On the topological regularity of spaces with an upper curvature bound

永野 幸一 (筑波大数理物質)*

概　要

本稿では, Lytchak 氏 (ケルン大学) と筆者による曲率が上に有界な距離空間に対する一連の共同研究 [30, 31] のうち, 特に幾何学的トポロジーの観点から得られた位相正則性に関する論文 [31] 中の主な研究成果について報告する.

1. はじめに

A. D. Alexandrov は 1950 年代に測地三角形の比較条件によって曲率が片側に有界な距離空間の概念を導入した. 彼の研究を祖とする Alexandrov 幾何学は, 1980 年代の Gromov の研究を契機として脚光を浴びることになる. 曲率が下に有界な距離空間は, 単に Alexandrov 空間と呼ばれ, 距離空間族に対する Gromov のプレコンパクト性定理により大域 Riemann 幾何学において大事な研究対象になっている. 一方で, 曲率が上に有界な距離空間は, 特別な対象が CAT(κ) 空間と呼ばれ, Gromov の双曲群に関連する幾何学的群論において Gromov 双曲距離空間とともに基本的な役割を担っている.

以下では, n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 内の $(n-1)$ 次元標準単位球面を $\mathbb{S}^{n-1}$ で表す. 曲率が片側に有界な距離空間 X に対して, 点 $x \in X$ における方向空間を $\Sigma_x X$ で表し, その Euclid 錐として定義される接空間を $T_x X$ で表す. また接空間 $T_x X$ の頂点を o_x で表す. もし X が Riemann 多様体であれば, 方向空間 $\Sigma_x X$ は単位接球面に, 接空間 $T_x X$ は通常の接空間に, 頂点 o_x は通常の接空間の原点に相当する.

次は Lytchak と筆者 [31] の曲率が上に有界な空間に対する局所位相正則性定理である.

定理 1.1. ([31]) 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間 X に対し以下は同値である.

(1) X は n 次元位相多様体である.
(2) 任意の点 $x \in X$ における方向空間 $\Sigma_x X$ は $\mathbb{S}^{n-1}$ にホモトピー同値である.
(3) 任意の点 $x \in X$ における接空間 $T_x X$ は $\mathbb{R}^n$ に同相である.

注意 1.1. 定理 1.1 は次のように換言できる ([31]). 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間 X に対し以下は同値である. (1) X は位相多様体である. (2) 非可縮な位相空間 Σ が存在して, 各点 $x \in X$ において方向空間 $\Sigma_x X$ は Σ にホモトピー同値である. (3) 有限次元位相空間 T が存在して, 各点 $x \in X$ において接空間 $T_x X$ は T に同相である.

定理 1.1 は未解決であった A. D. Alexandrov の問題 ([1] を参照) に完答する. 定理 1.1 において, X が n 次元位相多様体であるとする. このとき, 各点における方向空間は $\mathbb{S}^{n-1}$ と同じホモロジー群を持つ $(n-1)$ 次元ホモロジー多様体である (命題 3.5 を参照). もし $n \geq 5$ であれば, 各点での方向空間が $(n-1)$ 次元位相多様体であるとは限らない. 実際, そのような性質を満たす例は, Edwards の二重懸垂定理 ([17], [11]) により, $(n-2)$ 次元 Poincaré ホモロジー球面の二重懸垂として構成される ([1], [4], [21], 例 3.1 を参照). 他方 $n \leq 4$ であれば, 各点における方向空間は $\mathbb{S}^{n-1}$ に同相である (定理 6.2 を参照).

部分的に科研費 (課題番号:26610012, 21740036, 18740023) と学振海外特別研究員制度の助成を受けた.
* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数学域
e-mail: nagano@math.tsukuba.ac.jp

次は曲率が上に有界なホモロジー多様体に対する位相正則性定理である.

定理 1.2. ([31]) 曲率が上に有界な任意の n 次元ホモロジー多様体 X に対し, X の局所有限な部分集合 E が存在して, 差集合 $X - E$ は n 次元位相多様体である.

定理1.2は未解決であったQuinnの問題[41]に肯定的な解答を与えている.

以下では, 距離空間の点 p を中心とする半径 r の開距離球体を $U_r(p)$, 閉距離球体を $B_r(p)$, 距離球面 $B_r(p) - U_r(p)$ を $\partial B_r(p)$ で表すことにする.

曲率が下に有界な任意の有限次元Alexandrov空間に対して定理1.1や定理1.2の主張が成り立つことは, Wu ([50]) が示したように, Perelmanの局所錐性定理 ([36], [37]) から導かれる. Perelmanの局所錐性定理の主張は次の通りである ([26] も参照). 曲率が下に有界な有限次元Alexandrov空間 X の点 $x \in X$ を与えると, 十分小さな任意の $r \in (0, \infty)$ に対して, 同相写像 $h\colon B_r(x) \to B_1(o_x)$ が存在して, $h(\partial B_r(x)) = \Sigma_x X$ かつ $h(x) = o_x$ を満たし, 制限写像 $h|\partial B_r(x)\colon \partial B_r(x) \to \Sigma_x X$ も同相である. ここで, 接空間 $T_x X$ 内の距離球面 $\partial B_1(o_x)$ を方向空間 $\Sigma_x X$ と同一視している.

曲率が上に有界な場合, 距離空間が局所コンパクトで局所測地的完備であり, 2次元であっても, 局所錐性定理が成り立たないことが, Kleiner [28] によって指摘された (反例の具体的な構成方法は [33] を参照). 定理1.1や定理1.2を証明するためには, Perelmanの論文 [36], [37] とは異なるアイデアが必要である.

曲率が上に有界なホモロジー多様体に対しては, 次の局所錐性定理が成り立つ. なお, $n = 5$ の場合の証明はSteven Ferry氏 (ラトガース大学) の援助を受けている (注意6.1).

定理 1.3. ([31]) 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体 X について, 任意の点 $x \in X$ に対して, X における x の開近傍 U_x と, $\mathbb{S}^{n-1}$ と同じホモロジー群を持つコンパクト $(n-1)$ 次元位相多様体 M_x が存在して, U_x は M_x 上の開錐 $C(M_x)$ に同相である.

注意 1.2. 論文 [31] では, 次の主張も証明している. すなわち, 定理1.3において, もし $n \le 4$ であれば, 任意の点 $x \in X$ について, 十分小さなすべての $r \in (0, D_\kappa)$ に対して, 距離球面 $\partial B_r(x)$ は $\mathbb{S}^{n-1}$ と同じホモロジー群を持つコンパクト $(n-1)$ 次元位相多様体であり, 開距離球体 $U_r(x)$ は $\partial B_r(x)$ 上の開錐 $C(\partial B_r(x))$ に同相である.

曲率が上に有界な空間に対する局所位相正則性定理1.1は, 次に述べるような曲率が上に有界なRiemann多様体列の非崩壊極限の位相正則性と位相安定性を導く.

定理 1.4. ([31]) CAT(κ) である点付き n 次元Riemann多様体列 (M_i, p_i) が点付き固有距離空間 X に, 点付きGromov–Hausdorff位相で収束しているとする. このとき, X は n 次元位相多様体であり, X 内の任意の反復方向空間は球面に同相である. すなわち, 各 $m \in \{1, \dots, n\}$ について任意の $x \in X, \xi_1 \in \Sigma_x X, \dots, \xi_m \in \Sigma_{\xi_{m-1}} \cdots \Sigma_{\xi_1} \Sigma_x X$ に対し, 反復方向空間 $\Sigma_{\xi_m} \cdots \Sigma_{\xi_1} \Sigma_x X$ は $\mathbb{S}^{n-m-1}$ に同相である. 加えて, もし X がコンパクトであれば, 十分大の任意の i に対して M_i は X に同相である.

断面曲率が下に有界な非崩壊Riemann多様体列に対し, 定理1.4の前半の位相正則性はV. Kapopvitch [25] によって示されている. 定理1.4の後半の位相安定性はPerelmanの位相安定性定理 ([37]) の帰結である. Perelmanの位相安定性定理の主張は次の通りである ([26] も参照). 曲率が κ 以上の n 次元Alexandrov空間 X に対して, ある $\epsilon \in (0, \infty)$ が存在して, もし曲率が κ 以上の n 次元Alexandrov空間 Y と X の間のGromov–Hausdorff距離が ϵ 未満であれば, X と Y は同相である.

一般に, 曲率が上に有界な距離空間の方向空間はCAT(1)空間である. よって, CAT(1)空間に対する球面定理と定理1.1を組み合わせると, 様々な位相多様体認識問題の解決に繋がる. Lytchakと筆者[31]は定理1.1を用いてCAT(1)空間に対する容量球面定理や体積球面定理を示している. さらに, 筆者自身[34]により後続研究が行われている.

本稿では, 定理1.1–1.4の証明の概略について解説する. 任意の有限単体的複体の幾何学的実現はCAT(1)距離を有する([3]). また5次元以上の可縮な任意のコンパクト境界付きPL多様体の内部はCAT(−1)距離を有する([2]). これはKirby–Siebenmannの定理([27])より6次元以上であれば位相多様体に対しても正しい. 幾何学的トポロジーの観点から曲率が上に有界な距離空間の位相構造を研究することは興味深いといえよう.

2. 曲率が上に有界な距離空間の基本性質

曲率が上に有界な距離空間に関する参考文献として[6], [8], [10]を挙げておく.

2.1. 曲率が上に有界な距離空間

距離空間内の**最短測地線**とは区間からの等長的埋め込み曲線のことであり, **測地線**とは局所最短測地線のことである. 正の拡張実数$r \in (0, \infty]$に対して, 距離空間がr-**測地的である**とは, 距離がr未満の任意の2点が最短測地線で結ばれるときにいう. 距離空間が**測地的である**とは∞-測地的であるときにいう. 局所測地的距離空間が**局所測地的完備である**とは, 端点を持つすべての測地線がその端点を超えて延長できるときにいう. 距離空間が**固有である**とは任意の閉距離球体がコンパクトであるときにいう. 局所測地的距離空間が局所コンパクトで局所完備であれば局所固有である.

実数$\kappa \in \mathbb{R}$に対し, 定曲率κの単連結完備曲面をM_κ^2で表し, その直径をD_κとおく. 完備距離空間が$\mathrm{CAT}(\kappa)$であるとは, D_κ-測地的であり, かつ周長が$2D_\kappa$未満の任意の測地三角形がM_κ^2内の同じ辺長を持つ比較三角形と比べて厚くないときにいう.

距離空間Xが**曲率が上に有界である**とは, ある$\kappa \in \mathbb{R}$が存在して, 任意の点$x \in X$に対してある$r \in (0, D_\kappa/2)$が存在して部分距離空間$B_r(x)$が$\mathrm{CAT}(\kappa)$であるときにいう. この場合, Xの曲率はκ以下であるという.

曲率が上に有界である距離空間はANR (絶対近傍レトラクト)である([35], [29]). 実際, 曲率が上に有界である距離空間は局所凸かつ局所可縮である. すなわち, 任意の$\mathrm{CAT}(\kappa)$空間の点xについて, 各$r \in (0, D_\kappa/2]$に対して$B_r(x)$は凸である. 各$r \in [0, D_\kappa)$に対して, 点xと任意の点$y \in B_r(x)$は唯一的に最短測地線で結ぶことができる. 特に, $B_r(x)$は点xから発進する最短測地線に沿って$B_r(x)$の中で点xに可縮である.

例 2.1. 断面曲率が一様にκ以下である任意の完備Riemann多様体は, 曲率がκ以下の距離空間である. 完備Riemann多様体が$\mathrm{CAT}(\kappa)$であることと, 断面曲率が一様にκ以下であり, かつ単射半径が一様にD_κ以上であることは同値である.

例 2.2. 距離空間X上のEuclid錐$C(X)$はEuclid距離を備えた開錐$[0, \infty) \times X / \{0\} \times X$として定まる. 距離空間$X$上のEuclid錐$C(X)$が$\mathrm{CAT}(0)$であることと, Xが$\mathrm{CAT}(1)$であることは同値である.

例 2.3. 距離空間X, Yの球面的結$X * Y$は球面的距離を備えた結$[0, \pi/2] \times X \times Y / \sim$として定まる. 距離空間$X, Y$の球面的結$X * Y$が$\mathrm{CAT}(1)$であることと, XとYがともに$\mathrm{CAT}(1)$であることは同値である. なお, $\mathbb{S}^{m-1} * \mathbb{S}^{n-1}$は$\mathbb{S}^{m+n-1}$に等長的である. 距離空間$Z$に対する球面的結$\mathbb{S}^0 * Z$は$Z$上の球面的懸垂に他ならない.

2.2. 曲率が上に有界な距離空間における方向空間, 接空間

曲率が上に有界である距離空間 X の点 $x \in X$ に対して, 点 x から発進する非自明な最短測地線全体の集合を $\Sigma'_x X$ で表す. 点 x における角度 $\angle_x$ は $\Sigma'_x X$ 上の擬距離となる. ここで, $\Sigma'_x X$ の 2 つの元 $\gamma_i \colon [0, a_i] \to X$, $i \in \{1, 2\}$ の間の角度 $\angle_x(\gamma_1, \gamma_2)$ は,

$$\angle_x(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t \to 0} 2 \sin^{-1} \frac{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{2t} = \lim_{t_1, t_2 \to 0} \cos^{-1} \frac{t_1^2 + t_2^2 - d(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2))^2}{2 t_1 t_2}$$

を満たす. ただし, d は X 上の距離である. 点 x における**方向空間** $\Sigma_x X$ は商距離空間 $\Sigma'_x X / \angle_x = 0$ の完備化として定義される. 接空間 $T_x X$ は方向空間 $\Sigma_x X$ 上の Euclid 錐 $C(\Sigma_x X)$ として定義される. 任意の方向空間は CAT(1) であり, 接空間は CAT(0) である.

曲率が上に有界な距離空間において, 十分小さな穴あき距離球体は方向空間にホモトピー同値である. 実際, CAT(κ) 空間の点 x において, すべての $r \in (0, D_\kappa)$ に対して, $U_r(x) - \{x\}$ や $B_r(x) - \{x\}$ は $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である ([29]).

本稿を通して, 距離空間の次元 dim は位相次元 (被覆次元) を表す. 曲率が上に有界な可分距離空間 X に対して, $\dim X = 1 + \sup_{x \in X} \dim \Sigma_x X$ が成り立つ ([28]). さらに, もし $\dim X = n$ であれば, ある点 $x \in X$ が存在し $H_{n-1}(\Sigma_x X)$ が自明な群ではない ([28]).

2.3. 曲率が上に有界な測地的完備距離空間

曲率が上に有界であり局所コンパクトで局所測地的完備な可分距離空間のことを GCBA 空間と呼ぶ. さらに, 曲率が κ 以下であるとき, GCBA(κ) 空間と呼ぶ. もし X が GCBA 空間であれば, 各点 $x \in X$ における方向空間 $\Sigma_x X$ や接空間 $T_x X$ は GCBA 空間である. また, 方向空間 $\Sigma_x X$ はコンパクトであり, 点付き接空間 $(T_x X, o_x)$ は点付き拡大空間 (rX, x) を $r \to \infty$ としたときの点付き Gromov–Hausdorff 極限に等長的である.

位相空間 X の点 $x \in X$ が**多様体点**であるとは, ある n について点 x が X において $\mathbb{R}^n$ と同相な開近傍を持つときにいう. この場合 x を n **次元多様体点**と呼ぶ. 位相空間 X 内の非多様体点全体からなる集合を $S(X)$ で表し**位相的特異点集合**と呼ぶ.

Lytchak と筆者は論文 [31] に先行する論文 [30] において GCBA 空間の幾何構造の基盤的な研究を行った. 論文 [30] 内の位相的な研究成果を幾つか述べる. 任意の GCBA 空間 X に対して, 以下が成り立つ. (1) $\dim X$ は局所的に有限である. (2) $X - S(X)$ は稠密な開部分集合である. (3) X において, 接空間が Eulclid 空間と等長的な点全体からなる集合は稠密である. (4) X が n 次元であれば, $\dim S(X) \le n - 1$ である.

次は Lytchak と筆者 [30] による局所ホモトピー安定性定理である.

定理 2.1. ([30]) 任意の GCBA(κ) 空間 X の点 $x \in X$ に対して, ある $r_x \in (0, D_\kappa/2)$ が存在して, すべての $r \in (0, r_x)$ について, $B_r(x)$ はコンパクトかつ CAT(κ) であり, $\partial B_r(x)$ は $\Sigma_x X$ にホモトピー同値である. さらに, GCBA(κ) 空間列 (X_i) の各要素 X_i の点 $x_i \in X_i$ に対して $B_r(x_i)$ がコンパクトかつ CAT(κ) であり, $(B_r(x_i), x_i)$ が $(B_r(x), x)$ に点付き Gromov–Hausdorff 位相で収束しているとすると, 十分大きな i に対して $\partial B_r(x_i)$ は $\partial B_r(x)$ にホモトピー同値である.

3. 曲率が上に有界なホモロジー多様体

本稿では, H_* で $\mathbb{Z}$ 係数特異ホモロジー群を表す.

3.1. ホモロジー多様体に対する多様体認識定理

ホモロジー多様体に関する多様体分解理論の話題について手短に述べる ([14] を参照).

局所コンパクト可分距離空間 M が n **次元ホモロジー多様体**であるとは，任意の点 $p \in M$ における局所ホモロジー群 $H_*(M, M - \{p\})$ が $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ に同型であるときにいう．有限次元 ANR である n 次元ホモロジー多様体を n **次元一般多様体**と呼ぶ．任意の n 次元一般多様体の次元は n に等しい．もし $n \leq 2$ であれば，Moore の定理によって，任意の n 次元一般多様体は位相多様体である ([49] を参照).

位相空間の間の全射固有連続写像 $\varphi\colon X \to Y$ が**胞体的である**とは，任意の点 $y \in Y$ のファイバー $\varphi^{-1}(\{y\})$ が X におけるすべての開近傍の中で可縮であるときにいう．また，n 次元一般多様体 M, N の間の胞体的写像 $\varphi\colon N \to M$ が**レゾリューション**であるとは，N が n 次元位相多様体であるときにいう．加えて，n 次元一般多様体 M が**レゾリューションを持つ**とは，ある n 次元位相多様体 N から M へのレゾリューションが存在するときにいう．Quinn のレゾリューション存在定理 ([39], [40]) により次が成り立つ．

定理 3.1. ([39], [40]) $n \geq 5$ とする．連結な n 次元一般化多様体 M は，n 次元多様体点を許容すれば，レゾリューションを持つ．

以降，$\mathbb{B}^2$ で $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次元標準単位閉円板を表す．距離空間 X が **DDP(円板分離性)** を満たすとは，任意の連続写像 $\varphi_1\colon \mathbb{B}^2 \to X$, $\varphi_2\colon \mathbb{B}^2 \to X$ と任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ に対し，連続写像 $\tilde{\varphi}_1\colon \mathbb{B}^2 \to X$, $\tilde{\varphi}_2\colon \mathbb{B}^2 \to X$ が存在して，各 $i \in \{1, 2\}$ について $d(\varphi_i, \tilde{\varphi}_i) < \epsilon$ であり，$\tilde{\varphi}_1(\mathbb{B}^2) \cap \tilde{\varphi}_2(\mathbb{B}^2)$ が空集合であるときにいう．ここで，d は一様距離である．

Edwards の DDP レゾリューション近似定理 ([16]) と Quinn のレゾリューション存在定理 ([39], [40]) を合わせると，次の Edwards–Quinn の DDP 多様体認識定理が得られる．

定理 3.2. ([16], [39], [40]) $n \geq 5$ とする．連結な n 次元一般多様体 M が n 次元位相多様体であることと，M が n 次元多様体点を許容し，かつ DDP を満たすことは同値である．

位相空間 X の部分集合 K が X **において 1-LCC(局所余単連結) である**とは，次が成り立つときにいう．すなわち，任意の点 $p \in K$ と，X における p の任意の開近傍 U に対して，p のある開近傍 V が存在して，すべての連続写像 $\sigma\colon \mathbb{S}^1 \to V - K$ に対して，ある連続写像 $\varphi\colon \mathbb{B}^2 \to U - K$ が存在して $\varphi|\mathbb{S}^1 = \sigma$ を満たす．

次は Cannon–Bryant–Lacher による 1-LCC 収縮定理 ([12]) である．

定理 3.3. ([12]) M を n 次元一般多様体とする．もし $S(M)$ が 1-LCC であり，$2m+3 \leq n$ を満たす m について $\dim S(M) \leq m$ であれば，M は n 次元位相多様体である．

注意 3.1. Cannon–Bryant–Lacher の 1-LCC 収縮定理 3.3 は，4 次元一般多様体の場合に Bestvina–Daverman–Venema–Walsh ([5]) によって改良されている．

3.2. 曲率が上に有界なホモロジー多様体の基本性質

一般に，曲率が上に有界な距離空間 X は ANR であり ([35], [29])，X が局所コンパクトで局所測地的完備であれば X は局所的に有限次元である ([30])．また，X がホモロジー多様体であれば，X は局所測地的完備である (一般多様体の場合 [47]，位相多様体の場合 [6] を参照)．よって，曲率が上に有界なホモロジー多様体は GCBA 一般多様体である．

P. Thurston ([47]) は低次元幾何学的トポロジーの理論を用いて次を示した．

定理 3.4. ([47]) 曲率が上に有界な 3 次元一般多様体は 3 次元位相多様体である．

次の命題は，Lytchak と筆者 [31] により示された曲率が上に有界な距離空間に対するホモロジー多様体認識命題である．

命題 3.5. ([31]) 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間Xに対し以下は同値である.

(1) Xはn次元ホモロジー多様体である.

(2) 各点$x \in X$に対して$H_*(\Sigma_x X) = H_*(\mathbb{S}^{n-1})$を満たす.

この場合, 各点$x \in X$における方向空間$\Sigma_x X$は$(n-1)$次元ホモロジー多様体であり, 接空間$T_x X$はn次元ホモロジー多様体である.

Edwardsの二重懸垂定理([17], [11])により, $n \geq 5$とするとき, 任意の$(n-2)$次元ポアンカレホモロジー球面Σ^{n-2}の二重懸垂$(\mathbb{S}^0 *(\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2}))$は, n次元位相多様体である.

例 3.1. ([1], [4], [21]) $n \geq 5$とする. 非単連結$(n-2)$次元コンパクト正定曲率ホモロジー球面Riemann多様体(Poincaréホモロジー球面) Σ^{n-2}を与える. 適切に拡大してΣ^{n-2}はCAT(1)であるとして良い. 球面的懸垂$\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2}$はCAT(1)であり$(n-1)$次元ホモロジー多様体である. 懸垂点$\xi_\pm \in \mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2}$における方向空間$\Sigma_{\xi_\pm}(\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2})$は$\Sigma^{n-2}$に等長的である. 懸垂点$\xi_\pm$は多様体点ではない. 球面的二重懸垂$\mathbb{S}^0 *(\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2})$はCAT(1)空間である. 懸垂点$x_\pm \in \mathbb{S}^0 *(\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2})$における方向空間$\Sigma_{x_\pm}(\mathbb{S}^0 *(\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2}))$は$\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2}$に等長的である. 特に, $\mathbb{S}^{n-1}$と同相ではないがホモトピー同値である. Edwardsの二重懸垂定理([17], [11])より, $\mathbb{S}^0 *(\mathbb{S}^0 *\Sigma^{n-2})$は$n$次元位相多様体である.

4. ホモトピー安定性とファイブレーション

4.1. ホモトピー安定性と同相写像近似定理

正の実数$\epsilon \in (0, \infty)$に対し, 距離空間の間の連続写像$f\colon X \to Y$が**ϵ-ホモトピー同値であるとは**, ある連続写像$g\colon Y \to X$が存在して以下が成り立つときにいう. 連続写像$g \circ f$と恒等写像id_Xを結ぶホモトピー$\Phi\colon X \times [0,1] \to X$と, $f \circ g$とid_Yを結ぶホモトピー$\Psi\colon Y \times [0,1] \to Y$が存在して, 次の(1), (2)を満たす. (1) 各$x \in X$に対して, 曲線$[0,1] \ni t \mapsto (f \circ \Phi_t)(x) \in Y$の像の直径が$Y$の中で$\epsilon$未満である. (2) 各$y \in Y$に対して, 曲線$[0,1] \ni t \mapsto \Psi_t(x) \in Y$の像の直径が$Y$の中で$\epsilon$未満である. 距離空間$X, Y$が**$\epsilon$-ホモトピー同値**であるとは$\epsilon$-ホモトピー同値写像$f\colon X \to Y$が存在するときにいう.

関数$\rho\colon [0, r_0) \to [0, \infty)$が**可縮関数**であるとは, $\rho(0) = 0$かつ$\rho \geq \mathrm{id}_{[0,r_0)}$を満たし, 点0において連続であるときにいう. 可縮関数ρに対して, 距離空間XがLGC(ρ)である(**局所幾何学的可縮である**)とは, 任意の点$x \in X$と正の実数$r \in (0, \infty)$に対して開距離球体$U_r(x)$が同心球体$U_{\rho(r)}(x)$の中で可縮であるときにいう.

次はPetersen ([38])によるLGC(ρ)空間に対するホモトピー安定性定理である.

定理 4.1. 可縮関数ρと非負整数nを与える. 任意の$\epsilon \in (0, \infty)$に対して, ある$\delta \in (0, \infty)$が存在して, n次元以下である2つのLGC(ρ)空間X, Yが$d_{GH}(X, Y) < \delta$を満たせば, それらはϵ-ホモトピー同値である. ただし, d_{GH}はGromov–Hausdorff距離である.

次の定理は, 制御ホモトピーを同相写像で近似するα-近似定理の帰結である. なお, α-近似定理は, $n \geq 5$の場合にChapman–Ferry ([13]), $n = 4$の場合にFerry–Weinberger ([19]), $n = 2, 3$の場合にJakobsche ([23, 24]) によって確立されている. ただし, $n = 3$の場合のJakobsche ([24])の主張はPoincaré予想の解決(Perelman)を必要としていた.

定理 4.2. コンパクト距離空間Mがn次元位相多様体であるとき, すべての$\alpha \in (0, \infty)$に対して, ある$\epsilon \in (0, \infty)$が存在して, 任意のコンパクトn次元位相多様体Nからのϵ-ホモトピー同値写像$f\colon N \to M$に対して, ある同相写像$\tilde{f}\colon N \to M$が存在して$d(f, \tilde{f}) < \alpha$が成り立つ. ただし, dは一様距離である.

4.2. ファイブレーションとファイバー束

位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が (Hurewicz) **ファイブレーション**であるとは, f が任意の位相空間に対してホモトピー持ち上げ性質を満たすときにいう.

位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が**局所的に一様可縮なファイバーを持つ**とは, 任意の点 $x \in X$ と, X 内の x の任意の開近傍 U に対して, X 内の x の開近傍 V が存在して, $V \subset U$ であり, 次の性質を満たすときにいう. すなわち, もし点 $y \in Y$ のファイバー $f^{-1}(\{y\})$ が V と交われば, 共通部分 $f^{-1}(\{y\}) \cap V$ は $f^{-1}(\{y\}) \cap U$ の中で可縮である.

次のファイブレーション定理は Michael ([32]) と Unger ([48]) の研究から導かれる.

定理 4.3. 局所コンパクトな有限次元距離空間 X, Y について, 全射連続開写像 $f\colon X \to Y$ が局所的に一様可縮なファイバーを持ち, 任意の点 $y \in Y$ に対してファイバー $f^{-1}(y)$ がそれ自身の中で可縮であるとする. このとき f はファイブレーションである.

ファイブレーションはファイバー束になり得る. 先に述べた α-近似定理 4.2 と Dyer-Hamstrom ([15]) のファイバー束認識理論を合わせると, 次を得る ([18], [42] を参照).

定理 4.4. 局所コンパクト有限次元 ANR 距離空間 X, Y の間のファイブレーション $f\colon X \to Y$ について, 任意の点 $y \in Y$ におけるファイバー $f^{-1}(\{y\})$ がコンパクトな n 次元位相多様体であれば, f は局所的に自明なファイバー束である.

次は Ferry の仕事 ([18]) の変種版であり, Perelman による Poincaré 予想の解決を取り入れた主張である.

定理 4.5. 局所コンパクト有限次元 ANR 距離空間 X から開区間 I へのファイブレーション $f\colon X \to I$ について, 任意の点 $t \in I$ におけるファイバー $f^{-1}(\{t\})$ が n 次元位相多様体であれば, X は $(n+1)$ 次元位相多様体である.

5. 曲率が上に有界な距離空間における伸長器と伸長写像

Lytchak と筆者は論文 [30] において GCBA 空間に対する伸長器と伸長写像の概念を導入した. 元々これらに対応する同様の概念は, 曲率が下に有界な Alexandrov 空間の幾何学において基本的な役割を果たしている ([9]). 実際, Perelman ([36], [37]) は曲率が下に有界な有限次元 Alexandrov 空間における伸長写像が局所的に自明なファイバー束であることを示し, 先に述べた局所錐性定理を証明した.

GCBA(κ) 空間 X 内の開距離球体 $U_r(x)$ が**微小**であるとは, $r < D_\kappa/100$ を満たし, 閉距離球体 $B_{10r}(x)$ がコンパクト CAT(κ) 空間であるときにいう. 点 x とは異なる 2 点 $y, z \in B_{10r}(x)$ に対して, 点 x と点 y を結ぶ最短測地線と, 点 x と点 z を結ぶ最短測地線の間の点 x における角度を $\angle_x(y,z)$ で表す. なお, 任意の GCBA(κ) 空間内の任意の点は微小開距離球体を持つことに注意する.

正の実数 $\delta \in (0,\infty)$ を与える. GCBA(κ) 空間 X 内の微小開距離球体 $U_{r_0}(x_0)$ の点 $x \in U_{r_0}(x_0)$ に対して, $B_{10r_0}(x_0) - \{x\}$ 内の k 個の点の組 $(p_1,\dots,p_k)$ が**点 x における (k,δ)-伸長器**であるとは, $B_{10r_0}(x_0) - \{x\}$ 内に別の k 個の点の組 $(q_1,\dots,q_k)$ が存在して以下が成り立つときにいう. (1) 各 $i \in \{1,\dots,k\}$ について, 任意の $y \in B_{10r_0}(x_0) - \{x\}$ に対して $\angle_x(p_i,y) + \angle_x(y,q_i) < \pi + \delta$ を満たす. (2) 相異なる $i, j \in \{1,\dots,k\}$ について, $\angle_x(p_i,p_j) < \pi/2 + \delta$, $\angle_x(p_i,q_j) < \pi/2 + \delta$, $\angle_x(q_i,q_j) < \pi/2 + \delta$ を満たす. また, $U_{r_0}(x_0)$ の部分集合 W に対して, $B_{10r_0}(x_0)$ 内の k 個の点の組 $(p_1,\dots,p_k)$ が **W における (k,δ)-伸長器**であるとは, 組 $(p_1,\dots,p_k)$ が各点 $x \in W$ における (k,δ)-伸長器であるときにいう.

微小開距離球体 $U_{r_0}(x_0)$ 内の開集合 U を定義域とする写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ が (k,δ)-**伸長写像**であるとは, U における (k,δ)-伸長器 $(p_1,\ldots,p_k)$ が存在して $f = (d_{p_1},\ldots,d_{p_k})$ を満たすときにいう. ここで, $d_{p_1},\ldots,d_{p_k}$ はそれぞれ $p_1,\ldots,p_k$ からの距離関数を表す.

GCBA(κ) 空間 X 内の (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ について, 定義域 U の点 $x \in U$ のうち次の性質を満たす点全体の集合を $U_{k+1,12\delta}$ で表す. すなわち, ある点 $p \in X$ と U 内の x の開近傍 U_x が存在して $f^+ = (f, d_p)\colon U_x \to \mathbb{R}^{k+1}$ が $(k+1,12\delta)$-伸長写像である. また, f のファイバー Π に対して, $E(\Pi) = \Pi - U_{k+1,12\delta}$ とおき, Π の**例外点集合**と呼ぶ.

GCBA(κ) 空間 X 内の (k,δ)-伸長写像の位相的な性質は次の通りである ([30]).

(1) 任意の $\delta \in (0,\infty)$ と任意の点 $x \in X$ に対して, ある十分小さな $r \in (0,\infty)$ が存在して, $d_x\colon U_r(x) - \{x\} \to (0,r)$ は $(1,\delta)$-伸長写像である.
(2) (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ について, 任意の点 $x \in U$ に対して, 十分小さな $r \in (0,\infty)$ と, U に含まれる $(U_r(x) - \{x\}) \cap f^{-1}(f(x))$ の開近傍 V が存在して, $f^+ = (f, d_x)\colon V \to \mathbb{R}^{k+1}$ は $(k+1,12\delta)$-伸長写像であり, 特に $V \subset U_{k+1,12\delta}$ である.
(3) (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ の任意のファイバー Π に対して $E(\Pi)$ は有限である.
(4) $20k\delta < 1$ を満たすとき, 任意の (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ は開写像であり, U の任意のコンパクト部分集合 K に対し, ある $r_0 \in (0,\infty)$ が存在し, すべての $r \in (0,r_0)$ と $x \in K$ に対し, 共通部分 $U_r(x) \cap f^{-1}(f(x))$ はそれ自身の中で x に可縮である.
(5) もし $\dim X = n$ であり, δ が十分小さければ, 任意の (n,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ は双 Lipschitz 埋め込みである. さらに, X は $(n+1,\delta)$-伸長写像を許容しない.

便宜上, 任意の $\delta \in (0,\infty)$ に対して, GCBA(κ) 空間 X の開集合 U からの定値写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^0$ を $(0,\delta)$-伸長写像と呼ぶ. 以下では, 非負整数全体の集合を $\mathbb{N}_0$ で表す.

上述の GCBA(κ) 空間 X 内の (k,δ)-伸長写像の位相的な性質 ([30]) と, ファイブレーション定理 4.3 などの幾何学的トポロジーの理論を用いると次を導くことができる.

定理 5.1. ([31]) すべての $k \in \mathbb{N}_0$ および $\delta \in (0, 1/20k)$ に対して, 任意の GCBA(κ) 空間の開集合 U を定義域とする (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ は局所的にファイブレーションである. より詳しくは, 任意の $x \in U$ に対して, ある $r_x \in (0,\infty)$ が存在して $B_{r_x}(x) \subset U$ を満たし, すべての $r \in (0, r_x)$ について制限写像 $f|B_r(x)\colon B_r(x) \to f(B_r(x))$ は各々のファイバーが可縮なファイブレーションである.

加えて, Raymond ([42]) の一般多様体上のファイブレーションの研究により次を得る.

定理 5.2. ([31]) すべての $n \in \mathbb{N}_0$ および $\delta \in (0, 1/20n)$ と $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ に対して, 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ の空でない任意のファイバーは $(n-k)$ 次元一般多様体である.

6. 曲率が上に有界な距離空間の位相正則性

6.1. ホモロジー多様体に対する位相正則性

曲率が上に有界なホモロジー多様体に対する位相正則性定理 1.2 を得るために, 次に述べる伸長写像のファイバーに対する位相正則性定理を示す.

定理 6.1. ([31]) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, ある $\delta \in (0,\infty)$ が存在して以下が成り立つ. 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k,δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ の任意のファイバー Π に対して, Π の例外点集合 $E(\Pi)$ は有限であり, $\Pi - E(\Pi)$ は $(n-k)$ 次元位相多様体である. 加えて, もし $n - k \leq 3$ であるならば, Π は $(n-k)$ 次元位相多様体である.

証明の概略. ($n-k$に関する帰納法) 任意の$n \in \mathbb{N}_0$に対して, 十分小さく$\delta \in (0,\infty)$をとり, 曲率が上に有界なn次元ホモロジー多様体の開集合Uを定義域とする(k,δ)-伸長写像$f\colon U \to \mathbb{R}^k$を与える. 伸長写像の性質より, 空でない任意の$f$のファイバー$\Pi$の例外点集合$E(\Pi)$は有限である. 定理5.2より$\Pi$は$(n-k)$次元一般多様体である.

(I) $n-k \leq 2$とする. このとき, Mooreの定理よりΠは2次元位相多様体である.

(II) $n-k=3$とする. 任意の$p \in \Pi$を与える. このとき, 十分小さな任意の$r \in (0,\infty)$に対して$(k+1, 12\delta)$-伸長写像$f^+ = (f, d_p)\colon U_r(p) - \{p\} \to \mathbb{R}^{k+1}$が存在する. 定理5.1と(I)より, f^+は各ファイバーが可縮な2次元位相多様体であるファイブレーションである. よって, 写像$d_p\colon (U_r(p)-\{p\}) \cap \Pi \to (0,r)$は各ファイバーがコンパクトな2次元位相多様体であるファイブレーションであり, 定理4.4より局所的に自明なファイバー束である. 特に, $(U_r(p)-\{p\}) \cap \Pi$は3次元位相多様体である. この場合, $U_r(p) \cap \Pi$が$\mathbb{R}^3$に同相であることがわかる. したがって, Πは3次元位相多様体である.

(III) $n-k=4$とする. 任意の$x \in \Pi - E(\Pi)$に対して, xのある開近傍U_x上で定義された$(k+1, 12\delta)$-伸長写像$f^+ = (f, d_p)\colon U_x \to \mathbb{R}^{k+1}$が存在する. 定理5.1と(II)より, f^+は各ファイバーが可縮な3次元位相多様体であるファイブレーションである. 写像$d_p\colon U_x \cap \Pi \to d_p(U_x \cap \Pi)$は各ファイバーがコンパクトな2次元位相多様体であるファイブレーションであり, 定理4.4より局所的に自明なファイバー束である. 特に, $U_x \cap \Pi$は4次元位相多様体である. よって, $\Pi - E(\Pi)$は4次元位相多様体である.

(IV) $n-k \geq 5$とする. 任意の$x \in \Pi - E(\Pi)$に対して, xのある開近傍U_x上で定義された$(k+1, 12\delta)$-伸長写像$f^+ = (f, d_p)\colon U_x \to \mathbb{R}^{k+1}$が存在する. この場合において, $U_x \cap \Pi$が$(n-k)$次元位相多様体であることをEdwards–QuinnのDDP多様体認識定理3.2 ([16], [39], [40]) を用いて証明する. 証明の途中で円板を分離する際に定理4.5などを用いるが, その過程は複雑で技術的である (詳細は論文[31]を参照). いずれにせよ, $\Pi - E(\Pi)$が$(n-k)$次元位相多様体であることがわかる. □

定理1.2の証明. 曲率が上に有界な任意のn次元ホモロジー多様体Xに対して, XはGCBA空間である. このとき, Xを微小開距離球体で被覆して, 各微小開距離球体$U_r(x)$からの定値写像$f\colon U_r(x) \to \mathbb{R}^0$に定理6.1を適用すると, 最終的に定理1.2を得る. □

6.2. 局所位相正則性

まず局所位相正則性定理1.1の証明の概略を述べる. 途中で定理1.2を用いる.

定理1.1の証明の概略. (1) $\Rightarrow$ (2). 曲率が上に有界な距離空間Xがn次元位相多様体であるとするとする. 任意の点$x \in X$を与える. 命題3.5より方向空間$\Sigma_x X$はコンパクト$(n-1)$次元一般多様体であり$H_*(\Sigma_x X) = H_*(\mathbb{S}^{n-1})$を満たす. 特に, $\Sigma_x X$は弧状連結である. もし$n \leq 3$であれば, $\Sigma_x X$は$\mathbb{S}^{n-1}$に同相である. 以下$n \geq 4$とし, $\Sigma_x X$が$\mathbb{S}^{n-1}$にホモトピー同値であることを示す. このためにはWhiteheadの定理より$\Sigma_x X$が単連結であることを示せば良い. 十分小さな任意の$r \in (0, D_\kappa)$に対して, $U_r(x) - \{x\}$は単連結であり, かつ$\Sigma_x X$にホモトピー同値である. よって, $\Sigma_x X$は単連結である.

(2) $\Rightarrow$ (1). 曲率が上に有界な局所コンパクト距離空間Xについて, 各点$x \in X$において$\Sigma_x X$が$\mathbb{S}^{n-1}$にホモトピー同値であるとする. 命題3.5よりXはn次元一般多様体である. もし$n \leq 2$であれば, Xはn次元位相多様体である. 以下$n \geq 3$とする. 定理1.2より局所有限なXの部分集合Eが存在して$X - E$はn次元位相多様体である. ここで, 各点$x \in X$において, 十分小さな任意の$r \in (0, D_\kappa)$に対して, $U_r(x) - \{x\}$は$\Sigma_x X$

にホモトピー同値であり, 単連結であることに注意する. よって, E は X 内で 1-LCC であり, さらに $\dim E = 0$ を満たす. Cannon–Bryant–Lacher の 1-LCC 収縮定理 3.3 ([12]) より, X は n 次元位相多様体である.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). 直前に述べた (1) $\Leftrightarrow$ (2) の証明と同様に (2) $\Leftrightarrow$ (3) を示すことができる. ただし, (2) $\Rightarrow$ (3) の証明では次の事実を用いる. すなわち, 可縮な n 次元位相多様体が $\mathbb{R}^n$ と同相であることと無限遠単連結であることは同値である ($n = 3$ のとき [7] と [43], $n = 4$ のとき [20], $n \geq 5$ のとき [46]). 実際, 可縮な接空間 T_xX が n 次元位相多様体であることを示した後で, それが $\mathbb{R}^n$ に同相であることを証明する際に用いる. □

次の定理の主張 (1) の証明は, P. Thurston の定理 3.4 ([47]) に別証明を与えている.

定理 6.2. ([31], [47]) 曲率が上に有界な距離空間 X に対して以下が成り立つ.

(1) X が n 次元ホモロジー多様体であり, $n \leq 3$ であれば, X は位相多様体である.
(2) X が n 次元位相多様体で, $n \leq 4$ であれば, 任意の $x \in X$ に対して方向空間 Σ_xX は $\mathbb{S}^{n-1}$ に同相である.

証明. 主張 (1) は定理 6.1 に含まれている. 主張 (2) を示すため, $n \leq 4$ とし, 曲率が上に有界な距離空間 X が n 次元位相多様体であるとする. このとき, 局所位相正則性定理 1.1 と命題 3.5 より, 各点 $x \in X$ における方向空間 Σ_xX はコンパクトな $(n-1)$ 次元一般多様体であり, $\mathbb{S}^{n-1}$ とホモトピー同値である. もし $n \leq 3$ であれば, Moore の定理より Σ_xX は n 次元位相多様体であり, $\mathbb{S}^{n-1}$ に同相である. もし $n = 4$ であれば, 主張 (1) より Σ_xX は 3 次元位相多様体であり, Perelman による Poincaré 予想の解決により $\mathbb{S}^3$ に同相である. こうして主張 (2) を得る. □

6.3. ホモロジー多様体に対する局所錐性

ホモロジー多様体に対する局所錐性定理 1.3 を得るために次を示す.

定理 6.3. ([31]) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, ある $\delta \in (0, \infty)$ が存在して以下が成り立つ. 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ の任意のファイバー Π に対して, 次が成り立つ. 任意の点 $x \in \Pi$ に対して, Π における x の開近傍 U_x と, $\mathbb{S}^{n-k-1}$ と同じホモロジー群を持つコンパクト $(n-k-1)$ 次元位相多様体 M_x が存在して, U_x は M_x の開錐 $C(M_x)$ に同相である.

証明の概略. ($n - k$ に関する帰納法) 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, 十分小さく $\delta \in (0, \infty)$ をとり, 曲率が上に有界な n 次元ホモロジー多様体の開集合 U を定義域とする (k, δ)-伸長写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ のファイバー Π を与える. 任意の $x \in \Pi$ に対して, 十分小さな任意の $r \in (0, \infty)$ について $(k+1, 12\delta)$-伸長写像 $f^+ = (f, d_x)\colon U_r(x) - \{x\} \to \mathbb{R}^{k+1}$ が存在する. 定理 5.1 より, f^+ は各ファイバーが可縮であるようなファイブレーションであり, 写像 $d_x\colon (U_r(x) - \{x\}) \cap \Pi \to (0, r)$ はファイブレーションである. 以下 $N := (U_r(x) - \{x\}) \cap \Pi$ とおく. 定理 6.1 より N は $(n-k)$ 次元位相多様体である.

(I) $n - k \leq 3$ とする. 定理 6.1 より Π が $(n-k)$ 次元位相多様体であり主張が成り立つ.

(II) $n - k = 4$ とする. このとき (I) より f^+ は各ファイバーが可縮な 3 次元位相多様体であるファイブレーションである. よって, 写像 $d_x\colon N \to (0, r)$ は各ファイバーがコンパクトな 3 次元位相多様体であるファイブレーションであり, 定理 4.4 より局所的に自明なファイバー束である. このとき, コンパクトな 3 次元位相多様体 M が存在して N は $(0, r) \times M$ に同相である. したがって, 主張が成り立つことがわかる.

(III) $n-k \geq 5$とする．主張を示すためには, $(n-k)$次元位相多様体Nにおける点xに対応する端が, $(n-k-1)$次元コンパクト位相多様体Mによって$[0,\infty) \times M$と襟付けされることを示せば良い．もし$n-k \geq 6$であれば, Siebenmannの端定理([44], [22]を参照)から主張がしたがう．残りは$n-k=5$のときである．このとき, 帰納法の仮定(II)のもと, Quinnのレゾリューション存在定理([39], [40])の帰結である定理3.1を用いて5次元位相多様体Nの手術を行い, 手術後の5次元位相多様体N^+にSiebenmannの襟付け定理([45])を適用することによって, 主張を証明することができる． □

注意 6.1. 定理6.3の$n-k=5$の場合の証明はSteven Ferry氏の援助を受けている．

定理1.3の証明．曲率が上に有界な任意のn次元ホモロジー多様体Xを微小開距離球体で被覆して, 各微小開距離球体からの定値写像に定理6.3を適用すると良い． □

6.4. 曲率が上に有界なリーマン多様体の非崩壊極限の正則性と安定性

本稿では, 次に述べる定理1.4の簡略版についてのみ示す．定理1.4の反復方向空間に関する主張の証明は複雑で技術的である(詳細は論文[31]を参照).

定理 6.4. ([31]) CAT(κ)である点付きn次元Riemann多様体列(M_i, p_i)が点付き固有距離空間Xに, 点付きGromov–Hausdorff位相で収束しているとする．このとき, Xはn次元位相多様体である．加えて, もしXがコンパクトであれば, 十分大の任意のiに対してM_iはXに同相である．

証明．極限空間XはCAT(κ)であるGCBA(κ)空間である．定理2.1より, 任意の$x \in X$に対して, ある$r_x \in (0, D_\kappa/2)$が存在して, すべての$r \in (0, r_x)$について, 閉距離球体$B_r(x)$がコンパクトかつCAT(κ)であり, 距離球面$\partial B_r(x)$は$\Sigma_x X$にホモトピー同値である．さらに, 点$x \in X$に収束する各M_iの点$x_i \in M_i$を選ぶと, 各閉距離球体$B_r(x_i)$がコンパクトかつCAT(κ)であり, $(B_r(x_i), x_i)$は$(B_r(x), x)$に点付きGromov–Hausdorff位相で収束している．再び定理2.1より, 十分大きなiに対して$\partial B_r(x_i)$は$\partial B_r(x)$にホモトピー同値である．特に, $\partial B_r(x_i)$は$\Sigma_x X$にホモトピー同値である．各M_iはCAT(κ)であるn次元Riemann多様体であるので, 点$x_i \in M_i$における単射半径は一様にD_κ以上であり, $\partial B_r(x_i)$は$\mathbb{S}^{n-1}$に(微分)同相である．よって, $\Sigma_x X$は$\mathbb{S}^{n-1}$にホモトピー同値である．局所位相正則性定理1.1より, 極限空間Xはn次元位相多様体である．

以下Xがコンパクトであるとする．十分大きな任意のiに対しM_iもコンパクトである．一般に, CAT(κ)空間はLGC($\mathrm{id}_{[0,D_\kappa)}$)である．Petersenのホモトピー安定性定理4.1([38])より, 任意の$\epsilon \in (0,\infty)$について, 十分大きなiに対しM_iとXはϵ-ホモトピー同値である．よって, α-近似定理4.2より, 十分大きなiに対しM_iとXは同相である． □

参考文献

[1] A. D. Alexandrov and V. N. Berestovskiĭ, *Riemannian spaces, generalized*, Encyclopedia of Mathematics, Volume 8, Kluwer Academic Publishers 1992, pp. 150–152.

[2] F. D. Ancel and C. R. Guilbault, *Interiors of compact contractible n-manifolds are hyperbolic* ($n \geq 5$), J. Differential Geom. **45** (1997), no. 1, 1–32.

[3] V. N. Berestovskiĭ, *Borsuk's problem on metrization of a polyhedron*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **268** (1983), no. 2, 273–277.

[4] V. N. Berestovskiĭ, *Manifolds with an intrinsic metric with one-sided bounded curvature in the sense of A. D. Aleksandrov*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **1** (1994), no. 1, 41–59.

[5] M. Bestvina, R. J. Daverman, G. A. Venema, and J. J. Walsh, *A 4-dimensional* 1-LCC *shrinking theorem*, Topology appl. **110** (2001), no. 1, 3-20.

[6] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Volume 319, Springer-Verlag, 1999.

[7] M. Brown, *The monotone union of open n-cells is an open n-cell*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), no. 5, 812–814.

[8] D. Burago, Yu. D. Burago, and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 33, Amer. Math. Soc., 2001.

[9] Yu. D. Burago, M. Gromov, and G. Perelman, *A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below* [Russian], Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 2 (284), 3–51, 222; translation in Russian Math. Surveys **47** (1992), no. 2, 1–58.

[10] S. V. Buyalo and V. Schroeder, *Spaces of curvature bounded above*, Surveys in Differential Geometry, Volume XI, Metric and Comparison Geometry (J. Cheeger and K. Grove, eds.), International Press, 2007, pp. 295–327.

[11] J. W. Cannon, *Shrinking cell-like decomposition of manifolds. Codimension three*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 1, 83–112.

[12] J. W. Cannon, J. L. Bryant, and R. C. Lacher, *The structure of generalized manifolds having nonmanifold set of trivial dimension*, Geometric Topology (J. C. Cantrell, ed.), Academic Press, 1979, pp. 261–300.

[13] T. Chapman and S. Ferry, *Approximating homotopy equivalences by homeomorphisms*, Amer. J. Math. **101** (1979), no. 3, 583–607.

[14] R. J. Daverman, *Decompositions of Manifolds*, Pure and Applied Mathematics, Volume 124, Academic Press, 1986; AMS Chelsea Publ., 2007.

[15] E. Dyer and M. E. Hamstrom, *Completely regular mappings*, Fund. Math. **45** (1958), 103–118.

[16] R. D. Edwards, *The topology of manifolds and cell-like maps*, Proc. Int. Congress of Math. 1978, Acad. Sci. Fennica, 1980, pp. 111–127.

[17] R. D. Edwards, *Suspensions of homology spheres*, preprint; available from arXiv:0610573 submitted by C. Guilbault in 2006.

[18] S. Ferry, *Alexander duality and Hurewicz fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), no. 1, 201–219.

[19] S. Ferry and S. Weinberger, *Curvature, tangentially, and controlled topology*, Invent. Math. **105** (1991), no. 2, 401–414.

[20] M. H. Freedman, *The topology of four-manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 357–453.

[21] K. Grove and P. Petersen, *A radius sphere theorem*, Invent. Math. **112** (1993), no. 3, 577–583.

[22] B. Hughes and A. Ranicki, *Ends of Complexes*, Cambridge Tracts in Mathematics, Volume 123, Cambridge Univ. Press, 1996.

[23] W. Jabobsche, *Approximating homotopy equivalences of surfaces by homeomorphisms*, Fund. Math. **118** (1983), no. 1, 1–9.

[24] W. Jabobsche *Approximating homotopy equivalences of* 3*-manifolds by homeomorphisms*, Fund. Math. **130** (1988), no. 3, 157–168.

[25] V. Kapovitch, *Regularity of limits of noncollapsing sequences of manifolds*, Geom. Funct. Anal. **12** (2002), no. 1, 121–137.

[26] V. Kapovitch, *Perelman's stability theorem*, Surveys in Differential Geometry, Volume XI, Metric and Comparison Geometry (J. Cheeger and K. Grove, eds.), International Press, 2007, pp. 103–136.

[27] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), no. 4, 742–749.

[28] B. Kleiner, *The local structure of length spaces with curvature bounded above*, Math. Z. **231** (1999), no. 3, 409–456.

[29] L. Kramer. *On the local structure and the homology of* CAT(κ) *spaces and euclidean buildings*, Adv. in Geom. **11** (2011), no. 2, 347–369.

[30] A. Lytchak and K. Nagano, *Geodesically complete spaces with an upper curvature bound*, Geom. Funct. Anal. **29** (2019), no. 1, 295–342.

[31] A. Lytchak and K. Nagano, *Topological regularity of spaces with an upper curvature bound*, preprint, 2018; available from arXiv:1809.06183.

[32] E. Michael, *Continuous selections. II*, Ann. of Math. (2), **64** (1956), no. 3, 562–580.

[33] K. Nagano, *Asymptotic rigidity of Hadamard* 2*-spaces*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), no. 4, 699–723.

[34] K. Nagano, *Volume pinching theorems for* CAT(1) *spaces*, preprint, 2018; available from arXiv:1810.13056.

[35] P. Ontaneda, *Cocompact* CAT(0) *spaces are almost geodesically complete*, Topology **44** (2005), no. 1, 47–62.

[36] G. Perelman, *Elements of Morse theory of Aleksandrov spaces*, St. Petersburg Math. J. **5** (1994), no. 1, 205–213.

[37] G. Perelman, *A. D. Alexandrov's spaces with curvature bounded below II*, preprint, 1991.

[38] P. Petersen, *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 2, 387–395.

[39] F. Quinn, *Resolutions of homology manifolds, and the topological characterizations of manifolds*, Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 267–284.

[40] F. Quinn, *An obstruction to the resolution of homology manifolds*, Michigan Math. J. **34** (1987), no. 2, 285–291.

[41] F. Quinn, *Problems on homology manifolds*, Exotic Homology Manifolds (Oberwolfach 2003), Geometry & Topology Monographs, Volume 9, Geom. Topol. Publ. 2006, pp. 87–103.

[42] F. Raymond, *Local triviality for Hurewicz fiberings of manifolds*, Topology **3** (1965), no. 1, 43–57.

[43] D. Rolfsen, *Strongly convex metrics in cells*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), no. 1, 171–175.

[44] L. C. Siebenmann, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, PhD Thesis, Princeton University, 1965.

[45] L. C. Siebenmann, *On detecting open collars*, Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 201–227.

[46] J. Stallings, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58** (1962), 481–488.

[47] P. Thurston, CAT(0) 4*-manifolds possessing a single tame point are Euclidean*, J. Geom. Anal. **6** (1996), no. 3, 475–494.

[48] G. Unger, *Conditions for a mapping to have the slicing structure property*, Pacific J. Math. **30** (1969), no. 2, 549–553.

[49] R. Wilder, *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publication, Volume 32, Amer. Math. Soc., 1979.

[50] J. Y. Wu, *Topological regularity theorems for Alexandrov spaces*, J. Math. Soc. Japan **49** (1997), no. 4, 741–757.