \otimes yz - y \otimes z + z \otimes y + yz \otimes 1 \\ \delta(y) &= y \otimes yz + yz \otimes y \\ \delta(z) &= z \otimes yz + yz \otimes z \\ \delta(yz) &= -yz \otimes yz \end{aligned}$$

この例は, M が多様体の場合でもブレーン積, 対称ブレーン余積の両者が非自明であることを示しており, ループ (余) 積の場合と対照的である. このことから, ブレーン作用素はストリング作用素よりも豊富な代数的構造を与えていると考えられる.

また, ブレーン積と対称ブレーン余積をさらに一般化することによって, それらの合成が非自明であるような例を構成した. このような現象はストリング作用素 ($k=1$) の場合には見つかっておらず, この結果もブレーン作用素が豊富な構造を与えていることを示す結果であると言える. 詳細については [Wak19b] を参照されたい.

4. 非対称ブレーン余積

この節では、もう一つのブレーン余積である非対称ブレーン余積(の双対)の定義を与える。

以下、 M を単連結な m 次元 Poincaré 双対空間とする。ここで図式 (9) の代わりに次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 S_{f+g}^k M & \xleftarrow{\text{comp}} & S_f^k M \times_M S_g^k M & \xrightarrow{\text{incl}} & S_f^k M \times S_g^k M \\
 \downarrow \text{res}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 & & \\
 D^k M & \xleftarrow{\iota} & S_f^k M & &
 \end{array} \tag{16}$$

ここで、 $S_f^k M$ は $f \in S^k M$ を含む $S^k M$ の弧状連結成分、 $D^k M = \text{Map}(D^k, M)$ である。また、 res_1 は上半球面への制限写像、 ι は商写像 $D^k \rightarrow D^k/\partial D^k = S^k$ から誘導される写像である。

このとき $D^k M (\simeq M)$ は Poincaré 双対性を満たすので、命題 4 より生成元

$$\iota_! \in \text{Ext}_{C^*(D^k M)}^m (C^*(S_f^k M), C^*(D^k M)) \cong \mathbb{K}$$

が定まる。これを用いて、非対称ブレーン余積は以下の合成として定義される。

$$\delta_{\text{ns}}^\vee: H^*(S_f^k M \times S_g^k M) \xrightarrow{\text{incl}^*} H^*(S_f^k M \times_M S_g^k M) \xrightarrow{H^*(\text{res}_1^* \iota_!)} H^{*+m}(S_{f+g}^k M)$$

次の命題は、(f についての仮定を課した上での) 非対称ブレーン余積の具体的な計算式を与えている。

命題 17. f が定値写像 $0: S^k \rightarrow M$ にホモトピックなとき、非対称ブレーン余積 δ_{ns}^\vee は $u, v \in H^*(S^k M)$ に対して

$$\delta_{\text{ns}}^\vee(u \times v) = \text{ev}_0^*(\omega \cdot c^*(u)) \cdot v$$

により計算できる。ここで、 $\omega \in H^m(M)$ は M の向き付け類であり、 $\text{ev}_0: S^k M \rightarrow M$ は基点での評価写像、 $c: M \rightarrow S^k M$ は定値写像としての埋め込みである。

5. 二種類のブレーン余積の比較

最後に、対称ブレーン余積と非対称ブレーン余積を比較することで、 $H^*(S^k M)$ におけるカップ積のある種の消滅を証明する。

以下では M を k 連結な m 次元 Poincaré 双対空間とする。このとき次の図式により二種類のブレーン余積が関連付けられる。

$$\begin{array}{ccc}
 S^k M & \xleftarrow{\text{comp}} & S^k M \times_M S^k M & \xrightarrow{\text{incl}} & S^k M \times S^k M \\
 \downarrow \text{res}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 & & \\
 D^k M & \xleftarrow{\iota} & S^k M & & \\
 \downarrow \text{res}_2 & & \downarrow \text{ev} & & \\
 S^{k-1} M & \xleftarrow{c} & M, & &
 \end{array}$$

実際、この図式の外側は非対称ブレイン余積の定義に用いた図式 (9) に、上半分は対称ブレイン余積の定義に用いた図式 (16) にそれぞれ一致している。また、 $\text{res}_2 \circ \text{res}_1 = \text{res}_0$ であることを注意しておく。さて、任意の元 $\gamma \in \text{Ext}_{C^*(S^{k-1}M)}^m(C^*(M), C^*(S^{k-1}M))$ を固定し、それに付随する対称ブレイン余積を考えよう¹。このとき二種類のブレイン余積は以下のように定義されるのであった。

$$\begin{aligned}\delta_\gamma^\vee &= H^*(\text{res}_1^* \circ \text{res}_2^*(\gamma)) \circ \text{incl}^* \\ \delta_{\text{ns}}^\vee &= H^*(\text{res}_1^*(\iota_1)) \circ \text{incl}^*\end{aligned}\quad (18)$$

これらを比較するために、 $\lambda_\gamma \in \mathbb{K}$ を写像の合成 $H^0(M) \xrightarrow{H^*(\gamma)} H^m(S^{k-1}M) \xrightarrow{c^*} H^m(M)$ を用いて $c^* \circ (H^*(\gamma))(1) = \lambda_\gamma \cdot \omega$ により定める。

命題 19 ([Wak19a, Proposition 6.2]). 上の仮定の下で、 $\text{res}_2^* \gamma = \lambda_\gamma \cdot \iota_1$ が成立する。よって (18) より次が成立する。

$$\delta_\gamma^\vee = \lambda_\gamma \cdot \delta_{\text{ns}}^\vee$$

この関係式を用いて二種類のブレイン余積を比較することで、カップ積の消滅に関する次の定理を得る。

定理 20 ([Wak19a, Theorem 1.4]). 任意の元 $\gamma \in \text{Ext}_{C^*(S^{k-1}M)}^m(C^*(M), C^*(S^{k-1}M))$ を固定する。このとき、任意の $\alpha \in H^{>0}(S^k M)$ に対して、次が成立する。

$$\lambda_\gamma \text{ev}_0^* \omega \cdot \alpha = 0 \in H^{|\alpha|+m}(S^k M)$$

Proof. 写像 $\text{ev}_0: S^k M \rightarrow M$ は切断 $c: M \rightarrow S^k M$ を持つので、直和分解 $H^{>0}(S^k M) \cong H^{>0}(M) \oplus \text{Ker}(c^*)$ を得る。 $\alpha \in H^{>0}(M)$ のときは、次数の理由から明らかに $\alpha \omega = 0 \in H^{|\alpha|+m}(M) = 0$ である。次に $\alpha \in \text{Ker}(c^*)$ の場合を考える。このとき命題 17 より、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\delta_{\text{ns}}^\vee(1 \times \alpha) &= \text{ev}_0^*(\omega \cdot c^*(1)) \cdot \alpha = \text{ev}_0^* \omega \cdot \alpha \\ \delta_{\text{ns}}^\vee(\alpha \times 1) &= \text{ev}_0^*(\omega \cdot c^*(\alpha)) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

さらに命題 11 と命題 19 より、

$$\lambda_\gamma \delta_{\text{ns}}^\vee(1 \times \alpha) = \delta_\gamma^\vee(1 \times \alpha) = \delta_{\tau^* \gamma}^\vee(\alpha \times 1) = \lambda_{\tau^* \gamma} \delta_{\text{ns}}^\vee(\alpha \times 1)$$

を得る。これらの等式から、 $\lambda_\gamma \text{ev}_0^* \omega \cdot \alpha = 0 \in H^{|\alpha|+m}(S^k M)$ を得る。 \square

しかし、もし $\lambda_\gamma = 0$ であれば、定理 20 は自明な主張となってしまう。従って λ_γ が非自明であるような γ の構成が必要である。

命題 21 ([Wak19a, Proposition 6.7, Proposition 6.11]). 以下のいずれかを仮定する。

(a) $k = 1$

(b) $k \geq 1$ は奇数、 $\text{ch } \mathbb{K} = 0$ であり、 $\Omega^{k-1} M$ は Gorenstein 空間である。

このとき、ある γ が存在し、 λ_γ は Euler 標数 $\chi(M)$ に一致する。

¹ 次数が Section 3 と異なることに注意

よって、定理 20 と命題 21 より、次の定理を得る。

定理 22 ([Wak19a, Theorem 1.4]). 命題 21 と同じ仮定の下で、任意の $\alpha \in H^{>0}(S^k M)$ に対して、次が成立する。

$$\chi(M)\text{ev}_0^*\omega \cdot \alpha = 0 \in H^{|\alpha|+m}(S^k M)$$

なお、 $k = 1$ かつ M が多様体の場合は Menichi [Men13] の定理であり、定理 22 はその一般化となっている。

参考文献

- [CG04] Ralph L. Cohen and Véronique Godin. A polarized view of string topology. In *Topology, geometry and quantum field theory*, volume 308 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 127–154. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [CHV06] Ralph L. Cohen, Kathryn Hess, and Alexander A. Voronov. *String topology and cyclic homology*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. Lectures from the Summer School held in Almería, September 16–20, 2003.
- [CS99] Moira Chas and Dennis Sullivan. String topology, 1999, arXiv:math/9911159.
- [FHT88] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. Gorenstein spaces. *Adv. in Math.*, 71(1):92–112, 1988.
- [FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [FT09] Yves Félix and Jean-Claude Thomas. String topology on Gorenstein spaces. *Math. Ann.*, 345(2):417–452, 2009.
- [Men13] Luc Menichi. String topology, Euler class and TNCZ free loop fibrations, 2013, arXiv:1308.6684.
- [Smi67] Larry Smith. Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129:58–93, 1967.
- [Tam10] Hirotaka Tamanoi. Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(5):605–615, 2010.
- [Wak] Shun Wakatsuki. Coproducts in brane topology. to appear in *Algebr. Geom. Topol.*, also available at arXiv:1802.04973.
- [Wak19a] Shun Wakatsuki. New construction of the brane coproduct and vanishing of cup products on sphere spaces, 2019, arXiv:1905.00644.
- [Wak19b] Shun Wakatsuki. Nontrivial example of the composition of the brane product and coproduct on gorenstein spaces, 2019, arXiv:1902.10936.

群作用と多面体 - トーリックトポロジーの観点から -

栞田 幹也 (大阪市立大学)

序

1970年頃に Demazure, Mumford, 三宅-小田らによりトーリック幾何の基礎理論が構築され, トーリック幾何は今も他分野と関わりながら, また一般論がテストできる場として発展している. トーリック幾何の基礎となるのは「トーリック多様体という代数幾何の対象と扇という組合せ論の対象の間に一対一の対応がある」という事実である ([9], [15] 参照). これ故, トーリック幾何は, 代数幾何と組合せ論を繋ぐ架け橋と言える.

このトーリック幾何をトポロジーの観点から展開する試みがあった. 最初の試みは, 1991年の Davis-Januszkiewicz による論文である ([8]). この論文は暫く日の目を見なかったが, 2000年頃に Buchstaber-Panov により取り上げられ一般化がなされた ([5]). 一方, この動きを知らずに, 筆者は (服部晶夫先生の協力も得て) トーリック幾何をトポロジーの観点から展開する試みを行っていた ([13], [10]). その後これらの動きが合流して, トーリックトポロジーという分野が生まれた ([6]). この経緯からして, トーリックトポロジーも組合せ論と密接に関係している.

本講演では, トーリックトポロジーにおいて筆者が遭遇した多面体に関連する話題の内, 次の3つを紹介する.

- (1) トーラス群作用と軌道空間
- (2) 凸多面体から得られる平坦リーマン多様体と3次元双曲多様体
- (3) 旗多様体内の複素トーラス軌道の閉包, 置換多面体, 置換群上の距離

(1) はトーリック幾何で知られていた事実のトポロジーの観点からの拡張, (2) はトーリック幾何の実数版に対応する話題, (3) はトーリック幾何の範疇における話題であるが, これまでの観点にはなかったと思われる最近の結果である.

1. トーラス群作用と軌道空間

簡単な例から始める. S^1 を長さ1の複素数からなる群

$$S^1 = \{g \in \mathbb{C} \mid |g| = 1\},$$

S^2 を空間 $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ 内の原点を中心とした単位球面

$$S^2 = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1\}$$

とする. このとき, S^1 の S^2 への自然な作用 (軸の周りの回転)

$$S^1 \times S^2 \rightarrow S^2, \quad (g, (z, x)) \rightarrow (gz, x)$$

の軌道空間 S^2/S^1 は, (z, x) の軌道を x に写す対応により, 区間 $I = [-1, 1]$ と同一視できる. S^2 上の S^1 作用の不動点集合 $\text{Fix}(S^1, S^2)$ は北極 $(0, 1)$ と南極 $(0, -1)$ の2点から

本研究は科研費 (課題番号:19K03472) の助成を受けたものである.

なり, これらは区間 I の頂点集合 $V(I)$ (または, 境界) の 2 点 $\{\pm 1\}$ に対応している. 特に

$$|\text{Fix}(S^1, S^2)| = |V(I)| = 2$$

である. 一方, S^2 のオイラー標数 $\chi(S^2)$ も 2 であるが, これらの一致は偶然ではない.

上記の例の高次元化として, n 個の直積 $(S^2)^n$ を考える. ここには, $(S^1)^n$ が自然に作用しており, 軌道空間 $(S^2)^n / (S^1)^n$ は n 次元立方体 I^n になる. このとき, 不動点集合 $\text{Fix}((S^1)^n, (S^2)^n)$ と I^n の頂点集合 $V(I^n)$ に 1 対 1 の対応があり,

$$|\text{Fix}((S^1)^n, (S^2)^n)| = |V(I^n)| = \chi((S^2)^n) = 2^n$$

が成立している.

上の例が示すように, 軌道空間の頂点集合は作用をもつ空間のオイラー標数と関連しているが, 「ある条件下」では, 軌道空間はもっと沢山の情報を持っている. まず「ある条件下」について述べる. \mathbb{C}^n 上の標準的な $(S^1)^n$ 作用

$$(1.1) \quad (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \rightarrow (g_1 z_1, \dots, g_n z_n) \in \mathbb{C}^n \quad (g_1, \dots, g_n) \in (S^1)^n$$

の軌道空間は, (z_1, \dots, z_n) の軌道に $(|z_1|, \dots, |z_n|)$ を対応させることにより, \mathbb{R}^n の第 1 象限 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ と同一視できる. $(S^1)^n$ の自己同型群 $\text{Aut}((S^1)^n)$ の元で作用を振じても軌道空間は変わらない.

定義. $2n$ 次元閉多様体 M の $(S^1)^n$ 作用は, 局所的に (1.1) の作用と同じであるとき (正確には, $\text{Aut}((S^1)^n)$ の元で振じった作用と同じであるとき), *locally standard* という.

$2n$ 次元閉多様体 M が, *locally standard* な $(S^1)^n$ 作用をもっているとする. このとき, 上の考察より, 軌道空間 $M / (S^1)^n$ は局所的に第 1 象限 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ であるから, n 次元の角付多様体となる. 角付多様体の典型例として単純凸多面体がある. ここで, n 次元凸多面体が単純とは, 各頂点において, その頂点を含む余次元 1 の面が丁度 n 個であること, または, 各頂点から丁度 n 個の辺が出ていると言ってもよい.

Q を n 次元角付多様体とすると, 凸多面体の場合と同様に, 各 $0 \leq i \leq n$ に対して i 次元面が定義でき, Q の i 次元面の数を $f_i(Q)$ と書く. ここで, Q 自身は Q の n 次元面と思ひ $f_n(Q) = 1$ と了解する. 0 次元面を頂点, 1 次元面を辺, $n-1$ 次元面をファセットともいう. $f_i(Q)$ をを係数とした多項式

$$f_Q(t) := \sum_{i=0}^n f_i(Q) t^i$$

を Q の f -多項式といい, この多項式の変数をずらして得られる多項式

$$h_Q(t) := f_Q(t-1)$$

を Q の h -多項式という. f -多項式と h -多項式は同じ情報を持っているが, 以下では h -多項式が自然に現れる.

例. $f_i(I^n) = 2^{n-i} \binom{n}{i}$ より, $f_{I^n}(t) = (t+2)^n$. したがって $h_{I^n}(t) = (t+1)^n$.

I^n は $(S^2)^n$ の $(S^1)^n$ 作用による軌道空間であったが, 上の例より, $h_{I^n}(t)$ は $(S^2)^n$ のポアンカレ多項式 $\sum_{j=0}^n \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_{2j}((S^2)^n) t^j$ と一致している. この事実は, I^n の頂点以外の面も数えることにより, $(S^2)^n$ のベッチ数が分かることを示している. $(S^2)^n$ はトーリック多様体の一例で, このような事実がトーリック多様体の場合に成立することは知られていたが, 次の定理は, この現象がトーリック多様体に限らず, トポロジーの範疇で成立することを述べたものである.

定理 1.1 ([14]). M を, 奇数次のコホモロジーが消えている $2n$ 次元閉微分可能多様体とする. このとき, M 上の不動点をもつ $(S^1)^n$ 作用は *locally standard* になり, 軌道空間 $Q = M/(S^1)^n$ の各面は (Q 自身も) 非輪状. さらに

$$h_Q(t) = \sum_{j=0}^m \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_{2j}(M) t^j$$

が成立する.

M の復元. M のベッチ数は上記のように軌道空間から決まるが, M のコホモロジー環の環構造は軌道空間 Q だけでは決まらない. M のコホモロジー環を記述するには, Q のファセットに対応する M の余次元 2 の部分多様体を固定する S^1 部分群の情報が必要である. もう少し詳しく述べると, Q のファセットを Q_1, \dots, Q_m とし, 射影 $\pi: M \rightarrow Q$ による Q_i の引き戻し $\pi^{-1}(Q_i)$ を M_i と書くと, M_i は余次元 2 の閉部分多様体で, $(S^1)^n$ のある S^1 部分群 S_i の不動点集合になっている. この S_i を, 定める準同型写像を

$$v_i: S^1 \rightarrow (S^1)^n, \quad (v_i(S^1) = S_i)$$

とする. $\text{Hom}(S^1, (S^1)^n)$ を \mathbb{Z}^n を同一視すると v_i は \mathbb{Z}^n の元と思え, さらに v_i は ± 1 以外の整数で割れないと仮定してよい (このとき, v_i は符号を除いて唯一つに決まる). これら $\{v_i\}_{i=1}^m$ たちは次の条件 (1.2) をみたす. I を $\{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合で $|I| = n$ とする.

(1.2) $\bigcap_{i \in I} Q_i$ が Q の頂点ならば, $\{v_i \mid i \in I\}$ は $\text{Hom}(S^1, (S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$ の基底である.

軌道空間 Q とデータ $\{v_i\}_{i=1}^m$ が M のコホモロジー環 $H^*(M)$ の環構造を決める. 実はもっと強く, M は Q と $\{v_i\}_{i=1}^m$ から $Q \times (S^1)^n$ の商空間

$$(1.3) \quad M = (Q \times (S^1)^n) / \sim$$

として復元できる. ここで $(x, t) \sim (y, s)$ は, $x = y$ で, x が $Q_I = \bigcap_{i \in I} Q_i$ の内点ならば (I は $\{1, 2, \dots, m\}$ のある部分集合で $|I| = n$ とは限らない), $t^{-1}s$ は $v_i(S^1) = S_i$ ($i \in I$) で生成される $(S^1)^n$ の部分群に含まれるという条件である. つまり, $Q \times (S^1)^n$ において, Q の k 次元面 Q_I 上 ($k = n - |I|$) にある $(S^1)^n$ を, $\{v_i(S^1) \mid i \in I\}$ で生成される k 次元トーラス T_I で潰す (つまり T/T_I を考える) と M が復元できる. シリンダー $[-1, 1] \times S^1$ において, 2 つの境界の S^1 を 1 点に潰すと S^2 が得られるが, これの一般化である.

2. 多面体から得られる平坦リーマン多様体と 3 次元双曲多様体

前節における複素数体 \mathbb{C} を実数体 \mathbb{R} に置き換えれば, ある程度同様の議論が成立する. 一つ大きな違いは, 前節で取り扱った多様体は, 基本的に単連結なものであるが, 本節で取り扱う $(S^0)^n$ 作用をもつ n 次元多様体は, 単連結ではなく, 多くの場合 aspherical 多様体である.

S^1 の代わりに $S^0 = \{\pm 1\}$ を考え, n 次元閉多様体 N 上の $(S^0)^n$ 作用が, 局所的に

$$(2.1) \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (g_1 x_1, \dots, g_n x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (g_1, \dots, g_n) \in (S^0)^n$$

と同じであるとき, *locally standard* という ((1.1) 参照). このとき, 軌道空間 $Q = N/(S^0)^n$ は n 次元角付多様体になり, (1.3) と同様に, N は $Q \times (S^0)^n$ の商空間

$$(2.2) \quad N = (Q \times (S^0)^n) / \sim$$

と表される. 今の場合, (1.2), (1.3) における v_i は $\text{Hom}(S^0, (S^0)^n) = (\mathbb{Z}/2)^n$ の元と思う. (1.3) は, 2^n 個の Q を, v_i たちのデータを基に Q の境界に沿って貼り合せて N が復元できることを意味する. Q が単純凸多面体であるとき N を small cover という ([8]).

例. (2.1) の $(S^0)^n$ 作用は, n 次元 (平坦) トーラス $\mathbb{R}^n / (2\mathbb{Z})^n$ 上の作用を導く. この作用は locally standard で, 軌道空間は n 次元立方体となる.

上の例は, 2^n 個の n 次元立方体を境界に沿って貼り合せて平坦トーラスが得られることを示しているが, 貼り合せ方を変えると (言い換えれば, v_i たちを取り換えると), トーラスとは異なるコンパクト平坦リーマン多様体を得られる. 実は, このようにして得られる平坦リーマン多様体は, 実 Bott 塔と呼ばれる $\mathbb{R}P^1$ 束の列

$$B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 = \{1 \text{ 点} \}$$

のトップにある多様体 B_n として得られる. ここで, 各 $\mathbb{R}P^1$ 束 $B_i \rightarrow B_{i-1}$ は, B_{i-1} 上の 2 つの直線束の Whitney 和の射影化である (2 つの直線束の内, 一方は自明束としても一般性は失われない). B_n を実 Bott 多様体とよぶ.

コンパクト平坦リーマン多様体は各次元有限個で基本群で区別できるが (Bieberbach の定理), 実 Bott 多様体に限れば次が成立する.

定理 2.1 ([11], [7]). 実 Bott 多様体は $\mathbb{Z}/2$ 係数のコホモロジー環で区別出来る.

実 Bott 多様体 B_n は, ホロノミー群が $(S^0)^n$ の部分群という特別なものであるが, コンパクト平坦リーマン多様体の例を具体的に豊富に提供する (下の Table 1 参照).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Diff n	1	2	4	12	54	472	8,512	328,416	?	?
Ori n	1	1	2	3	8	29	222	3,607	131,373	?
Symp n	0	1	0	2	0	6	0	31	0	416

TABLE 1. Diff n , Ori n , Symp n は, それぞれ, n 次元 Bott 多様体の微分同相類, その内向き付可能なもの, さらにシンプレクティック構造が入るものの数を表す.

(2.2) において, Q が角付多様体であれば微分可能多様体 N が得られるが, 上記のようにリーマン計量を考えるならば, 面角が直角である必要がある. 上記では平坦計量を考えたが, 次に 3 次元双曲計量を考える. 3 次元双曲計量に関して各面角が直角となる凸多面体は Pogorelov 多面体と呼ばれ, 次の組合せ論的特徴付けが知られている.

定理 2.2 ([1], [16]). 3 次元単純凸多面体が Pogorelov 多面体である必要十分条件は, 4 面体でなく, 3 ベルトと 4 ベルトを持たないことである (特に, 3 角形と 4 角形の面はない).

3 次元凸多面体 P の k ベルトとは ($k \geq 3$), P の k 個の面の巡回列 (P_1, P_2, \dots, P_k) で, 隣同士は 1 辺を共有し, 隣同士以外は交わりがなく, さらに 3 つの面は頂点を共有していないことである. Pogorelov 多面体は無限に沢山ある. 例えば正 12 面体, 一般に面が 5 角形か 6 角形だけである 3 次元凸多面体 (combinatorial fulleren と呼ばれている) は Pogorelov 多面体である ([3]).

Pogorelov 多面体 Q を用いて (2.2) の構成を行う, つまり, Q を $8 (= 2^3)$ 個用意し, それらを面に沿って貼り合わせる. 双曲空間の中で Q の各面角が直角ゆえ, この構成で 3 次元双曲閉多様体を得られるが, これは Löbell 型と呼ばれている. Mostow の剛性定理に

よれば, 3次元以上の双曲閉多様体は基本群で区別できるが, Löbell 型の 3次元双曲閉多様体に限れば, 定理 2.1 と類似の次が成立する.

定理 2.3 ([4]). *Löbell* 型の 3次元双曲多様体は $\mathbb{Z}/2$ 係数のコホモロジー環で区別出来る.

この定理の証明には, moment-angle 多様体というトーリックトポロジーで研究されている対象を用いる (が, やや迂回した感がある).

参考. Nikulin の面の数に関する不等式から, 各面角が直角となる 5次元以上の凸多面体は存在しないことが分かるが, 4次元ではそのような凸多面体 Q が存在する (例えば 120 個の正 12 面体を 3次元面にもつ 120 胞体). このようなものに対して (2.2) の構成を行うと (つまり, Q を $16 (= 2^4)$ 個用意して境界で貼り合せて) 4次元の双曲閉多様体を得られるが, これらに対して上記の定理が成立するかどうかは分かっていない.

3. 旗多様体における複素トーラス軌道の閉包, 置換多面体, 置換群上の距離

群作用と多面体に関係する例をもう 1つ挙げる. 本節の話は, 前節 2つとはやや趣が異なる. 旗多様体 $\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ とそれに関連する基本的な事実を思い出す. まず

$$\text{Fl}(\mathbb{C}^n) = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の複素 } i \text{ 次元部分空間}\}.$$

$T = (\mathbb{C}^*)^n$ の各成分を \mathbb{C}^n の各成分に掛ける作用は $\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ 上の T 作用を導く. この作用の不動点集合は置換群 \mathfrak{S}_n と同一視できる. 実際, $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して, 旗

$$\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset \cdots \subset \langle e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)} \rangle$$

を対応させる対応が同一視を与える. ここで, e_1, \dots, e_n は \mathbb{C}^n の標準基底で, $\langle \rangle$ は中にある元で生成される部分ベクトル空間を表す.

$\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ には, Plücker 座標を用いてモーメント写像

$$\mu: \text{Fl}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

が定義でき, 像 $\mu(\text{Fl}(\mathbb{C}^n))$ は $(n-1)$ 次元置換多面体

$$\text{Perm}_n := \{(v(1), \dots, v(n)) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathfrak{S}_n\}$$
 の凸包

と一致する. これに関して次のことが知られている.

補題 3.1. $\mu(w) = (w^{-1}(1), \dots, w^{-1}(n))$. さらに, 2頂点 $\mu(w)$ と $\mu(v)$ が Perm_n の辺で結ばれる必要十分条件は, $w = vs_i$ となる互換 $s_i = (i, i+1)$ が存在することである.

この補題に関連して, \mathfrak{S}_n 上に次の距離 d を考える.

$$d(u, v) = \ell(u^{-1}v).$$

ここで, $\ell(w)$ は置換 w の長さで, w の転位数と思ってもよいし, w を互換 s_1, \dots, s_{n-1} の積で最短表示したときの s_i たちの個数と思ってもよい. 上の補題より, $d(u, v)$ は, u と v を Perm_n の頂点 $\mu(u)$ と $\mu(v)$ と思うと, それらを結ぶ Perm_n の (辺からなる) 道で最短のものの長さと思える.

$u \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$C(u) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n = \text{Hom}(\mathbb{C}^*, T) \mid x_{u(1)} < x_{u(2)} < \cdots < x_{u(n)}\}$$

を考える (本質的に Weyl chamber). $C(u)$ の元 λ は T の 1 パラメータ部分群を定め,

$$\text{Fl}(\mathbb{C}^n)^{\lambda(\mathbb{C}^*)} = \text{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$$

である. ここで $X^G = \text{Fix}(G, X)$.

さて, $\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ から任意に 1 点 y を取り, その T 軌道の閉包 Y を考える. まず,

$$Y^T \subset \text{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$$

に注意する. Atiyah-Guillemin-Sternberg の定理より, $\mu(Y)$ は $\mu(Y^T)$ を頂点とする凸多面体である. $u \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\lambda \in C(u)$ を任意にとり,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)y \in Y^T \subset \mathfrak{S}_n$$

を考える. 上記の極限点は λ の取り方には依らず u のみによる. したがって, 写像

$$\text{Ret}_Y: \mathfrak{S}_n \rightarrow Y^T \subset \mathfrak{S}_n$$

を得るが, この写像は次の意味をもつ.

定理 3.2 ([12]). Ret_Y はレトラクト (つまり Y^T 上恒等写像). また, 各 $u \in \mathfrak{S}_n$ に対して $d(u, v) = d(u, Y^T)$ となる $v \in Y^T$ は唯一つだけあり, それは $\text{Ret}_Y(u)$ で与えられる.

上記の定理の後半は, \mathfrak{S}_n の任意の部分集合に対して成り立つわけではなく, Y^T は \mathfrak{S}_n の Coxeter matroid と呼ばれているものになっている ([2]). なお, Y^T が具体的に分かるとき, Ret_Y を具体的に求める方法がある. また, 以上の話は一般 Lie 型の旗多様体に対して成立する.

REFERENCES

- [1] E. M. Andreev, *Convex polyhedra in Lobachevskii spaces*. Mat. Sbornik **81** (123) (1970), no. 3, 445–478 (Russian); Math. USSR Sbornik **10** (1970), 413–440 (English translation).
- [2] A. V. Borovik, I. M. Gelfand, and N. White, *Coxeter matroids*, Progress in Math. **216**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.
- [3] V. Buchstaber and N. Erokhovets, *Fullerenes, Polytopes and Toric Topology*. Lecture Note Series, IMS, National University of Singapore, Combinatorial and Toric Homotopy, 67–178 (2017).
- [4] V. M. Buchstaber, N. Erokhovets, M. Masuda, T. Panov and S. Park, *Cohomological rigidity of manifolds defined by right-angles 3-dimensional polytopes*, Russian Math. Surveys **72** (2017), 199–256.
- [5] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
- [6] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2015.
- [7] S. Choi, M. Masuda and S.-i. Oum, *Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 2987–3011.
- [8] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.
- [9] W. Fulton, *An introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. **113**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [10] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68.
- [11] Y. Kamishima and M. Masuda, *Cohomological rigidity of real Bott manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **9** (2009), 2479–2502.
- [12] E. Lee, M. Masuda and S. Park, *Torus orbit closures in the flag variety and a metric on the Weyl group*, preprint.
- [13] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J. **51** (1999), 237–265.
- [14] M. Masuda and T. Panov, *On the cohomology of torus manifolds*, Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746.
- [15] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge Band **15**, A Series of Modern Surveys in Math., Springer-Verlag, 1988.
- [16] A. V. Pogorelov, *Regular decomposition of the Lobachevskii space*, Mat. Zametki **1** (1967), no. 1, 3–8 (Russian).

群作用と多面体 - トーリックトポロジーの観点から -

7

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科
E-mail address: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp

向き付け不可能曲面の写像類群の無限表示について

大森 源城 (東京理科大学・理工学部)*

概要

本稿では、向き付け不可能曲面の写像類群の関係式が簡明な無限表示について解説する。

1. 導入・背景

コンパクト曲面 S に対し、 $\text{Diff}(S)$ を S の境界 ∂S 上恒等的な S の自己微分同相写像全体からなる群とする。ただし、 S が有向曲面の場合は、向きを保つ自己微分同相写像のみを考えることにする。この時、 $\mathcal{M}(S)$ を、境界の各点を固定するアイソトピーによる $\text{Diff}(S)$ の商群とし、 S の写像類群と呼ぶ。

1.1. 有向曲面の場合

$\Sigma_{g,n}$ を種数 $g \geq 0$ で $n \geq 0$ 個の境界成分を持つ連結なコンパクト有向曲面とする。1938年に、Dehn [3] によって、 $\Sigma_{g,n}$ の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ が Dehn twist (第 2.1 章参照) たちで生成される事が示された。その後、Lickorish [15, 17] や Humphries [10] によって $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ の Dehn twist による有限生成系が与えられた。特に、この Humphries の有限生成系は、Dehn twist による生成系の中で最も小さいものである事も論文 [10] の中で証明されている。

$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示は、まず 1980 年に Hatcher-Thurston [8] によって $n = 0$ の場合に与えられた。その後、境界が空でない場合に Harer [7] によって $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示が与えられ、Wajnryb [25] によって $n \in \{0, 1\}$ の場合により簡明な $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示が与えられた。この Wajnryb の表示は、生成系を Humphries [10] の生成系 (を $n = 1$ の場合にも自然に一般化したもの) とし、関係式も既存の表示と比べ、簡明である上にその数が少ないものとなっている。 $n \in \{0, 1\}$ の場合にはこのように簡明な表示が与えられていたが、それまでに知られていた $n \geq 2$ の場合の $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示は、複雑な関係式を多く含んでいた。Gervais [5] は、これらの有限表示を用いて、任意の $g \geq 0$ と $n \geq 0$ に対し $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の簡明な関係式のみを持つ無限表示を構成した。この Gervais の結果は無限表示に関するものであるが、無限表示を構成した事で、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の Dehn twist を生成元とする表示の関係式として、どの様なものが本質的に必要であるかが整理された。その後、Luo [18] により、この Gervais の無限表示をより単純化した無限表示を与えられている (定理 2.6)。更にその後、Gervais [6] は、 $(g, n) = (1, 0)$ の場合を除く任意の $g \geq 1$ と $n \geq 0$ に対し、関係式が簡明な $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示を構成している。

1.2. 向き付け不可能曲面の場合

$N_{g,n}$ を種数 $g \geq 1$ で $n \geq 0$ 個の境界成分を持つ連結な向き付け可能コンパクト曲面とする。すなわち、 $N_{g,n}$ は、 g 個の実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の連結和から n 個の開円板の非交和を取り除いたものである。向き付け不可能曲面の場合には、まず、1963年に Lickorish [14]

* 〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部数学科
e-mail: omori_genki@ma.noda.tus.ac.jp

によって, $g \geq 2$ の場合に写像類群 $\mathcal{M}(N_{g,n})$ が Dehn twist のみでは生成されない事が示された. 更に同論文で, $g \geq 2$ の時, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ が Dehn twist と “crosscap slide” と呼ばれる元 (第 2.2 章参照) によって生成される事を示した. $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限生成系は, $n = 0$ の場合に, Chillingworth [2] によって 1969 年に初めて与えられた. この Chillingworth の生成系は, Dehn twist と crosscap slide によって構成されている. Szepietowski [24] は, この Chillingworth の生成元を減らす事で, Dehn twist と crosscap slide によるより小さい $\mathcal{M}(N_{g,0})$ の有限生成系を与えている. 実際, 廣瀬氏 [9] によって, この Szepietowski の生成系が, Dehn twist と crosscap slide による $\mathcal{M}(N_{g,0})$ の生成系の中で最も小さいものである事が証明されている.

$\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は, $(g, n) = (2, 0)$ の場合に Lickorish [14], $(g, n) = (2, 1)$ の場合に Stukow [21], $(g, n) = (3, 0)$ の場合に Birman-Chillingworth [1], その他の $n \in \{0, 1\}$ の場合に Paris-Szepietowski [20] によって初めて与えられた. その後, Stukow [22] がこの Paris-Szepietowski の表示を書き換え, 生成系を (本質的には) Szepietowski [24] の生成系とする $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示を与えている (定理 2.14). これらの有限表示は, 生成系は簡明なものであるが, 十分種数が大きい場合に複雑な関係式を多く含む. その上, $n \geq 2$ の場合には, 未だ $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は構成されていなかった. 著者は, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の関係式としてどの様なものが必要であるかを整理する為, 任意の $g \geq 1$ と $n \geq 0$ に対し, 関係式が簡明な $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の無限表示の構成を行った (定理 3.1). この結果は, $n \in \{0, 1\}$ の場合は著者の論文 [19] 内で与えられ, $n \geq 2$ の場合は石川工業高等専門学校の小林竜馬氏との共同研究 (論文 [12]) によって与えられた. これらの証明を行う際に, Gervais [5] の議論を参考にし, 既存の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示を用いて証明を行うが, $n \geq 2$ の場合はまだ有限表示が知られていなかった為, 論文 [12] 内で具体的な有限表示 (命題 2.15) を構成し, その表示に対して議論を行った.

2. 準備

2.1. Dehn twist の間の関係式と $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の無限表示

S を $N_{g,n}$ もしくは $\Sigma_{g,n}$ とする. S 上の単純閉曲線 c に対し, c の S 内での正則近傍 $\mathcal{N}_S(c)$ がアニュラス $\Sigma_{0,2}$ と微分同相である時 c は双側であると言い, $\mathcal{N}_S(c)$ がメビウスの帯 $N_{1,1}$ と微分同相である時 c は単側であると言う.

S 上の双側な単純閉曲線 c に対し, $\mathcal{N}_S(c)$ の異なる 2 つの向きを取り, それを $+_c$ と $-_c$ とおく. $\mathcal{N}_S(c)$ の向き $\theta \in \{+_c, -_c\}$ に対し, $t_{c;\theta}$ で c に沿った向き θ に関する右手 Dehn twist を定義する (図 1 参照).

注意 2.1. $\mathcal{N}_S(c)$ の向き $\theta \in \{+_c, -_c\}$ を与える事と図 1 のような曲線 c の脇に矢印を与える事 (この矢印が捻る方向を指示している) は同値である. その為, 以下, 具体的に与えられた双側な単純閉曲線に対しては, 曲線の脇に矢印を与える事で $\mathcal{N}_S(c)$ の向きを表す事とする (図 6 等参照). また, 具体的に単純閉曲線 c と $\mathcal{N}_S(c)$ の向き θ が与えられている時, $t_{c;\theta} = t_c$ と書くことにする.

以下, 補題により Dehn twist の間の関係式をいくつか紹介する.

補題 2.2. (i) S 上の単純閉曲線 c が S 内で円板かメビウスの帯の境界となる時, $t_{c;\theta} = 1 \in \mathcal{M}(S)$ となる,

(ii) 次が成り立つ: $t_{c;+_c} = t_{c^{-1};+_c} = t_{c;^-_c}^{-1}$.

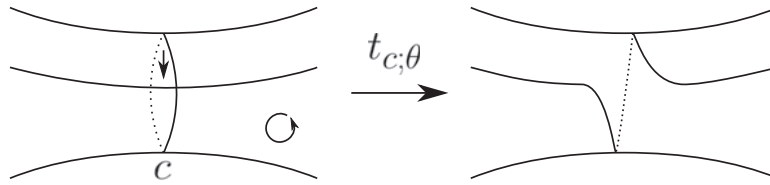


図 1: S 上の双側な単純閉曲線 c に沿った向き θ に関する右手 Dehn twist $t_{c; \theta}$.

補題 2.3 (ブレイド関係式 (i)). $f \in \mathcal{M}(S)$ に対し, 以下が成り立つ:

$$f t_{c; \theta} f^{-1} = t_{f(c); f_*(\theta)},$$

但し, $f_* : \{+c, -c\} \rightarrow \{+f(c), -f(c)\}$ は f が誘導する曲線の近傍の向きの中の写像.

補題 2.3 において, $f = t_{d; \theta'}$ でかつ c と d の幾何学的交点数が m の時のブレイド関係式 (i) をブレイド関係式 T_m と呼ぶ.

補題 2.4 (2-チェイン関係式). c_1 と c_2 を S 上の横断的に 1 点で交わる双側な単純閉曲線とする. c_1 と c_2 の正則近傍 $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ の境界を δ とおき, $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ に向きを一つ与える (図 2 参照). $\mathcal{N}_S(c_i)$ の向き θ_i ($i = 1, 2$) と $\mathcal{N}_S(\delta)$ の向き θ を $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ の向きから誘導される向きとした時, 次が成り立つ:

$$(t_{c_1; \theta_1} t_{c_2; \theta_2})^6 = t_{\delta; \theta}.$$

補題 2.5 (ランタン関係式). Σ を $\Sigma_{0,4}$ と微分同相な S の部分曲面とし, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$ を図 3 のような Σ 上の単純閉曲線とする. Σ に向きを与え, $\mathcal{N}_S(\delta_i)$ の向き θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) と $\mathcal{N}_S(\delta_{i,j})$ の向き $\theta_{i,j}$ ($(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$) を Σ の向きから誘導される向きとした時, 次が成り立つ:

$$t_{\delta_{23}; \theta_{23}} t_{\delta_{13}; \theta_{13}} t_{\delta_{12}; \theta_{12}} = t_{\delta_1; \theta_1} t_{\delta_2; \theta_2} t_{\delta_3; \theta_3} t_{\delta_4; \theta_4}.$$

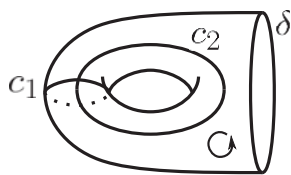


図 2: 単純閉曲線 c_1, c_2 と $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ の境界 δ .

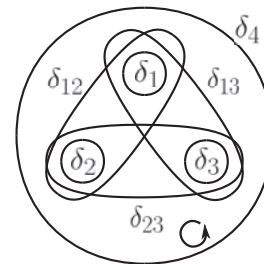


図 3: $\Sigma_{0,4}$ と微分同相な S の部分曲面 Σ 上の単純閉曲線 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$.

Luo [18] は, Gervais [5] が求めた $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の表示を改良し, 以下の表示を得た.

定理 2.6 ([18]). $g \geq 0$ かつ $n \geq 0$ に対し, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の表示は以下で与えられる.

生成系: $\{t_{c; \theta} \mid c : \Sigma_{g,n}$ 上の単純閉曲線, $\theta \in \{+c, -c\}\}$

関係式:

(0) (i) $t_{c; \theta} = 1 \in \mathcal{M}(S)$ (S 上の単純閉曲線 c が S 内で円板の境界となる時),

$$(ii) t_{c;+c} = t_{c^{-1};+c} = t_{c;^{-}c}^{-1},$$

(I) ブレイド関係式 T_0, T_1 ,

(II) 2-チェイン関係式,

(III) ランタン関係式.

2.2. Crosscap pushing map と Dehn twist の間の関係式

この章では, crosscap pushing map を定義し, crosscap pushing map と Dehn twist の間の関係式について紹介する. crosscap pushing map は, 第 1.2 章で紹介した crosscap slide のある意味での一般化となっている.

$N_{g,n}$ 上の 1 点で横断的に交わる単側な単純閉曲線 μ と単純閉曲線 α に対し, $Y_{\mu,\alpha} \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ を, Möbius の帯 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu)$ ($N_{g,n}$ 内の Möbius の帯を **crosscap** と呼ぶ) を α に沿って 1 周させる事で得られる $N_{g,n}$ の微分同相写像のイソトピー類とする (図 4 参照). この $Y_{\mu,\alpha}$ を, **crosscap pushing map** と呼ぶ.

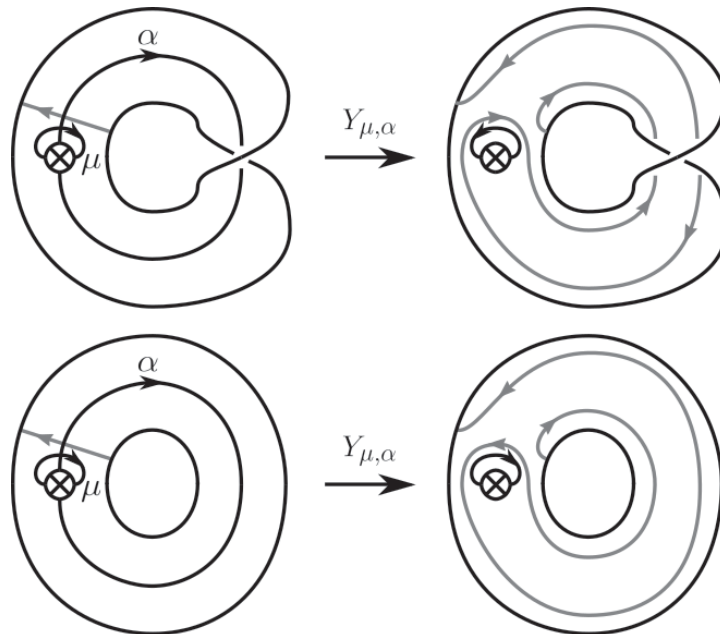


図 4: $N_{g,n}$ 上の曲線 μ と α に関する crosscap pushing map. 上段が α が双側な場合で, 下段が α が単側な場合である.

注意 2.7. α が双側な時, $Y_{\mu,\alpha}$ を **crosscap slide** と呼ぶ. Lickorish [14] により, crosscap slide は Dehn twist の積で表す事が出来ない事が示されている. α が双側である時, 正則近傍 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha)$ は $N_{2,1}$ と微分同相となる為, crosscap slide は $g \geq 2$ の場合に定義出来る. この事が $g \geq 2$ の場合に $\mathcal{M}(N_{g,n})$ が Dehn twist たちで生成されない原因となる.

以下, 補題により crosscap pushing map と Dehn twist の間の関係式をいくつか紹介する.

補題 2.8. 次が成り立つ: $Y_{\mu,\alpha} = Y_{\mu,\alpha^{-1}}^{-1} = Y_{\mu^{-1},\alpha}$.

補題 2.9 (ブレイド関係式 (ii)). $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ に対して, 以下が成り立つ.

$$fY_{\mu,\alpha}f^{-1} = Y_{f(\mu),f(\alpha)}.$$

補題 2.10 ([13] の Lemma 2.2). α と μ を横断的に 1 点で交わる $N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線とし, δ_1 と δ_2 をそれぞれ正則近傍 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha) \approx N_{1,2}$ の境界成分となる単純閉曲線とする. $\mathcal{N}_S(\delta_i)$ ($i = 1, 2$) の向き θ_i ($i = 1, 2$) を図 5 の様な向きとした時, 以下が成り立つ:

$$Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1;\theta_1}t_{\delta_2;\theta_2}^{-1}.$$

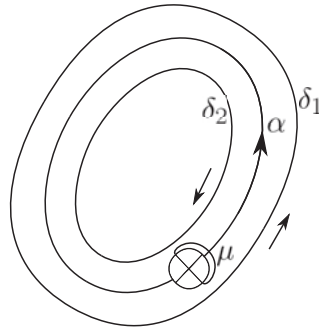


図 5: α が単側な場合の正則近傍 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha) \approx N_{1,2}$ と $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha)$ の境界となる δ_i ($i = 1, 2$). ここで, 図中の \otimes 印は crosscap を表している.

以下で crosscap pushing map の異なる見方を与える. 曲面 S と単位円板 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ の埋め込み $e : \mathbb{D} \hookrightarrow \text{int}(S)$ に対し, $D := e(\mathbb{D})$ とおく. この時, $S - \text{int}(D)$ を ∂D の各対蹠点を同一視することによって得られる曲面を S' とする. このようにして S から S' を得る操作を S の D に関する **blowup** と呼ぶ. ∂D の $S - \text{int}(D)$ 内での正則近傍は blowup 後に S' 内の crosscap となるに注意する. また, blowup の逆操作, すなわち曲面 S' をその内部の単側な単純閉曲線 μ で切り開き, その得られた境界に円板 D_μ を貼り合せて曲面 S を得る操作を S' の μ に関する **blowdown** と呼ぶ.

$N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線 μ を取る. この時, $N_{g,n}$ の μ に関する blowdown によって得られる曲面を \bar{S} とし, blowdown の過程で現れる円板 D_μ との同一視 $e_\mu : \mathbb{D} \rightarrow D_\mu$ を与える. D_μ の中心点 $x_\mu \in D_\mu$ に対し, $\mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$ を $\partial \bar{S}$ の各点と x_μ を固定する自己微分同相写像のアイソトピー類からなる群とする. この時, **blowup homomorphism**

$$\varphi_\mu : \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$$

とは以下のように定義される準同型写像である. 各 $h \in \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$ に対し, h の代表元 $h' \in \text{Diff}(\bar{S})$ として次の条件 (a) 若しくは (b) を満たすものをとる:

- (a) $h'|_{D_\mu} = \text{id}_{D_\mu}$,
- (b) $h'(x) = e_\mu(\overline{e_\mu^{-1}(x)})$ ($x \in D_\mu$),

但し $z \in \mathbb{C}$ に対し $\bar{z} \in \mathbb{C}$ を z の複素共役とする. このような h' は D_μ に関する blowup と適合するため ([23, Subsection 2.3] 参照), $\varphi_\mu(h) \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ は well-defined に定まる.

また, *point pushing map*

$$j_\mu : \pi_1(\bar{S}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$$

とは, x_μ を基点とする \bar{S} 上の各ループ γ に対して, x_μ を γ に沿って 1 周させることで得られる \bar{S} の自己微分同相写像のアイソトピー類 $j_\mu(\gamma) \in \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$ を対応させる事で得られる準同型写像である.

注意 2.11. 本稿では, j_μ を準同型写像にする為に, $\pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ の積の順番も右から読むことにする. すなわち, $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ に対し, $\gamma_2\gamma_1 \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ とは, $\gamma_2\gamma_1(t) = \gamma_1(2t)$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$) かつ $\gamma_2\gamma_1(t) = \gamma_2(2t-1)$ ($\frac{1}{2} \leq t \leq 1$) となるものである.

この時, point pushing map と blowup homomorphism の合成

$$\psi_\mu := \varphi_\mu \circ j_\mu : \pi_1(N_{g-1,n}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$$

もまた *crosscap pushing map* と呼び, $\psi_\mu(\gamma)$ を γ に沿った crosscap pushing map と呼ぶ.

横断的に 1 点で交わる $N_{g,n}$ 上の閉曲線 α と単側な単純閉曲線 μ に対し, $\bar{\alpha}$ を \bar{S} 上の x_μ を起点とするループで α から blowdown によって得られるものとする. α が単純である時は, $\bar{\alpha}$ を \bar{S} 上の単純ループとして取っておく. この時, 以下が成り立つ ([13, Lemma 2.2, Lemma 2.3] 参照).

補題 2.12. 横断的に 1 点で交わる $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 α と単側な単純閉曲線 μ に対し, 次が成り立つ.

$$\psi_\mu(\bar{\alpha}) = Y_{\mu,\alpha}.$$

次の関係式は, crosscap pushing map $\psi_\mu : \pi_1(\bar{S}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ から得られる.

補題 2.13. μ を $N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線とし, α と β を $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線でそれぞれ μ と 1 点で横断的に交わるものとする. 積 $\bar{\alpha}\bar{\beta} \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ が \bar{S} 上の単純ループで代表されると仮定する. $\alpha\beta$ を $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線で $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ となるものとする. この時, 以下の関係式を得る:

$$Y_{\mu,\alpha}Y_{\mu,\beta} = Y_{\mu,\alpha\beta}.$$

2.3. $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示

本章では, 主結果の証明に用いる $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示について紹介する. 単位円板 \mathbb{D} の 2 次元球面 Σ_0 への互いに交わらない埋め込み $e_i : \mathbb{D} \hookrightarrow \Sigma_0$ ($i = 1, \dots, g+n$) をとり, $D_i := e_i(\mathbb{D})$ とおく. この時 $N_{g,n}$ のモデルとして, $\Sigma_0 - \text{int}(\sqcup_{i=g+1}^{g+n} D_i)$ の $D_1 \sqcup \dots \sqcup D_g$ に関する blowup によって得られる曲面をとる (図 6 参照).

$N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 α_i ($i = 1, \dots, g-1$), β , μ_1 を図 6 のように取る. この時, それらの曲線に関する Dehn twist や crosscap slide を以下で定義する.

$$a_i := t_{\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, g-1),$$

$$b := t_\beta,$$

$$y := Y_{\mu_1, \alpha_1}.$$

Epstein [4] によって, $\mathcal{M}(N_{1,n})$ ($n \in \{0, 1\}$) が自明になることが知られている. 以下の有限表示は $(g, n) = (2, 0)$ の時に Lickorish [14], $(g, n) = (2, 1)$ の時に Stukow [21], $(g, n) = (3, 0)$ の時に Birman-Chillingworth [1], そしてその他の (g, n) の時 ($n \in \{0, 1\}$) に Stukow [22] が与えたものである.

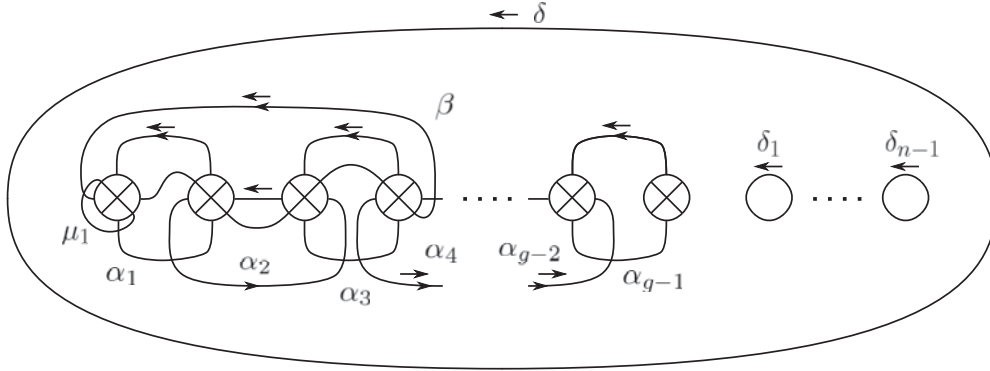


図 6: $N_{g,n}$ のモデルと $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta, \mu_1, \delta, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$.

定理 2.14 ([14], [1], [21], [22]). $(g, n) = (2, 0), (2, 1), (3, 0)$ に対し, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ は以下の表示を持つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(N_2) &= \langle a_1, y \mid a_1^2 = y^2 = (a_1 y)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ \mathcal{M}(N_{2,1}) &= \langle a_1, y \mid y a_1 y^{-1} = a_1^{-1} \rangle, \\ \mathcal{M}(N_3) &= \langle a_1, a_2, y \mid a_1 a_2 a_1 = a_2 a_1 a_2, y^2 = (a_1 y)^2 = (a_2 y)^2 = (a_1 a_2)^6 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

$g \geq 4$ かつ $n \in \{0, 1\}$, 若しくは $(g, n) = (3, 1)$ の時, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ は以下のような表示を持つ. 生成元は $(g, n) = (3, 1)$ の時 a_1, a_2, y で, $g \geq 4$ の時 $a_1, \dots, a_{g-1}, y, b$. 関係式は以下のものである:

- (A1) $[a_i, a_j] = 1$ ($g \geq 4, |i - j| > 1$),
- (A2) $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ ($i = 1, \dots, g - 2$),
- (A3) $[a_i, b] = 1$ ($g \geq 4, i \neq 4$),
- (A4) $a_4 b a_4 = b a_4 b$ ($g \geq 5$),
- (A5) $(a_2 a_3 a_4 b)^{10} = (a_1 a_2 a_3 a_4 b)^6$ ($g \geq 5$),
- (A6) $(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^{12} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^9$ ($g \geq 7$),
- (A9a) $[b_2, b] = 1$ ($g = 6$),
- (A9b) $[a_{g-5}, b_{\frac{g-2}{2}}] = 1$ ($g \geq 8$ even),
 但し, $b_0 = a_1, b_1 = b$,
 $b_{i+1} = (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3} b_i)^5 (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3})^{-6}$ ($1 \leq i \leq \frac{g-4}{2}$),
- (B1) $y(a_2 a_3 a_1 a_2 y a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1}) = (a_2 a_3 a_1 a_2 y a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1}) y$ ($g \geq 4$),
- (B2) $y(a_2 a_1 y^{-1} a_2^{-1} y a_1 a_2) y = a_1 (a_2 a_1 y^{-1} a_2^{-1} y a_1 a_2) a_1$,
- (B3) $[a_i, y] = 1$ ($g \geq 4, i = 3, \dots, g - 1$),
- (B4) $a_2 (y a_2 y^{-1}) = (y a_2 y^{-1}) a_2$,
- (B5) $y a_1 = a_1^{-1} y$,

$$(B6) \quad byby^{-1} = \{a_1 a_2 a_3 (y^{-1} a_2 y) a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}\} \{a_2^{-1} a_3^{-1} (y a_2 y^{-1}) a_3 a_2\} \quad (g \geq 4),$$

$$(B7) \quad [(a_4 a_5 a_3 a_4 a_2 a_3 a_1 a_2 y a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_3^{-1} a_5^{-1} a_4^{-1}), b] = 1 \quad (g \geq 6),$$

$$(B8) \quad \{(y a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1}) b (a_4 a_3 a_2 a_1 y^{-1})\} \{(a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1}) b^{-1} (a_4 a_3 a_2 a_1)\} \\ = \{(a_4^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1}) y (a_2 a_3 a_4)\} \{a_3^{-1} a_2^{-1} y^{-1} a_2 a_3\} \{a_2^{-1} y a_2\} y^{-1} \quad (g \geq 5),$$

$$(C1) \quad (a_1 a_2 \cdots a_{g-1})^g = 1 \quad (g \geq 4 \text{ even}, n = 0),$$

$$(C2) \quad [a_1, \rho] = 1 \quad (g \geq 4, n = 0),$$

$$\text{但し, } \rho = (a_1 a_2 \cdots a_{g-1})^g \quad (g \text{ odd}),$$

$$\rho = (y^{-1} a_2 a_3 \cdots a_{g-1} y a_2 a_3 \cdots a_{g-1})^{\frac{g-2}{2}} y^{-1} a_2 a_3 \cdots a_{g-1} \quad (g \text{ even}),$$

$$(C3) \quad \rho^2 = 1 \quad (g \geq 4, n = 0),$$

$$(C4) \quad (y^{-1} a_2 a_3 \cdots a_{g-1} y a_2 a_3 \cdots a_{g-1})^{\frac{g-1}{2}} = 1 \quad (g \geq 4 \text{ odd}, n = 0),$$

$$\text{但し, } [x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}.$$

$n \geq 2$ の場合の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は、小林氏と著者による共同研究によって具体的に構成された ([12] 参照). しかし、その有限表示の関係式が多すぎる為、本稿では、その有限表示の生成系のみ紹介する事とする.

図 6, 図 7 の $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\delta_i, \alpha_{i,j}, \rho_{i,j}, \sigma_{i,j}, \bar{\sigma}_{i,j}$ に対し、以下の様に定義する.

$$d_i := t_{\delta_i} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$a_{i,j} := t_{\alpha_{i,j}} \quad (1 \leq i \leq g-1, 1 \leq j \leq n-1),$$

$$r_{i,j} := t_{\rho_{i,j}} \quad (1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq n-1),$$

$$s_{i,j} := t_{\sigma_{i,j}} \quad (1 \leq i < j \leq n-1),$$

$$\bar{s}_{i,j} := t_{\bar{\sigma}_{i,j}} \quad (1 \leq i < j \leq n-1),$$

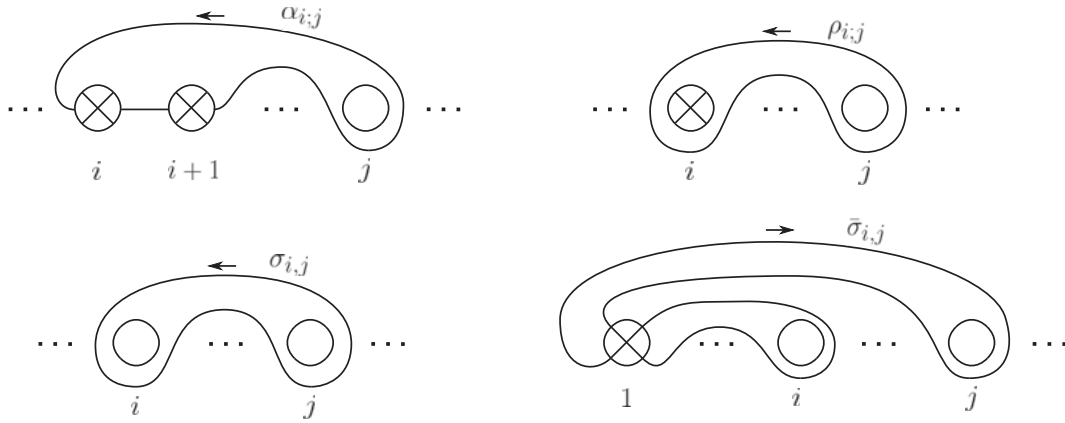


図 7: $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\alpha_{i,j}, \rho_{i,j}, \sigma_{i,j}, \bar{\sigma}_{i,j}$.

小林氏と著者が得た $n \geq 2$ の場合の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は以下のようなものである.

命題 2.15 (Kobayashi-O. ([12])). $g \geq 1$ と $n \geq 2$ に対し、 $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は、定理 2.14 の $\mathcal{M}(N_{g,1})$ の有限表示に以下の生成元と関係式を加える事で得られる.

加える生成元: d_i ($i = 1, \dots, n-1$), $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq g-1, 1 \leq j \leq n-1$), $r_{i,j}$ ($1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq n-1$), $s_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n-1$), $\bar{s}_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n-1$).

加える関係式: ある有限個の関係式.

3. 主結果

以下が本稿の主結果である.

定理 3.1 (Kobayashi-O.). $g \geq 1$ かつ $n \geq 0$ に対し, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は以下で与えられる.

生成系: $\{t_{c;\theta} \mid c: N_{g,n}$ 上の双側な単純閉曲線, $\theta \in \{+c, -c\}\}$
 $\cup \{Y_{\mu,\alpha} \mid \mu: N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線, $\alpha: N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\}$

X を上の生成元からなる集合とする.

関係式:

(0) (i) $t_{c;\theta} = 1$ (c が $N_{g,n}$ 上で円板若しくは Möbius の帯を張る時),

(ii) $t_{c;+c} = t_{c^{-1};+c} = t_{c;-c}^{-1}$,

(iii) $Y_{\mu,\alpha} = Y_{\mu,\alpha^{-1}}^{-1} = Y_{\mu^{-1},\alpha}$,

(I) ブレイド関係式

$$\begin{cases} (i) & ft_{c;\theta}f^{-1} = t_{f(c);f_*(\theta)} \quad (f \in X), \\ (ii) & fY_{\mu,\alpha}f^{-1} = Y_{f(\mu),f(\alpha)} \quad (f \in X), \end{cases}$$

(II) 2-チェイン関係式,

(III) ランタン関係式,

(IV) 補題 2.13 の関係式 (i.e. $Y_{\mu,\alpha\beta} = Y_{\mu,\alpha}Y_{\mu,\beta}$),

(V) 補題 2.10 の関係式 (i.e. $Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1;\theta_1}t_{\delta_2;\theta_2}^{-1}$).

注意 3.2. 定理 3.1 の関係式 (0) は, $N_{g,n}$ 内の円板若しくは Möbius の帯の境界となるような曲線に沿った Dehn twist は生成元として不要という意味を持ち, 関係式 (V) は, α が単側であるような crosscap pushing map $Y_{\mu,\alpha}$ は Dehn twist の積で表されるため生成元として不要という意味を持つ. つまり, 定理 3.1 の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は, 本質的には, 生成元を全ての非自明な Dehn twist と crosscap slide とし, (I), (II), (III), (IV) の関係式を持つ表示となっている.

定理 3.1 の証明の概略. G を定理 3.1 の表示から得られる群とする. 以降, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ を定理 2.14 または命題 2.15 の有限表示から得られる群と同一視する. $\mathcal{M}(N_{g,n})$ と G の間の同型写像を以下の様に構成する事で定理 3.1 を示す.

X_0 を, 定理 2.14 または命題 2.15 の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示の生成元集合とする. $F(X_0)$ を X_0 によって自由に生成される自由群とし, $\pi: F(X_0) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ を定理 2.14 または命題 2.15 の表示から得られる自然な全射準同型写像とする. 更に, 準同型写像 $\nu: F(X_0) \rightarrow G$ を各 $x \in X_0$ に対し $\nu(x) := x$ で定義する. この時, 写像 $\psi: \mathcal{M}(N_{g,n}) \rightarrow G$ を, 各 $x \in X_0$ に対しては $\psi(x^{\pm 1}) := x^{\pm 1}$ (符号同順), その他の $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ に対しては $\psi(f) := \nu(\tilde{f})$ で定義する. ここで, $\tilde{f} \in F(X_0)$ は $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ の π に関する勝手なリフトである (下図参照).

$$\begin{array}{ccc}
 F(X_0) & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \nu & \\
 \mathcal{M}(N_{g,n}) & \xrightarrow{\psi} & G
 \end{array}$$

X を定理 3.1 の表示の生成系とした時に, 自然な写像 $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ は全射準同型写像 $\varphi: G \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ を誘導する. φ と ψ の定義より, もし ψ が準同型写像ならば, $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{M}(N_{g,n})}$ となり, 特に, ψ は単射である事が分かる. 従って, ψ が準同型写像でかつ全射であることを示す事で ψ が同型写像である事が分かり, 定理 3.1 が得られる. この証明の本質的な部分は ψ が準同型写像であることを証明する部分にあり, これは定理 2.14 と命題 2.15 の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示の全ての関係式が定理 3.1 の表示の関係式から得られる事で証明できる.

□

謝辞: この度第66回トポロジーシンポジウムにお招き下さった世話人の小林真人氏 (秋田大理工), 中江康晴氏 (秋田大理工), 山口祥司氏 (秋田大教育文化), 大本亨氏 (北大理), 佐伯修氏 (九大IMI) に心から感謝申し上げます.

参考文献

- [1] J. S. Birman, D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Philos. Soc. **71** (1972), 437–448.
- [2] D. R. J. Chillingworth, *A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **65** (1969), 409–430.
- [3] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Das arithmetische Feld auf Flächen (German), Acta Math. **69** (1938), no. 1, 135–206.
- [4] D. B. A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.
- [5] S. Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3097–3132.
- [6] S. Gervais, *A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface*, Topology **40** (2001), no. 4, 703–725.
- [7] L. Harer, *The second homology group of the mapping class groups of orientable surfaces*, Invent. Math. **72**, 221–239 (1983)
- [8] A. Hatcher, W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Top. **19** (1980), 221–237.
- [9] S. Hirose, *Generators for the mapping class group of the nonorientable surface*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 154–159.
- [10] S. P. Humphries, *Generators for the mapping class group*, Lecture Notes in Math., **722**, Springer, (1979), 44–47.
- [11] D. L. Johnson, *Presentations of Groups*, London Math. Soc. Stud. Texts **15** (1990).
- [12] R. Kobayashi, G. Omori, *An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface with boundary*, arXiv:1610.04999.
- [13] M. Korkmaz, *Mapping class groups of nonorientable surfaces*, Geom. Dedicata. **89** (2002), 109–133.
- [14] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Camb. Philos. Soc. **59** (1963), 307–317.
- [15] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964), 769–778.

- [16] W. B. R. Lickorish, *On the homeomorphisms of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Philos. Soc. **61** (1965), 61–64.
- [17] W. B. R. Lickorish, *On the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **62** (1966), 679–681.
- [18] F. Luo, *A presentation of the mapping class groups*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 735–739.
- [19] G. Omori, *An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), 419–437.
- [20] L. Paris and B. Szepietowski, *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, Bull. Soc. Math. France **143** (2015), no. 3, 503–566.
- [21] M. Stukow, *Dehn twists on nonorientable surfaces*, Fund. Math. **189** (2006), 117–147.
- [22] M. Stukow, *A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 12, 2226–2239.
- [23] B. Szepietowski, *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata **160** (2012), 169–183.
- [24] B. Szepietowski, *A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **36** (2013), 1–14.
- [25] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1989), 157–174.

2次元ファイバー結び目に対する Gluck twist について

福田 瑞季 (東京学芸大学 日本学術振興会特別研究員PD)*

1. はじめに

2次元結び目とは4次元球面に滑らかに埋め込まれた2次元球面のことをいう。特にその補空間が S^1 上のファイバー構造を有するとき、その結び目をファイバー結び目という。具体的な2次元結び目の構成については Artin によって具体的な2次元ファイバー結び目の構成については Zeeman によるツイストスパン結び目 [15] や Litherland によるツイストロールスパン結び目 [9] などが知られているが、本稿では Pao により構成された branched twist spin を扱う。ここで、Branched twist spin の定義を簡単に述べる(詳しい定義は §2.2 参照)。 S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1 -作用を考える。この作用による軌道空間が S^3 であるとき、固定点は2点であり、例外軌道は高々2種類存在するが、1種類の例外軌道と固定点全体の和集合は2次元球面と微分同相になる。この2次元球面を branched twist spin という。

1次元ファイバー結び目、つまり S^3 に滑らかに埋め込まれた S^1 でファイバーであるもの、については Nielsen-Thurston によってそのファイバー束のモノドロミーが irreducible, pseudo-Anosov, reducible の3種類に分類できることが知られている [14]。特に irreducible に対応するものはトーラス結び目、pseudo-Anosov に対応するものは双曲結び目、reducible に対応するものはサテライト結び目と呼ばれるクラスに属しており、それぞれのクラスが1次元結び目の代表的なクラスとして知られている。一方で2次元ファイバー結び目に関して、periodic に対応するものは branched twist spin と呼ばれる2次元結び目であることが Plotnick により知られている [11] が、それ以外のモノドロミーは定式化されておらず、また属する2次元結び目のクラスも知られていない。

一方で Gluck twist とは S^4 から2次元結び目の開近傍を取り除き、ある写像 γ によって貼り戻す操作のことをいう。Gluck は $S^2 \times S^1$ 上の向きを保つ微分同相写像のうち、アイソトピーで移り合うもの及び $S^2 \times D^2$ へ拡張できるものを同一視した同値類全体がなす群は Z^2 と同型であり、特にその生成元が γ であることを示した [7]。これにより、2次元結び目に沿った手術で本質的なものは高々2種類しかないことがわかる。Gluck twist によって4次元球面と2次元結び目の組から新たな4次元球面と2次元結び目の組が得られるが、新たな4次元多様体は閉かつ単連結であるので、Freedman による位相的4次元ポアンカレ予想の結果から4次元球面と同相なものであることがわかるが、この4次元多様体が S^4 と微分同相であるかどうかは未解決問題である。実際、Gluck twist は4次元ポアンカレ予想の反例の候補として研究されている。

そこで本稿では次の定理に基づいて Gluck twist による branched twist spin の変化を考察する。

本研究は科研費(課題番号:18J11484)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-code1, MSC-code2

キーワード: Surface knots, Gluck surgery

* 〒184-8501 東京都小金井市貫井北町4丁目1-1 東京学芸大学 教育学部
e-mail: mfukuda@u-gakugei.ac.jp

定理 1.1 (Pao[10]). Branched twist spin に沿った Gluck twist で得られる 4 次元多様体は S^4 と微分同相である.

この定理により, branched twist spin に対して Gluck twist を行う前後の 2 次元結び目の比較が可能となり, 実際にどのような結び目になるかを決定できたので, その結果について説明する.

2. Branched twist spins

2.1. S^1 -作用

4 次元球面上の局所滑らかかつ効果的な S^1 -作用は Fintushel と Pao により次の定理が知られている.

定理 2.1 (Fintushel [2], Pao [10]). S^4 上の局所滑らかかつ効果的な S^1 -作用の弱同値類全体の集合と orbit data と呼ばれる次の 4 つのタイプ全体の集合には 1 : 1 対応が存在する.

$$\{D^3\}, \{S^3\}, \{S^3, m\}, \{(S^3, K), m, n\} \quad (m, n \text{ は互いに素な正整数}).$$

ここで, 2 つの作用 τ と τ' が弱同値であるとは, ある S^4 上の微分同相写像 H と S^1 上の自己同型写像 α が存在して, 次の図式が可換になることをいう.

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^4 & \xrightarrow{\alpha \times \text{id}} & S^1 \times S^4 \\ \tau \downarrow & & \tau' \downarrow \\ S^4 & \xrightarrow{H} & S^4 \end{array}$$

Orbit data は次の情報を持つ ;

$\{D^3\}$... 軌道空間は D^3 , 固定点集合は S^2 , 例外軌道なし.

$\{S^3\}$... 軌道空間は S^3 , 固定点集合は 2 点集合, 例外軌道なし.

$\{S^3, m\}$... 軌道空間は S^3 , 固定点集合は 2 点集合, Z_m -タイプの例外軌道が存在.

$\{(S^3, K), m, n\}$... 軌道空間は S^3 , 固定点集合は 2 点集合, Z_m -タイプと Z_n -タイプの例外軌道が存在し, 自由軌道以外の軌道空間への像は単純閉曲線 K をなす.

注意 2.2. 定理 2.1 は 3 次元ポアンカレ予想が解決する前に示された主張である. 実際, Fintushel の論文 [2] では 定理 2.1 内の S^4 はホモトピー 4 次元球面, D^3 はホモトピー 3 次元球体, S^3 はホモトピー 3 次元球面として示している. その後 Pao により, S^4, D^3, S^3 と微分同相であることが示され, 定理 2.1 の主張が成立する.

それぞれの orbit data に対応する代表的な S^1 -作用を紹介する. 3次元上半空間 \mathbb{R}_+^3 を境界の \mathbb{R}^2 を軸に 1 回転させたものをコンパクト化することにより S^4 が得られる. この回転は S^1 -作用であり固定点が S^2 であるので, orbit data $\{D^3\}$ に対応する S^1 -作用になっている. それ以外の orbit data に対応する S^1 -作用は, S^3 上の S^1 -作用を用いて次のように構成する. まず, $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ を \mathbb{C}^2 内の単位球面とし, この S^3 上の固定点のない S^1 作用を考える. Jacoby と Seifert によって S^3 上の固定点のない任意の S^1 作用は互いに素な正の整数 m, n を用いて,

$$e^{i\phi}(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 e^{i(\theta_1 + m\phi)}, r_2 e^{i(\theta_2 + n\phi)}) \quad (2.1)$$

なる S^1 作用と同値であることが知られている [5, 13]. 注意として, $m = n = 1$ であれば, ホップファイブレーションである. この作用の軌道空間は S^2 であり, もし $m \neq 1$ であれば, \mathbb{Z}_m -タイプの例外軌道が存在する. ここで, \mathbb{Z}_m -タイプの例外軌道とは, 固定部分群が \mathbb{Z}_m と同型になる軌道のことである. 例外軌道が存在する場合には, それぞれ \mathbb{Z}_m -タイプと \mathbb{Z}_n -タイプの例外軌道全体の集合を E_m, E_n と書くことにする. また, E_m と E_n の作用による像をそれぞれ E_m^*, E_n^* とする. 上の S^1 -作用をもつ S^3 に対し, 懸垂を考えることで S^4 上の S^1 -作用を得る. もし上の作用で, \mathbb{Z}_m -タイプのみの例外軌道を持つとき, S^4 上では例外軌道と固定点の和集合 $E_m \cup F$ は2次元球面であり, $E_m^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の弧になる. もし \mathbb{Z}_m -タイプと \mathbb{Z}_n -タイプの2種類を例外軌道として持つとき, $E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ はそれぞれ2次元球面であり, 2点の固定点 F でのみ横断的に交わっている. また, $E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の自明な結び目 \mathcal{O} になっている. 上の m, n に対して, 一般の結び目 K を構成する場合には, \mathcal{O} の閉近傍 $N(\mathcal{O})$ から K の閉近傍 $N(K)$ への同相写像を用いて orbit data 内の m, n を変えずに K を構成することができる. この K に対して, Fintushel は貼り合わせの情報から全空間の基本群が自明になることを示し, $\{(S^3, K), m, n\}$ の全空間がホモトピー4次元球面である. また, Pao は帰納法によって, $\{S^3\}, \{S^3, m\}, \{(S^3, K), m, n\}$ の全空間は全て微分同相であることを示した. 特に, $\{S^3\}$ の全空間は上記に述べた通り S^4 と微分同相になるので, 全ての orbit data に対応する S^4 上の S^1 -作用が構成されたことになる.

2.2. Branched twist spins

Branched twist spin の定義には orbit data $\{(S^3, K), m, n\}$ を用いる.

定義 2.3. $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ を S^3 内の1次元結び目とする. このとき, K の (m, n) -branched twist spin を $K^{m,n} := E_n \cup F$ で定める.

注意として, Fintushel と Pao の定理によって K は任意の1次元結び目を取ることができるので, branched twist spin は K と互いに素な正の整数 m, n により決定される. また, $n = 1$ のとき, $(m, 1)$ -branched twist spin は Zeeman によって構成された m -ツイストスパン結び目となる.

次に S^4 を branched twist spin に沿って分解する. その為にまず軌道空間 S^3 の分解を与え, S^1 -作用の逆像として S^4 の分解を考える. 例外軌道の像 E_m^* と E_n^* の内部にそれぞれ図1のような真閉部分集合 E_m^{c*}, E_n^{c*} を取ることで, 軌道空間 S^3 は次のように分解できる.

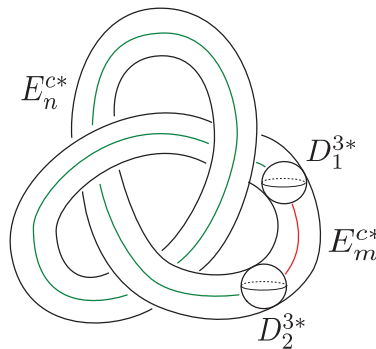


図 1: $N(K)$ の分解

$$S^3 = N(F^*) \cup N(E_m^*) \cup N(E_n^*) \cup (S^3 \setminus \text{int}N(K)).$$

ここで、 $N(-)$ は括弧内の閉近傍を表す．今、固定点2点のうち、1点の近傍を D^{3*} と書くことにする．この近傍の境界 ∂D^{3*} の S^1 -作用による逆像は S^3 であり、 S^1 -作用は(2.1) で表されるものである．今、 D_m^2 を円盤 D^2 の中心を分岐点にもつ m 重分岐被覆とすると、 S^3 は例外軌道を2種類持つので、その例外軌道に沿って S^3 を2つのソリッドトーラス $\partial D_m^2 \times D_n^2$ と $D_m^2 \times \partial D_n^2$ に分けることができる．この S^3 の錐を取ることににより4次元球 B^4 上の S^1 -作用で、軌道空間が D^{3*} であるものが構成できる．もう一方の固定点でも同様の議論を行うことにより、

$$N(F) \cong D_m^2 \times F^* \times D_n^2$$

が得られる．また、 $\partial D_m^2 \times D_n^2$ は E_m^* 上の各点を中心とする K のメリディアン円板の S^1 -作用による逆像であることに注意すると、

$$N(E_m^c) \cong \partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$$

が得られる．同様に、

$$N(E_n^c) \cong D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2$$

が得られる．最後に、 $S^3 \setminus \text{int}N(K)$ の S^1 -作用による逆像は主 S^1 -束の構造をもち、 $H_2(S^3 \setminus \text{int}N(K), \mathbb{Z}) = 0$ であることから、 $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ であることが従う．以上の考察をまとめると、 S^4 は次の分解をもつ．

$$S^4 = (D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2) \cup ((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1). \quad (2.2)$$

3. Branched twist spin に沿った Gluck twist

前章で、branched twist spin に沿った S^1 -作用による S^4 の分解(2.2)を与えた．この章では、分解したピースに座標を入れることで、貼り合わせ写像を具体的に与え、Gluck twist によって得られる4次元多様体を具体的に考察する．

最初に S^4 の向きと S^1 -作用を固定する．軌道空間の部分集合である $S^3 \setminus \text{int}N(K)$ の座標 (θ, x, h) を次のように定める．境界 $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K))$ の座標として preferred meridian-longitude 対 (θ, x) をとる．この境界 $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K))$ の $S^3 \setminus \text{int}N(K)$ 内の近傍として $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times [0, 1]$ を考え、その座標を (θ, x, y) とする．注意として $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K))$ は $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times \{0\}$ に位置するものとする．座標 (θ, x, y) と S^1 -作用の座標である h を用いて $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の座標 (θ, x, y, h) が S^4 の向きと一致するように定める．これにより $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の座標 (θ, x, h) が定まる．

固定点の近傍である $D_m^2 \times F^* \times D_n^2$ の座標は次のように定める．2つの4次元球をそれぞれ B_1^4, B_2^4 とし、 (r_1, θ_1) と (r_2, θ_2) をそれぞれ B_1^4 内の D_m^2 と D_n^2 の極座標とする．必要があれば、 $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ の向きを適切に取り直すことで、座標 $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$ が S^4 の向きと一致するよう取ることができる．また、必要であれば B_1 と B_2 の添え字を入れ替えることで、上で定めた座標 x は B_1 の原点から出発し、 $E_{c^*}m$ を通り B_2 の原点へ向かう方向としてよい(図2を見よ)．同様に、 (r'_1, θ'_1) と (r'_2, θ'_2) をそれぞれ B_2^4 内の D_m^2 と D_n^2 の極座標とする．必要があれば、 $r'_1, r'_2, \theta'_1, \theta'_2$ の向きを適切に取り直すことで、座標 $(r'_1, \theta'_1, r'_2, \theta'_2)$ が S^4 の向きと一致するよう取ることができる．

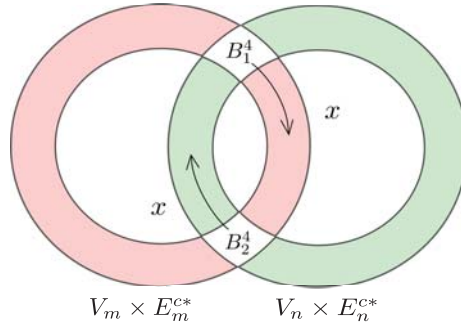


図 2: $V_m \times E_m^{c*}$ と $V_n \times E_n^{c*}$ 上の座標 x

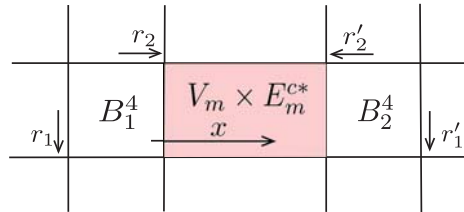


図 3: 座標 r_1, r_2, r_1', r_2', x

このとき, $r_1 = r_1', \theta_1 = \theta_1', r_2 = -r_2', \theta_2 = \theta_2'$ となることを注意しておく (図 3 を見よ).

最後に $\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2$ と $D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2$ 上の座標を定める. これらの座標は上で定めた B_1^4, B_2^4 から誘導されるものであり, どちらも (θ_1, x, θ_2) で表される.

以上により定めた座標を用いて貼り合わせ写像を考える. Branched twist spin の結び目補空間を構成する為に, $\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$ と $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の貼り合わせを考える. それぞれのピースには自由軌道が存在しており, 各自由軌道は $\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$ 内では θ_1 方向に m 周, θ_2 方向に n 周するような単純閉曲線であり, $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ 内では h 方向に 1 周する単純閉曲線である. このことから貼り合わせ写像 $g : \partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2 \rightarrow \partial((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1)$ は次のように定義される.

$$(\theta, x, h) = g(\alpha\theta + nh, x, -\beta\theta + mh).$$

ここで, α, β は $m\alpha + n\beta = 1$ を満たす整数である. 座標 (θ_1, x, θ_2) を用いれば, g は次のように書ける.

$$g(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - n\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2).$$

この写像を用いて $K^{m,n}$ の結び目補空間 $S^4 \setminus \text{int}(N(K^{m,n}))$ は次の分解をもつ.

$$S^4 \setminus \text{int}(N(K^{m,n})) = (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1)$$

同様に, $D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2$ と $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の貼り合わせ写像 $e : \partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2 \rightarrow \partial((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1)$ は次のように定義される.

$$e(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - n\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2).$$

最後に, $D_m^2 \times F^* \times D_n^2$ が $(\partial D_m^2 \times \partial E_m^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times \partial E_n^{c*} \times \partial D_n^2)$ の錐で得られることに注意をすると, $S^3 \setminus \text{int}N(K) \times S^1$ の貼り合わせは g と e の自然な拡張で得られることがわかる.

これらの貼り合わせ写像を用いて S^4 の分解 (2.2) は次のようになる。

$$S^4 = ((D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2)) \cup_{e''} ((D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int} N(K)) \times S^1)). \quad (3.1)$$

ここで, e'' は e を $(D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2)$ へと拡張した写像である。

ここまでの考察で S^4 の分解を与えることができたので, 以下では Gluck twist によって得られる 4次元多様体の分解について説明する. 先に Gluck twist の具体的な表示を与えておく. 2次元結び目の近傍の境界と微分同相である $S^2 \times \partial B^2$ を次の3つの連結成分に分ける¹.

$$S^2 \times \partial B^2 = (D^2 \times \partial I \times \partial B^2) \cup (S^1 \times I \times \partial B^2).$$

ここで $D^2 \times \partial I \times \partial B^2$ に関して, D^2 の極座標を (r, θ) , ∂B^2 の座標を同じく極座標で ϕ とすると, $S^1 \times I \times \partial B^2$ に関して, 第一成分の S^1 の座標は θ , 第三成分の ∂B^2 座標は ϕ を用いて表すことができる. また, I の座標を x で書くことにする. 注意として, θ は S^2 上の緯線に平行な座標, x は S^2 上の経線に平行な座標である. この座標を用いて Gluck twist $\gamma = \nu \cup \nu'$ は次のように書ける.

$$\nu((r, \theta), x, \phi) = ((r, \theta - \phi), x, \phi), \quad ((r, \theta), x, \phi) \in D^2 \times \partial I \times \partial B^2,$$

$$\nu'(\theta, x, \phi) = (\theta - \phi, x, \phi), \quad (\theta, x, \phi) \in S^1 \times I \times \partial B^2.$$

Branched twist spin $K^{m,n}$ に沿った Gluck twist で得られる 4次元多様体を $\Sigma(K^{m,n})$ で表すこととし, $K^{m,n}$ が Gluck twist によって変化した 2次元結び目を $K_\Sigma^{m,n}$ で表ことにすると, $\Sigma(K^{m,n})$ と $K_\Sigma^{m,n}$ は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Sigma(K^{m,n}) = & ((D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\text{id}} (\partial D^2 \times I \times B^2)) \cup_{\gamma \circ e''} \\ & ((D_m^2 \times E_m^* \times \partial D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int} N(K)) \times S^1)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$K_\Sigma^{m,n} = (D^2 \times \partial I \times \{0\}) \cup (\partial D^2 \times I \times \{0\}) \subset \Sigma(K^{m,n}).$$

Branched twist spin $K^{m,n}$ は定義から対となる $K^{n,m}$ が存在し, $K^{m,n}$ に沿った Gluck twist によって $K^{n,m}$ も新たな 2次元結び目へと変化する. この結び目を $K_\Sigma^{n,m} := (\{0\} \times \partial I \times B^2) \cup (\{0\} \times E_m^* \times \partial D_n^2) \subset \Sigma(K^{m,n})$ と書くことにする. このことから $\Sigma(K^{m,n})$ は情報として全空間と 2つの結び目の組 $(\Sigma(K^{m,n}), K_\Sigma^{m,n}, K_\Sigma^{n,m})$ を持つ. この 3つ組に対して次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (F.[4]). 3つ組 $(\Sigma(K^{m,n}), K_\Sigma^{m,n}, K_\Sigma^{n,m})$ と $(\Sigma(K^{m+n,n}), K_\Sigma^{m,m+n}, K_\Sigma^{m+n,n})$ は組として微分同相である.

証明の概説:

Gordon は $\Sigma(K^{m,1})$ の分解を与え, そのピースの座標をうまく取り替えることで, $\Sigma(K^{m,1})$ と $\Sigma(K^{m+1,1})$ が微分同相であることを示した [8]. 定理 3.1 は S^4 の分解 (3.2) に対して Gordon のアイデアを一般化することによって得られる. 以下では, 細かい議論は飛ばして一般化した Gordon のアイデアを説明し, 証明を与える. 定理 3.1

¹ 以下に出てくる 2次元円板 D^2 と区別するため B^2 を用いている.

の主張直前で述べたように, branched twist spin $K^{m,n}$ は対として $K^{n,m}$ を持つ. これらの近傍 $N(K^{m,n})$ と $N(K^{n,m})$ は(3.1)内の記号を用いて

$$K^{m,n} = ((D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2)),$$

$$K^{n,m} = ((D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2)),$$

と表される. 一方で, $\Sigma(K^{m,n})$ 内では $N(K_\Sigma^{m,n})$ と $N(K_\Sigma^{n,m})$ は次のように表される.

$$K_\Sigma^{m,n} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\text{id}} (\partial D^2 \times I \times B^2),$$

$$K_\Sigma^{n,m} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_\nu (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2).$$

式(3.2)の右辺の座標を取り替えることにより, 次のように $K_\Sigma^{m,n}$, $K_\Sigma^{n,m}$ を表すことができる.

$$K_\Sigma^{m,n} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\nu^{-1}} (D^2 \times I \times \partial B^2),$$

$$K_\Sigma^{n,m} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2).$$

この座標の取り替えによって $\Sigma(K^{m,n})$ は図4の右図のような分解を持つ. ここで, 左図

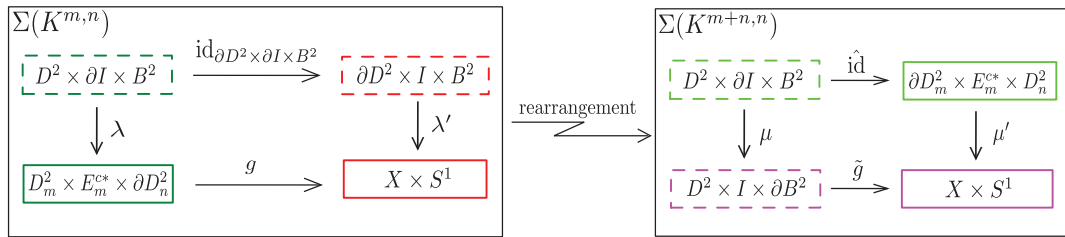


図4: Decompositions of $\Sigma(K^{m,n})$ and $\Sigma(K^{m+n,n})$

の λ と λ' は $D^2 \times \partial I \times B^2$ と $\partial D^2 \times I \times B^2$ の貼り合わせ写像 e'' と Gluck twist $\gamma = \nu \cup \nu'$ の合成写像で得られるものであり, 右図の μ と μ' は次で表される $D^2 \times \partial I \times B^2$ と $\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$ の貼り合わせ写像 \tilde{e}'' と Gluck twist の逆写像 $\gamma^{-1} = \nu^{-1} \cup \nu'^{-1}$ の合成写像である.

$$\tilde{e}''(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - (m+n)\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2).$$

この入れ替えが Gordon によるアイデアであり, 本来であればもっと段階を踏んでピースの取り替えを行うのだが, 今回は途中を割愛して, 最初と最後の分解の様子のみを説明している(詳細は[4]を見よ).

さて, Gluck twist は対合 (involution) であることから, γ と γ^{-1} はアイソトピックであり, さらに上のピースの取り替えは K の位相型を変えないことに注意すると, 図3.2の右は \tilde{e}'' の定義から $\Sigma(K^{m+n,n})$ の分解を与えている. 以上により全空間 $\Sigma(K^{m,n})$ と $\Sigma(K^{m+n,n})$ の微分同相が従う. さらに, 先ほどのピースの入れ替えによって $\Sigma(K^{m,n})$ 内で $K_\Sigma^{m,n}$ と $K_\Sigma^{n,m}$ と表されていた結び目は, $\Sigma K^{m+n,n}$ 内では $K_\Sigma^{m,m+n}$ と $K_\Sigma^{m+n,n}$ で表される結び目に移ることがわかる. よって主張が成り立つ. \square

注意 3.2. 定理1.1で述べたように $\Sigma(K^{m,n})$ は S^4 と微分同相になることはすでに知られているが, 定理3.1はその別証明を与える. 何故ならば, 定理3.1の主張を繰り返し適用することで, $\Sigma(K^{m,n})$ は $\Sigma(K^{0,1})$ もしくは $\Sigma(K^{1,1})$ と微分同相になることがわか

る。どちらの場合にも Gordon の場合に帰着され、 S^4 と微分同相であることが示される。一見すると、定理 3.1 では $K^{m,n}$ の m しか変化できないように思えるが、 $\Sigma(K^{m,n})$ が局所滑らかで効果的な S^1 -作用を許容することから、 $\Sigma(K^{m,n})$ は $\{(S^3, K), m, n\}$ タイプの orbit data を持つ。Orbit data の m, n に順序はなく、この orbit data から復元される 4 次元多様体は微分同相を除いて一意であるので、Gluck twist を施す結び目を入れ替えることにより、 n についても変化をさせることができる。

式 (3.2) を用いて $\Sigma(K^{m,n})$ が局所滑らかで効果的な S^1 -作用を許容することは次のことから従う。Branched twist spin の定義から S^4 の部分集合である $K^{m,n}$ の結び目補空間である $(D_m^2 \times E_m^* \times \partial D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int} N(K)) \times S^1)$ 上には S^1 -作用が定義されている。この作用は $\Sigma(K^{m,n})$ へと拡張することができ、orbit data は $\{(S^3, K), m, m+n\}$ である。より詳しくは、Gluck twist により軌道空間は図 5 のように結び目を変えず、例外軌道のタイプのみに変える。定理 3.1 から $K^{m,n}$ の結び目補空間は同時に $K_\Sigma^{n,m+n}$

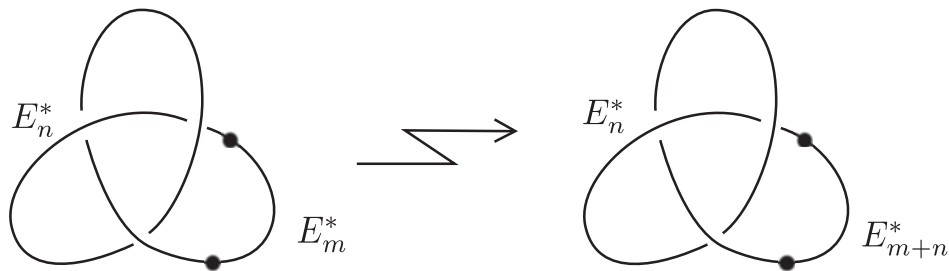


図 5: $K^{n,m}$ に沿った Gluck twist による軌道空間の変化

の結び目補空間であることがわかる。軌道空間内では特に $K_\Sigma^{n,m+n}$ は例外軌道 \mathbb{Z}_{m+n} -タイプと固定点の和集合として構成されていることがわかる。

このことから次の定理が従う。

定理 3.3 (F.). $K_\Sigma^{m,n} = K^{m,m+n}$.

ファイバー結び目に関しては次の定理が Plotnick によって知られている。

定理 3.4. 非自明な 2 次元ファイバー結び目 K に対して、そのモノドロミーの位数が奇数であれば、 K と K_Σ は異なる。

Branched twist spin $K^{m,n}$ はファイバー結び目であり、特にそのモノドロミーの位数は m である。よって次のことが従う。

系 3.5. 非自明な branched twist spin $K^{m,n}$ に対して、 m が奇数であれば $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ は異なる。

これまでの branched twist spin の分類に関する先行研究では、Hillman と Plotnick による K に制限を設けた branched twist spin の非自明性 [6] や、 m が偶数である場合の判別を行う十分条件 [3] しか知られていなかったが、今回は m が奇数である場合の判別条件を与えており、筆者の知る限り初めての結果である。

参考文献

- [1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionalen Flächen im R^4* , Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4 (1926), 47–72.
No.57 Springer-Verlag, 1977.

- [2] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.
- [3] M. Fukuda, *Irreducible $SL(2, \mathbb{C})$ -metabelian representations of branched twist spins*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 28, No. 2, (2019), 1950007.
- [4] M. Fukuda, *The Gluck twist on branched twist spins*, arxiv:1811.05109.
- [5] R. Jacoby, *One-parameter transformation groups of the three-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 131–140.
- [6] J. A. Hillman and S. P. Plotnick, *Geometrically fibered two-knots*, Math. Ann. **287** (1990) 259–273.
- [7] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 308–333.
- [8] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585–596.
- [9] R. A. Litherland, *Deforming twist-spun knots*, Trans. Amer. math. Soc. **250** (1979), 311–331.
- [10] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.
- [11] S. Plotnick, *The homotopy type of four-dimensional knot complements*, Math. Z. **183** (1983), 447–471.
- [12] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lec. Series, **7**, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1976.
- [13] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserner Raume*, Acta Math. **60** (1932), 147–238.
- [14] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.
- [15] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.

INTERSECTION SPACE COHOMOLOGY SHEAVES

J. TIMO ESSIG

ABSTRACT. This talk is meant to give an overview on the sheaf theoretic approach to intersection space cohomology and discusses its advantages and disadvantages. It gives a hint on the construction of certain intersection space complexes on toric varieties with Poincaré duality for their hypercohomology groups.

1. INTRODUCTION

Poincaré duality is one of the most important topological properties of closed oriented manifolds and does in general not hold for singular spaces. The initial question of this talk is: Can we change the singular space (locally near the singular set) to produce a space that has Poincaré duality?

This is done by the theory of intersection spaces: It assigns to certain types of stratified pseudomanifolds by a local spatial procedure CW-complexes that have Poincaré duality for their reduced singular (co)homology groups with rational coefficients. The construction is explained for spaces with isolated singularities in [8, 2] and for general depth one spaces in [6]. For these types of spaces, the construction was modified in [12, 14] to yield actual rational Poincaré duality spaces in the sense of Browder. For spaces of greater stratification depth, intersection spaces were defined in [3, 1].

The resulting (co)homology theory (reduced singular cohomology of intersection spaces) was studied independently using differential forms on the nonsingular part or blowup in [4, 9, 13], using L^2 -cohomology in [7] and an algebraic approach in [10].

In this talk, the focus is on another approach to the intersection space cohomology theory: Via sheaf theory. This was studied first in [5] for complex projective varieties with only isolated singularities. The authors proved the existence of a perverse sheaf that describes intersection space cohomology and carries a natural mixed Hodge structure. They give precise conditions on the self duality of this sheaf complex and the existence of a pure Hodge structure satisfying the Hard Lefschetz Theorem. For general pseudomanifolds

Date: June, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 55N33, 14J17, 58A10, 58A12; secondary: 57P10, 57R22, 81T30, 14J33.

Key words and phrases. Singularities, Stratified Spaces, Pseudomanifolds, Poincaré Duality, Intersection Cohomology, Intersection Spaces, de Rham Theory, Differential Forms, Deformation of Singularities, Mirror Symmetry, Scattering Metric.

there cannot exist a perverse sheaf describing intersection space cohomology because of the stalk vanishing conditions such a sheaf has to satisfy.

In the second part of [1], Agustín and Bobadilla explain the construction of a cohomologically bounded complex of constructible sheaves to describe intersection space cohomology. They give conditions on the existence of such an intersection space complex and characterize it by a set of properties. In general, there is not a unique intersection space complex. We provide an overview of these constructions and results in Section 2. It is not clear if or which intersection space complexes are self dual. The non-uniqueness makes it impossible to use the techniques for proving self duality one uses for the intersection homology sheaves. Agustín and Bobadilla give a partial solution to this problem for spaces with one singular stratum. They introduce the notion of general intersection spaces and show that general intersection spaces of complementary perversities are dual to each other.

In Section 3, we explain a construction of so called Künneth intersection space complexes for toric varieties (or other singular spaces with compatible triangulations for their link bundles) that respect the trivializations on the link bundles of the singular strata. Those intersection space complexes are then the candidates to give a positive answer to the self duality question. This is work in progress and joint with M. Agustín and J. Bobadilla.

Conventions and Notation: Throughout the paper, the terms “singular space” and “pseudomanifold” denote a Thom-Mather stratified pseudomanifold, e.g. a Whitney-stratified complex projective variety.

Following [11], the cohomology sheaf of a complex of sheaves \mathbf{A}^\bullet on a space X will be denoted by $\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{A}^\bullet)$, while the hypercohomology groups will be $\mathcal{H}^i(X; \mathbf{A}^\bullet)$. We work in the derived category of cohomologically bounded constructible complexes of sheaves, which is denoted by \mathcal{D}_{cc}^b .

2. INTERSECTION SPACE SHEAF COMPLEXES

Intersection homology by Goresky and MacPherson was one of the first approaches to re-establish Poincaré duality for singular spaces. Initially invented to define characteristic classes for singular spaces, it became famous for its impact on singular topology and singular algebraic variety. A sheaf theoretic approach to intersection cohomology, motivated by Deligne and introduced by Goresky and MacPherson in [11] has been used to prove Poincaré duality and topological invariance of intersection cohomology for topological pseudomanifolds. It also led to a proof of the Kazhdan-Lusztig conjecture via \mathcal{D} -modules, relating representation theory and intersection cohomology. The axiomatic definition has another advantage: It makes it easy to check, whether a new approach computes intersection cohomology or not.

With these promising results in the back of one’s mind, an analogous sheaf theoretical description for intersection space cohomology is desirable. Here, I want to highlight the approach of Agustín-Bobadilla in [1]. Based on their

iterative construction of intersection space pairs, they derive a constructible complex of sheaves $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ and show that its global hypercohomology is the cohomology of the intersection space pair, see Section 2.1. Moreover, in [1, Section 6], they introduce a set of properties, called the $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -properties in the following, mimicking the axioms for intersection cohomology of [11, Section 3.3]. A sheaf complex satisfying these properties will be called an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex. There are three main differences from intersection cohomology:

- (1) Except for the case of isolated singularities, an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex cannot be a perverse sheaf complex.
- (2) The $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -properties do not fix an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex of sheaves up to quasi-isomorphism.
- (3) In unison with the other approaches to intersection space cohomology, there does not always have to be an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex.

In the following, we use the notation of Agustín-Bobadilla : Let X^d be a Thom-Mather stratified pseudomanifold (e.g. a complex projective variety) of dimension d with filtration

$$X = X_d \supset X_{d-2} \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

Let $U_k := X \setminus X_{d-k}$ with open inclusion $i_k : U_k \hookrightarrow U_{k+1}$ and $j_k : X_{d-k} \setminus X_{d-k-1} \hookrightarrow U_{k+1}$. Let further \bar{p} denote a perversity function in the sense of Goresky and MacPherson and \bar{q} its dual perversity.

2.1. From spaces to sheaf complexes. Agustín-Bobadilla construct intersection space pairs $(I^{\bar{p}}X, I^{\bar{p}}X_{d-2})$, where X_{d-2} is the singular set, by iteratively replacing link bundles by their fiberwise homology cotruncations. The existence of such an intersection space pair is obstructed in general and each choice in the iterative construction of the pair might affect the following steps (in the spirit of obstruction theory). An intersection space pair always exists for toric varieties or other pseudomanifolds with compatibly trivializable link bundles, see [1, Theorem 3.30].

To assign to an intersection space pair a cohomologically bounded constructible complex of sheaves on X , with hypercohomology the cohomology of the pair, Agustín-Bobadilla define an increasing sequence $(I^{\bar{p},n}X, I^{\bar{p},n}X_{d-2})$ of modified intersection space pairs which are all contained in a certain homotopy model $\pi : X' \simeq X$ of X . Loosely speaking, for increasing n , the replacement of link bundles by their homology cotruncations is done on smaller tubular neighbourhoods of the singular strata. One then defines the sheaf complex $\mathcal{K}^{n,\bullet}$ as the kernel of the induced map of $\nu^n : I^{\bar{p},n}X_{d-2} \hookrightarrow I^{\bar{p},n}X$ on cubical singular cochains with rational coefficients. Since the sequence of modified intersection spaces is increasing, there are canonical morphisms $i^{n_1, n_2} : \mathcal{K}^{n_2,\bullet} \rightarrow \mathcal{K}^{n_1,\bullet}$ for $n_1 < n_2$. This gives an inverse system and one sets

$$\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet := \pi_* \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}^{n,\bullet}.$$

Agustín-Bobadilla prove in [1, Theorem 5.16], that the hypercohomology groups of this complex are the cohomology groups of the intersection space pair. For the whole constructing and proofs of the statements, [1, Section 5] can be consulted.

2.2. An axiomatic approach to intersection space complexes. The cohomologically bounded, constructible intersection space complex $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ of the previous section satisfies the following set of properties:

- (1) $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet|_{U_2} \cong \mathbb{Q}_{U_2}$,
- (2) $\mathbf{H}^i(\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet) = 0$ for $i \notin \{0, 1, \dots, n\}$,
- (3) $\mathbf{H}^i(j_k^* \mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet|_{U_{k+1}}) = 0$ for $i \leq \bar{q}(k)$,
- (4) the natural morphism $\mathbf{H}^i(j_k^* \mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet|_{U_{k+1}}) \rightarrow \mathbf{H}^i(j_k^* i_{k*} \mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet|_{U_k})$ is an isomorphism for $i > \bar{q}(k)$.

From now on, any complex $\mathbf{B}^\bullet \in \mathcal{D}_{cc}^b$ that satisfies these properties will be called an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex. These properties look similar to the axioms for the intersection homology sheaf of Goresky and MacPherson, see [11, 3.3], but there are two major differences: The intersection homology sheaf always exists and is (up to quasi-isomorphism) uniquely determined by the axioms, while this is not true for $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complexes.

Agustín-Bobadilla also give a construction of $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complexes that is independent from intersection space pairs (and their existence). That approach is more general (see e.g. [1, Section 9.1]). Their construction is inductive, starting on the regular stratum. In the k -th step, an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex $(\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet)_{k-1}$ on U_k can be extended to a complex satisfying the axioms on U_{k+1} if and only if the following distinguished triangle in the derived category splits.

$$\tau_{\leq \bar{q}(k)} j_k^* i_{k*} (\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet)_{k-1} \rightarrow j_k^* i_{k*} (\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet)_{k-1} \rightarrow \tau_{> \bar{q}(k)} j_k^* i_{k*} (\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet)_{k-1} \xrightarrow{[+1]}$$

If this triangle splits, one has to choose such a splitting to proceed. The obstruction at each step might, as for the construction of the intersection space pairs, depend on all the previous choices. If X is an algebraic variety, Agustín-Bobadilla show that the construction can be lifted to the category of mixed Hodge modules on X : If an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex exists, it is a mixed Hodge module, i.e. its global hypercohomology groups have a mixed Hodge structure (see [1, Theorem 8.3]).

Agustín-Bobadilla give necessary and sufficient conditions on the existence and uniqueness of an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -sheaf complex, living in certain Ext^1 and Hom sheaves respectively, see [1, Corollary 7.6]. It follows from [1, Theorem 9.10], that spaces with isolated singularities have a unique intersection space complex.

Concerning Poincaré duality, Agustín-Bobadilla only have a partial answer. Although the Verdier dual of an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex is an $\mathbf{IS}_{\bar{q}}^\bullet$ -complex ([1, Theorem 10.1]), this does not imply global Poincaré duality. If an intersection space of a two strata space X^d of dimension d with singular set

X_{d-k} exists for a given perversity \bar{p} , the intersection space complexes $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}$ are parametrized by the vector space

$$E_{\bar{p}} := \text{hom} \left(\tau_{>\bar{q}(k)} j_{k*} j_k^* i_{k*} \mathbb{Q}|_{U_k}, \tau_{\leq\bar{q}(k)} j_{k*} j_k^* i_{k*} \mathbb{Q}|_{U_k} \right)$$

(see [1, Corollary 7.6]). An element $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet} \in E_{\bar{p}}$ is called a $GIS_{\bar{p}}$ or *general intersection space complex* of X with perversity \bar{p} , if the hypercohomology groups of $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}$ are minimal compared to the hypercohomology groups of all complexes in $E_{\bar{p}}$, that is $\dim(\mathbb{H}^i(X, \mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet})) = \min_{\mathbf{S}^{\bullet} \in E_{\bar{p}}} \dim(\mathbb{H}^i(X, \mathbf{S}^{\bullet}))$. Provided the existence of such a $GIS_{\bar{p}}$ $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}$, Agustín-Bobadilla prove that the Verdier dual $\mathbf{IS}_{\bar{q}}^{\bullet} := \mathcal{D}\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}[-d]$ is a $GIS_{\bar{q}}$, with \bar{q} the dual perversity of \bar{p} , and that there is an isomorphism

$$\mathbb{H}^i(X, \mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}) \cong \text{hom} \left(\mathbb{H}^{d-i}(X, \mathbf{IS}_{\bar{q}}^{\bullet}), \mathbb{R} \right)$$

of \mathbb{Q} -vector spaces for all i , see [1, Theorem 10.6]. It is not clear, what the conditions are that determine the existence of such a $GIS_{\bar{p}}$ -complex and how it can be constructed. It is interesting to know, whether the intersection space of Banagl-Chriestenson in the setting of [6] or the intersection form complex $\Omega I_{\bar{p}}^{\bullet}$ of [4] give rise to $GIS_{\bar{p}}$ -complexes. In the following, the Poincaré duality question is discussed for toric varieties.

3. KÜNNETH INTERSECTION SPACE COMPLEXES FOR TORIC VARIETIES

The purpose of this section is to introduce special $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}$ -complexes for toric varieties and other pseudomanifolds with compatible trivializations for the link bundles, that respect these trivializations.

3.1. Künneth intersection space complexes in depth one. We outline the idea of a Künneth intersection space complex for a two strata pseudo-manifold first.

The setup in this section is the following: Let X^d be a d -dimensional stratified pseudomanifold with filtration $X = X_d \supset X_{d-r} = Y$, closed inclusion $j : Y \hookrightarrow X$, and let $U = X \setminus Y$ with open inclusion $i : U \hookrightarrow X$, such that there is an open (tubular) neighbourhood $Y \subset TY \subset X$ that is trivialisable. That is there is a stratified isomorphism $\Phi : TY \xrightarrow{\cong} Y \times Z$, with $Z = \text{cone}(L) = \dot{Z} \cup \{v\}$ and inclusions $i_{\dot{Z}} : \dot{Z} \hookrightarrow Z$ and $j_v : \{v\} \hookrightarrow Z$. Let $Y \xleftarrow{\pi_1} Y \times Z \xrightarrow{\pi_2} Z$ be the factor projections. Let further $\overset{\circ}{TY} = TY \setminus Y$ denote the tubular neighbourhood of Y with the singular part removed.

The idea is: By [1, Corollary 7.6 and Theorem 9.10], there is a unique intersection space complex $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}(Z)$ on the cone Z for any perversity \bar{p} , that is there is only one splitting of the map $\tau_{\leq\bar{q}(r)} j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}} \rightarrow j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}}$. We use that fact to construct a unique intersection space complex $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^{\bullet}(TY)$ on TY and hence for X (since it must be the constant sheaf on $X \setminus Y$) for perversity \bar{p} , which is compatible with the trivialization Φ . Its Verdier dual

(which is an $\mathbf{IS}_{\bar{q}}^\bullet$ complex) will then also be compatible with the trivialization, implying the duality $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet \cong \mathbf{IS}_{\bar{q}}^\bullet[-d]$. Compatibility with the trivialization means that the complex fits into a certain Künneth structure.

Definition 3.1.1 (Künneth property and structures). *A sheaf complex $\mathbf{K}^\bullet \in \mathcal{D}_{cc}^b(X)$ satisfies the Künneth property with respect to the trivialization $\Phi : TY \xrightarrow{\cong} Y \times Z$ if there exists a sheaf complex $\mathbf{L}^\bullet \in \mathcal{D}_{cc}^b(Z)$ and an isomorphism $\beta : \mathbf{K}^\bullet|_{TY} \xrightarrow{\cong} \Phi^* \pi_2^* \mathbf{L}^\bullet$. A triple $(\mathbf{K}^\bullet, \mathbf{L}^\bullet, \beta)$ is called a Künneth structure for \mathbf{K}^\bullet .*

For example, the constant sheaf \mathbb{Q}_X on X has a Künneth structure. There is a unique complex that satisfies the properties of an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex and has a Künneth structure $(\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet, \mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet(Z), \beta)$, where $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet(Z)$ is the unique $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex on the cone Z , which is compatible with the Künneth structure of the constant sheaf on TY . We want to elaborate the construction of such a complex: By [1, Theorem 9.10], the cone Z , which has only one isolated singularity v , has a unique splitting $\lambda : j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}} \rightarrow \tau_{\leq \bar{q}(r)} j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}}$. Together with the canonical adjunction morphisms related to j and j_v and the natural Künneth structures of $i_* \mathbb{Q}_U$ and $j_* j^* i_* \mathbb{Q}_U$, this morphism fits into the following commutative diagram, where the dashed arrows are induced by the other morphisms.

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} i_* \mathbb{Q}_U & \xrightarrow{\cong} & \Phi^* \pi_2^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_* j^* i_* \mathbb{Q}_U & \xrightarrow{\cong} & \Phi^* \pi_2^* j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}} \xrightarrow{\Phi^* \pi_2^* \lambda} \Phi^* \pi_2^* \tau_{\leq \bar{q}(r)} j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}} \end{array}$$

φ_Φ (dashed arrow from $i_* \mathbb{Q}_U$ to $\Phi^* \pi_2^* \tau_{\leq \bar{q}(r)} j_{v*} j_v^* i_{\dot{Z}*} \mathbb{Q}_{\dot{Z}}$)

We set $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet := \text{cone}(\varphi_\Phi)[-1]$. By the same arguments as in the proof of [1, Theorem 7.3] (see p.39 therein), $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ satisfies the properties of an $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex. By construction, it has a Künneth structure with

$$\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet|_{TY} = \Phi^* \pi_2^* \text{cone}(\lambda) = \Phi^* \pi_2^* \mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet(Z).$$

We do not provide the arguments that $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ is unique up to quasi-isomorphism. To prove Poincaré duality for the rational hypercohomology groups of $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$, one shows that $\mathcal{D}\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet[-d]$, where \mathcal{D} denotes the Verdier dual, is the Künneth intersection space complex of the dual perversity \bar{q} .

3.2. Compatible systems of trivializations in depth two. In general, compatible systems of trivializations for Thom-Mather stratified pseudomanifolds are explained in [1, Section 3]. Since the notation in the general case is rather involved, we focus on the special case of a depth 2 pseudomanifold X with filtration

$$X = X_d \supset X_{d-m} \supset X_{d-l}$$

and three strata $U = X \setminus X_{d-m}$, $S_{d-m} := X_{d-m} \setminus X_{d-l}$ and $S_{d-l} = X_{d-l}$. The Thom-Mather control data provide tubular neighbourhoods T_{d-m}, T_{d-l} of the singular strata that have a fiber bundle structure

$$\sigma_{d-m} : T_{d-m} \rightarrow S_{d-m}, \quad \sigma_{d-l} : T_{d-l} \rightarrow S_{d-l}$$

with fibers $\text{cone}(L_{d-m})$ and $\text{cone}(L_{d-l})$ (and suitable transition functions), such that on $T_{d-m} \cap T_{d-l}$ it holds that $\sigma_{d-l} \circ \sigma_{d-m} = \sigma_{d-l}$. A system of trivializations for such a space is a tuple of fiber bundle isomorphisms

$$\begin{aligned} \Psi_{d-m} : \partial T_{d-m} &\xrightarrow{\cong} L_{d-m} \times S_{d-m}, \\ \Psi_{d-l} : \partial T_{d-l} &\xrightarrow{\cong} L_{d-l} \times S_{d-l}, \end{aligned}$$

where the bundle projections on the right hand sides are the second factor projections. Note that the link L_{d-l} of the bottom singular stratum is a singular space itself with singular stratum S^L and link L_{d-m} . The system of trivializations is then called compatible, if there is a tubular neighbourhood T_{d-l}^L of the singular set in L_{d-l} (defined by $\Psi_{d-l}|_{T_{d-m}}$) that has a trivialization

$$\Psi^L : \partial T_{d-l}^L \xrightarrow{\cong} L_{d-m} \times S^L$$

such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \partial T_{d-l} \cap \partial T_{d-m} & \xrightarrow[\cong]{\Psi_{d-l}|} & \partial T_{d-l}^L \times S_{d-l} \\ \cong \downarrow \Psi_{d-m}| & & \cong \downarrow \Psi^L \times \text{id} \\ L_{d-m} \times (S_{d-m} \cap \partial T_{d-l}) & \xrightarrow[\cong]{\text{id} \times \Psi_{d-l}|} & L_{d-m} \times S^L \times S_{d-l} \end{array}$$

As an example, the torus action in toric varieties always induces a compatible trivialization for the link bundles.

3.3. Künneth intersection space complexes in depth two. We use the notation of the previous section. To generalize the construction of Künneth intersection space complexes of Section 3.1, one uses an induction on strata. Starting with the constant sheaf \mathbb{Q}_U on U , one first shows that there is a unique Künneth intersection space complex ${}_{d-l}\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ on $X \setminus X_{d-l}$ with a Künneth structure as in the depth one setting. Then, one proves that there is a unique $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ -complex on X extending ${}_{d-l}\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet$ that has a Künneth structure $(\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet, \mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet(L_{d-l}), \beta)$, with $\mathbf{IS}_{\bar{p}}^\bullet(L_{d-l})$ the unique Künneth intersection space complex on the link L_{d-l} . Note, that the two Künneth structures can be chosen compatibly since the trivializations are compatible. Afterwards, one proves that the shifted Verdier dual $\mathcal{DIS}_{\bar{p}}^\bullet[-n]$ is the unique $\mathbf{IS}_{\bar{q}}^\bullet$ -complex with the above Künneth properties.

At the end, the uniqueness of the Künneth intersection space complexes and the Verdier duality theorem imply Poincaré duality for the hypercohomology groups of the Künneth intersection space complexes of complementary perversities. These ideas will be explained in more detail in an upcoming article.

Acknowledgements. I want to thank the organizers of the 66th Japan Topology Symposium, Professor Osamu Saeki and Professor Toru Ohmoto for providing me the opportunity to give a talk. I also thank the Canon Foundation for supporting my current research with a postdoc grant.

REFERENCES

- [1] Marta Agustín and Javier Fernandez de Bobadilla. Intersection Space Constructible Complexes. *arXiv e-prints*, page arXiv:1804.06185, Apr 2018.
- [2] Markus Banagl. *Intersection Spaces, Spatial Homology Truncation, and String Theory*, volume 1997 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2010.
- [3] Markus Banagl. First cases of intersection spaces in stratification depth 2. *J. Singul.*, 5:57–84, 2012.
- [4] Markus Banagl. Foliated stratified spaces and a De Rham complex describing intersection space cohomology. *J. Differential Geom.*, 104(1):1–58, 2016.
- [5] Markus Banagl, Nero Budur, and Laurențu Maxim. Intersection spaces, perverse sheaves and type IIB string theory. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 18(2):363–399, 2014.
- [6] Markus Banagl and Bryce Christenson. Intersection spaces, equivariant Moore approximation and the signature. *J. Singul.*, 16:141–179, 2017.
- [7] Markus Banagl and Eugenie Hunsicker. Hodge Theory for Intersection Space Cohomology. *arXiv e-prints*, page arXiv:1502.03960, Feb 2015. to appear in *Geom. Topol.*
- [8] Markus Banagl and Laurentiu Maxim. Intersection spaces and hypersurface singularities. *J. Singul.*, 5:48–56, 2012.
- [9] J. Timo Essig. Intersection Space Cohomology of Three-Strata Pseudomanifolds. *arXiv e-prints*, page arXiv:1804.06690, Apr 2018. to appear in *J. Topol. Anal.*
- [10] Christian Geske. Algebraic intersection spaces. *arXiv e-prints*, page arXiv:1802.03871, Feb 2018. to appear in *Geom. Topol.*
- [11] M. Goresky and R.D. MacPherson. Intersection homology ii. *Invent. Math.*, 72(1):77–129, 1983.
- [12] Mathieu Klimczak. Poincaré duality for spaces with isolated singularities. *arXiv e-prints*, page arXiv:1507.07407, Jul 2015.
- [13] Franz Wilhelm Schlöder and J. Timo Essig. Multiplicative de Rham Theorems for Relative and Intersection Space Cohomology. *arXiv e-prints*, page arXiv:1904.00482, Mar 2019. submitted to *Journal of Singularities*.
- [14] Dominik Wrazidlo. A fundamental class for intersection spaces of depth one Witt spaces. *arXiv e-prints*, page arXiv:1904.03605, Apr 2019.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO 060-0810, JAPAN

Email address: `essig@math.sci.hokudai.ac.jp`

Topological invariants and corner states for some Hamiltonians on a lattice

林 晋 (産業技術総合研究所・産総研特別研究員 PD)*

概 要

物性物理学におけるトポロジカル物質の研究への応用を念頭に、ある種の自己共役作用素に対するトポロジーを考察する。(高次)トポロジカル絶縁体の研究と関連して、特に余次元2の角のある系特有のトポロジーを定義し、その性質等を議論する。

1. 背景

物性物理学において、トポロジーが重要な役割を果たしている。いわゆる(広義の)トポロジカル絶縁体物質には、系の次元と対称性で分類されるトポロジー(位相不変量)が内在する。これらの物質はバルク¹は絶縁体であるが、このトポロジーを反映して現れる表面に局在した波動関数(エッジ状態)により表面がある種金属的に振る舞うという際立った物性を示す。位相不変量がある種の連続変形に対して不変なことに対応して、金属的な振る舞いを記述するエッジ状態は系の摂動に対して頑強である。トポロジカル絶縁体の先駆けとしてはKlitzingらによる量子ホール効果の発見がある。Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijsは量子ホール効果の背後にあるトポロジーの存在を明らかにした[18]。上記のバルクのトポロジーとエッジ状態の対応関係はHatsugaiによって証明され[6]、バルク・エッジ対応と呼ばれている。その後Kane-Meleらによる量子スピンホール効果の提唱等を経て、トポロジカル物質と呼ばれる物質群が盛んに研究されている²。

数学の側ではBellissardらを中心として量子ホール効果に対して非可換幾何の手法を用いた研究が進められ[1]、特に系の並進対称性が破れたdisorderのある系の取り扱いが可能となっている。Kellendonk-Richter-Schultz-Baldesはこの手法をさらに展開し、disorderのある系に対してもバルク・エッジ対応の証明を与えた[10]。ここでのアイデアはToeplitz作用素に対する指数理論に着目することである(これらに関するまとまった文献として[14]を挙げておく)。

本講演では実際の物質が多様な形状を持つことに着目して、図2のように、二つのエッジの交差としての(余次元2の)コーナーのある系を考える。バルクと二つのエッジが絶縁体であるようなモデルにおいて、コーナーのある系特有の位相不変量を定義しその性質を調べる。その際のアイデアは四半面Toeplitz作用素と呼ばれるある作用素の指数理論に着目することである。次元と対称性で分類されるという従来のトポロジカル相

本研究は科研費(課題番号:JP17H06461, JP19K14545)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 19K56, 47B35, 81V99

キーワード: Topologically protected corner states, Bulk-edge and corner correspondence, K -theory and index theory

* 〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平2-1-1 東北大学原子分子材料科学高等研究機構内

e-mail: shin-hayashi@aist.go.jp

web: <https://staff.aist.go.jp/shin-hayashi/>

¹物質があるとして、端の方をエッジ、内側をバルクという(図1)。

²トポロジカル絶縁体と狭義には量子スピンホール系を指す。その後広く用いられるようになった。

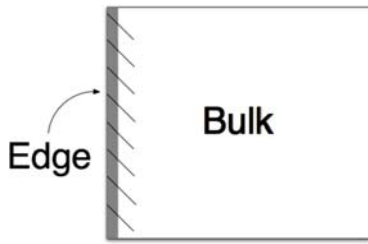


図 1: バルクとエッジ

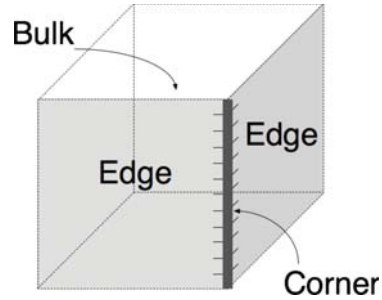


図 2: バルクとエッジとコーナー

のパラダイム³に対し、形状の観点を取り入れた議論を展開することがひとつの大きな目的である。

本稿ではまず Toeplitz 作用素とその変種について、定義といくつかの結果を述べる。次いで従来のトポロジカル相に対するバルク・エッジ対応の定式化と証明を Kellendonk–Richter–Schultz–Baldes のアイデアに基づいて紹介する⁴。続く章で [7, 8] をもとにコーナーのある系を議論する。コーナーに関連したトポロジーの定義とその基本的な性質、具体例の構成法を述べた後に、従来のトポロジカル相との関連や、近年提唱され活発に研究されている高次トポロジカル絶縁体への応用例などを紹介する。

2. Toeplitz 作用素とその変種

本稿では \mathbb{T} で複素平面の単位円を表し、反時計回りの向きを固定する。本稿で用いる C^* 環やその K 理論については [12] などを参照されたい。

2.1. Toeplitz 作用素

加法群としての \mathbb{Z} とその部分半群 $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \dots\}$ を考える。 \mathbb{T} 上の複素数値連続関数 $f \in C(\mathbb{T})$ は各点 $t \in \mathbb{T}$ で $f(t)$ を掛ける操作によって、 $L^2(\mathbb{T})$ 上の有界線型作用素を定める。ここから Fourier 変換による Hilbert 空間の同型 $L^2(\mathbb{T}) \cong l^2(\mathbb{Z})$ を経由して得られる $l^2(\mathbb{Z})$ 上の作用素を M_f で表す。 $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上の有界線型作用素 T_f を以下で定義する⁵。

$$T_f \varphi = (P_{\geq 0} M_f P_{\geq 0}) \varphi = P_{\geq 0} M_f \varphi, \quad \varphi \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

ここで $P_{\geq 0}$ は $l^2(\mathbb{Z})$ の閉部分空間 $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上への直交射影である。 T_f は Toeplitz 作用素と呼ばれる。 Toeplitz 作用素の Fredholm 性とその指数について以下が成り立つ (例えば [12] を参照のこと)。

定理 2.1. (1) f が $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に値を持つとき、 T_f は Fredholm 作用素⁶。

(2) (Noether) このとき $\text{index}(T_f) = -\text{Wind}(f)$ 。ただし $\text{Wind}(f)$ は連続関数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の 0 のまわりの回転数。

³ Kitaev によって分類に K 理論が用いられた [11, 5]

⁴ 後で述べるように 2 次元クラス A と 1 次元クラス AIII と呼ばれるあるクラスの系に限っている。また並進対称性を保つ比較的簡単な系のみを扱い、その基本的なアイデアを紹介する。

⁵ 直交射影 $P_{\geq 0}$ による M_f の compression で $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上の作用素 T_f を考える際、 $P_{\geq 0} M_f P_{\geq 0}$ と表記することが多い。本稿でもこの表記法を採用する。

⁶ すなわち $\text{Ker} T_f$ と $\text{Coker} T_f$ が共に有限次元である。このとき Fredholm 指数が次で定義される。

$$\text{index}(T_f) := \text{rank}_{\mathbb{C}} \text{Ker} T_f - \text{rank}_{\mathbb{C}} \text{Coker} T_f$$

これらは C^* 環の K 理論を用いて以下のように理解できる. \mathcal{T} を Toeplitz 作用素たち $\{T_f \mid f \in C(\mathbb{T})\}$ が生成する C^* 環とする. このとき次の C^* 環の短完全列が存在する.

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})) \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\gamma} C(\mathbb{T}) \rightarrow 0. \tag{1}$$

ここで $\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$ は $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上のコンパクト作用素のなす C^* 環で \mathcal{T} への射は包含写像, γ は Toeplitz 作用素 T_f をそのシンボル f に写す $*$ -準同型である. 定理 2.1(1) の仮定の下では, $\gamma(T_f) = f$ に着目すると, T_f はコンパクト作用素を法として可逆であるから, Atkinson の定理から Fredholm であることがわかり, 定理 2.1(1) は直ちに従う. また, 短完全列 (1) に同伴して以下の C^* 環の K 理論の 6 項完全系列がある.

$$\begin{array}{ccccc} K_1(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))) & \longrightarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_1(C(\mathbb{T})) \\ \uparrow \partial_0 & & & & \downarrow \partial_1 \\ K_0(C(\mathbb{T})) & \longleftarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_0(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))) \end{array}$$

ここで ∂_0 と ∂_1 は境界準同型. また $K_0(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})))$ は標準的なトレースが誘導する射 $K_0(\text{Tr}): K_0(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))) \rightarrow \mathbb{Z}$ により \mathbb{Z} と同型である. 定理 2.1(2) は次の二つの (準) 同型の一致として理解できる.

- $K_0(\text{Tr}) \circ \partial_1: K_1(C(\mathbb{T})) \rightarrow \mathbb{Z}$. この写像は $\gamma(T_f)$ のクラスを $\text{index}(T_f)$ に写す.
- $-\text{Wind}: K_1(C(\mathbb{T})) \rightarrow \mathbb{Z}$. ここで $K_1(C(\mathbb{T})) \cong K^1(\mathbb{T}) \cong [\mathbb{T}, \mathbf{U}(\infty)]$ で, Wind は \mathbb{T} から $\mathbf{U}(\infty)$ への連続写像 f に対し, $\det(f)$ の回転数を対応させる.

2.2. Toeplitz 作用素の変種

α と β を $\alpha < \beta$ なる二つの実数とする⁷. 正方格子 \mathbb{Z}^2 を二つの直線 $y = \alpha x$ と $y = \beta x$ で “切る” ことでエッジまたはコーナーのモデルを導入する. 具体的に, 以下の \mathbb{Z}^2 の部分集合 A_i ($i = 1, 2, 3$) を考える.

$$A_1 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\alpha m + n \geq 0\}, \quad A_2 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\beta m + n \leq 0\}$$

$$A_3 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\alpha m + n \geq 0 \text{ and } -\beta m + n \leq 0\}$$

$l^2(\mathbb{Z}^2)$ の閉部分空間 $l^2(A_i)$ の上への直交射影を P_{A_i} で表す. 各 $i = 1, 2, 3$ に対して, $l^2(A_i)$ をそれぞれ $\mathcal{H}^\alpha, \mathcal{H}^\beta, \hat{\mathcal{H}}^{\alpha, \beta}$ と書き, P_{A_i} をそれぞれ $P^\alpha, P^\beta, \hat{P}^{\alpha, \beta}$ と書く (図3を参照).

二次元トーラス上の複素数値連続関数 $f \in C(\mathbb{T}^2)$ は各点 $(\xi, t) \in \mathbb{T}^2$ で $f(\xi, t)$ を掛ける操作によって, $L^2(\mathbb{T}^2)$ 上の有界線型作用素を定める. ここから Fourier 変換による同型 $L^2(\mathbb{T}^2) \cong l^2(\mathbb{Z}^2)$ を経由して得られる $l^2(\mathbb{Z}^2)$ 上の作用素を M_f で表す. このとき各 $i = 1, 2, 3$ に対して $l^2(A_i)$ 上の作用素 $T_f^{A_i} := P_{A_i} M_f P_{A_i}$ を考える. 各 $i = 1, 2, 3$ に対する $T_f^{A_i}$ をそれぞれ $T_f^\alpha, T_f^\beta, \hat{T}_f^{\alpha, \beta}$ と書く. 作用素 T_f^α, T_f^β は半平面 Toeplitz 作用素, $\hat{T}_f^{\alpha, \beta}$ は四半面 Toeplitz 作用素と呼ばれる. 本稿で着目する四半面 Toeplitz 作用素は Simonenko[17], Douglas–Howe[4] らを中心に研究が進められた.

\mathcal{T}^α を半平面 Toeplitz 作用素たち $\{T_f^\alpha \mid f \in C(\mathbb{T}^2)\}$ が生成する C^* 環とする. 同様に C^* 環 $\mathcal{T}^\beta, \hat{\mathcal{T}}^{\alpha, \beta}$ をそれぞれ $T_f^\beta, \hat{T}_f^{\alpha, \beta}$ を用いて定義する. このとき $\mathcal{T}^\alpha, \mathcal{T}^\beta$ から $C(\mathbb{T}^2)$ へ, 半平面 Toeplitz 作用素 T_f^α, T_f^β に対して f を対応させる $*$ -準同型 $\sigma^\alpha, \sigma^\beta$ がある. C^* 環 $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}$ をこの二つの $*$ -準同型による引き戻しとして定義する.

$$\mathcal{S}^{\alpha, \beta} = \{(T^\alpha, T^\beta) \in \mathcal{T}^\alpha \oplus \mathcal{T}^\beta \mid \sigma^\alpha(T^\alpha) = \sigma^\beta(T^\beta)\}.$$

このとき以下の C^* 環の短完全列が知られている.

⁷ $\alpha = -\infty$ または $\beta = +\infty$ も許す. ただし共に成り立つことはないものとする.

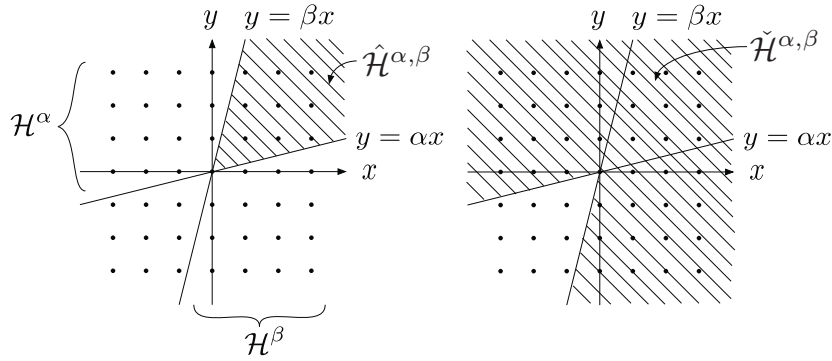


図 3: 四半面 (凸型の角, 左) と凹型角 (右)

定理 2.2 (Park[13]).

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta}) \rightarrow \hat{\mathcal{T}}^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\hat{\gamma}} \mathcal{S}^{\alpha,\beta} \rightarrow 0. \tag{2}$$

ここで $\mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta})$ から $\hat{\mathcal{T}}^{\alpha,\beta}$ への射は包含写像, $\hat{\gamma}$ は $\hat{T}_f^{\alpha,\beta}$ をペア (T_f^α, T_f^β) にうつす $*$ -準同型である.

3. バルク・エッジ対応

ここでは Kellendonk–Richter–Schultz–Baldes[10] に基づき, バルク・エッジ対応の定式化と証明の概略を述べる. 5章の都合で, 2次元クラス A と 1次元クラス AIII と呼ばれるあるクラスのトポロジカル相を取り上げる (3章全体の参考文献として [14] を挙げておく). 以下, V を有限次元の複素内積空間とし, N でそのランクを表す.

3.1. 2次元クラス A

連続写像 $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Herm}(V)$, $(\xi, t) \mapsto H^A(\xi, t)$ を考える⁸. \mathbb{T}^2 の各点で $H^A(\xi, t)$ を作用させる $L^2(\mathbb{T}^2; V)$ 上の作用素は, Fourier 変換を経由して $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$ 上の有界線形自己共役作用素 H^A を定める. 境界の無い無限系として \mathbb{Z}^2 をバルクのモデルと見なし, ここでは H^A をバルクハミルトニアンという⁹. バルクがある種の絶縁体であるような系のハミルトニアンを念頭に置き, 次の仮定を置く.

仮定 3.1. H^A は可逆.

この仮定のもとに, 各点 $(\xi, t) \in \mathbb{T}^2$ に対し, エルミート作用素 $H^A(\xi, t)$ のスペクトル $\text{sp}(H^A(\xi, t))$ は 0 を含まない. 従って, 各点で $H^A(\xi, t)$ の負の固有値全てに対する固有空間の直和ベクトル空間 $E_B(\xi, t)$ を取り, パラメータ空間 \mathbb{T}^2 上でベクトル空間 $E_B(\xi, t)$ の族を考えると, 有限ランクの複素ベクトル束 $E_B \rightarrow \mathbb{T}^2$ が得られる. E_B は Bloch 束と呼ばれる. Bloch 束 E_B の第一 Chern 数¹⁰ をある種絶縁体的なバルクの不変量とみなし,

⁸ ここで $\text{Herm}(V)$ は V 上のエルミート変換全体のなす空間.

⁹ 例えば以下の形の $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$ 上の有界自己共役作用素を考える (ここで $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$ の元 $\varphi = \{\varphi_{x,y}\}_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2}$ は V の元 $\varphi_{x,y}$ の列で $\sum_{x,y} \|\varphi_{x,y}\|_V^2 < \infty$ を満たすものとみなしている).

$$(H\varphi)_{x,y} = \sum_{\text{finite}} A_{p,q} \varphi_{x-p,y-q}, \quad (A_{p,q} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V))$$

ただし (簡単のために) 有限個の $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ を除いて $A_{p,q} = 0$ とする. このとき H は x と y 方向の並進作用素と可換であり, Fourier 変換によって連続写像 $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Herm}(V)$ を与え, 我々のモデルに含まれる. 例としては 1 粒子フェルミオンの tight-binding ハミルトニアンがある.

¹⁰ \mathbb{T}^2 の向きは二つの \mathbb{T} の向きの積で定める.

バルク指数と呼ぶ. この量は TKNN 数とも呼ばれている [18].

定義 3.2 (バルク指数, TKNN 数). $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{2D,A}(H^A) := \langle c_1(E_B), [\mathbb{T}^2] \rangle \in \mathbb{Z}$.

バルクハミルトニアンを連続写像 $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Herm}(V)$ の範囲内で連続変形するとき, 仮定 3.1 が保たれる限りは対応する Bloch 束は同型で, 従ってバルク指数は不変である.

次にエッジを考える. 部分 Fourier 変換によって H^A を \mathbb{T} でパラメータ付けされた $l^2(\mathbb{Z}, V)$ 上の有界自己共役線形作用素の族 $\{H^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ に分解する. ここで Toeplitz 作用素の族 $\{H_{\text{Edge}}^A(t) := P_{\geq 0} H^A(t) P_{\geq 0}\}_{t \in \mathbb{T}}$ を考える¹¹. これをエッジハミルトニアンと呼ぶ¹². 仮定から, この族は \mathbb{T} でパラメータ付けされた自己共役 Fredholm 作用素の作用素ノルムに関する連続族である. この族のスペクトル流, すなわち族 $\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ のスペクトルと 0 の交叉を, 重複度と交叉の向きも込めて符号付きで数えたもの (\mathbb{T} の向きに対し, 0 と負から正に交わる交叉を +, 正から負に交わる交叉を - で数える), をエッジ指数と呼ぶ.

定義 3.3 (エッジ指数). $\mathcal{I}_{\text{Edge}}^{2D,A}(H^A) := \text{sf}\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}} \in \mathbb{Z}$

各交点には, ある $t \in \mathbb{T}$ について $H_{\text{Edge}}^A(t)$ の固有値 0 の固有ベクトル (エッジ状態) が存在するので, エッジ指数はエッジ状態の個数を符号付きで数え上げたものと言える. エッジ指数が 0 でなければエッジ状態が存在することに注意する. 以上の準備のもとに, バルク・エッジ対応 (のトポロジー的な側面) は, 以下の定理で述べられる.

定理 3.4 (バルク・エッジ対応). $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{2D,A}(H^A) = \mathcal{I}_{\text{Edge}}^{2D,A}(H^A)$.

従ってバルクのトポロジーを反映してトポロジカルなエッジ状態が現れる. バルク・エッジ対応の上記の定式化と証明は Hatsugai による [6]. ここでは Kellendonk–Richter–Schulz-Baldes [10] による Toeplitz 作用素の指数理論を用いた証明を紹介する. 次の図式に着目する.

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{\partial_0} & K_1(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})) \otimes C(\mathbb{T})) \\
 & \searrow c_1 & \swarrow \text{sf} \\
 & \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

このとき状況は以下である.

- $K_0(C(\mathbb{T}^2))$ は 2次元トーラスの位相的 K 理論 $K^0(\mathbb{T}^2)$ と同型であり, \mathbb{T}^2 上の有限ランク複素ベクトル束である Bloch 束 E_B はこの K 群の元 $[E_B]$ を定める. c_1 は \mathbb{T}^2 上の有限ランク複素ベクトル束にその第一 Chern 数を対応させる群準同型. 従って $[E_B]$ の c_1 による像はバルク指数 $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{2D,A}(H^A)$ である.
- $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上の有界線型自己共役 Fredholm 作用素の全体空間の, トポロジカルに非自明な一つの連結成分を $\text{Fred}_*^{s.a.}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$ と書く¹³. $K_1(\mathcal{K}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})) \otimes C(\mathbb{T}))$ は, \mathbb{T} から $\text{Fred}_*^{s.a.}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))$ への連続写像のホモトピー類 $[\mathbb{T}, \text{Fred}_*^{s.a.}(l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}))]$ に同型であり, スペクトル流が与える \mathbb{Z} への写像 sf がある. エッジハミルトニアン $\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ はこの元を定め, 写像 sf によってエッジ指数 $\mathcal{I}_{\text{Edge}}^{2D,A}(H^A)$ に写る.

¹¹ ここで記号の簡略化のために $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, V) \cong l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \otimes V$ 上の作用素 $P_{\geq 0} \otimes 1_V$ を $P_{\geq 0}$ と書く. 以下, 直交射影については同様の略記をする.

¹² H^A を $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$ 上に Dirichlet 境界条件を用いて制限する. エッジに沿う y 軸方向には並進不変なので, その方向に部分 Fourier 変換したものが $\{H_{\text{Edge}}^A(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ である.

¹³ 本質的スペクトルが $(-\infty, 0)$ と $(0, +\infty)$ のどちらにも含まれることのない $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上の自己共役 Fredholm 作用素からなるもの. 作用素ノルムで位相を入れる. 位相的 K^1 群の分類空間をなす.

- ∂_0 は短完全列 (1) に $C(\mathbb{T})$ をテンソルして得られる短完全列¹⁴に同伴する C^* 環の K 理論の境界準同型.

ここで上記の図式が可換であることから定理 3.4 が従う.

3.2. 1次元クラス AIII

本節では V がさらに \mathbb{Z}_2 -次数を持つとする. すなわち複素線形写像 $\Pi: V \rightarrow V$ であって $\Pi^2 = 1$ なるものが与えられたとする. 連続写像 $\mathbb{T} \rightarrow \text{Herm}(V)$, $(\xi, t) \mapsto H^{\text{AIII}}(t)$ が Fourier 変換を経由して定める $l^2(\mathbb{Z}; V)$ 上の自己共役線形な作用素を H^{AIII} と書き, バルクハミルトニアンと呼ぶ. Π を $l^2(\mathbb{Z}; V)$ 上に各ファイバーへの作用によって拡張した作用素を再び Π で表すものとする. このとき次の仮定を置く,

仮定 3.5. (1) H^{AIII} は可逆. (2) H^{AIII} と Π は反可換.

最初の条件はバルクがある種の絶縁体なモデルの考察に対応する. 後者の条件は H^{AIII} がカイラル対称性と呼ばれるある種の量子力学的な対称性を保つ場合であり¹⁵, Π をカイラル作用素と呼ぶ. カイラル対称性により, H^{AIII} は次の off-diagonal な形に表される.

$$H^{\text{AIII}} = \begin{pmatrix} 0 & h^* \\ h & 0 \end{pmatrix}.$$

仮定 3.5(1) より h も可逆である. 連続写像 $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \mapsto \det(h(t))$ の回転数の -1 倍をこの系のバルク指数と呼ぶ¹⁶.

定義 3.6 (バルク指数). $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}}) := -\text{Wind}(h)$.

次に, エッジのモデルとして Toeplitz 作用素 $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}} := P_{\geq 0} H^{\text{AIII}} P_{\geq 0}$ を考え, エッジハミルトニアンと呼ぶ. エッジハミルトニアンは Π と反可換であり, 仮定から $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}$ やその off-diagonal 成分 $P_{\geq 0} h P_{\geq 0}$ は Fredholm 作用素である. この指数をエッジ指数と呼ぶ.

定義 3.7 (エッジ指数). $\mathcal{I}_{\text{Edge}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}}) := \text{index}(P_{\geq 0} h P_{\geq 0})$.

Π は $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}$ と反可換なため, 有限次元ベクトル空間 $\text{Ker}(H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}})$ に作用し, その自乗は 1 である. エッジ指数は $\Pi|_{\text{Ker}(H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}})}$ の $+1$ 固有空間の次元から -1 固有空間の次元を引いたものに一致する. 従ってエッジ指数は $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}$ の固有値 0 の固有ベクトル (エッジ状態) の個数を Π の作用による符号付きで数えたものであり, 特にエッジ指数が 0 でなければエッジ状態が存在する. このとき次が成り立つ.

定理 3.8 (バルク・エッジ対応). $\mathcal{I}_{\text{Bulk}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}}) = \mathcal{I}_{\text{Edge}}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}})$.

これは定理 2.1 (2) の 3.2 節での議論から直ちに従う. 本稿ではバルク・エッジ対応 (定理 3.4, 3.8) により互いに等しい整数を, それぞれ $\mathcal{I}^{2D, \text{A}}(H^{\text{A}})$ と $\mathcal{I}^{1D, \text{AIII}}(H^{\text{AIII}})$ と表す.

4. コーナーのある系におけるトポロジーとバルクエッジ・コーナー対応

以下で図 2 のような余次元 2 の角を持つ系を議論する. 4, 5 章の内容は [7] に基づく.

¹⁴ $C(\mathbb{T})$ が可換 C^* 環なので完全性を保つ.

¹⁵ カイラル対称性を保つ系は AIII というクラスに分類される. 特に対称性を要請しない 3.1 節のケースはクラス A に分類される [14].

¹⁶ 仮定 3.5 から V は偶数次元でなければならないことに注意する.

4.1. 設定

連続写像 $\mathbb{T}^3 \rightarrow \text{Herm}(V)$, $(\xi, \eta, t) \mapsto H(\xi, \eta, t)$ から $l^2(\mathbb{Z}^3; V)$ のバルクハミルトニアン H を考える. 余次元 2 の角を持つ系として図 2 のような系を考えたい. 部分 Fourier 変換によって $l^2(\mathbb{Z}^2; V)$ 上の作用素の族 $\{H(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ を考える. $\mathcal{H}_V^\alpha := \mathcal{H}^\alpha \otimes V$ と書き, 同様に $\mathcal{H}_V^\beta, \hat{\mathcal{H}}_V^{\alpha, \beta}$ を定義する. これらの上へのバルクハミルトニアン $H(t)$ の compression を取ることでエッジのモデルとコーナーのモデルを導入する. まずエッジのモデルを導入する:

$$H_{\text{Edge}}^\alpha(t) := P^\alpha H(t) P^\alpha: \mathcal{H}_V^\alpha \rightarrow \mathcal{H}_V^\alpha, \quad H_{\text{Edge}}^\beta(t) := P^\beta H(t) P^\beta: \mathcal{H}_V^\beta \rightarrow \mathcal{H}_V^\beta.$$

これらの有界自己共役作用素をエッジハミルトニアンと呼ぶ. 次にコーナーのモデルを導入する:

$$\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t) := \hat{P}^{\alpha, \beta} H(t) \hat{P}^{\alpha, \beta}: \hat{\mathcal{H}}_V^{\alpha, \beta} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_V^{\alpha, \beta}$$

$\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)$ をコーナーハミルトニアンと呼ぶ.

本稿では以下の仮定を置き, その帰結を議論する.

仮定 4.1. 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し, 二つのエッジハミルトニアン $H_{\text{Edge}}^\alpha(t), H_{\text{Edge}}^\beta(t)$ は共に可逆であるとする.

この仮定のもとではバルクハミルトニアン H も可逆である. 従って我々が考察する状況はバルクも二つのエッジも絶縁体的な系をモデルとする. この仮定のもとに, 以下で二つの位相不変量を定義し, その性質や関係を議論する.

4.2. バルクエッジ不変量

まず可逆な二つのエッジ (とバルク) ハミルトニアンを用いて位相不変量を定義する. 二つのエッジハミルトニアン $H_{\text{Edge}}^\alpha(t)$ と $H_{\text{Edge}}^\beta(t)$ はバルクハミルトニアン $H(t)$ の compression として定義されたのであった. 従って $\sigma^\alpha(H_{\text{Edge}}^\alpha(t)) = H(t) = \sigma^\beta(H_{\text{Edge}}^\beta(t))$ であり, ペア $(H_{\text{Edge}}^\alpha(t), H_{\text{Edge}}^\beta(t))$ は $M_N(\mathcal{S}^{\alpha, \beta})$ の元である. 連続関数 $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $(-\infty, 0)$ の上では 1, $(0, +\infty)$ の上では 0 なるものとする. このとき continuous functional calculus によって以下の射影元が得られる.

$$p := g(H_{\text{Edge}}^\alpha, H_{\text{Edge}}^\beta) \in M_N(\mathcal{S}^{\alpha, \beta} \otimes C(\mathbb{T})).$$

ここから位相不変量を以下の C^* 環の K 群の元として定義する^{17 18}.

定義 4.2 (バルクエッジ不変量). $\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D, A}(H) := [p] \in K_0(\mathcal{S}^{\alpha, \beta} \otimes C(\mathbb{T})).$

4.3. コーナー指数

次にコーナーハミルトニアンを用いて位相不変量を定義する. ここで, $\hat{g}(\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)) = (H_{\text{Edge}}^\alpha(t), H_{\text{Edge}}^\beta(t))$ は仮定から $M_N(\mathcal{S}^{\alpha, \beta})$ の可逆元であり, 従って定理 2.2 から $\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)$ は Fredholm 作用素であることがわかる. 自己共役 Fredholm 作用素の連続族 $\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha, \beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ からスペクトル流によって整数値の位相不変量を得る. これをいまひとつの不変量と定義する.

¹⁷ C^* 環 A に対し, K 群 $K_0(A)$ は, A の行列環 $M_n(A)$ の射影元 (すなわち $q \in M_n(A)$ で $q = q^* = q^2$ なる元) たちの集合 (n は任意の自然数をとる) に適切に同値関係を入れて定義される [12].

¹⁸ 3.1 節でバルク指数を与えた Bloch 束 E_B は次のように理解できる. $g(H^A)$ は $M_N(C(\mathbb{T}^2))$ の射影元を定め, 従って C^* 環の K 群 $K_0(C(\mathbb{T}^2))$ の元を定める. この元は位相的 K 群との同型 $K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong K^0(\mathbb{T}^2)$ によって Bloch 束のクラス $[E_B]$ に対応する. この意味でバルクエッジ不変量の定義は, Bloch 束が定める $K^0(\mathbb{T}^2)$ の元の構成を真似たものである.

定義 4.3 (コーナー指数). $\hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H) := \text{sf}\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha,\beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}} \in \mathbb{Z}$.

定義から $\hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H)$ がゼロでなければコーナーハミルトニアン固有値0の固有ベクトル(コーナー状態)が存在する¹⁹. 従ってコーナー指数はコーナー状態の個数を符号付きで重複度も込めて数え上げたものである.

4.4. 性質

短完全列 (2) に $C(\mathbb{T})$ をテンソルして得られる短完全列に伴う C^* 環の K 理論の6項完全列の境界準同型 $\hat{\partial}_0: K_0(\mathcal{S}^{\alpha,\beta} \otimes C(\mathbb{T})) \rightarrow K_1(\mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta}) \otimes C(\mathbb{T}))$ を考える. 上記の二つの位相不変量の間には以下の関係がある.

定理 4.4 (H. [7], バルクエッジ・コーナー対応). $\text{sf} \circ \hat{\partial}_0(\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D,A}(H)) = \hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H)$.

Proof. コーナーハミルトニアン $\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha,\beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $[\mathbb{T}, \text{Fred}_*^{\text{s.a.}}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta})] \cong K_1(\mathcal{K}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta}) \otimes C(\mathbb{T}))$ の元を定める²⁰. 従って境界準同型 $\hat{\partial}_0$ によって $\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D,A}(H)$ がこのクラスに写ることを確かめれば良い. これは境界準同型 $\hat{\partial}_0$ の定義から確認できる. \square

従ってある種絶縁体的なバルクとエッジのトポロジを反映して, 系の摂動に対して頑強なコーナー状態が現れ, コーナーがある種金属的に振る舞う.

注意 4.5. 本稿の議論は, バルクエッジ対応における [10] の議論に着目し, Toeplitz 作用素の代わりに四半面 Toeplitz 作用素を用いた議論を展開することで得られたものである. さらに余次元が大きな場合の取り扱いを可能にするある種の Toeplitz 作用素の指数理論は [4, 3] などで展開されている²¹.

注意 4.6. 我々の設定ではバルクハミルトニアンは可逆であるため, 3.1 節と同様にバルクの不変量を考えることができる. 具体的に, \mathbb{T}^3 上の Bloch 束を 3.1 節と同様に定義し, Bloch 束が定める $K^0(\mathbb{T}^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の元を考える. 一つの \mathbb{Z} は Bloch 束のランクに対応し, 残りの三つの \mathbb{Z} に対応するバルクの不変量は (3次元クラス A の系の) 弱不変量と呼ばれる. 我々の仮定の下では三つの弱不変量は全て0であることが証明できる [7]. この意味で, 本稿のコーナーに関連したトポロジの考察は, 従来のトポロジカル相のトポロジに対してある種二次的なトポロジの考察と位置付けられる.

5. 具体例の構成法

前節で定義したコーナーに関連した位相不変量の非自明な具体例の構成法を与える. 本節では $\alpha = 0, \beta = \infty$ とする.

$l^2(\mathbb{Z}^2, V_1)$ 上の作用素 H^A を 2次元クラス A のトポロジカル絶縁体のバルクハミルトニアン (3.1 節参照), $l^2(\mathbb{Z}, V_2)$ 上の作用素 H^{AIII} を 1次元クラス AIII のトポロジカル絶縁体のバルクハミルトニアンでカイラル対称性は Π で与えられるもの (3.2 節参照) とする. ここで $W = V_1 \otimes V_2$ とおく. これらを用いて以下の $l^2(\mathbb{Z}^3, W)$ 上の有界自己共役作用素を考察する.

$$H := H^A \otimes \Pi + 1 \otimes H^{\text{AIII}}.$$

Fourier 変換で $l^2(\mathbb{Z}^2; W)$ 上の作用素の族 $\{H(t) = H^A(t) \otimes \Pi + 1 \otimes H^{\text{AIII}}\}_{t \in \mathbb{T}}$ に分解する.

定理 5.1 (H. [7]). 上記のハミルトニアン H に対し, 以下が成り立つ.

¹⁹ ここでの記号は3次元クラス A と呼ばれる系を考察していることを反映している

²⁰ ここで族 $\{\hat{H}_{\text{Corner}}^{\alpha,\beta}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ が $\text{Fred}_*^{\text{s.a.}}(\hat{\mathcal{H}}^{\alpha,\beta})$ に入らない場合があり得るが, その場合は $\mathcal{I}_{\text{BE}}^{3D,A}(H)$ も $\hat{\mathcal{I}}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H)$ も 0 である. ここでは自明な場合を除いて議論する.

²¹ ただし余次元 2 の場合の結果 [13] と比較すると, この場合の角の形状は特別な形状に限られている.

- (1) 各 $t \in \mathbb{T}$ 二つのエッジハミルトニアン $H_{\text{Edge}}^0(t)$, $H_{\text{Edge}}^\infty(t)$ は共に可逆.
- (2) (1) よりコーナー指数が定義される. コーナー指数は H^A と H^{AIII} のトポロジカル数を用いて $\hat{I}_{\text{Corner}}^{3D,A}(H) = \mathcal{I}^{2D,A}(H^A) \cdot \mathcal{I}^{1D,\text{AIII}}(H^{\text{AIII}})$ で与えられる. ここで右辺は二つの整数の積.

Proof. (1) 各 $t \in \mathbb{T}$ に対し $H_{\text{Edge}}^\infty(t)$ が可逆であることを示す. Hilbert 空間の同型 $\mathcal{H}_W^\infty \cong l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; V_1) \otimes l^2(\mathbb{Z}; V_2)$ により,

$$H_{\text{Edge}}^\infty(t) = P^\infty H(t) P^\infty = H_{\text{Edge}}^A(t) \otimes \Pi + 1 \otimes H^{\text{AIII}}.$$

である. この二乗をとると, Π と H^{AIII} は反可換なので

$$(H_{\text{Edge}}^\infty(t))^2 = (H_{\text{Edge}}^A(t))^2 \otimes 1 + 1 \otimes (H^{\text{AIII}})^2.$$

$(H_{\text{Edge}}^A(t))^2 \geq 0$ と $(H^{\text{AIII}})^2 > 0$ より $(H_{\text{Edge}}^\infty(t))^2 > 0$. 従って $H_{\text{Edge}}^\infty(t)$ は可逆. $H_{\text{Edge}}^0(t)$ の可逆性も同様の議論によって示される.

(2) H^A と H^{AIII} それぞれのエッジ状態 $\varphi_1 \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; V_1)$ と $\varphi_2 \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; V_2)$ があつたとする. すなわち, ある $t \in \mathbb{T}$ について $H_{\text{Edge}}^A(t)\varphi_1 = 0$ と $H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}}\varphi_2 = 0$ が成り立つ. このとき

$$H_{\text{Corner}}^{0,\infty}(t)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = (H_{\text{Edge}}^A(t) \otimes \Pi + 1 \otimes H_{\text{Edge}}^{\text{AIII}})(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = 0$$

であり, H^A と H^{AIII} それぞれのエッジ状態のテンソル積はコーナー状態を与える. 一方でここでのモデルではコーナー状態はエッジ状態のテンソル積の線形和として必ず表されることがわかる. H のコーナー状態の個数と H^A , H^{AIII} のエッジ状態の個数を (符号に注意して) 比較することで (2) 式が得られる. \square

定理 5.1 を用いることで, 従来のトポロジカル相二つから具体例を構成できる. 実際の具体例は [7, 8] などを参照されたい.

注意 5.2 (H. [8]). ここまでの議論はコーナーの角度が 180 度より小さい場合に限っているが, 図 3 右図のような角度が 180 度より大きな凹型角の場合も同様に考えることができる. この形状の角に対するある種の Toeplitz 作用素に対しても定理 2.2 と同様の結果が成り立ち, 仮定 4.1 の下で凹型角に対するコーナー指数が同様に定義される. ここで四半面 (凸型角) と凹型角のコーナー指数の間には -1 倍の関係が成り立つことが示される. 従ってバルクハミルトニアンを固定して角の形状を変えることを考えるとき, コーナー指数は形状に応じて変化する.

6. 応用例: 高次トポロジカル絶縁体

トポロジカルなコーナー状態を持つ系は, 物性物理学では高次トポロジカル絶縁体と呼ばれ [15], 近年盛んに研究がなされている [2]. 本稿では 3 次元クラス A で余次元 2 のコーナーを持つ系を扱ったが, 2 次元で余次元 2 のコーナーを持ち, さらに 3.2 節のようにカイラル対称性を保つクラス AIII の系を考えると, 整数値のコーナー指数が定義され, コーナーに関連したトポロジーについて同様の理論を展開することができる [8]. 応用例として, Benalcazar–Bernevig–Hughes の 2 次元モデル [2] はカイラル対称性を含む複数の対称性を保ち, 実際にコーナー状態を持つが, このことを我々の手法で説明することができる. すなわち定理 5.1 と類似の定理を用いて, コーナー指数を実際に計算し, 非自明であることが確認できる. これによって [2] のモデルが持つコーナー状態の背後にあるトポロジーについて, カイラル対称性の役割が明らかとなった [8].

参考文献

- [1] J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. *J. Math. Phys.*, 35(10):5373–5451, 1994. Topology and physics.
- [2] W. A. Benalcazar, B. A. Bernevig, and T. L. Hughes. Quantized electric multipole insulators. *Science*, 357:61–66, 2017.
- [3] R. G. Douglas. *Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.
- [4] R. G. Douglas and R. Howe. On the C^* -algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158:203–217, 1971.
- [5] D. S. Freed and G. W. Moore. Twisted equivariant matter. *Ann. Henri Poincaré*, 14(8):1927–2023, 2013.
- [6] Y. Hatsugai. Chern number and edge states in the integer quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 71(22):3697–3700, 1993.
- [7] S. Hayashi. Topological Invariants and Corner States for Hamiltonians on a Three-Dimensional Lattice. *Comm. Math. Phys.*, 364(1):343–356, 2018.
- [8] S. Hayashi. Toeplitz operators on concave corners and topologically protected corner states. *Lett. Math. Phys.*, 2019, <https://doi.org/10.1007/s11005-019-01184-w>.
- [9] X. Jiang. On Fredholm operators in quarter-plane Toeplitz algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(9):2823–2830, 1995.
- [10] J. Kellendonk, T. Richter, and H. Schulz-Baldes. Edge current channels and Chern numbers in the integer quantum Hall effect. *Rev. Math. Phys.*, 14(1):87–119, 2002.
- [11] A. Kitaev. Periodic table for topological insulators and superconductors. *AIP Conference Proceedings*, 1134(1):22–30, 2009.
- [12] G. J. Murphy. *C^* -algebras and operator theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [13] E. Park. Index theory and Toeplitz algebras on certain cones in \mathbf{Z}^2 . *J. Operator Theory*, 23(1):125–146, 1990.
- [14] E. Prodan and H. Schulz-Baldes. *Bulk and boundary invariants for complex topological insulators*. Mathematical Physics Studies. Springer, 2016. From K -theory to physics.
- [15] F. Schindler, et al. Higher-order topological insulators. *Science Advances*, 4(6):eaat0346, 2018.
- [16] K. Shiozaki, M. Sato, and K. Gomi. Topological crystalline materials: General formulation, module structure, and wallpaper groups. *Phys. Rev. B*, pages 235425–1–54, 2017.
- [17] I. B. Simonenko. Convolution type operators in cones. *Mat. Sb. (N.S.)*, 74 (116):298–313, 1967.
- [18] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, 1982.

On the topological regularity of spaces with an upper curvature bound

永野 幸一 (筑波大数理物質)*

概 要

本稿では, Lytchak 氏 (ケルン大学) と筆者による曲率が上に有界な距離空間に対する一連の共同研究 [30, 31] のうち, 特に幾何学的トポロジーの観点から得られた位相正則性に関する論文 [31] 中の主な研究成果について報告する.

1. はじめに

A. D. Alexandrov は 1950 年代に測地三角形の比較条件によって曲率が片側に有界な距離空間の概念を導入した. 彼の研究を祖とする Alexandrov 幾何学は, 1980 年代の Gromov の研究を契機として脚光を浴びることになる. 曲率が下に有界な距離空間は, 単に Alexandrov 空間と呼ばれ, 距離空間族に対する Gromov のプレコンパクト性定理により大域 Riemann 幾何学において大事な研究対象になっている. 一方で, 曲率が上に有界な距離空間は, 特別な対象が CAT(κ) 空間と呼ばれ, Gromov の双曲群に関連する幾何学的群論において Gromov 双曲距離空間とともに基本的な役割を担っている.

以下では, n 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^n 内の $(n-1)$ 次元標準単位球面を S^{n-1} で表す. 曲率が片側に有界な距離空間 X に対して, 点 $x \in X$ における方向空間を $\Sigma_x X$ で表し, その Euclid 錐として定義される接空間を $T_x X$ で表す. また接空間 $T_x X$ の頂点を o_x で表す. もし X が Riemann 多様体であれば, 方向空間 $\Sigma_x X$ は単位接球面に, 接空間 $T_x X$ は通常の接空間に, 頂点 o_x は通常の接空間の原点に相当する.

次は Lytchak と筆者 [31] の曲率が上に有界な空間に対する局所位相正則性定理である.

定理 1.1. ([31]) 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間 X に対し以下は同値である.

- (1) X は n 次元位相多様体である.
- (2) 任意の点 $x \in X$ における方向空間 $\Sigma_x X$ は S^{n-1} にホモトピー同値である.
- (3) 任意の点 $x \in X$ における接空間 $T_x X$ は \mathbb{R}^n に同相である.

注意 1.1. 定理 1.1 は次のように換言できる ([31]). 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間 X に対し以下は同値である. (1) X は位相多様体である. (2) 非可縮な位相空間 Σ が存在して, 各点 $x \in X$ において方向空間 $\Sigma_x X$ は Σ にホモトピー同値である. (3) 有限次元位相空間 T が存在して, 各点 $x \in X$ において接空間 $T_x X$ は T に同相である.

定理 1.1 は未解決であった A. D. Alexandrov の問題 ([1] を参照) に完答する. 定理 1.1 において, X が n 次元位相多様体であるとする. このとき, 各点における方向空間は S^{n-1} と同じホモロジー群を持つ $(n-1)$ 次元ホモロジー多様体である (命題 3.5 を参照). もし $n \geq 5$ であれば, 各点での方向空間が $(n-1)$ 次元位相多様体であるとは限らない. 実際, そのような性質を満たす例は, Edwards の二重懸垂定理 ([17], [11]) により, $(n-2)$ 次元 Poincaré ホモロジー球面の二重懸垂として構成される ([1], [4], [21], 例 3.1 を参照). 他方 $n \leq 4$ であれば, 各点における方向空間は S^{n-1} に同相である (定理 6.2 を参照).

部分的に科研費 (課題番号:26610012, 21740036, 18740023) と学振海外特別研究員制度の助成を受けた.

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数域

e-mail: nagano@math.tsukuba.ac.jp

次は曲率が上に有界なホモロジー多様体に対する位相正則性定理である。

定理 1.2. ([31]) 曲率が上に有界な任意の n 次元ホモロジー多様体 X に対し, X の局所有限な部分集合 E が存在して, 差集合 $X - E$ は n 次元位相多様体である。

定理 1.2 は未解決であった Quinn の問題 [41] に肯定的な解答を与えている。

以下では, 距離空間の点 p を中心とする半径 r の開距離球体を $U_r(p)$, 閉距離球体を $B_r(p)$, 距離球面 $B_r(p) - U_r(p)$ を $\partial B_r(p)$ で表すことにする。

曲率が下に有界な任意の有限次元 Alexandrov 空間に対して定理 1.1 や定理 1.2 の主張が成り立つことは, Wu ([50]) が示したように, Perelman の局所錐性定理 ([36], [37]) から導かれる。Perelman の局所錐性定理の主張は次の通りである ([26] も参照)。曲率が下に有界な有限次元 Alexandrov 空間 X の点 $x \in X$ を与えると, 十分小さな任意の $r \in (0, \infty)$ に対して, 同相写像 $h: B_r(x) \rightarrow B_1(o_x)$ が存在して, $h(\partial B_r(x)) = \Sigma_x X$ かつ $h(x) = o_x$ を満たし, 制限写像 $h|_{\partial B_r(x)}: \partial B_r(x) \rightarrow \Sigma_x X$ も同相である。ここで, 接空間 $T_x X$ 内の距離球面 $\partial B_1(o_x)$ を方向空間 $\Sigma_x X$ と同一視している。

曲率が上に有界な場合, 距離空間が局所コンパクトで局所測地的完備であり, 2次元であっても, 局所錐性定理が成り立たないことが, Kleiner [28] によって指摘された (反例の具体的な構成方法は [33] を参照)。定理 1.1 や定理 1.2 を証明するためには, Perelman の論文 [36], [37] とは異なるアイデアが必要である。

曲率が上に有界なホモロジー多様体に対しては, 次の局所錐性定理が成り立つ。なお, $n = 5$ の場合の証明は Steven Ferry 氏 (ラトガース大学) の援助を受けている (注意 6.1)。

定理 1.3. ([31]) 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体 X について, 任意の点 $x \in X$ に対して, X における x の開近傍 U_x と, S^{n-1} と同じホモロジー群を持つコンパクト $(n-1)$ 次元位相多様体 M_x が存在して, U_x は M_x 上の開錐 $C(M_x)$ に同相である。

注意 1.2. 論文 [31] では, 次の主張も証明している。すなわち, 定理 1.3 において, もし $n \leq 4$ であれば, 任意の点 $x \in X$ について, 十分小さなすべての $r \in (0, D_\kappa)$ に対して, 距離球面 $\partial B_r(x)$ は S^{n-1} と同じホモロジー群を持つコンパクト $(n-1)$ 次元位相多様体であり, 開距離球体 $U_r(x)$ は $\partial B_r(x)$ 上の開錐 $C(\partial B_r(x))$ に同相である。

曲率が上に有界な空間に対する局所位相正則性定理 1.1 は, 次に述べるような曲率が上に有界な Riemann 多様体列の非崩壊極限の位相正則性と位相安定性を導く。

定理 1.4. ([31]) CAT(κ) である点付き n 次元 Riemann 多様体列 (M_i, p_i) が点付き固有距離空間 X に, 点付き Gromov–Hausdorff 位相で収束しているとする。このとき, X は n 次元位相多様体であり, X 内の任意の反復方向空間は球面に同相である。すなわち, 各 $m \in \{1, \dots, n\}$ について任意の $x \in X, \xi_1 \in \Sigma_x X, \dots, \xi_m \in \Sigma_{\xi_{m-1}} \cdots \Sigma_{\xi_1} \Sigma_x X$ に対し, 反復方向空間 $\Sigma_{\xi_m} \cdots \Sigma_{\xi_1} \Sigma_x X$ は S^{n-m-1} に同相である。加えて, もし X がコンパクトであれば, 十分大の任意の i に対して M_i は X に同相である。

断面曲率が下に有界な非崩壊 Riemann 多様体列に対し, 定理 1.4 の前半の位相正則性は V. Kapovich [25] によって示されている。定理 1.4 の後半の位相安定性は Perelman の位相安定性定理 ([37]) の帰結である。Perelman の位相安定性定理の主張は次の通りである ([26] も参照)。曲率が κ 以上の n 次元 Alexandrov 空間 X に対して, ある $\epsilon \in (0, \infty)$ が存在して, もし曲率が κ 以上の n 次元 Alexandrov 空間 Y と X の間の Gromov–Hausdorff 距離が ϵ 未満であれば, X と Y は同相である。

一般に、曲率が上に有界な距離空間の方向空間はCAT(1)空間である。よって、CAT(1)空間に対する球面定理と定理 1.1 を組み合わせると、様々な位相多様体認識問題の解決に繋がる。Lytchak と筆者 [31] は定理 1.1 を用いて CAT(1) 空間に対する容量球面定理や体積球面定理を示している。さらに、筆者自身 [34] により後続研究が行われている。

本稿では、定理 1.1–1.4 の証明の概略について解説する。任意の有限単体的複体の幾何学的実現は CAT(1) 距離を有する ([3])。また 5 次元以上の可縮な任意のコンパクト境界付き PL 多様体の内部は CAT(-1) 距離を有する ([2])。これは Kirby–Siebenmann の定理 ([27]) より 6 次元以上であれば位相多様体に対しても正しい。幾何学的トポロジーの観点から曲率が上に有界な距離空間の位相構造を研究することは興味深いといえよう。

2. 曲率が上に有界な距離空間の基本性質

曲率が上に有界な距離空間に関する参考文献として [6], [8], [10] を挙げておく。

2.1. 曲率が上に有界な距離空間

距離空間内の最短測地線とは区間からの等長的埋め込み曲線のことであり、測地線とは局所最短測地線のことである。正の拡張実数 $r \in (0, \infty]$ に対して、距離空間が r -測地的であるとは、距離が r 未満の任意の 2 点が最短測地線で結ばれるときにいう。距離空間が測地的であるとは ∞ -測地的であるときにいう。局所測地的距離空間が局所測地的完備であるとは、端点を持つすべての測地線がその端点を越えて延長できるときにいう。距離空間が固有であるとは任意の閉距離球体がコンパクトであるときにいう。局所測地的距離空間が局所コンパクトで局所完備であれば局所固有である。

実数 $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し、定曲率 κ の単連結完備曲面を M_κ^2 で表し、その直径を D_κ とおく。完備距離空間が CAT(κ) であるとは、 D_κ -測地的であり、かつ周長が $2D_\kappa$ 未満の任意の測地三角形が M_κ^2 内の同じ辺長を持つ比較三角形と比べて厚くないときにいう。

距離空間 X が曲率が上に有界であるとは、ある $\kappa \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の点 $x \in X$ に対してある $r \in (0, D_\kappa/2)$ が存在して部分距離空間 $B_r(x)$ が CAT(κ) であるときにいう。この場合、 X の曲率は κ 以下であるという。

曲率が上に有界である距離空間は ANR (絶対近傍レトラクト) である ([35], [29])。実際、曲率が上に有界である距離空間は局所凸かつ局所可縮である。すなわち、任意の CAT(κ) 空間の点 x について、各 $r \in (0, D_\kappa/2)$ に対して $B_r(x)$ は凸である。各 $r \in [0, D_\kappa)$ に対して、点 x と任意の点 $y \in B_r(x)$ は唯一的に最短測地線で結ぶことができる。特に、 $B_r(x)$ は点 x から発進する最短測地線に沿って $B_r(x)$ の中で点 x に可縮である。

例 2.1. 断面曲率が一様に κ 以下である任意の完備 Riemann 多様体は、曲率が κ 以下の距離空間である。完備 Riemann 多様体が CAT(κ) であることと、断面曲率が一様に κ 以下であり、かつ単射半径が一様に D_κ 以上であることは同値である。

例 2.2. 距離空間 X 上の Euclid 錐 $C(X)$ は Euclid 距離を備えた開錐 $[0, \infty) \times X / \{0\} \times X$ として定まる。距離空間 X 上の Euclid 錐 $C(X)$ が CAT(0) であることと、 X が CAT(1) であることは同値である。

例 2.3. 距離空間 X, Y の球面的結 $X * Y$ は球面的距離を備えた結 $[0, \pi/2] \times X \times Y / \sim$ として定まる。距離空間 X, Y の球面的結 $X * Y$ が CAT(1) であることと、 X と Y がともに CAT(1) であることは同値である。なお、 $S^{m-1} * S^{n-1}$ は S^{m+n-1} に等長的である。距離空間 Z に対する球面的結 $S^0 * Z$ は Z 上の球面的懸垂に他ならない。

2.2. 曲率が上に有界な距離空間における方向空間, 接空間

曲率が上に有界である距離空間 X の点 $x \in X$ に対して, 点 x から発進する非自明な最短測地線全体の集合を $\Sigma'_x X$ で表す. 点 x における角度 \angle_x は $\Sigma'_x X$ 上の擬距離となる. ここで, $\Sigma'_x X$ の2つの元 $\gamma_i: [0, a_i] \rightarrow X, i \in \{1, 2\}$ の間の角度 $\angle_x(\gamma_1, \gamma_2)$ は,

$$\angle_x(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \sin^{-1} \frac{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{2t} = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \cos^{-1} \frac{t_1^2 + t_2^2 - d(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2))^2}{2t_1 t_2}$$

を満たす. ただし, d は X 上の距離である. 点 x における方向空間 $\Sigma_x X$ は商距離空間 $\Sigma'_x X / \angle_x = 0$ の完備化として定義される. 接空間 $T_x X$ は方向空間 $\Sigma_x X$ 上の Euclid 錐 $C(\Sigma_x X)$ として定義される. 任意の方向空間は CAT(1) であり, 接空間は CAT(0) である.

曲率が上に有界な距離空間において, 十分小さな穴あき距離球体は方向空間にホモトピー同値である. 実際, CAT(κ) 空間の点 x において, すべての $r \in (0, D_\kappa)$ に対して, $U_r(x) - \{x\}$ や $B_r(x) - \{x\}$ は $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である ([29]).

本稿を通して, 距離空間の次元 \dim は位相次元 (被覆次元) を表す. 曲率が上に有界な可分距離空間 X に対して, $\dim X = 1 + \sup_{x \in X} \dim \Sigma_x X$ が成り立つ ([28]). さらに, もし $\dim X = n$ であれば, ある点 $x \in X$ が存在し $H_{n-1}(\Sigma_x X)$ が自明な群ではない ([28]).

2.3. 曲率が上に有界な測地的完備距離空間

曲率が上に有界であり局所コンパクトで局所測地的完備な可分距離空間のことを GCBA 空間と呼ぶ. さらに, 曲率が κ 以下であるとき, GCBA(κ) 空間と呼ぶ. もし X が GCBA 空間であれば, 各点 $x \in X$ における方向空間 $\Sigma_x X$ や接空間 $T_x X$ は GCBA 空間である. また, 方向空間 $\Sigma_x X$ はコンパクトであり, 点付き接空間 $(T_x X, o_x)$ は点付き拡大空間 (rX, x) を $r \rightarrow \infty$ としたときの点付き Gromov–Hausdorff 極限に等長的である.

位相空間 X の点 $x \in X$ が多様体点であるとは, ある n について点 x が X において \mathbb{R}^n と同相な開近傍を持つときにいう. この場合 x を n 次元多様体点と呼ぶ. 位相空間 X 内の非多様体点全体からなる集合を $S(X)$ で表し位相的特異点集合と呼ぶ.

Lytchak と筆者は論文 [31] に先行する論文 [30] において GCBA 空間の幾何構造の基盤的な研究を行った. 論文 [30] 内の位相的な研究成果を幾つか述べる. 任意の GCBA 空間 X に対して, 以下が成り立つ. (1) $\dim X$ は局所的に有限である. (2) $X - S(X)$ は稠密な開部分集合である. (3) X において, 接空間が Euclid 空間と等長的な点全体からなる集合は稠密である. (4) X が n 次元であれば, $\dim S(X) \leq n - 1$ である.

次は Lytchak と筆者 [30] による局所ホモトピー安定性定理である.

定理 2.1. ([30]) 任意の GCBA(κ) 空間 X の点 $x \in X$ に対して, ある $r_x \in (0, D_\kappa/2)$ が存在して, すべての $r \in (0, r_x)$ について, $B_r(x)$ はコンパクトかつ CAT(κ) であり, $\partial B_r(x)$ は $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である. さらに, GCBA(κ) 空間列 (X_i) の各要素 X_i の点 $x_i \in X_i$ に対して $B_r(x_i)$ がコンパクトかつ CAT(κ) であり, $(B_r(x_i), x_i)$ が $(B_r(x), x)$ に点付き Gromov–Hausdorff 位相で収束しているとする, 十分大きな i に対して $\partial B_r(x_i)$ は $\partial B_r(x)$ にホモトピー同値である.

3. 曲率が上に有界なホモロジー多様体

本稿では, H_* で \mathbb{Z} 係数特異ホモロジー群を表す.

3.1. ホモロジー多様体に対する多様体認識定理

ホモロジー多様体に関する多様体分解理論の話題について手短かに述べる ([14] を参照).

局所コンパクト可分距離空間 M が n 次元ホモロジー多様体であるとは、任意の点 $p \in M$ における局所ホモロジー群 $H_*(M, M - \{p\})$ が $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ に同型であるときにいう。有限次元 ANR である n 次元ホモロジー多様体を n 次元一般多様体と呼ぶ。任意の n 次元一般多様体の次元は n に等しい。もし $n \leq 2$ であれば、Moore の定理によって、任意の n 次元一般多様体は位相多様体である ([49] を参照)。

位相空間の間の全射固有連続写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が胞体的であるとは、任意の点 $y \in Y$ のファイバー $\varphi^{-1}(\{y\})$ が X におけるすべての開近傍の中で可縮であるときにいう。また、 n 次元一般多様体 M, N の間の胞体的写像 $\varphi: N \rightarrow M$ がレゾリューションであるとは、 N が n 次元位相多様体であるときにいう。加えて、 n 次元一般多様体 M がレゾリューションを持つとは、ある n 次元位相多様体 N から M へのレゾリューションが存在するときにいう。Quinn のレゾリューション存在定理 ([39], [40]) により次が成り立つ。

定理 3.1. ([39], [40]) $n \geq 5$ とする。連結な n 次元一般化多様体 M は、 n 次元多様体点を許容すれば、レゾリューションを持つ。

以降、 \mathbb{B}^2 で \mathbb{R}^2 内の 2 次元標準単位閉円板を表す。距離空間 X が DDP (円板分離性) を満たすとは、任意の連続写像 $\varphi_1: \mathbb{B}^2 \rightarrow X, \varphi_2: \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ と任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ に対し、連続写像 $\tilde{\varphi}_1: \mathbb{B}^2 \rightarrow X, \tilde{\varphi}_2: \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ が存在して、各 $i \in \{1, 2\}$ について $d(\varphi_i, \tilde{\varphi}_i) < \epsilon$ であり、 $\tilde{\varphi}_1(\mathbb{B}^2) \cap \tilde{\varphi}_2(\mathbb{B}^2)$ が空集合であるときにいう。ここで、 d は一様距離である。

Edwards の DDP レゾリューション近似定理 ([16]) と Quinn のレゾリューション存在定理 ([39], [40]) を合わせると、次の Edwards–Quinn の DDP 多様体認識定理が得られる。

定理 3.2. ([16], [39], [40]) $n \geq 5$ とする。連結な n 次元一般多様体 M が n 次元位相多様体であることと、 M が n 次元多様体点を許容し、かつ DDP を満たすことは同値である。

位相空間 X の部分集合 K が X において 1-LCC (局所余単連結) であるとは、次が成り立つときにいう。すなわち、任意の点 $p \in K$ と、 X における p の任意の開近傍 U に対して、 p のある開近傍 V が存在して、すべての連続写像 $\sigma: \mathbb{S}^1 \rightarrow V - K$ に対して、ある連続写像 $\varphi: \mathbb{B}^2 \rightarrow U - K$ が存在して $\varphi|_{\mathbb{S}^1} = \sigma$ を満たす。

次は Cannon–Bryant–Lacher による 1-LCC 収縮定理 ([12]) である。

定理 3.3. ([12]) M を n 次元一般多様体とする。もし $S(M)$ が 1-LCC であり、 $2m+3 \leq n$ を満たす m について $\dim S(M) \leq m$ であれば、 M は n 次元位相多様体である。

注意 3.1. Cannon–Bryant–Lacher の 1-LCC 収縮定理 3.3 は、4 次元一般多様体の場合に Bestvina–Daverman–Venema–Walsh ([5]) によって改良されている。

3.2. 曲率が上に有界なホモロジー多様体の基本性質

一般に、曲率が上に有界な距離空間 X は ANR であり ([35], [29])、 X が局所コンパクトで局所測地的完備であれば X は局所的に有限次元である ([30])。また、 X がホモロジー多様体であれば、 X は局所測地的完備である (一般多様体の場合 [47]、位相多様体の場合 [6] を参照)。よって、曲率が上に有界なホモロジー多様体は GCBA 一般多様体である。

P. Thurston ([47]) は低次元幾何学的トポロジーの理論を用いて次を示した。

定理 3.4. ([47]) 曲率が上に有界な 3 次元一般多様体は 3 次元位相多様体である。

次の命題は、Lytchak と筆者 [31] により示された曲率が上に有界な距離空間に対するホモロジー多様体認識命題である。

命題 3.5. ([31]) 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間 X に対し以下は同値である.

- (1) X は n 次元ホモロジー多様体である.
- (2) 各点 $x \in X$ に対して $H_*(\Sigma_x X) = H_*(S^{n-1})$ を満たす.

この場合, 各点 $x \in X$ における方向空間 $\Sigma_x X$ は $(n-1)$ 次元ホモロジー多様体であり, 接空間 $T_x X$ は n 次元ホモロジー多様体である.

Edwards の二重懸垂定理 ([17], [11]) により, $n \geq 5$ とするとき, 任意の $(n-2)$ 次元ポアンカレホモロジー球面 Σ^{n-2} の二重懸垂 $(S^0 * (S^0 * \Sigma^{n-2}))$ は, n 次元位相多様体である.

例 3.1. ([1], [4], [21]) $n \geq 5$ とする. 非単連結 $(n-2)$ 次元コンパクト正定曲率ホモロジー球面 Riemann 多様体 (Poincaré ホモロジー球面) Σ^{n-2} を与える. 適切に拡大して Σ^{n-2} は CAT(1) であるとして良い. 球面的懸垂 $S^0 * \Sigma^{n-2}$ は CAT(1) であり $(n-1)$ 次元ホモロジー多様体である. 懸垂点 $\xi_{\pm} \in S^0 * \Sigma^{n-2}$ における方向空間 $\Sigma_{\xi_{\pm}}(S^0 * \Sigma^{n-2})$ は Σ^{n-2} に等長的である. 懸垂点 ξ_{\pm} は多様体点ではない. 球面的二重懸垂 $S^0 * (S^0 * \Sigma^{n-2})$ は CAT(1) 空間である. 懸垂点 $x_{\pm} \in S^0 * (S^0 * \Sigma^{n-2})$ における方向空間 $\Sigma_{x_{\pm}}(S^0 * (S^0 * \Sigma^{n-2}))$ は $S^0 * \Sigma^{n-2}$ に等長的である. 特に, S^{n-1} と同相ではないがホモトピー同値である. Edwards の二重懸垂定理 ([17], [11]) より, $S^0 * (S^0 * \Sigma^{n-2})$ は n 次元位相多様体である.

4. ホモトピー安定性とファイブレーション

4.1. ホモトピー安定性と同相写像近似定理

正の実数 $\epsilon \in (0, \infty)$ に対し, 距離空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が ϵ -ホモトピー同値であるとは, ある連続写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して以下が成り立つときにいう. 連続写像 $g \circ f$ と恒等写像 id_X を結ぶホモトピー $\Phi: X \times [0, 1] \rightarrow X$ と, $f \circ g$ と id_Y を結ぶホモトピー $\Psi: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在して, 次の (1), (2) を満たす. (1) 各 $x \in X$ に対して, 曲線 $[0, 1] \ni t \mapsto (f \circ \Phi_t)(x) \in Y$ の像の直径が Y の中で ϵ 未満である. (2) 各 $y \in Y$ に対して, 曲線 $[0, 1] \ni t \mapsto \Psi_t(y) \in Y$ の像の直径が Y の中で ϵ 未満である. 距離空間 X, Y が ϵ -ホモトピー同値であるとは ϵ -ホモトピー同値写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう.

関数 $\rho: [0, r_0) \rightarrow [0, \infty)$ が可縮関数であるとは, $\rho(0) = 0$ かつ $\rho \geq \text{id}_{[0, r_0)}$ を満たし, 点 0 において連続であるときにいう. 可縮関数 ρ に対して, 距離空間 X が LGC(ρ) である (局所幾何学的可縮である) とは, 任意の点 $x \in X$ と正の実数 $r \in (0, \infty)$ に対して開距離球体 $U_r(x)$ が同心球体 $U_{\rho(r)}(x)$ の中で可縮であるときにいう.

次は Petersen ([38]) による LGC(ρ) 空間に対するホモトピー安定性定理である.

定理 4.1. 可縮関数 ρ と非負整数 n を与える. 任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ に対して, ある $\delta \in (0, \infty)$ が存在して, n 次元以下である 2 つの LGC(ρ) 空間 X, Y が $d_{GH}(X, Y) < \delta$ を満たせば, それらは ϵ -ホモトピー同値である. ただし, d_{GH} は Gromov–Hausdorff 距離である.

次の定理は, 制御ホモトピーを同相写像で近似する α -近似定理の帰結である. なお, α -近似定理は, $n \geq 5$ の場合に Chapman–Ferry ([13]), $n = 4$ の場合に Ferry–Weinberger ([19]), $n = 2, 3$ の場合に Jakobsche ([23], [24]) によって確立されている. ただし, $n = 3$ の場合の Jakobsche ([24]) の主張は Poincaré 予想の解決 (Perelman) を必要としていた.

定理 4.2. コンパクト距離空間 M が n 次元位相多様体であるとき, すべての $\alpha \in (0, \infty)$ に対して, ある $\epsilon \in (0, \infty)$ が存在して, 任意のコンパクト n 次元位相多様体 N からの ϵ -ホモトピー同値写像 $f: N \rightarrow M$ に対して, ある同相写像 $\tilde{f}: N \rightarrow M$ が存在して $d(f, \tilde{f}) < \alpha$ が成り立つ. ただし, d は一様距離である.

4.2. ファイブレーションとファイバー束

位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が (Hurewicz) ファイブレーションであるとは, f が任意の位相空間に対してホモトピー持ち上げ性質を満たすときにいう.

位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が局所的に一様可縮なファイバーを持つとは, 任意の点 $x \in X$ と, X 内の x の任意の開近傍 U に対して, X 内の x の開近傍 V が存在して, $V \subset U$ であり, 次の性質を満たすときにいう. すなわち, もし点 $y \in Y$ のファイバー $f^{-1}(\{y\})$ が V と交われば, 共通部分 $f^{-1}(\{y\}) \cap V$ は $f^{-1}(\{y\}) \cap U$ の中で可縮である.

次のファイブレーション定理は Michael ([32]) と Unger ([48]) の研究から導かれる.

定理 4.3. 局所コンパクトな有限次元距離空間 X, Y について, 全射連続開写像 $f: X \rightarrow Y$ が局所的に一様可縮なファイバーを持ち, 任意の点 $y \in Y$ に対してファイバー $f^{-1}(y)$ がそれ自身の中で可縮であるとする. このとき f はファイブレーションである.

ファイブレーションはファイバー束になり得る. 先に述べた α -近似定理 4.2 と Dyer-Hamstrom ([15]) のファイバー束認識理論を合わせると, 次を得る ([18], [42] を参照).

定理 4.4. 局所コンパクト有限次元 ANR 距離空間 X, Y の間のファイブレーション $f: X \rightarrow Y$ について, 任意の点 $y \in Y$ におけるファイバー $f^{-1}(\{y\})$ がコンパクトな n 次元位相多様体であれば, f は局所的に自明なファイバー束である.

次は Ferry の仕事 ([18]) の変種版であり, Perelman による Poincaré 予想の解決を取り入れた主張である.

定理 4.5. 局所コンパクト有限次元 ANR 距離空間 X から開区間 I へのファイブレーション $f: X \rightarrow I$ について, 任意の点 $t \in I$ におけるファイバー $f^{-1}(\{t\})$ が n 次元位相多様体であれば, X は $(n+1)$ 次元位相多様体である.

5. 曲率が上に有界な距離空間における伸長器と伸長写像

Lytchak と筆者は論文 [30] において GCBA 空間に対する伸長器と伸長写像の概念を導入した. 元々これらに対応する同様の概念は, 曲率が下に有界な Alexandrov 空間の幾何学において基本的な役割を果たしている ([9]). 実際, Perelman ([36], [37]) は曲率が下に有界な有限次元 Alexandrov 空間における伸長写像が局所的に自明なファイバー束であることを示し, 先に述べた局所錐性定理を証明した.

GCBA(κ) 空間 X 内の開距離球体 $U_r(x)$ が微小であるとは, $r < D_\kappa/100$ を満たし, 閉距離球体 $B_{10r}(x)$ がコンパクト CAT(κ) 空間であるときにいう. 点 x とは異なる 2 点 $y, z \in B_{10r}(x)$ に対して, 点 x と点 y を結ぶ最短測地線と, 点 x と点 z を結ぶ最短測地線との間の点 x における角度を $\angle_x(y, z)$ で表す. なお, 任意の GCBA(κ) 空間内の任意の点は微小開距離球体を持つことに注意する.

正の実数 $\delta \in (0, \infty)$ を与える. GCBA(κ) 空間 X 内の微小開距離球体 $U_{r_0}(x_0)$ の点 $x \in U_{r_0}(x_0)$ に対して, $B_{10r_0}(x_0) - \{x\}$ 内の k 個の点の組 (p_1, \dots, p_k) が点 x における (k, δ) -伸長器であるとは, $B_{10r_0}(x_0) - \{x\}$ 内に別の k 個の点の組 (q_1, \dots, q_k) が存在して以下が成り立つときにいう. (1) 各 $i \in \{1, \dots, k\}$ について, 任意の $y \in B_{10r_0}(x_0) - \{x\}$ に対して $\angle_x(p_i, y) + \angle_x(y, q_i) < \pi + \delta$ を満たす. (2) 相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ について, $\angle_x(p_i, p_j) < \pi/2 + \delta$, $\angle_x(p_i, q_j) < \pi/2 + \delta$, $\angle_x(q_i, q_j) < \pi/2 + \delta$ を満たす. また, $U_{r_0}(x_0)$ の部分集合 W に対して, $B_{10r_0}(x_0)$ 内の k 個の点の組 (p_1, \dots, p_k) が W における (k, δ) -伸長器であるとは, 組 (p_1, \dots, p_k) が各点 $x \in W$ における (k, δ) -伸長器であるときにいう.

微小開距離球体 $U_{r_0}(x_0)$ 内の開集合 U を定義域とする写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ が (k, δ) -伸長写像であるとは, U における (k, δ) -伸長器 (p_1, \dots, p_k) が存在して $f = (d_{p_1}, \dots, d_{p_k})$ を満たすときにいう. ここで, d_{p_1}, \dots, d_{p_k} はそれぞれ p_1, \dots, p_k からの距離関数を表す.

GCBA(κ) 空間 X 内の (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ について, 定義域 U の点 $x \in U$ のうち次の性質を満たす点全体の集合を $U_{k+1, 12\delta}$ で表す. すなわち, ある点 $p \in X$ と U 内の x の開近傍 U_x が存在して $f^+ = (f, d_p): U_x \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ が $(k+1, 12\delta)$ -伸長写像である. また, f のファイバー Π に対して, $E(\Pi) = \Pi - U_{k+1, 12\delta}$ とおき, Π の例外点集合と呼ぶ.

GCBA(κ) 空間 X 内の (k, δ) -伸長写像の位相的な性質は次の通りである ([30]).

- (1) 任意の $\delta \in (0, \infty)$ と任意の点 $x \in X$ に対して, ある十分小さな $r \in (0, \infty)$ が存在して, $d_x: U_r(x) - \{x\} \rightarrow (0, r)$ は $(1, \delta)$ -伸長写像である.
- (2) (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ について, 任意の点 $x \in U$ に対して, 十分小さな $r \in (0, \infty)$ と, U に含まれる $(U_r(x) - \{x\}) \cap f^{-1}(f(x))$ の開近傍 V が存在して, $f^+ = (f, d_x): V \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ は $(k+1, 12\delta)$ -伸長写像であり, 特に $V \subset U_{k+1, 12\delta}$ である.
- (3) (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ の任意のファイバー Π に対して $E(\Pi)$ は有限である.
- (4) $20k\delta < 1$ を満たすとき, 任意の (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ は開写像であり, U の任意のコンパクト部分集合 K に対し, ある $r_0 \in (0, \infty)$ が存在し, すべての $r \in (0, r_0)$ と $x \in K$ に対し, 共通部分 $U_r(x) \cap f^{-1}(f(x))$ はそれ自身の中で x に可縮である.
- (5) もし $\dim X = n$ であり, δ が十分小さければ, 任意の (n, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ は双 Lipschitz 埋め込みである. さらに, X は $(n+1, \delta)$ -伸長写像を許容しない.

便宜上, 任意の $\delta \in (0, \infty)$ に対して, GCBA(κ) 空間 X の開集合 U からの定値写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^0$ を $(0, \delta)$ -伸長写像と呼ぶ. 以下では, 非負整数全体の集合を \mathbb{N}_0 で表す.

上述の GCBA(κ) 空間 X 内の (k, δ) -伸長写像の位相的な性質 ([30]) と, ファイブレーション定理 4.3 などの幾何学的トポロジーの理論を用いると次を導くことができる.

定理 5.1. ([31]) すべての $k \in \mathbb{N}_0$ および $\delta \in (0, 1/20k)$ に対して, 任意の GCBA(κ) 空間の開集合 U を定義域とする (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ は局所的にファイブレーションである. より詳しくは, 任意の $x \in U$ に対して, ある $r_x \in (0, \infty)$ が存在して $B_{r_x}(x) \subset U$ を満たし, すべての $r \in (0, r_x)$ について制限写像 $f|_{B_r(x)}: B_r(x) \rightarrow f(B_r(x))$ は各々のファイバーが可縮なファイブレーションである.

加えて, Raymond ([42]) の一般多様体上のファイブレーションの研究により次を得る.

定理 5.2. ([31]) すべての $n \in \mathbb{N}_0$ および $\delta \in (0, 1/20n)$ と $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して, 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ の空でない任意のファイバーは $(n-k)$ 次元一般多様体である.

6. 曲率が上に有界な距離空間の位相正則性

6.1. ホモロジー多様体に対する位相正則性

曲率が上に有界なホモロジー多様体に対する位相正則性定理 1.2 を得るために, 次に述べる伸長写像のファイバーに対する位相正則性定理を示す.

定理 6.1. ([31]) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, ある $\delta \in (0, \infty)$ が存在して以下が成り立つ. 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ の任意のファイバー Π に対して, Π の例外点集合 $E(\Pi)$ は有限であり, $\Pi - E(\Pi)$ は $(n-k)$ 次元位相多様体である. 加えて, もし $n-k \leq 3$ であるならば, Π は $(n-k)$ 次元位相多様体である.

証明の概略. ($n - k$ に関する帰納法) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, 十分小さく $\delta \in (0, \infty)$ をとり, 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ を与える. 伸長写像の性質より, 空でない任意の f のファイバー Π の例外点集合 $E(\Pi)$ は有限である. 定理 5.2 より Π は $(n - k)$ 次元一般多様体である.

(I) $n - k \leq 2$ とする. このとき, Moore の定理より Π は 2次元位相多様体である.

(II) $n - k = 3$ とする. 任意の $p \in \Pi$ を与える. このとき, 十分小さな任意の $r \in (0, \infty)$ に対して $(k + 1, 12\delta)$ -伸長写像 $f^+ = (f, d_p): U_r(p) - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ が存在する. 定理 5.1 と (I) より, f^+ は各ファイバーが可縮な 2次元位相多様体であるファイブレーションである. よって, 写像 $d_p: (U_r(p) - \{p\}) \cap \Pi \rightarrow (0, r)$ は各ファイバーがコンパクトな 2次元位相多様体であるファイブレーションであり, 定理 4.4 より局所的に自明なファイバー束である. 特に, $(U_r(p) - \{p\}) \cap \Pi$ は 3次元位相多様体である. この場合, $U_r(p) \cap \Pi$ が \mathbb{R}^3 に同相であることがわかる. したがって, Π は 3次元位相多様体である.

(III) $n - k = 4$ とする. 任意の $x \in \Pi - E(\Pi)$ に対して, x のある開近傍 U_x 上で定義された $(k + 1, 12\delta)$ -伸長写像 $f^+ = (f, d_p): U_x \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ が存在する. 定理 5.1 と (II) より, f^+ は各ファイバーが可縮な 3次元位相多様体であるファイブレーションである. 写像 $d_p: U_x \cap \Pi \rightarrow d_p(U_x \cap \Pi)$ は各ファイバーがコンパクトな 2次元位相多様体であるファイブレーションであり, 定理 4.4 より局所的に自明なファイバー束である. 特に, $U_x \cap \Pi$ は 4次元位相多様体である. よって, $\Pi - E(\Pi)$ は 4次元位相多様体である.

(IV) $n - k \geq 5$ とする. 任意の $x \in \Pi - E(\Pi)$ に対して, x のある開近傍 U_x 上で定義された $(k + 1, 12\delta)$ -伸長写像 $f^+ = (f, d_p): U_x \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ が存在する. この場合において, $U_x \cap \Pi$ が $(n - k)$ 次元位相多様体であることを Edwards–Quinn の DDP 多様体認識定理 3.2 ([16], [39], [40]) を用いて証明する. 証明の途中で円板を分離する際に定理 4.5 などを用いるが, その過程は複雑で技術的である (詳細は論文 [31] を参照). いずれにせよ, $\Pi - E(\Pi)$ が $(n - k)$ 次元位相多様体であることがわかる. \square

定理 1.2 の証明. 曲率が上に有界な任意の n 次元ホモロジー多様体 X に対して, X は GCBA 空間である. このとき, X を微小開距離球体で被覆して, 各微小開距離球体 $U_r(x)$ からの定値写像 $f: U_r(x) \rightarrow \mathbb{R}^0$ に定理 6.1 を適用すると, 最終的に定理 1.2 を得る. \square

6.2. 局所位相正則性

まず局所位相正則性定理 1.1 の証明の概略を述べる. 途中で定理 1.2 を用いる.

定理 1.1 の証明の概略. (1) \Rightarrow (2). 曲率が上に有界な距離空間 X が n 次元位相多様体であるとする. 任意の点 $x \in X$ を与える. 命題 3.5 より方向空間 $\Sigma_x X$ はコンパクト $(n - 1)$ 次元一般多様体であり $H_*(\Sigma_x X) = H_*(\mathbb{S}^{n-1})$ を満たす. 特に, $\Sigma_x X$ は弧状連結である. もし $n \leq 3$ であれば, $\Sigma_x X$ は \mathbb{S}^{n-1} に同相である. 以下 $n \geq 4$ とし, $\Sigma_x X$ が \mathbb{S}^{n-1} にホモトピー同値であることを示す. このためには Whitehead の定理より $\Sigma_x X$ が単連結であることを示せば良い. 十分小さな任意の $r \in (0, D_\kappa)$ に対して, $U_r(x) - \{x\}$ は単連結であり, かつ $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である. よって, $\Sigma_x X$ は単連結である.

(2) \Rightarrow (1). 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間 X について, 各点 $x \in X$ において $\Sigma_x X$ が \mathbb{S}^{n-1} にホモトピー同値であるとする. 命題 3.5 より X は n 次元一般多様体である. もし $n \leq 2$ であれば, X は n 次元位相多様体である. 以下 $n \geq 3$ とする. 定理 1.2 より局所有限な X の部分集合 E が存在して $X - E$ は n 次元位相多様体である. ここで, 各点 $x \in X$ において, 十分小さな任意の $r \in (0, D_\kappa)$ に対して, $U_r(x) - \{x\}$ は $\Sigma_x X$

にホモトピー同値であり、単連結であることに注意する。よって、 E は X 内で 1-LCC であり、さらに $\dim E = 0$ を満たす。Cannon–Bryant–Lacher の 1-LCC 収縮定理 3.3 ([12]) より、 X は n 次元位相多様体である。

(2) \Leftrightarrow (3). 直前に述べた (1) \Leftrightarrow (2) の証明と同様に (2) \Leftrightarrow (3) を示すことができる。ただし、(2) \Rightarrow (3) の証明では次の事実を用いる。すなわち、可縮な n 次元位相多様体が \mathbb{R}^n と同相であることと無限遠単連結であることは同値である ($n = 3$ のとき [7] と [43], $n = 4$ のとき [20], $n \geq 5$ のとき [46]). 実際、可縮な接空間 $T_x X$ が n 次元位相多様体であることを示した後で、それが \mathbb{R}^n に同相であることを証明する際に用いる。□

次の定理の主張 (1) の証明は、P. Thurston の定理 3.4 ([47]) に別証明を与えている。

定理 6.2. ([31], [47]) 曲率が上に有界な距離空間 X に対して以下が成り立つ。

- (1) X が n 次元ホモロジー多様体であり、 $n \leq 3$ であれば、 X は位相多様体である。
- (2) X が n 次元位相多様体で、 $n \leq 4$ であれば、任意の $x \in X$ に対して方向空間 $\Sigma_x X$ は \mathbb{S}^{n-1} に同相である。

証明. 主張 (1) は定理 6.1 に含まれている。主張 (2) を示すため、 $n \leq 4$ とし、曲率が上に有界な距離空間 X が n 次元位相多様体であるとする。このとき、局所位相正則性定理 1.1 と命題 3.5 より、各点 $x \in X$ における方向空間 $\Sigma_x X$ はコンパクトな $(n-1)$ 次元一般多様体であり、 \mathbb{S}^{n-1} とホモトピー同値である。もし $n \leq 3$ であれば、Moore の定理より $\Sigma_x X$ は n 次元位相多様体であり、 \mathbb{S}^{n-1} に同相である。もし $n = 4$ であれば、主張 (1) より $\Sigma_x X$ は 3 次元位相多様体であり、Perelman による Poincaré 予想の解決により \mathbb{S}^3 に同相である。こうして主張 (2) を得る。□

6.3. ホモロジー多様体に対する局所錐性

ホモロジー多様体に対する局所錐性定理 1.3 を得るために次を示す。

定理 6.3. ([31]) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して、ある $\delta \in (0, \infty)$ が存在して以下が成り立つ。曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ の任意のファイバー Π に対して、次が成り立つ。任意の点 $x \in \Pi$ に対して、 Π における x の開近傍 U_x と、 \mathbb{S}^{n-k-1} と同じホモロジー群を持つコンパクト $(n-k-1)$ 次元位相多様体 M_x が存在して、 U_x は M_x の開錐 $C(M_x)$ に同相である。

証明の概略. ($n-k$ に関する帰納法) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して、十分小さく $\delta \in (0, \infty)$ をとり、曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ) -伸長写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ のファイバー Π を与える。任意の $x \in \Pi$ に対して、十分小さな任意の $r \in (0, \infty)$ について $(k+1, 12\delta)$ -伸長写像 $f^+ = (f, d_x): U_r(x) - \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ が存在する。定理 5.1 より、 f^+ は各ファイバーが可縮であるようなファイブレーションであり、写像 $d_x: (U_r(x) - \{x\}) \cap \Pi \rightarrow (0, r)$ はファイブレーションである。以下 $N := (U_r(x) - \{x\}) \cap \Pi$ とおく。定理 6.1 より N は $(n-k)$ 次元位相多様体である。

(I) $n-k \leq 3$ とする。定理 6.1 より Π が $(n-k)$ 次元位相多様体であり主張が成り立つ。

(II) $n-k = 4$ とする。このとき (I) より f^+ は各ファイバーが可縮な 3 次元位相多様体であるファイブレーションである。よって、写像 $d_x: N \rightarrow (0, r)$ は各ファイバーがコンパクトな 3 次元位相多様体であるファイブレーションであり、定理 4.4 より局所的に自明なファイバー束である。このとき、コンパクトな 3 次元位相多様体 M が存在して N は $(0, r) \times M$ に同相である。したがって、主張が成り立つことがわかる。

(III) $n - k \geq 5$ とする. 主張を示すためには, $(n - k)$ 次元位相多様体 N における点 x に対応する端が, $(n - k - 1)$ 次元コンパクト位相多様体 M によって $[0, \infty) \times M$ と襟付けされることを示せば良い. もし $n - k \geq 6$ であれば, Siebenmann の端定理 ([44], [22] を参照) から主張がしたがう. 残りは $n - k = 5$ のときである. このとき, 帰納法の仮定 (II) のもと, Quinn のレゾリューション存在定理 ([39], [40]) の帰結である定理 3.1 を用いて 5次元位相多様体 N の手術を行い, 手術後の 5次元位相多様体 N^+ に Siebenmann の襟付け定理 ([45]) を適用することによって, 主張を証明することができる. \square

注意 6.1. 定理 6.3 の $n - k = 5$ の場合の証明は Steven Ferry 氏の援助を受けている.

定理 1.3 の証明. 曲率が上に有界な任意の n 次元ホモロジー多様体 X を微小開距離球体で被覆して, 各微小開距離球体からの定値写像に定理 6.3 を適用すると良い. \square

6.4. 曲率が上に有界なリーマン多様体の非崩壊極限の正則性と安定性

本稿では, 次に述べる定理 1.4 の簡略版についてのみ示す. 定理 1.4 の反復方向空間に関する主張の証明は複雑で技術的である (詳細は論文 [31] を参照).

定理 6.4. ([31]) $\text{CAT}(\kappa)$ である点付き n 次元 Riemann 多様体列 (M_i, p_i) が点付き固有距離空間 X に, 点付き Gromov–Hausdorff 位相で収束しているとする. このとき, X は n 次元位相多様体である. 加えて, もし X がコンパクトであれば, 十分大の任意の i に対して M_i は X に同相である.

証明. 極限空間 X は $\text{CAT}(\kappa)$ である $\text{GCBA}(\kappa)$ 空間である. 定理 2.1 より, 任意の $x \in X$ に対して, ある $r_x \in (0, D_\kappa/2)$ が存在して, すべての $r \in (0, r_x)$ について, 閉距離球体 $B_r(x)$ がコンパクトかつ $\text{CAT}(\kappa)$ であり, 距離球面 $\partial B_r(x)$ は $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である. さらに, 点 $x \in X$ に収束する各 M_i の点 $x_i \in M_i$ を選ぶと, 各閉距離球体 $B_r(x_i)$ がコンパクトかつ $\text{CAT}(\kappa)$ であり, $(B_r(x_i), x_i)$ は $(B_r(x), x)$ に点付き Gromov–Hausdorff 位相で収束している. 再び定理 2.1 より, 十分大きな i に対して $\partial B_r(x_i)$ は $\partial B_r(x)$ にホモトピー同値である. 特に, $\partial B_r(x_i)$ は $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である. 各 M_i は $\text{CAT}(\kappa)$ である n 次元 Riemann 多様体であるので, 点 $x_i \in M_i$ における単射半径は一様に D_κ 以上であり, $\partial B_r(x_i)$ は S^{n-1} に (微分) 同相である. よって, $\Sigma_x X$ は S^{n-1} にホモトピー同値である. 局所位相正則性定理 1.1 より, 極限空間 X は n 次元位相多様体である.

以下 X がコンパクトであるとする. 十分大きな任意の i に対し M_i もコンパクトである. 一般に, $\text{CAT}(\kappa)$ 空間は $\text{LGC}(\text{id}_{[0, D_\kappa)})$ である. Petersen のホモトピー安定性定理 4.1 ([38]) より, 任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ について, 十分大きな i に対し M_i と X は ϵ -ホモトピー同値である. よって, α -近似定理 4.2 より, 十分大きな i に対し M_i と X は同相である. \square

参考文献

- [1] A. D. Alexandrov and V. N. Berestovskii, *Riemannian spaces, generalized*, Encyclopedia of Mathematics, Volume 8, Kluwer Academic Publishers 1992, pp. 150–152.
- [2] F. D. Ancel and C. R. Guilbault, *Interiors of compact contractible n -manifolds are hyperbolic ($n \geq 5$)*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 1, 1–32.
- [3] V. N. Berestovskii, *Borsuk’s problem on metrization of a polyhedron*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **268** (1983), no. 2, 273–277.
- [4] V. N. Berestovskii, *Manifolds with an intrinsic metric with one-sided bounded curvature in the sense of A. D. Aleksandrov*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **1** (1994), no. 1, 41–59.

- [5] M. Bestvina, R. J. Daverman, G. A. Venema, and J. J. Walsh, *A 4-dimensional 1-LCC shrinking theorem*, *Topology appl.* **110** (2001), no. 1, 3-20.
- [6] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Volume 319, Springer-Verlag, 1999.
- [7] M. Brown, *The monotone union of open n -cells is an open n -cell*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), no. 5, 812–814.
- [8] D. Burago, Yu. D. Burago, and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, *Graduate Studies in Mathematics*, Volume 33, Amer. Math. Soc., 2001.
- [9] Yu. D. Burago, M. Gromov, and G. Perelman, *A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below* [Russian], *Uspekhi Mat. Nauk* **47** (1992), no. 2 (284), 3–51, 222; translation in *Russian Math. Surveys* **47** (1992), no. 2, 1–58.
- [10] S. V. Buyalo and V. Schroeder, *Spaces of curvature bounded above*, *Surveys in Differential Geometry*, Volume XI, *Metric and Comparison Geometry* (J. Cheeger and K. Grove, eds.), International Press, 2007, pp. 295–327.
- [11] J. W. Cannon, *Shrinking cell-like decomposition of manifolds. Codimension three*, *Ann. of Math. (2)* **110** (1979), no. 1, 83–112.
- [12] J. W. Cannon, J. L. Bryant, and R. C. Lacher, *The structure of generalized manifolds having nonmanifold set of trivial dimension*, *Geometric Topology* (J. C. Cantrell, ed.), Academic Press, 1979, pp. 261–300.
- [13] T. Chapman and S. Ferry, *Approximating homotopy equivalences by homeomorphisms*, *Amer. J. Math.* **101** (1979), no. 3, 583–607.
- [14] R. J. Daverman, *Decompositions of Manifolds*, *Pure and Applied Mathematics*, Volume 124, Academic Press, 1986; AMS Chelsea Publ., 2007.
- [15] E. Dyer and M. E. Hamstrom, *Completely regular mappings*, *Fund. Math.* **45** (1958), 103–118.
- [16] R. D. Edwards, *The topology of manifolds and cell-like maps*, *Proc. Int. Congress of Math. 1978*, Acad. Sci. Fennica, 1980, pp. 111–127.
- [17] R. D. Edwards, *Suspensions of homology spheres*, preprint; available from arXiv:0610573 submitted by C. Guilbault in 2006.
- [18] S. Ferry, *Alexander duality and Hurewicz fibrations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **327** (1991), no. 1, 201–219.
- [19] S. Ferry and S. Weinberger, *Curvature, tangentially, and controlled topology*, *Invent. Math.* **105** (1991), no. 2, 401–414.
- [20] M. H. Freedman, *The topology of four-manifolds*, *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 3, 357–453.
- [21] K. Grove and P. Petersen, *A radius sphere theorem*, *Invent. Math.* **112** (1993), no. 3, 577–583.
- [22] B. Hughes and A. Ranicki, *Ends of Complexes*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, Volume 123, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [23] W. Jabobsche, *Approximating homotopy equivalences of surfaces by homeomorphisms*, *Fund. Math.* **118** (1983), no. 1, 1–9.
- [24] W. Jabobsche, *Approximating homotopy equivalences of 3-manifolds by homeomorphisms*, *Fund. Math.* **130** (1988), no. 3, 157–168.
- [25] V. Kapovitch, *Regularity of limits of noncollapsing sequences of manifolds*, *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), no. 1, 121–137.
- [26] V. Kapovitch, *Perelman's stability theorem*, *Surveys in Differential Geometry*, Volume XI, *Metric and Comparison Geometry* (J. Cheeger and K. Grove, eds.), International Press, 2007, pp. 103–136.

- [27] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), no. 4, 742–749.
- [28] B. Kleiner, *The local structure of length spaces with curvature bounded above*, Math. Z. **231** (1999), no. 3, 409–456.
- [29] L. Kramer, *On the local structure and the homology of $\text{CAT}(\kappa)$ spaces and euclidean buildings*, Adv. in Geom. **11** (2011), no. 2, 347–369.
- [30] A. Lytchak and K. Nagano, *Geodesically complete spaces with an upper curvature bound*, Geom. Funct. Anal. **29** (2019), no. 1, 295–342.
- [31] A. Lytchak and K. Nagano, *Topological regularity of spaces with an upper curvature bound*, preprint, 2018; available from arXiv:1809.06183.
- [32] E. Michael, *Continuous selections. II*, Ann. of Math. (2), **64** (1956), no. 3, 562–580.
- [33] K. Nagano, *Asymptotic rigidity of Hadamard 2-spaces*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), no. 4, 699–723.
- [34] K. Nagano, *Volume pinching theorems for $\text{CAT}(1)$ spaces*, preprint, 2018; available from arXiv:1810.13056.
- [35] P. Ontaneda, *Cocompact $\text{CAT}(0)$ spaces are almost geodesically complete*, Topology **44** (2005), no. 1, 47–62.
- [36] G. Perelman, *Elements of Morse theory of Aleksandrov spaces*, St. Petersburg Math. J. **5** (1994), no. 1, 205–213.
- [37] G. Perelman, *A. D. Alexandrov’s spaces with curvature bounded below II*, preprint, 1991.
- [38] P. Petersen, *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 2, 387–395.
- [39] F. Quinn, *Resolutions of homology manifolds, and the topological characterizations of manifolds*, Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 267–284.
- [40] F. Quinn, *An obstruction to the resolution of homology manifolds*, Michigan Math. J. **34** (1987), no. 2, 285–291.
- [41] F. Quinn, *Problems on homology manifolds*, Exotic Homology Manifolds (Oberwolfach 2003), Geometry & Topology Monographs, Volume 9, Geom. Topol. Publ. 2006, pp. 87–103.
- [42] F. Raymond, *Local triviality for Hurewicz fiberings of manifolds*, Topology **3** (1965), no. 1, 43–57.
- [43] D. Rolfsen, *Strongly convex metrics in cells*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), no. 1, 171–175.
- [44] L. C. Siebenmann, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, PhD Thesis, Princeton University, 1965.
- [45] L. C. Siebenmann, *On detecting open collars*, Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 201–227.
- [46] J. Stallings, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58** (1962), 481–488.
- [47] P. Thurston, *$\text{CAT}(0)$ 4-manifolds possessing a single tame point are Euclidean*, J. Geom. Anal. **6** (1996), no. 3, 475–494.
- [48] G. Unger, *Conditions for a mapping to have the slicing structure property*, Pacific J. Math. **30** (1969), no. 2, 549–553.
- [49] R. Wilder, *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publication, Volume 32, Amer. Math. Soc., 1979.
- [50] J. Y. Wu, *Topological regularity theorems for Alexandrov spaces*, J. Math. Soc. Japan **49** (1997), no. 4, 741–757.

Heegaard Floer ホモロジーに由来する結び目のコンコードانس不変量

佐藤 光樹 (東京大学・JSPS 特別研究員PD)*

1. 序

結び目のコンコードانسとは、結び目の間の「コボルディズム」にあたる同値関係であり、また結び目のアイソトピーの一般化にもなっている。この同値類全体は結び目コンコードانس群とよばれるアーベル群を成すが、その群構造については、未だに捻じれ元が持ち得る位数すら決定されていない。一方で、その高次元拡張についてはLevine [8]によって群構造が完全に決定されている。このことから、結び目コンコードانس群の解明は、低次元トポロジー特有の課題として知られている。

一方、Heegaard Floer ホモロジー理論とは、有向閉3次元多様体と4次元コボルディズムの成す圏から \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体の圏への関手を与える理論である。さらに、結び目 K に対しては \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体 $CFK^\infty(K)$ が対応付けられ、そのチェーンホモトピー同値類が結び目のアイソトピー不変量になる。特に、そのある部分商複体のホモロジー群 $\widehat{HFK}(K)$ は結び目 Floer ホモロジーとして知られている。 $\widehat{HFK}(K)$ は有限生成アーベル群で、かつコンピュータ計算も可能な不変量でありながら、結び目の種数(結び目のサイフェルト曲面の最小種数)やファイバー性(結び目の補空間が S^1 上の曲面束の構造をもつか否か)などの幾何的性質を完全に決定できる不変量として有名になった。

鎖複体 $CFK^\infty(K)$ は $\widehat{HFK}(K)$ と比較して計算が困難である一方、 K に沿った手術やハンドル接着を介して、3次元多様体に付随する鎖複体や、4次元コボルディズムに付随するチェーン写像と密接に関わっている。その関係性に着目することで、これまで $CFK^\infty(K)$ から様々なコンコードانس不変量が定義されてきたが、それらはHom [6]によって導入された結び目コンコードانس群の商群 $\mathcal{C}_{\nu+}$ を介して包括的に理解されるようになった。著者の研究課題は、この商群 $\mathcal{C}_{\nu+}$ の群構造の解明であり、例えば現在までに(1) $\mathcal{C}_{\nu+}$ 上の部分順序の導入、(2) 種数1の結び目が $\mathcal{C}_{\nu+}$ 内で生成する部分群の決定、などの成果が得られている。本稿では、これらの著者の研究を、その歴史的背景を踏まえて解説する。

2. 結び目のコンコードانس理論

本節では、結び目のコンコードانس理論における諸概念や歴史を振り返る。

2.1. 結び目コンコードانس群 \mathcal{C}

結び目 K_0, K_1 がコンコードアントであるとは、アニュラスの滑らかな埋め込み $A: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ が存在して、 $A|_{S^1 \times \{i\}} = K_i \times \{i\}$ ($i = 0, 1$) を満たすことである。 K_0, K_1 がアイソトピックであるときは明らかにコンコードアントだが、アイソトピーから誘導される有向アニュラスの埋め込み A には任意の $t \in [0, 1]$ について $A|_{S^1 \times \{t\}}$ が結

本研究はJSPS 科研費 18J00808 の助成を受けたものである。

キーワード：結び目コンコードانس, Heegaard Floer ホモロジー

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: sato.kouki@mail.u-tokyo.ac.jp

結び目になるという制約がある．一般には，図 1 のような変形が有向アニュラスの埋め込みで実現されるため，アイソトピックでない結び目同士もコンコールドトになり得る．また，「自明な結び目とコンコールドトであること」は「結び目が B^4 への円板の埋め込みに拡張すること」と同値であり，障害理論のような趣きもある．さらに，結び目のコンコールドトス類全体 \mathcal{C} は，連結和を加法としてアーベル群を成す．

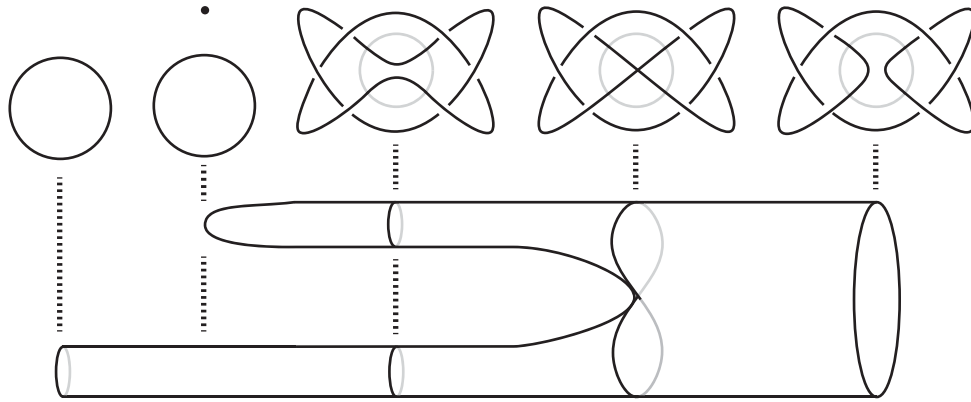


図 1: 右端の「スクエア結び目」と呼ばれる結び目は右手系 trefoil と左手系 trefoil の連結和の構造を持ち，特に解けない結び目である．一方，図の変形から，スクエア結び目は自明な結び目とコンコールドトであることがわかる．

2.2. 高次元結び目コンコールドトス群 \mathcal{C}^n

コンコールドトスの概念は高次元結び目 (S^n の S^{n+2} への滑らかな埋め込み) に対しても自然に拡張され，特に高次元結び目コンコールドトス群 \mathcal{C}^n が得られる．Levine は n 次元結び目のサイフェルト曲面を B^{n+3} 内に埋め込まれたハンドルによって手術することを考え，その障害として整係数正方行列を対応付けた．さらに，整係数正方行列全体の集合上に，コンコールドトスと連結和に対応する同値関係と加法を導入し，代数的コンコールドトス群 \mathcal{C}_{Alg} とよばれるアーベル群を構成した．高次元結び目コンコールドトス群はすべてこの \mathcal{C}_{Alg} を用いて記述され，さらに \mathcal{C}_{Alg} の群構造も理解されている．

定理 2.1 (Levine [8]) 整数 $n \geq 2$ に対して，

$$\mathcal{C}^n \cong \begin{cases} \{0\} & (n: \text{偶数}) \\ \mathcal{C}_{\text{Alg}} & (n: \text{奇数}) \end{cases}.$$

また， $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$ に対して，全射準同型

$$\pi_{\text{Alg}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{Alg}}$$

が存在する．ここで， $\mathcal{C}_{\text{Alg}} \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty \oplus \mathbb{Z}_4^\infty$ である．

その後，Casson-Gordon [2] によって π_{Alg} が単射でないことが示され，元の結び目コンコールドトス群 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^1$ のみが特有の振る舞いをするということが認識された．

2.3. 位相的結び目コンコダンス群 \mathcal{C}_{Top}

Casson-Gordonの結果以降, $\text{Ker } \pi_{\text{Alg}}$ の研究が盛んになったが, Freedman と Donaldson の理論によって, 位相的コンコダンスと従来のコンコダンスの区別が強く意識されるようになる. ここで, 位相的コンコダンスは, コンコダンスの定義におけるアニュラスの埋め込みを「局所平坦な位相的埋め込み」にまで拡張することで定義される. このとき, 元の場合と同様に位相的結び目コンコダンス群 \mathcal{C}_{Top} が得られ, 準同型 π_{Alg} は

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\pi_{\text{Top}}} \mathcal{C}_{\text{Top}} \xrightarrow{\pi_{\text{Alg:Top}}} \mathcal{C}_{\text{Alg}}$$

と分解される. この分解に関して, Freedman と Donaldson の理論は次のことを明らかにした. ここで, $[K]$ は結び目 K のコンコダンス類を表す.

定理 2.2 (Freedman [4]) 結び目 K の Alexander 多項式が 1 となるならば, K は自明な結び目と位相的コンコダントである. すなわち, $[K] \in \text{Ker } \pi_{\text{Top}}$.

定理 2.3 (Donaldson [3]) Alexander 多項式が 1 となる結び目で, \mathcal{C} の元として無限位数をもつものが存在する.

上の二つの定理の系として, 「 $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ は \mathbb{Z} と同型な部分群をもち, 特に無限位数である」ということが明らかにされた. なお, これまでの主要な道具であった Levine の準同型 π_{Alg} や Casson-Gordon によって与えられたコンコダンス不変量は, $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ 上では自明な値をとってしまう. したがって, この $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ の理解をさらに深めるために, ゲージ理論のような微分構造を強く反映する理論がコンコダンス理論において注目され, より重要視されるようになった. そして, この動きが Heegaard Floer ホモロジー理論の登場と結びつき, 双方の発展を促す大きな原動力となった. 現在では, $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ は \mathbb{Z}^∞ と同型な直和因子 [12] や, \mathbb{Z}_2^∞ と同型な部分群 [5] をもつことが, Heegaard Floer ホモロジー理論を介して証明されている.

3. Heegaard Floer ホモロジー理論

本節では, Ozsváth-Szabó によって導入された Heegaard Floer ホモロジー理論について概説する. ここでは特に, 3次元多様体の鎖複体 CF^∞ と結び目の鎖複体 CFK^∞ の関係性に重きを置いて話を進める.

3.1. \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体 CF^∞

Y を有向閉 3次元多様体とする. このとき, Heegaard 曲面と呼ばれる Y 内の種数 g 有向閉曲面 Σ_g が存在して, Y は 2つのハンドル体 H_α, H_β に分解される. さらに, Σ_g 上の非交和な単純閉曲線の組 $\{\alpha_i\}_{i=1}^g$ (resp. $\{\beta_i\}_{i=1}^g$) を H_α (resp. H_β) 内でそれぞれ非交和な円板を張るようなものとしてとることができ, 三つ組 $\mathcal{H} := (\Sigma_g; \{\alpha_i\}_{i=1}^g, \{\beta_i\}_{i=1}^g)$ から Y の微分同相類は復元することができる. この \mathcal{H} を Y の種数 g の Heegaard 図式とよぶ.

次に, S_n を n 次対称群とする. このとき, $\text{Sym}^n(\Sigma_g) := (\Sigma_g \text{ の } n \text{ 個直積}) / S_n$ には n 次元複素多様体の構造が入ることが知られている. 特に, $\text{Sym}^g(\Sigma_g)$ は g 次元複素多様体であり, その中には 2つの実 g 次元トーラス

$$\mathbb{T}_\alpha := (\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_g) / S_g \quad \text{および} \quad \mathbb{T}_\beta := (\beta_1 \times \cdots \times \beta_g) / S_g$$

が埋め込まれていると見なせる. Heegaard Floer 鎖複体 $CF^\infty(\mathcal{H})$ は, 大雑把に言えば, $\text{Sym}^g(\Sigma_g)$ と $\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta$ をそれぞれシンプレクティック多様体と2つのラグランジアン部分多様体に見立て, “ラグランジアン交叉 Floer ホモロジー” の構成を適用することで得られる. ただし, \mathbb{Z} フィルトレーションを導入するために, 実際には補空間 $\Sigma_g \setminus (\cup_i \alpha_i \cup \cup_i \beta_i)$ 上の基点 w を含めて鎖複体 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ を定める. また $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ の生成系には, “ラグランジアン同士の交叉” の \mathbb{Z} コピーにあたる $(\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) \times \mathbb{Z}$ が採用されている. このとき, フィルトレーションレベル m の部分複体にはちょうど $(\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) \times \{i \leq m\}$ で生成される部分群が対応する.

例えば, 図2の左図 \mathcal{H} は S^3 の Heegaard 図式の一つであり, 右図はそれに対応する鎖複体 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ である. 特に, その次数 n のホモロジー群を $HF_n^\infty(\mathcal{H}, w)$ と書くとする,

$$HF_n^\infty(\mathcal{H}, w) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n: \text{偶数}) \\ 0 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

となる.

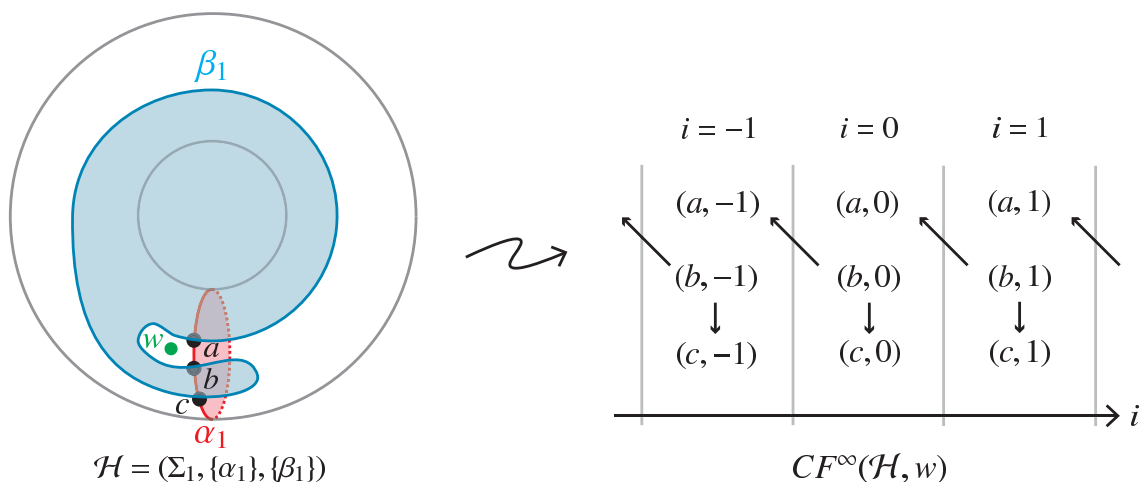


図2: 左図は S^3 の種数1の Heegaard 図式の例. α_1, β_1 はそれぞれ Σ_1 の内側と外側で円板を張っている. 右図は左図に対応する鎖複体. 矢印は始点の微分が終点の線形和になっていることを意味する. また, チェイン (a, i) の次数は $2i$ で, 特に $(a, \frac{n}{2})$ (およびこれと homologous な $(c, \frac{n}{2} + 1)$) が $HF_n^\infty(\mathcal{H}, w)$ のホモロジーの生成元を与えるサイクルとなっている.

上述した $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ は, 次の意味で Y に関する位相不変性を持っている.

定理 3.1 (Ozsváth-Szabó [11]) $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ を Y の Heegaard 図式とする. このとき, それぞれの任意の基点 w, w' について, \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体としてのチェインホモトピー同値

$$CF^\infty(\mathcal{H}, w) \simeq CF^\infty(\mathcal{H}', w')$$

が成立する.

特に、フィルトレーションレベル -1 の部分複体 $CF^-(\mathcal{H}, w)$ とその商複体 $CF^+(\mathcal{H}, w)$ について、誘導される短完全列

$$0 \rightarrow CF^-(\mathcal{H}, w) \rightarrow CF^\infty(\mathcal{H}, w) \rightarrow CF^+(\mathcal{H}, w) \rightarrow 0$$

のチェインホモトピー同値類や、ホモロジー完全列

$$\cdots \rightarrow HF^-(\mathcal{H}, w) \rightarrow HF^\infty(\mathcal{H}, w) \rightarrow HF^+(\mathcal{H}, w) \rightarrow \cdots$$

の同型類は、 Y の位相不変量となる。また、フィルトレーションレベル 0 を $CF^-(\mathcal{H}, w)$ で割った部分商複体 $\widehat{CF}(\mathcal{H}, w)$ は、 $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ を生成系にもつ有限次元自由アーベル群となる。さらに、そのホモロジー群 $\widehat{HF}(\mathcal{H}, w)$ は L 空間予想 [1] の由来となる対象で、定義の拡張や性質の解明など、今でもさかんに研究が行われている。

3.2. \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体 CFK^∞

次に、 K を S^3 内の結び目とする。¹このとき、 S^3 のある Heegaard 図式 \mathcal{H} とその上の二つの基点 w, z を用いて結び目 K を表すことができる。(実際、ハンドル体 H_α, H_β の中で、 α_i や β_i の張る円板を避けながら w と z を結ぶ線分の埋め込みは、アイソトピーの差を除いてそれぞれ一意に定まる。図 3 の左図も併せて参照されたい。) よって、結び目には $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ と $CF^\infty(\mathcal{H}, z)$ の二つの鎖複体が同時に対応することになる。さらに、この二つの鎖複体は標準的にチェイン同型になっており、両者の違いは \mathbb{Z} フィルトレーションの入り方のみとなる。

そこで、標準的なチェイン同型を介して「 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ 上に基点 z に由来する \mathbb{Z} フィルトレーションをさらに付加する」ことで、 \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ を得る。特に、この構成から、 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ は \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体として $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ および $CF^\infty(\mathcal{H}, z)$ と標準的にチェイン同型であることがわかる。

例えば、実際にこの手続きで図 2 の $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ を $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ に変換すると、図 3 の右図のようになる。

このとき、 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ の K に関するアイソトピー不変性は次のように述べられる。

定理 3.2 (Ozsváth-Szabó [10]) $(\mathcal{H}, w, z), (\mathcal{H}', w', z')$ を K を表す S^3 の二重基点付き Heegaard 図式とする。このとき、 \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体としてのチェインホモトピー同値

$$CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z) \simeq CFK^\infty(\mathcal{H}', w', z')$$

が成立する。

特に、 $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ の部分商複体 $\widehat{CF}(\mathcal{H}, w)$ の上にも基点 z に由来する \mathbb{Z} フィルトレーションが入り、そのチェインホモトピー同値類が K のアイソトピー不変量となる。この \mathbb{Z} フィルター付き鎖複体に付随するスペクトル系列の E^1 ページが結び目 Floer ホモロジー $\widehat{HFK}(K)$ にあたる。(特に、 $\widehat{HFK}(K)$ は $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ から計算可能である。) その他にも、 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$ から全ての Dehn 手術の 4 種のホモロジー群 $HF^\infty, HF^-, HF^+, \widehat{HF}$ が計算可能であることなどが知られている。[13, 14]

¹実際は、より一般に、任意の閉 3 次元多様体内の null-homologous な結び目に対して同様の構成や不変性が成立する。

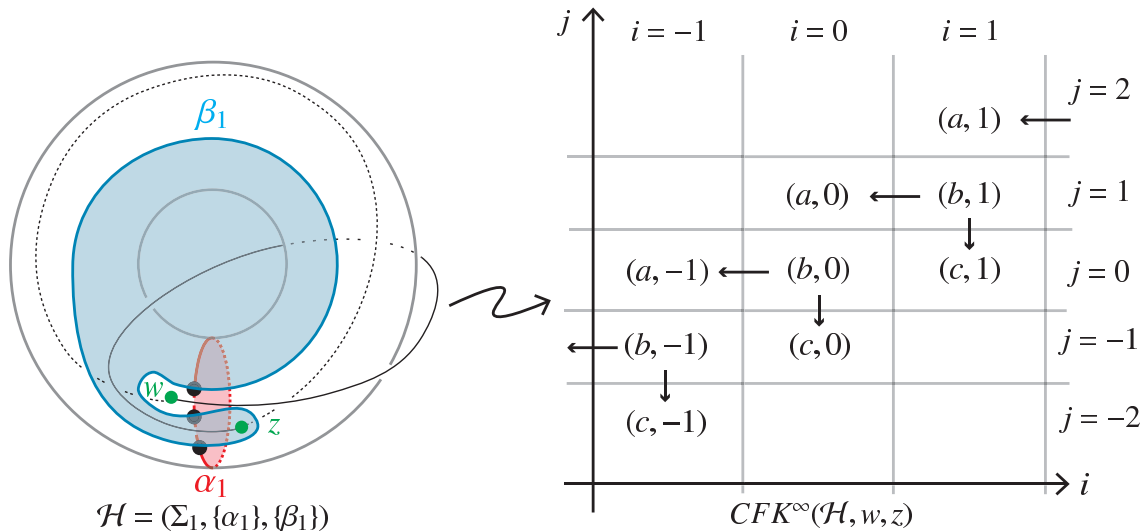


図 3: Σ_1 の内側では α_1 の張る円板を, 外側では β_1 の張る円板を避けて 2 つの基点 w, z を結ぶと, 2 重基点付き Heegaard 図式が表す結び目が復元できる. (この例では右手系 trefoil が現れている.) 右図は 左図に対応する鎖複体 $CFK^\infty(\mathcal{H}, w, z)$. i 軸は $CF^\infty(\mathcal{H}, w)$ 元来の \mathbb{Z} フィルトレーションであり, j 軸は z に由来する \mathbb{Z} フィルトレーションである.

4. CFK^∞ に由来するコンコーダンス不変量

4.1. 様々なコンコーダンス不変量と, Hom による解釈

2.3 節で述べたように, 結び目コンコーダンスの研究者の間では, 結び目コンコーダンス群の部分群 $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ を詳しく調べられるような理論に注目が集まっていた. そして Heegaard Floer ホモロジー理論の登場以降, 様々なコンコーダンス不変量が定義され, 研究された. 以下では, その一部で, 特に本研究と関わりが深いものを紹介する.

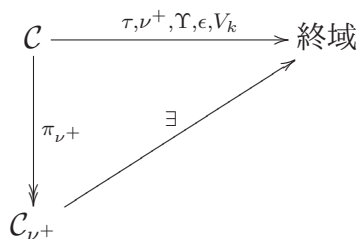
- Ozsváth-Szabó [9] 本人らによって与えられた準同型写像 $\tau: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$. この不変量は, CFK^∞ から誘導される \widehat{CF} 上の \mathbb{Z} フィルトレーションを用いて定義される.
- Hom-Wu [7] によって与えられた写像 $\nu^+: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. この不変量は, CFK^∞ から誘導される CF^+ 上の \mathbb{Z} フィルトレーションを用いて定義される. ν^+ は準同型ではないが, 劣加法性: $\nu^+(K \# J) \leq \nu^+(K) + \nu^+(J)$ をもち, 特に $\nu^+(K) = \nu^+(-K) = 0$ なる元全体²は \mathcal{C} 内で部分群 H_{ν^+} を成す.
- Ozsváth-Stipsicz-Szabó [12] によって与えられた準同型写像 $\Upsilon: \mathcal{C} \rightarrow \text{PL}([0, 2], \mathbb{R})$. ただし, $\text{PL}([0, 2], \mathbb{R})$ は閉区間 $[0, 2]$ 上の区分的線形関数全体の集合である. この不変量は, 各 $t \in [0, 2]$ ごとに CFK^∞ 上の \mathbb{Z}^2 フィルトレーションを“線形化”した \mathbb{R} フィルトレーション³を用いて定義される. 特に, この不変量 Υ の“微分”

²ここで $-K$ は, K のコンコーダンス群の元としての逆元を表す.
³ $t \in [0, 2]$ を固定したとき, フィルトレーションレベル $s (\in \mathbb{R})$ の部分複体は $(t/2)i(c) + (1-t/2)j(c) \leq s$ を満たすチェーン c によって生成される. (ただし, $i(c), j(c)$ は, 基点 w, z それぞれに由来する \mathbb{Z} フィルトレーションに関して, c を含む最小のフィルトレーションレベル.)

を考えると、全射準同型 $\Upsilon': \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty$ が得られる。これによって、 $\text{Ker } \pi_{\text{Top}}$ が \mathbb{Z}^∞ と同型な直和因子を持つことが初めて証明された。

この他にも、 $\epsilon: \mathcal{C} \rightarrow \{\pm 1, 0\}$, $\{V_k: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ など様々な不変量が定義されているが、上述の不変量はすべて CFK^∞ を用いて定義されている。したがって、これら全ての不変量に対して普遍性をもつ不変量の存在を問題にするのは自然である。この問いに対して、Hom は次のような解答を与えた。

定理 4.1 (Hom [6]) \mathcal{C}_{ν^+} を、 \mathcal{C} の H_{ν^+} による商群と定める。この時、コンコーダンス不変量 $\tau, \nu^+, \Upsilon, \epsilon, V_k$ は全て、射影 $\pi_{\nu^+}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\nu^+}$ と \mathcal{C}_{ν^+} を始域とする写像の合成に分解する：



ここで、二つの結び目が $[K] - [J] \in H_{\nu^+}$ を満たすことは、

$$\nu^+([K] - [J]) = \nu^+([J] - [K]) = 0$$

が成り立つことと同値である。これによって定まる結び目の間の同値関係を ν^+ 同値という。上述のように、 ν^+ 同値は「 CFK^∞ から定まるコンコーダンス不変量を統制する同値関係」という意味を既に持っているわけだが、Hom はさらに ν^+ 同値が CFK^∞ の“安定ホモトピー同値”にあたる概念であることも明らかにした。

定理 4.2 (Hom [6]) 結び目 K, J が ν^+ 同値であることは次の命題と同値である： \mathbb{Z}^2 フィルター付き非輪状複体 A_1, A_2 が存在して、 \mathbb{Z}^2 フィルター付き鎖複体としてのチェインホモトピー同値

$$CFK^\infty(K) \oplus A_1 \simeq CFK^\infty(J) \oplus A_2$$

が成立する。

従来は、「コンコーダンス理論の問題を解明するため」に「Heegaard Floer ホモロジー理論を応用する」という構図であったが、Hom の定理によって

$$\begin{array}{ll}
 \text{結び目のアイソトピー分類} & \mapsto CFK^\infty \text{ のチェインホモトピー同値分類} \\
 \text{結び目のコンコーダンス分類} & \mapsto CFK^\infty \text{ の安定ホモトピー同値分類}
 \end{array}$$

という関係が明らかになり、「鎖複体 CFK^∞ の性質を解明するため」に「コンコーダンス理論を応用する」という研究も新たに可能になった。著者はこの観点から現在研究を進めている。

4.2. 著者による研究成果 (1) : \mathcal{C}_{ν^+} 上への部分順序の導入

ν^+ 同値の定義は、二つの等式

$$\nu^+([K] - [J]) = \nu^+([J] - [K]) = 0$$

が同時に成立するというものであったが、このうちの一つを用いれば \mathcal{C}_ν^+ 上に部分順序を導入することができる。すなわち、 \mathcal{C}_ν^+ の 2 元 x, y に対し、関係 $x \leq y$ を

$$\nu^+(x - y) = 0$$

で定めると、関係 \leq は \mathcal{C}_ν^+ 上の部分順序となる。さらに、この部分順序は次のようなよい性質をもつ。

定理 4.3 (佐藤 [15]) \mathcal{C}_ν^+ 上の部分順序について、以下のことが成り立つ。

- 任意の $x, y, z \in \mathcal{C}_\nu^+$ について、 $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$.
- 任意の $x, y \in \mathcal{C}_\nu^+$ について、 $x \leq y$ ならば $-y \leq -x$.
- 不変量 $\tau, \nu^+, -\Upsilon, V_k$ を \mathcal{C}_ν^+ を始域とする写像とみなすとき、これらは部分順序を保存する。
- トーラス体 $V = S^1 \times D^2$ 内の任意の結び目 P について、それに付随する写像

$$P: \mathcal{C}_\nu^+ \rightarrow \mathcal{C}_\nu^+, [K]_{\nu^+} \mapsto [P(K)]_{\nu^+}$$

は well-defined で、かつ部分順序を保存する。ただし、 $P(K)$ は P をパターンとする K のサテライト結び目⁴である。

さらに、最新の成果として、部分順序 \leq は次の意味を持つことも分かった。ここで、チェイン写像 $f: C_1 \rightarrow C_2$ が疑同型であるとは、ホモロジー上に誘導される準同型 $f_*: H_*(C_1) \rightarrow H_*(C_2)$ が同型写像になっていることである。

定理 4.4 (佐藤) 関係 $[K]_{\nu^+} \leq [J]_{\nu^+}$ が成立することは次の命題と同値である： \mathbb{Z}^2 フィルトレーションを加味した疑同型写像

$$f: CFK^\infty(J) \rightarrow CFK^\infty(K)$$

が存在する。

特に、2つの \mathbb{Z}^2 フィルターつき鎖複体の双方向に疑同型写像が存在することを双疑同型と呼ぶことにすると、Hom の考察に加えて

$$\begin{aligned} \text{結び目のコンコーダンス分類} &\mapsto CFK^\infty \text{ の安定ホモトピー同値分類} \\ &\Leftrightarrow CFK^\infty \text{ の双疑同型分類} \end{aligned}$$

という対応が得られたことになる。さらに、安定ホモトピー同値写像と比較して、双方向の疑同型写像はそれぞれ独立に構成することができるという、扱いやすさの利点もある。

⁴ トーラス体 V の中心線 $S^1 \times \{O\}$ が K に移るように V を S^3 に埋め込んだ際の、 P の像として定まる結び目のこと。

4.3. 著者による研究成果 (2) : 種数 1 の結び目の ν^+ 同値類の分類

著者はさらに, 4.2 節の部分順序の幾何的な性質を詳しく研究し, 任意の結び目の ν^+ 同値類に対して, 次の不等式を証明した. ここで, $g_4(K)$ は「 K が B^4 内で張る有向曲面の最小種数」であり, K の 4 次元種数と呼ばれている.

定理 4.5 (佐藤) 任意の結び目 K に対して, 不等式

$$-g_4(K)[T_{2,3}]_{\nu^+} \leq [K]_{\nu^+} \leq g_4(K)[T_{2,3}]_{\nu^+}$$

が成り立つ. ただし, $T_{2,3}$ は右手系 trefoil を表す.

この不等式の応用として, すべての種数 1 の結び目の ν^+ 同値類を, τ 不変量を用いて完全に分類することに成功した.

定理 4.6 (佐藤) 任意の種数 1 の結び目 K について,

$$[K]_{\nu^+} = \begin{cases} [T_{2,3}]_{\nu^+} & (\tau(K) = 1) \\ 0 & (\tau(K) = 0) \\ -[T_{2,3}]_{\nu^+} & (\tau(K) = -1) \end{cases}$$

が成立する.

この結果については, 古典的な代数的コンコードダンス群 \mathcal{C}_{Alg} と比較しても面白い. そのために, まず \mathcal{C} のフィルトレーションとして, 「種数 n 以下の結び目全体」で生成される \mathcal{C} の部分群 \mathcal{F}_n ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を考える. この時, Levine の不変量と定理 4.6 より

- 像 $\pi_{\text{Alg}}(\mathcal{F}_1)$ は $\mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty$ を直和因子にもつ.
- 像 $\pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_1)$ は $[T_{2,3}]_{\nu^+}$ によって生成される無限巡回群で, 特に $\pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_1) \cong \mathbb{Z}$ である.

という対比が得られる. ここで,

- $\pi_{\text{Alg}}(\text{Ker } \pi_{\text{Top}}) = 0$.
- $\pi_{\nu^+}(\text{Ker } \pi_{\text{Top}})$ は \mathbb{Z}^∞ を直和因子にもつ.

という対比もあることから, 「 \mathcal{C}_{ν^+} は微分構造を反映する一方で, 種数によってふるまいが強く制限される」という考察が得られたことになる. これは, \mathcal{C}_{ν^+} による \mathcal{C} の解明の限界を示す一方で, \mathcal{C}_{ν^+} 上のフィルトレーション

$$0 \subset \pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_1) \subset \pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_2) \subset \cdots \subset \mathcal{C}_{\nu^+}$$

が扱いやすい対象である可能性も示唆している. 特に, 次の問題は未解決で, 著者が今後の課題として重要視しているものである.

問題 4.7 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, \mathcal{C}_{ν^+} の部分群 $\pi_{\nu^+}(\mathcal{F}_2)$ は有限生成か?

Levineの代数的コンコードランス群 \mathcal{C}_{Alg} は、高次元コンコードランス群 \mathcal{C}^n を解明しただけでなく、 $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$ においても、その大まかな構造や具体的な結び目間のコンコードランスを理解する上で大変有用であり、現在でも非常に重宝されている。今後の著者の一つの目標は、 \mathcal{C}_{ν^+} の構造を詳しく解明し、微分構造を反映したコンコードランスおよび低次元トポロジーにおけるFloer理論的不変量の双方の理解のために重宝される理論として完成させることである。

謝辞 トポロジーシンポジウムにお招きくださった、主催者の皆様に心より感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] S. BOYER, C. M. GORDON, AND L. WATSON, *On L-spaces and left-orderable fundamental groups*, Math. Ann., 356 (2013), pp. 1213–1245.
- [2] A. J. CASSON AND C. M. GORDON, *On slice knots in dimension three*, in Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, pp. 39–53.
- [3] S. K. DONALDSON, *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. Differential Geom., 26 (1987), pp. 397–428.
- [4] M. H. FREEDMAN, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom., 17 (1982), pp. 357–453.
- [5] M. HEDDEN, S.-G. KIM, AND C. LIVINGSTON, *Topologically slice knots of smooth concordance order two*, J. Differential Geom., 102 (2016), pp. 353–393.
- [6] J. HOM, *A survey on Heegaard Floer homology and concordance*, J. Knot Theory Ramifications, 26 (2017), pp. 1740015, 24.
- [7] J. HOM AND Z. WU, *Four-ball genus bounds and a refinement of the Ozv ath-Szabó tau invariant*, J. Symplectic Geom., 14 (2016), pp. 305–323.
- [8] J. LEVINE, *Knot cobordism groups in codimension two*, Comment. Math. Helv., 44 (1969), pp. 229–244.
- [9] P. OZSVÁTH AND Z. SZABÓ, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geom. Topol., 7 (2003), pp. 615–639.
- [10] ———, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math., 186 (2004), pp. 58–116.
- [11] ———, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2), 159 (2004), pp. 1027–1158.
- [12] P. S. OZSVÁTH, A. I. STIPSICZ, AND Z. SZABÓ, *Concordance homomorphisms from knot Floer homology*, Adv. Math., 315 (2017), pp. 366–426.
- [13] P. S. OZSVÁTH AND Z. SZABÓ, *Knot Floer homology and integer surgeries*, Algebr. Geom. Topol., 8 (2008), pp. 101–153.
- [14] ———, *Knot Floer homology and rational surgeries*, Algebr. Geom. Topol., 11 (2011), pp. 1–68.
- [15] K. SATO, *A full-twist inequality for the ν^+ -invariant*, Topology Appl., 245 (2018), pp. 113–130.

Conway-Gordon の定理の精密化と一般化

新國 亮 (東京女子大学現代教養学部)*

概 要

空間6頂点完全グラフ内の2成分絡み目の絡み数の総和は必ず奇数で、また空間7頂点完全グラフ内の結び目の Conway 多項式の2次の係数の総和は必ず奇数であるという事実は、Conway-Gordon の定理としてよく知られている。本稿では、Conway-Gordon の定理の整数持ち上げによる精密化、及び頂点数8以上の完全グラフへの一般化について、最近の結果を中心に報告する。

1. Conway-Gordon の定理

本稿では、1次元有限 CW 複体の多面体をグラフと呼び、その0胞体を頂点、1胞体を辺と呼ぶことにする。グラフ G の \mathbb{R}^3 への埋め込み $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を G の空間埋め込みといい、その像 $f(G)$ を G の空間グラフという (図 1.1)。 G の部分グラフ (部分複体) で円周に同相なものをサイクルといい、 G の空間埋め込み f 及びサイクル (の非交和) λ に対し、 $f(\lambda)$ は $f(G)$ 内の結び目 (絡み目) にほかならない。

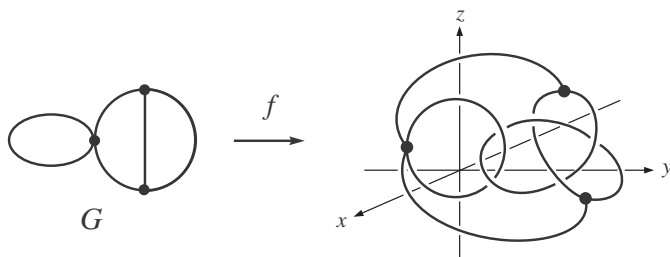


図 1.1: 空間グラフ



図 1.2: 樹下の θ 曲線

グラフ G の2つの空間グラフ $f(G), g(G)$ が同値であるとは、 \mathbb{R}^3 の自己同相写像 Φ が存在して $\Phi(f(G)) = g(G)$ となるときとする。空間グラフ $f(G)$ が自明であるとは、 $f(G)$ が \mathbb{R}^3 内の平面に含まれるある空間グラフ $h(G)$ に同値であるときをいう。結び目理論と同様、空間グラフの分類は基本的問題であり、結び目理論において考えられている概念や不変量の多くが空間グラフに一般化される。図 1.2 の樹下の θ 曲線のように、含まれる結び目や絡み目がみな自明でも、自身は非自明な空間グラフが存在することが、分類問題を研究する1つの動機である。また、空間グラフの正則近傍の分類を考えることで、 \mathbb{R}^3 内のハンドル体 (ハンドル体結び目) や閉曲面の研究にも応用される。これらは空間グラフの外在的性質の研究といえる。一方、グラフが十分「大きい」ならば、その任意の空間グラフはある特有の性質を持ち、それをグラフ自体の構造から特徴付けようという研究が1980年代中盤以降、盛んに行われている。これらはいわば空間グラフの内在的性質の研究であり、その嚆矢となったのが Conway-Gordon の定理である。以下、グラフ G のちょうど k 個の頂点を含むサイクルを k サイクルと呼び、 k サイクル全体の集合を $\Gamma_k(G)$ で、また、 k サイクルと l サイクルとの非交和全体の集合を $\Gamma_{k,l}(G)$

本研究は JSPS 科研費 JP15K04881, JP19K03500 の助成を受けたものです。

* 東京都杉並区善福寺 2-6-1 東京女子大学現代教養学部数理科学科
e-mail: nick@lab.twcu.ac.jp

で表す. また, $(n-1)$ 単体の 1 骨格として得られるグラフを n 頂点完全グラフといい, K_n で表す.¹ 特に $n=6,7$ のとき, Conway-Gordon は次の定理を示した.

定理 1.1. (Conway-Gordon の定理 [6])

- (1) K_6 の任意の空間埋め込み f において, $\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda)) \equiv 1 \pmod{2}$. ここで lk は \mathbb{R}^3 における絡み数²を表す.
- (2) K_7 の任意の空間埋め込み f において, $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$. ここで a_2 は Conway 多項式³ の z^2 の係数を表す.

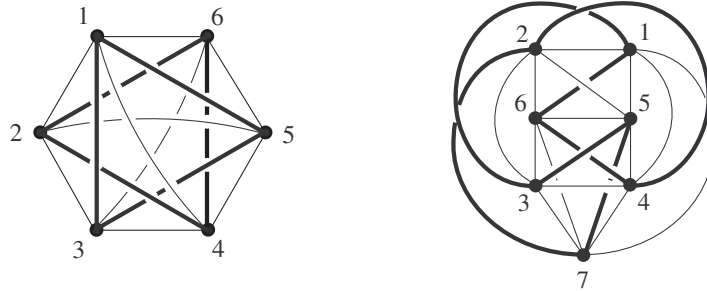


図 1.3: K_6, K_7 の空間グラフ. 太線部は左が Hopf 絡み目, 右が三葉結び目に同値.

定理 1.1 から, K_6 の空間グラフは必ず非分離な 2 成分絡み目を含むこと, また K_7 の空間グラフは必ず非自明結び目を含むことが導かれ (図 1.3), この事実を指して Conway-Gordon の定理といわれることも多い.⁴ 一般に前者/後者の性質を持つグラフは絡み目内在/結び目内在であるといい, これらの性質を持つグラフの特徴付けは空間グラフの理論における重要な研究テーマである. 特に Robertson-Seymour-Thomas による, 絡み目内在グラフのグラフマイナー理論による特徴付けは大きな成果の 1 つであり [34], 一方で結び目内在グラフの特徴付けは未だ成されていない (例えば [9, §§2-6] を参照). しかし我々の本稿での興味は別の方向にある. いま, 空間グラフ $f(G)$ 内の結び目/絡み目で全ての頂点を含むものを, グラフ理論の用語に倣って **Hamilton 結び目/絡み目** と呼ぶことにする. 我々の目的は, 定理 1.1 を, 空間グラフ内の結び目・絡み目を代数的不変量で縛るという立場から頂点数 $n \geq 8$ の K_n に一般化し, Hamilton 結び目/絡み目の振る舞いを調べることである. そのような研究はこれまでほとんどなかったように思われ, 少なくとも筆者は以下の結果しか知らなかった.

定理 1.2. (1) (Foisy [11], 平野 [13])⁵ K_8 の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 3 \pmod{6}.$$

(2) (平野 [13]) $n \geq 9$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv 0 \pmod{2}.$$

¹ K_n は, n 頂点のうちどの異なる 2 頂点も, ちょうど 1 本の辺で結ばれたグラフである.

² 有向絡み目 $L = J \cup K$ に対し, $H_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を Σ として, $[J] = \text{lk}(L)\Sigma$ となる $\text{lk}(L)$ を L の絡み数といい, L の図式から計算できる. L が分離絡み目 (特に自明) なら $\text{lk}(L) = 0$ である.

³ 有向絡み目 L の Alexander 多項式 $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}]$ を適当に正規化し, 変数変換 $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ を施して得られる整係数多項式 $\nabla_L(z)$. 特に有向結び目 K の Conway 多項式は向きに依らず, また必ず $1 + \sum_{i \geq 1} a_{2i}(K)z^{2i}$ の形に表される. K が自明なら $\nabla_K(z) = 1$, 特に $a_2(K) = 0$ である.

⁴ K_6 に関しては Sachs も独立に示していて [36], Conway-Gordon-Sachs の定理といわれることもある.

⁵ Foisy は $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 0 \pmod{3}$ を示し [11], 平野は $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$ を示した [13].

(3) (Kazakov-Korablev [19]) $n \geq 7$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda)) \equiv 0 \pmod{2}.$$

定理 1.1 のオリジナルの証明は以下のように成された. K_7 の空間埋め込み f に対し, まず $\alpha(f) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \pmod{2}$ が辺の間の交差交換で不変であることを示す. 従って $\alpha(f)$ は埋め込み f に依らず, 次に具体的に $\alpha(h) = 1$ となる埋め込み h を与え, $\alpha(f) = \alpha(h) = 1$ を得る (実際, 図 1.3 の K_7 の空間グラフは, 全 360 個の Hamilton 結び目のうち唯一つだけ非自明で $a_2 = 1$). K_6 の空間埋め込み f に対しても, $\sigma(f) \equiv \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda)) \pmod{2}$ に対し全く同じプロセスを踏んで $\sigma(f) = 1$ が示される. 議論はスマートかつ図式を用いた初等的なもので極めてアクセシブルである反面, より大きな頂点数の K_n への一般化, あるいは合同式の精密化を安直に図ると大変煩雑となり, 更に具体的な埋め込み h について $\alpha(h)$ を計算することも一般には容易でない. それがこの方向の研究が敬遠された原因の1つであるように思われる. しかし筆者は10年前, もとの頂点数 $n = 6, 7$ において, 定理 1.1 の整数持ち上げを与えて精密化することに成功し, 更に最近, 森下央子氏 (東京女子大学) との共同研究により, それを頂点数 $n \geq 8$ の K_n に一般化することに成功した. 本稿では, その概要を報告する.

2. Conway-Gordon の定理の精密化

定理 1.1 (1), (2) は, いずれも以下のように整数上の等式に持ち上がる.

定理 2.1. (新國 [26])

(1) K_6 の任意の空間埋め込み f において,

$$2 \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_6)} a_2(f(\gamma)) = \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 1. \quad (2.1)$$

(2) K_7 の任意の空間埋め込み f において,

$$7 \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) - 14 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_7)} a_2(f(\gamma)) = 2 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,4}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 + 3 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 42. \quad (2.2)$$

実際, (2.1) の両辺の mod 2 を取ると定理 1.1 (1) が得られる. また, (2.2) の両辺の mod 2 を取ると $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))$ で, 実は右辺は奇数 (後述) なので定理 1.1 (2) が得られる.

定理 2.1 は以下のようにして証明された. いま, K_6 から 2 つの 3 サイクルの非交和を除いて得られるグラフを $K_{3,3}$ で表すとき, $G = K_5$ または $K_{3,3}$ の空間埋め込み f に対し, **Simon 不変量** と呼ばれる奇数値不変量 $\mathcal{L}(f)$ が定義される.⁶ また, Γ' を $G = K_5$ のとき $\Gamma' = \Gamma_5(K_5)$, $G = K_{3,3}$ のとき $\Gamma' = \Gamma_6(K_{3,3})$ とするとき, α 不変量 $\alpha(f)$ が

$$\alpha(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma'} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(G)} a_2(f(\gamma)) \quad (2.3)$$

で定義される.⁷ Simon 不変量と α 不変量との間には, 以下の関係:

⁶ X の 2 点配置空間 $C_2(X) = \{(x, y) \in X \times X \mid x_1 \neq x_2\}$ 及びその上の対合 $\iota(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ に対し, チェイン複体 $\text{Ker}(1 + \iota_{\#})$ の整係数コホモロジー群を $H^*(C_2(X), \iota)$ と表す. $G = K_5$ または $K_{3,3}$ の空間埋め込み f に対し, $H^2(C_2(\mathbb{R}^3), \iota) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 Σ の $(f \times f)^*$ による像 $(f \times f)^*(\Sigma) \in H^2(C_2(G), \iota) \cong \mathbb{Z}$ を f の **Simon 不変量** といい, $\mathcal{L}(f)$ で表す. これも f の図式から計算できる [40].

⁷ 定理 1.1 (2) の証明における K_7 の埋め込み f に依らない量 $\alpha(f)$ のアイデアを捉え直し, $G = K_5, K_{3,3}$ に限らず, より一般的な設定の下で, 空間グラフのホモトピー不変量として導入された [39].

$$\sum_{\gamma \in \Gamma'} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(G)} a_2(f(\gamma)) = \frac{\mathcal{L}(f)^2 - 1}{8} \quad (2.4)$$

が成り立つ [28] (本質的には本橋-谷山 [22]). 改めて K_6 の任意の空間埋め込み f に対し, K_6 はちょうど6個の K_5 に同型な部分グラフ G_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), ちょうど10個の $K_{3,3}$ に同型な部分グラフ H_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) を含み,

$$\sum_{j=1}^{10} \mathcal{L}(f|_{H_j})^2 - \sum_{i=1}^6 \mathcal{L}(f|_{G_i})^2 = 4 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2$$

が成り立つことが, K_6 の空間グラフの「ホモロジー分類」 [40] の応用により示される. そこで各 $\mathcal{L}(f|_{H_i})$, $\mathcal{L}(f|_{G_j})$ に (2.4) を適用し整理すると (1) が得られる. (2) は, K_7 の任意の空間埋め込み f に対し, K_7 の部分グラフで K_6 に同相なもの F を全て考え (図 2.1), $f|_F$ に定理 2.1 (1) を適用し, 全ての F について足し合わせ整理して得られる.

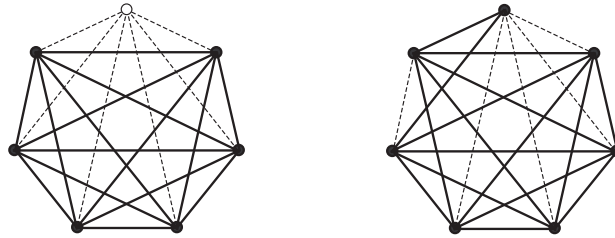


図 2.1: K_7 の部分グラフで K_6 に同相なもの

定理 2.1 (1) の証明の肝は, 空間グラフのホモロジー不変量を結び目成分の a_2 を用いて構成し, そこにホモロジー完全分類を適用して一般的な関係式を得るところである.⁸ これは関係式 (2.4) を得る際に用いられたアイデアでもあった.

3. Conway-Gordon の定理の一般化

定理 2.1 (2) の証明の手法は一般の K_n ($n = 8, 9, \dots$) に次々と適用でき, 実際に $f(K_n)$ 内の Hamilton 結び目の a_2 の総和が, 5 サイクル結び目の a_2 , 及び 2 成分絡み目の lk^2 から決まることは認識していたが, k サイクル結び目と l サイクル結び目からなる 2 成分絡み目を (k, l) 絡み目と呼ぶとき ($6 \leq k + l \leq n$), 各 (k, l) 絡み目の lk^2 の総和の一般的な現れ方がわからず, 明晰な関係式に表せないでいた. しかし, K_7 の空間グラフが持つ以下の性質に (ようやく) 気が付いたことが, 突破口を開く鍵となった.

定理 3.1. (森下-新國 [20]) K_7 の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,4}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = 2 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2. \quad (3.1)$$

証明は, 定理 2.1 (1) と同様の手法で O'Donnol が示した完全 3 組グラフ $K_{3,3,1}$ の精密化 Conway-Gordon 型公式 [29] を, K_7 が含む全ての $K_{3,3,1}$ に同型な部分グラフに適用することによる. そこで定理 3.1 と定理 2.1 (2) から, K_7 の空間埋め込み f において

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_7)} a_2(f(\gamma)) = \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_7)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 6 \quad (3.2)$$

⁸ 全ての n について, K_n の空間グラフの全てのホモロジー類が明示的にわかっている [38], [25].

が成り立ち、「Hamilton 結び目の a_2 の総和は、5 サイクル結び目の a_2 の総和と (3, 3) 絡み目の lk^2 の総和で然るべく表される」という仮定の帰納法に乗る. 大雑把にはこのようにして、我々は以下の結果を得た.

定理 3.2. (森下-新國 [20]) $n \geq 6$ のとき、 K_n の任意の空間埋め込み f において、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - (n-5)! \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_n)} a_2(f(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left(\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - \binom{n-1}{5} \right).$$

定理 3.2 から、 $f(K_n)$ の Hamilton 結び目の振る舞いがいろいろ見えてくる. まず、 $n \geq 6$ のとき、 K_n の2つの3サイクルの非交和 $\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)$ を含む部分グラフで K_6 に同型なものは唯一つであることを注意する. このことと定理 1.1 (1) から、 $f(K_n)$ の (3, 3) 絡み目の lk^2 の総和は、 K_n の K_6 に同型な部分グラフの個数 $\binom{n}{6}$ 以上である. 従って定理 3.2 より、以下の系が得られる.

系 3.3. $n \geq 6$ のとき、 K_n の任意の空間埋め込み f において、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - (n-5)! \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_n)} a_2(f(\gamma)) \geq \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!}.$$

注意 3.4. 遠藤-大槻は、標準的空間グラフの研究の一環として K_n の正準本表現と呼ばれる埋め込み f_b を導入し [7], 更に大槻は、 $f_b(K_n)$ の全ての非分離 (3, 3) 絡み目はちょうど $\binom{n}{6}$ 個の Hopf 絡み目であることを示した [30]. 従って系 3.3 の下界は最良である. 更に $f_b(K_n)$ の全ての5サイクル結び目は自明なので、特に

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_b(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left(\binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) = \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \quad (3.3)$$

が得られる. Hamilton 結び目たちの結び目型の内訳を知らずとも a_2 の総和がわかったことに注目して欲しい. そしてこの計算が系 3.5 の証明で重要な役割を果たす.

次に、 $n \geq 7$ のとき、 K_n の空間グラフ $f(K_n), g(K_n)$ において、それぞれの Hamilton 結び目の a_2 の総和の差の $\text{mod } (n-5)!$ を取ってみよう. 定理 3.2 から

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) \\ & \equiv \frac{(n-5)!}{2} \left(\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(g(\lambda))^2 \right) \pmod{(n-5)!} \quad (3.4) \end{aligned}$$

となるが、 $f(K_n), g(K_n)$ の (3, 3) 絡み目の lk^2 の総和は、定理 1.1 (1) からいずれも $\text{mod } 2$ で $\binom{n}{6}$ に合同なので、その差は偶数である. 従って (3.4) から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) \pmod{(n-5)!} \quad (3.5)$$

となる. 即ち、Hamilton 結び目の a_2 の総和は $\text{mod } (n-5)!$ で埋め込みに依らない. そこで g として注意 3.4 で述べた正準本表現 f_b を選べば、(3.3) と (3.5) から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \frac{(n-5)!}{2} \left(\binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) \pmod{(n-5)!} \quad (3.6)$$

が任意の空間埋め込み f について成り立つ. $\binom{n}{6} \equiv 1 \pmod{2}$ と $n \equiv 6, 7 \pmod{8}$, $\binom{n-1}{5} \equiv 1 \pmod{2}$ と $n \equiv 0, 6 \pmod{8}$ がそれぞれ同値であることに注意して (2項係数に関する Lucas の定理を用いれば良い), 以下の系が得られる.

系 3.5. $n \geq 7$ のとき, K_n の任意の空間埋め込み f において, 次の $\text{mod } (n-5)!$ の合同式が成り立つ:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \begin{cases} -\frac{(n-5)!}{2} \binom{n-1}{5} & (n \equiv 0 \pmod{8}) \\ 0 & (n \not\equiv 0, 7 \pmod{8}) \\ \frac{(n-5)!}{2} \binom{n}{6} & (n \equiv 7 \pmod{8}). \end{cases}$$

例えば $n = 7$ のときは, $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 7 \equiv 1 \pmod{2}$ となり定理 1.1 (2) が, また $n = 8$ のときは, $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv -63 \equiv 3 \pmod{6}$ となり定理 1.2 (1) が得られる. 更に $n \geq 9$ のときは定理 1.2 (2) の一般化で, もちろん新結果である.

さて我々は, 2成分 Hamilton 絡み目の絡み数の振る舞いという観点から, 定理 1.2 (3) を以下のように精密化することもできた.

定理 3.6. (森下-新國 [21]) $n \geq 6$ とし, $p, q \geq 3$ を $n = p + q$ なる整数とするととき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = \begin{cases} (n-6)! \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 & (p = q) \\ 2(n-6)! \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 & (p \neq q). \end{cases}$$

特に,

$$\sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = (n-5)! \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2.$$

証明は(今のところ)ちょっと面倒で, $n = 7$ のときの (3.1) に加えて, $n = 8$ のとき

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,5}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = 4 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2, \quad \sum_{\lambda \in \Gamma_{4,4}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2 = 2 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_8)} \text{lk}(f(\lambda))^2$$

が成り立つことを示してから帰納法に乗せる. 定理 3.6 から, K_n の任意の空間グラフにおいて, Hamilton 結び目の a_2 の場合と同じく, 2成分 Hamilton 絡み目の lk^2 の総和も $\text{mod } (n-5)!$ で埋め込みに依らないのは興味深いことである. 既に見たように $\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \geq \binom{n}{6}$ であったから, 次の系も直ちに得られる.

系 3.7. $n \geq 6$ とし, $p, q \geq 3$ を $n = p + q$ なる整数とするととき, K_n の任意の空間埋め込み f において,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \geq \begin{cases} \frac{n!}{6!} & (p = q) \\ 2 \cdot \frac{n!}{6!} & (p \neq q). \end{cases}$$

特に,

$$\sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{p,q}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \geq (n-5) \cdot \frac{n!}{6!}.$$

注意3.4で述べた通り, K_n の正準本表現 f_b によって系3.7の下界も実現され, 従って最良である. K_n の空間グラフ内の非分離絡み目の最小個数の研究は, 例えば Fleming-Mellor [10] に見られ, 系3.3はその代数的な下からの評価を与えたものといえよう.

4. 線形空間グラフへの応用

定理3.2の応用が最も直接的に見出せる空間グラフのクラスとして, 線形空間グラフが挙げられる. いま, 単純グラフ (= 1次元単体的複体の多面体) G の空間埋め込み f_r が線形である⁹とは, G の任意の辺 e に対し, その像 $f_r(e)$ が \mathbb{R}^3 の(まっすぐな)線分であるときをいう. n 頂点の単純グラフは K_n の部分グラフであり, K_n の各頂点を \mathbb{R}^3 内の曲線 (t, t^2, t^3) 上に置き, 異なるどの2頂点も1本の線分で結ぶことで1つの線形な空間埋め込みが得られる(図4.1). これを K_n の標準的な線形空間埋め込みと呼ぶことにする.¹⁰ 従って任意の単純グラフは線形空間埋め込みを持つ.

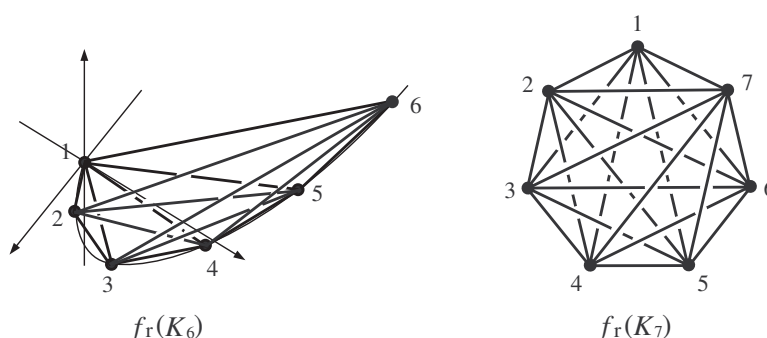


図 4.1: K_n の標準線形空間グラフ ($n = 6, 7$)

線形空間グラフは, 分子トポロジーにおいて分子化合物の数学的モデルとして自然に現れる対象で(例えば [1, §7] を参照), 空間グラフの同値類に強い制約がかかる. 特に我々は, 線形空間グラフの結び目/絡み目内在性や Hamilton 結び目/絡み目の挙動に関心がある. K_n の線形空間グラフ内の Hamilton 結び目/絡み目は棒指数が n 以下であることに注意しよう. ここで絡み目 L の棒指数 $s(L)$ とは, L の \mathbb{R}^3 内での単体分割における1単体の最小数のことであり, 低い棒指数については以下の事実が知られている.

命題 4.1. ([1], [24], [2], [5]) 絡み目 L の棒指数 $s(L)$ について, 次が成り立つ.¹¹

- (1) L が非自明結び目なら, $s(L) \geq 6$.
- (2) $s(L) = 6 \iff L$ は $3_1, 0_1^2, 2_1^2$ のいずれかと同値.
- (3) $s(L) = 7 \iff L$ は $4_1, 4_1^2$ のいずれかと同値.
- (4) $s(L) = 8 \iff L$ は $5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3, 3_1 \# 3_1, 3_1 \# 3_1^*, 8_{19}, 8_{20}$ または 5_1^2 のいずれかと同値. ここで $\#$ は連結和, $*$ は鏡像を表す.

命題4.1 (1)により, 5本の1単体からなる結び目は自明である. 従って, 線形空間グラフ内の5サイクル結び目は全て自明となり, 定理3.2から以下の定理が直ちに得られる.


⁹ ここでは線形としたが, linear, rectilinear, straight edge などの用語が使われ, 統一されていない.

¹⁰ 図4.1の K_7 の標準的な線形空間埋め込みは, 実は図1.3の K_7 の空間埋め込みと同値である.

¹¹ 各結び目・絡み目のラベルは, いわゆる Rolfsen テーブル [35] に従った.

定理 4.2. (森下-新國 [20]) $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の線形空間埋め込み f_r において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left(\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f_r(\lambda))^2 - \binom{n-1}{5} \right).$$

命題 4.1 (2) により, 6本の1単体からなる2成分絡み目は, 自明な絡み目 0_1^2 か Hopf 絡み目 2_1^2 のいずれかに同値であり, $\text{lk}(0_1^2) = 0$, $\text{lk}(2_1^2) = \pm 1$ である. 従って (3,3) 絡み目の lk^2 の和は (3,3) Hopf 絡み目の個数に等しく, 定理 4.2 により, K_n の線形空間グラフ内の Hamilton 結び目の a_2 の総和は, いかなる $n \geq 6$ についても, 絡んだトライアングルのペア  の個数で明示的に決まる. 筆者はこの結果が大変気に入っている.

定理 4.2 から, 系 3.3 と全く同様にして $\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma))$ の下界が得られる. 一般の空間埋め込みについては上に有界でないが, 特に線形空間埋め込み f_r については上にも有界であることが, 以下に述べる K_6 の線形空間グラフ内の (3,3) Hopf 絡み目の個数にかかる強い制約からわかる.

命題 4.3. (Hughes [15], Huh-Jeon [16], 新國 [26]) K_6 の任意の線形空間埋め込み f_r において, $f_r(K_6)$ が含む Hopf 絡み目の個数は 1 個または 3 個である.

命題 4.3 から $\binom{n}{6} \leq \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f_r(\lambda))^2 \leq 3 \binom{n}{6}$ となり, 従って定理 4.2 から次の結果が得られる.

系 4.4. $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の線形空間埋め込み f_r において,

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma)) \leq \frac{3(n-2)(n-5)(n-1)!}{2 \cdot 6!}.$$

例 4.5. (1) 系 4.4 で $n = 6$ とすると $\sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f_r(\gamma)) = 0, 1$ となる. 命題 4.1 (2) より $f_r(\gamma)$ は自明な結び目 0_1 または三葉結び目 3_1 であり, $a_2(0_1) = 0$, $a_2(3_1) = 1$ から, $f_r(K_6)$ が含む三葉結び目の個数は, 0 個または 1 個である ([16] で組合せ論的手法により示されていた事実の別証明).

(2) $n = 7$ のとき, 系 4.4 と定理 1.1 (2) から

$$1 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f_r(\gamma)) \leq 15, \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f_r(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$$

である. 命題 4.1 (2), (3) から, $f_r(\gamma)$ は 0_1 , 3_1 または 8 の字結び目 4_1 のいずれかであり, $a_2(4_1) = -1$ から, $f_r(K_7)$ は必ず三葉結び目を含む (Brown [4], Ramírez Alfonsín [32] で組合せ論的手法により示されていた事実の別証明).

(3) $n = 8$ のとき, 系 4.4 と定理 1.2 (1) から

$$21 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f_r(\gamma)) \leq 189, \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f_r(\gamma)) \equiv 3 \pmod{6}$$

である. 命題 4.1 によって 8本の1単体からなる結び目は全てわかっている, うち $3_1, 5_1, 5_2, 6_3, 3_1 \# 3_1, 3_1 \# 3_1^*, 8_{19}, 8_{20}$ について $a_2 > 0$ である. 従って $f_r(K_8)$ は必ずこれらのいずれかを含む. 特にこれら結び目の a_2 の値の最大値が $a_2(8_{19}) = 5$ であることから, $f_r(K_8)$ は, $a_2 > 0$ なる Hamilton 結び目を少なくとも $\lceil 21/5 \rceil = 5$ 個含む (注意 5.2 も参照せよ).

注意 4.6. 系 4.4 の下界は標準的な線形空間埋め込みにより実現され、最良である。一方、上界について、例えば $n = 7$ のとき、我々が得た上界は 15 であるが、Jeon et al. [18] における有向マトロイド理論の応用による計算機探索によれば、 K_7 の線形空間埋め込み f_r で $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f_r(\gamma)) = 13, 15$ となるものは存在しないらしい。これは定理 4.2 から、(3, 3) Hopf 絡み目の個数が 19, 21 であるものが存在しないことと同値である。一般に $n \geq 7$ について、系 4.4 の最良の上界は知られていない。

問題 4.7. $n \geq 7$ のとき、 K_n の線形空間グラフ全体において、Hamilton 結び目の a_2 の総和の最大値を決定せよ。または、(3, 3) Hopf 絡み目の個数の最大値を決定せよ。

例 4.8. 図 4.2 の 2 つの K_8 の空間グラフを考える。左は [3] で与えられたもの、右は K_8 の標準的な線形空間グラフで互いに同値でないが、¹² いずれの空間グラフも、全ての非自明な Hamilton 結び目として、ちょうど 21 個の三葉結び目を含む [3], [33] (それらを探してみよ)。筆者はこの「21」という数に何か意味があると感じつつも、10 年以上わからずにいた。しかし今回、特に系 3.3 で $n = 8$ のとき、もし全ての 5 サイクル結び目が自明なら、Hamilton 結び目の a_2 の総和は 21 以上で、更に全ての非自明な Hamilton 結び目が三葉結び目ならば、必ず 21 個以上となる。これが「21」の 1 つの意味であった。

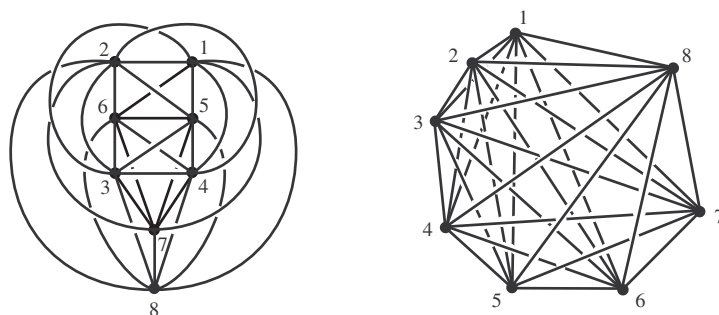


図 4.2: K_8 の 2 つの空間グラフ

5. 更なる応用など

定理 4.2 の応用についてもう少し見て行こう。1 つ目は、 K_n の線形空間グラフの非自明な Hamilton 結び目の最小個数である。 $c(K)$ で結び目 K の最小交差数を表すとき、 $c(K) \leq (s(K) - 3)(s(K) - 4) / 2$ が成り立つこと (Calvo [5]), また $a_2(K) \leq c(K)^2 / 8$ が成り立つことから (Polyak-Viro [31]), n 本の 1 単体からなる結び目 K について

$$a_2(K) \leq \left\lfloor \frac{(n-3)^2(n-4)^2}{32} \right\rfloor \quad (5.1)$$

が得られる ($\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数)。そこで系 4.4 の下界と (5.1) を用いて、 K_n の線形空間グラフの非自明な Hamilton 結び目の最小個数の下からの評価を与えることができる。

定理 5.1. (森下-新國 [20]) $n \geq 7$ のとき、 K_n の線形空間グラフの非自明な Hamilton 結び目で $a_2 > 0$ なるものの最小個数は、次の r_n 以上である ($\lceil \cdot \rceil$ は天井関数):

$$r_n = \left\lceil \frac{(n-5)(n-6)(n-1)! / (2 \cdot 6!)}{\lfloor (n-3)^2(n-4)^2 / 32 \rfloor} \right\rceil.$$

¹² 左の空間グラフは 3 サイクルと 5 サイクルがなす $lk = 2$ の絡み目 [257] \cup [13846] を含むが、右の空間グラフでは、任意の $\lambda \in \Gamma_{3,5}(K_8)$ に対し、その像は実は自明絡み目か Hopf 絡み目である。

r_n の $7 \leq n \leq 16$ における具体的な値は以下の通りである.

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
r_n	1	2	12	92	772	7187	73628	823680	10015889	131436569	...

注意 5.2. K_n の線形とは限らない一般の空間グラフについて, $n = 8$ のときは a_2 が奇数の Hamilton 結び目が少なくとも 3 個存在し (平野 [14]), $n \geq 9$ のときは a_2 が奇数の Hamilton 結び目が少なくとも $(n-1)(n-2) \cdots 9 \cdot 8$ 個存在することが知られている (Foisy [3]). 我々は線形空間グラフの a_2 が正の Hamilton 結び目を考えているので立場は異なるが, $n = 9, 10, 11$ のとき r_n は Foisy の下界よりも大きい. 一方 $n = 8$ のとき, 例 4.5 (3) で見た通り, $r_2 = 2$ よりも良い評価「5」が得られる.¹³ いずれにしても, 定理 5.1 の評価は $n \geq 8$ については最良には程遠いと思われる.

問題 5.3. $n \geq 8$ のとき, K_n の線形空間グラフ全体において, 非自明な Hamilton 結び目 (で $a_2 > 0$ なるもの) の最小個数を決定せよ.

2つ目の応用は, K_n の線形空間グラフの Hamilton 結び目の a_2 の値の最大値である. いま系 4.4 から, K_n の線形空間埋め込み f_r において

$$\max_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} \{a_2(f_r(\gamma))\} \cdot \#\Gamma_n(K_n) \geq \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f_r(\gamma)) \geq \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!}$$

であり, 両辺を $\#\Gamma_n(K_n) = (n-1)!/2$ で割って以下が得られる.¹⁴

定理 5.4. (森下-新國 [21]) $n \geq 6$ のとき, K_n の任意の線形空間埋め込み f_r において,

$$\max_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} \{a_2(f_r(\gamma))\} \geq \frac{(n-5)(n-6)}{6!}.$$

定理 5.4 は, K_n の線形空間グラフは, n が十分大きければ, 任意に大きな a_2 の値を持つ Hamilton 結び目を必ず含むと言っている. これより, 特に次の結果が得られる.

系 5.5. 正の整数 m に対し, $n > (11 + \sqrt{2880m - 2879})/2$ なら, K_n の任意の線形空間グラフ $f_r(K_n)$ は, $a_2 \geq m$ なる Hamilton 結び目を含む.

注意 5.6. 白井-谷山は, K_n の線形とは限らない空間グラフについて, $K_{48 \cdot 2^k}$ の任意の空間グラフは $|a_2| \geq 2^{2k}$ なる結び目を含むこと, また正の整数 m に対し, $n \geq 96\sqrt{m}$ なら, K_n の任意の空間グラフ $f(K_n)$ は $|a_2| \geq m$ なる結び目を含むことを示した [37]. 特に線形空間グラフに限れば, 我々の結果の方がより良い (以下のテーブルを参照).

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
n (白井-谷山 [37])	48	136	167	96	215	236	254	272	288	304	...
n (森下-新國 [21])	7	33	44	52	60	66	72	77	82	87	...

実は, より強く結び目/絡み目 L について, n が十分大きければ, K_n の任意の線形空間グラフは L に同値な結び目/絡み目を含むことが既に知られており (根上 [24]), そのような n の最小値を L の **Ramsey 数** といって $R(L)$ で表す. 例えば $R(2_1^2) = 6$,

¹³更に $K_{3,3,1,1}$ と表される頂点数 8 の完全 4 組グラフの線形空間グラフは必ず $a_2 > 0$ なる Hamilton 結び目を含み (橋本-新國 [12]), これを K_8 の $K_{3,3,1,1}$ に同型な (280 個の) 部分グラフに適用することで, もっと良い評価「8」も得られるが, 恐らくこれも最良ではない.

¹⁴Hamilton 絡み目の lk^2 の値の最大値についても同様の結果が得られる.

$R(3_1) = 7$ である. 正の整数 m に対し, K_n の任意の線形空間グラフが $a_2 \geq m$ なる結び目を含むような n の最小値を $R(m)$ で表すことにすると, $a_2(K) > 0$ なる結び目 K に対し $R(a_2(K))$ は $R(K)$ を下から評価するが, $R(m)$ の決定自体が非常に難しい.

問題 5.7. $m \geq 2$ に対し, $R(m)$ を求めよ.

最後に今後の展望を挙げておく. Conway-Gordon の定理の精密化・一般化について, lk , a_2 に関する関係式としては定理 3.2, 定理 3.6 が決定版であるように思う. 一方, lk , a_2 はそれぞれ次数 1, 2 の有限型不変量 (Vassiliev 不変量) であるが, Hamilton 結び目/絡み目の振る舞いを縛る不変量としては, n が大きくなるとこれらでは不十分で, より高次の有限型不変量による縛りが予想される. そのような「高次の Conway-Gordon 型公式」を見出すのが 1 つの課題である.¹⁵ 例えば Naimi-Pavelescu は, K_9 の一般の空間グラフは 3 成分非分離絡み目を含むとは限らないが, 線形空間グラフは必ず含むことを計算機探索で示している [23], 一般の空間グラフと線形空間グラフとで結び目/絡み目内在性が異なる. その違いが上に述べたような「高次」の公式によって抽出できると面白い. また, §4 で触れたように, 線形空間グラフは分子トポロジーにおける分子化合物のモデルの 1 つであるが, Flapan-Kozai [8] では, 高分子化合物の絡み合いのモデル化の 1 つとして, 立方体内のランダムな n 点を頂点とする K_n のランダム線形空間グラフが研究されており, その方面への我々の結果の然るべき応用も期待される.

参考文献

- [1] C. C. Adams, The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots. Revised reprint of the 1994 original. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2004.
- [2] C. C. Adams, B. M. Brennan, D. L. Greilsheimer and A. K. Woo, Stick numbers and composition of knots and links, *J. Knot Theory Ramifications* **6** (1997), 149–161.
- [3] P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, *New York J. Math.* **13** (2007), 11–16.
- [4] A. F. Brown, Embeddings of graphs in E^3 , Ph. D. Dissertation, Kent State University, 1977.
- [5] J. A. Calvo, Geometric knot spaces and polygonal isotopy, Knots in Hellas '98, Vol. 2 (Delphi), *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 245–267.
- [6] J. H. Conway and C. McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.
- [7] T. Endo and T. Otsuki, Notes on spatial representations of graphs, *Hokkaido Math. J.* **23** (1994), 383–398.
- [8] E. Flapan and K. Kozai, Linking number and writhe in random linear embeddings of graphs, *J. Math. Chem.* **54** (2016), 1117–1133.
- [9] E. Flapan, T. Mattman, B. Mellor, R. Naimi and R. Nikkuni, Recent developments in spatial graph theory, *Knots, links, spatial graphs, and algebraic invariants*, 81–102, *Contemp. Math.*, 689, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2017.
- [10] T. Fleming and B. Mellor, Counting links in complete graphs, *Osaka J. Math.* **46** (2009), 173–201.
- [11] J. Foisy, Corrigendum to: “Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs” by P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, *New York J. Math.* **14** (2008), 285–287.
- [12] H. Hashimoto and R. Nikkuni, Conway-Gordon type theorem for the complete four-partite graph $K_{3,3,1,1}$, *New York J. Math.* **20** (2014), 471–495.
- [13] Y. Hirano, Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, Doctor Thesis, Niigata University, 2010.

¹⁵ 新國-遠田 [27] において, 空間グラフの結び目/絡み目成分の, 次数 3 以下の有限型不変量による縛りが研究されている.

- [14] Y. Hirano, Improved lower bound for the number of knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **19** (2010), 705–708.
- [15] C. Hughes, Linked triangle pairs in a straight edge embedding of K_6 , *Pi Mu Epsilon J.* **12** (2006), 213–218.
- [16] Y. Huh and C. Jeon, Knots and links in linear embeddings of K_6 , *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), 661–671.
- [17] Y. Huh, Knotted Hamiltonian cycles in linear embedding of K_7 into \mathbb{R}^3 , *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), 1250132, 14 pp.
- [18] C. B. Jeon, G. T. Jin, H. J. Lee, S. J. Park, H. J. Huh, J. W. Jung, W. S. Nam and M. S. Sim, Number of knots and links in linear K_7 , slides from the International Workshop on Spatial Graphs (2010). <http://www.f.waseda.jp/taniyama/SG2010/talks/19-7Jeon.pdf>
- [19] A. A. Kazakov and Ph. G. Korablev, Triviality of the Conway-Gordon function ω_2 for spatial complete graphs, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **203** (2014), 490–498.
- [20] H. Morishita and R. Nikkuni, Generalizations of the Conway-Gordon theorems and intrinsic knotting on complete graphs, *J. Math. Soc. Japan*, to appear. (arXiv:math.1807.02805)
- [21] H. Morishita and R. Nikkuni, in preparation.
- [22] T. Motohashi and K. Taniyama, Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in R^3 , *KNOTS '96 (Tokyo)*, 185–200, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1997.
- [23] R. Naimi and E. Pavelescu, Linear embeddings of K_9 are triple linked, *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), 1420001, 9 pp.
- [24] S. Negami, Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **324** (1991), 527–541.
- [25] R. Nikkuni, The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), 387–411.
- [26] R. Nikkuni, A refinement of the Conway-Gordon theorems, *Topology Appl.* **156** (2009), 2782–2794.
- [27] R. Nikkuni and K. Onda, A characterization of knots in a spatial graph II, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), 1133–1154.
- [28] R. Nikkuni and K. Taniyama, Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, *Fund. Math.* **205** (2009), 219–236.
- [29] D. O’Donnol, Knotting and linking in the Petersen family, *Osaka J. Math.* **52** (2015), 1079–1100.
- [30] T. Otsuki, Knots and links in certain spatial complete graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **68** (1996), 23–35.
- [31] M. Polyak and O. Viro, On the Casson knot invariant, Knots in Hellas ’98, Vol. 3 (Delphi), *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 711–738.
- [32] J. L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs and oriented matroids: the trefoil, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999), 149–158.
- [33] J. L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs, knots and the cyclic polytope, *Beiträge Algebra Geom.* **49** (2008), 301–314.
- [34] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Sachs’ linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.
- [35] D. Rolfsen, Knots and links. Mathematics Lecture Series, No. 7. *Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif.*, 1976.
- [36] H. Sachs, On spatial representations of finite graphs, *Finite and infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981)*, 649–662, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, **37**, *North-Holland, Amsterdam*, 1984.
- [37] M. Shirai and K. Taniyama, A large complete graph in a space contains a link with large link invariant, *J. Knot Theory Ramifications* **12** (2003), 915–919.
- [38] M. Suzuki, Classification of the spatial-graph homology classes of a complete graph, Master thesis, Tokyo Denki University, 1996 (in Japanese).
- [39] K. Taniyama, Link homotopy invariants of graphs in \mathbf{R}^3 , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **7** (1994), 129–144.
- [40] K. Taniyama, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topology Appl.* **65** (1995), 205–228.