

2次元ファイバー結び目に対する Gluck twist について

福田 瑞季 (東京学芸大学 日本学術振興会特別研究員PD)*

1. はじめに

2次元結び目とは4次元球面に滑らかに埋め込まれた2次元球面のことをいう。特にその補空間が S^1 上のファイバー構造を有するとき、その結び目をファイバー結び目という。具体的な2次元結び目の構成については Artin によって具体的な2次元ファイバー結び目の構成については Zeeman によるツイストスパン結び目 [15] や Litherland によるツイストロールスパン結び目 [9] などが知られているが、本稿では Pao により構成された branched twist spin を扱う。ここで、Branched twist spin の定義を簡単に述べる(詳しい定義は §2.2 参照)。 S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1 -作用を考える。この作用による軌道空間が S^3 であるとき、固定点は2点であり、例外軌道は高々2種類存在するが、1種類の例外軌道と固定点全体の和集合は2次元球面と微分同相になる。この2次元球面を branched twist spin という。

1次元ファイバー結び目、つまり S^3 に滑らかに埋め込まれた S^1 でファイバーであるもの、については Nielsen-Thurston によってそのファイバー束のモノドロミーが irreducible, pseudo-Anosov, reducible の3種類に分類できることが知られている [14]。特に irreducible に対応するものはトーラス結び目、pseudo-Anosov に対応するものは双曲結び目、reducible に対応するものはサテライト結び目と呼ばれるクラスに属しており、それぞれのクラスが1次元結び目の代表的なクラスととして知られている。一方で2次元ファイバー結び目に関して、periodic に対応するものは branched twist spin と呼ばれる2次元結び目であることが Plotnick により知られている [11] が、それ以外のモノドロミーは定式化されておらず、また属する2次元結び目のクラスも知られていない。

一方で Gluck twist とは S^4 から2次元結び目の開近傍を取り除き、ある写像 γ によって貼り戻す操作のことをいう。Gluck は $S^2 \times S^1$ 上の向きを保つ微分同相写像のうち、アイソトピーで移り合うもの及び $S^2 \times D^2$ へ拡張できるものを同一視した同値類全体がなす群は Z^2 と同型であり、特にその生成元が γ であることを示した [7]。これにより、2次元結び目に沿った手術で本質的なものは高々2種類しかないことがわかる。Gluck twist によって4次元球面と2次元結び目の組から新たな4次元球面と2次元結び目の組が得られるが、新たな4次元多様体は閉かつ単連結であるので、Freedman による位相的4次元ポアンカレ予想の結果から4次元球面と同相なものであることがわかるが、この4次元多様体が S^4 と微分同相であるかどうかは未解決問題である。実際、Gluck twist は4次元ポアンカレ予想の反例の候補として研究されている。

そこで本稿では次の定理に基づいて Gluck twist による branched twist spin の変化を考察する。

本研究は科研費(課題番号:18J11484)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-code1, MSC-code2

キーワード: Surface knots, Gluck surgery

* 〒184-8501 東京都小金井市貫井北町4丁目1-1 東京学芸大学 教育学部
e-mail: mfukuda@u-gakugei.ac.jp

定理 1.1 (Pao[10]). Branched twist spin に沿った Gluck twist で得られる 4 次元多様体は S^4 と微分同相である.

この定理により, branched twist spin に対して Gluck twist を行う前後の 2 次元結び目の比較が可能となり, 実際にどのような結び目になるかを決定できたので, その結果について説明する.

2. Branched twist spins

2.1. S^1 -作用

4 次元球面上の局所滑らかかつ効果的な S^1 -作用は Fintushel と Pao により次の定理が知られている.

定理 2.1 (Fintushel [2], Pao [10]). S^4 上の局所滑らかかつ効果的な S^1 -作用の弱同値類全体の集合と orbit data と呼ばれる次の 4 つのタイプ全体の集合には 1 : 1 対応が存在する.

$$\{D^3\}, \{S^3\}, \{S^3, m\}, \{(S^3, K), m, n\} \quad (m, n \text{ は互いに素な正整数}).$$

ここで, 2 つの作用 τ と τ' が弱同値であるとは, ある S^4 上の微分同相写像 H と S^1 上の自己同型写像 α が存在して, 次の図式が可換になることをいう.

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^4 & \xrightarrow{\alpha \times \text{id}} & S^1 \times S^4 \\ \tau \downarrow & & \tau' \downarrow \\ S^4 & \xrightarrow{H} & S^4 \end{array}$$

Orbit data は次の情報を持つ ;

$\{D^3\}$... 軌道空間は D^3 , 固定点集合は S^2 , 例外軌道なし.

$\{S^3\}$... 軌道空間は S^3 , 固定点集合は 2 点集合, 例外軌道なし.

$\{S^3, m\}$... 軌道空間は S^3 , 固定点集合は 2 点集合, Z_m -タイプの例外軌道が存在.

$\{(S^3, K), m, n\}$... 軌道空間は S^3 , 固定点集合は 2 点集合, Z_m -タイプと Z_n -タイプの例外軌道が存在し, 自由軌道以外の軌道空間への像は単純閉曲線 K をなす.

注意 2.2. 定理 2.1 は 3 次元ポアンカレ予想が解決する前に示された主張である. 実際, Fintushel の論文 [2] では 定理 2.1 内の S^4 はホモトピー 4 次元球面, D^3 はホモトピー 3 次元球体, S^3 はホモトピー 3 次元球面として示している. その後 Pao により, S^4, D^3, S^3 と微分同相であることが示され, 定理 2.1 の主張が成立する.

それぞれの orbit data に対応する代表的な S^1 -作用を紹介する. 3次元上半空間 \mathbb{R}_+^3 を境界の \mathbb{R}^2 を軸に 1 回転させたものをコンパクト化することにより S^4 が得られる. この回転は S^1 -作用であり固定点が S^2 であるので, orbit data $\{D^3\}$ に対応する S^1 -作用になっている. それ以外の orbit data に対応する S^1 -作用は, S^3 上の S^1 -作用を用いて次のように構成する. まず, $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ を \mathbb{C}^2 内の単位球面とし, この S^3 上の固定点のない S^1 作用を考える. Jacoby と Seifert によって S^3 上の固定点のない任意の S^1 作用は互いに素な正の整数 m, n を用いて,

$$e^{i\phi}(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 e^{i(\theta_1 + m\phi)}, r_2 e^{i(\theta_2 + n\phi)}) \quad (2.1)$$

なる S^1 作用と同値であることが知られている [5, 13]. 注意として, $m = n = 1$ であれば, ホップファイブレーションである. この作用の軌道空間は S^2 であり, もし $m \neq 1$ であれば, \mathbb{Z}_m -タイプの例外軌道が存在する. ここで, \mathbb{Z}_m -タイプの例外軌道とは, 固定部分群が \mathbb{Z}_m と同型になる軌道のことである. 例外軌道が存在する場合には, それぞれ \mathbb{Z}_m -タイプと \mathbb{Z}_n -タイプの例外軌道全体の集合を E_m, E_n と書くことにする. また, E_m と E_n の作用による像をそれぞれ E_m^*, E_n^* とする. 上の S^1 -作用をもつ S^3 に対し, 懸垂を考えることで S^4 上の S^1 -作用を得る. もし上の作用で, \mathbb{Z}_m -タイプのみの例外軌道を持つとき, S^4 上では例外軌道と固定点の和集合 $E_m \cup F$ は2次元球面であり, $E_m^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の弧になる. もし \mathbb{Z}_m -タイプと \mathbb{Z}_n -タイプの2種類を例外軌道として持つとき, $E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ はそれぞれ2次元球面であり, 2点の固定点 F でのみ横断的に交わっている. また, $E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の自明な結び目 \mathcal{O} になっている. 上の m, n に対して, 一般の結び目 K を構成する場合には, \mathcal{O} の閉近傍 $N(\mathcal{O})$ から K の閉近傍 $N(K)$ への同相写像を用いて orbit data 内の m, n を変えずに K を構成することができる. この K に対して, Fintushel は貼り合わせの情報から全空間の基本群が自明になることを示し, $\{(S^3, K), m, n\}$ の全空間がホモトピー4次元球面である. また, Pao は帰納法によって, $\{S^3\}, \{S^3, m\}, \{(S^3, K), m, n\}$ の全空間は全て微分同相であることを示した. 特に, $\{S^3\}$ の全空間は上記に述べた通り S^4 と微分同相になるので, 全ての orbit data に対応する S^4 上の S^1 -作用が構成されたことになる.

2.2. Branched twist spins

Branched twist spin の定義には orbit data $\{(S^3, K), m, n\}$ を用いる.

定義 2.3. $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ を S^3 内の1次元結び目とする. このとき, K の (m, n) -branched twist spin を $K^{m,n} := E_n \cup F$ で定める.

注意として, Fintushel と Pao の定理によって K は任意の1次元結び目を取ることができるので, branched twist spin は K と互いに素な正の整数 m, n により決定される. また, $n = 1$ のとき, $(m, 1)$ -branched twist spin は Zeeman によって構成された m -ツイストスパン結び目となる.

次に S^4 を branched twist spin に沿って分解する. その為にまず軌道空間 S^3 の分解を与え, S^1 -作用の逆像として S^4 の分解を考える. 例外軌道の像 E_m^* と E_n^* の内部にそれぞれ図1のような真閉部分集合 E_m^{c*}, E_n^{c*} を取ることで, 軌道空間 S^3 は次のように分解できる.

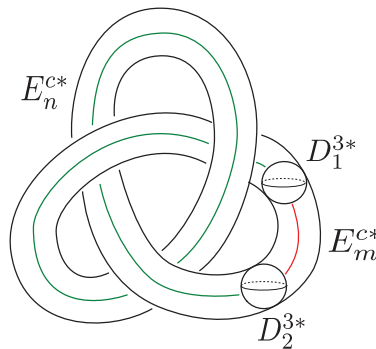


図 1: $N(K)$ の分解

$$S^3 = N(F^*) \cup N(E_m^*) \cup N(E_n^*) \cup (S^3 \setminus \text{int}N(K)).$$

ここで、 $N(-)$ は括弧内の閉近傍を表す．今、固定点 2 点のうち、1 点の近傍を D^{3*} と書くことにする．この近傍の境界 ∂D^{3*} の S^1 -作用による逆像は S^3 であり、 S^1 -作用は (2.1) で表されるものである．今、 D_m^2 を円盤 D^2 の中心を分岐点にもつ m 重分岐被覆とすると、 S^3 は例外軌道を 2 種類持つので、その例外軌道に沿って S^3 を 2 つのソリッドトーラス $\partial D_m^2 \times D_n^2$ と $D_m^2 \times \partial D_n^2$ に分けることができる．この S^3 の錐を取ることににより 4 次元球 B^4 上の S^1 -作用で、軌道空間が D^{3*} であるものが構成できる．もう一方の固定点でも同様の議論を行うことにより、

$$N(F) \cong D_m^2 \times F^* \times D_n^2$$

が得られる．また、 $\partial D_m^2 \times D_n^2$ は E_m^* 上の各点を中心とする K のメリディアン円板の S^1 -作用による逆像であることに注意すると、

$$N(E_m^c) \cong \partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$$

が得られる．同様に、

$$N(E_n^c) \cong D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2$$

が得られる．最後に、 $S^3 \setminus \text{int}N(K)$ の S^1 -作用による逆像は主 S^1 -束の構造をもち、 $H_2(S^3 \setminus \text{int}N(K), \mathbb{Z}) = 0$ であることから、 $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ であることが従う．以上の考察をまとめると、 S^4 は次の分解をもつ．

$$S^4 = (D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2) \cup ((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1). \quad (2.2)$$

3. Branched twist spin に沿った Gluck twist

前章で、branched twist spin に沿った S^1 -作用による S^4 の分解 (2.2) を与えた．この章では、分解したピースに座標を入れることで、貼り合わせ写像を具体的に与え、Gluck twist によって得られる 4 次元多様体を具体的に考察する．

最初に S^4 の向きと S^1 -作用を固定する．軌道空間の部分集合である $S^3 \setminus \text{int}N(K)$ の座標 (θ, x, h) を次のように定める．境界 $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K))$ の座標として preferred meridian-longitude 対 (θ, x) をとる．この境界 $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K))$ の $S^3 \setminus \text{int}N(K)$ 内の近傍として $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times [0, 1]$ を考え、その座標を (θ, x, y) とする．注意として $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K))$ は $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times \{0\}$ に位置するものとする．座標 (θ, x, y) と S^1 -作用の座標である h を用いて $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の座標 (θ, x, y, h) が S^4 の向きと一致するように定める．これにより $\partial(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の座標 (θ, x, h) が定まる．

固定点の近傍である $D_m^2 \times F^* \times D_n^2$ の座標は次のように定める．2 つの 4 次元球をそれぞれ B_1^4, B_2^4 とし、 (r_1, θ_1) と (r_2, θ_2) をそれぞれ B_1^4 内の D_m^2 と D_n^2 の極座標とする．必要があれば、 $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ の向きを適切に取り直すことで、座標 $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$ が S^4 の向きと一致するよう取ることができる．また、必要であれば B_1 と B_2 の添え字を入れ替えることで、上で定めた座標 x は B_1 の原点から出発し、 $E_{c^*}m$ を通り B_2 の原点へ向かう方向としてよい (図 2 を見よ)．同様に、 (r'_1, θ'_1) と (r'_2, θ'_2) をそれぞれ B_2^4 内の D_m^2 と D_n^2 の極座標とする．必要があれば、 $r'_1, r'_2, \theta'_1, \theta'_2$ の向きを適切に取り直すことで、座標 $(r'_1, \theta'_1, r'_2, \theta'_2)$ が S^4 の向きと一致するよう取ることができる．

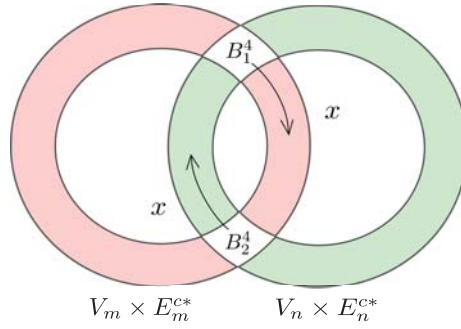


図 2: $V_m \times E_m^{c*}$ と $V_n \times E_n^{c*}$ 上の座標 x

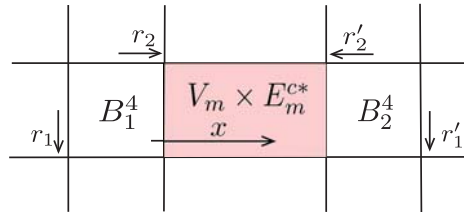


図 3: 座標 r_1, r_2, r_1', r_2', x

このとき, $r_1 = r_1', \theta_1 = \theta_1', r_2 = -r_2', \theta_2 = \theta_2'$ となることを注意しておく (図 3 を見よ).

最後に $\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2$ と $D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2$ 上の座標を定める. これらの座標は上で定めた B_1^4, B_2^4 から誘導されるものであり, どちらも (θ_1, x, θ_2) で表される.

以上により定めた座標を用いて貼り合わせ写像を考える. Branched twist spin の結び目補空間を構成する為に, $\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$ と $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の貼り合わせを考える. それぞれのピースには自由軌道が存在しており, 各自由軌道は $\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$ 内では θ_1 方向に m 周, θ_2 方向に n 周するような単純閉曲線であり, $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ 内では h 方向に 1 周する単純閉曲線である. このことから貼り合わせ写像 $g : \partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2 \rightarrow \partial((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1)$ は次のように定義される.

$$(\theta, x, h) = g(\alpha\theta + nh, x, -\beta\theta + mh).$$

ここで, α, β は $m\alpha + n\beta = 1$ を満たす整数である. 座標 (θ_1, x, θ_2) を用いれば, g は次のように書ける.

$$g(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - n\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2).$$

この写像を用いて $K^{m,n}$ の結び目補空間 $S^4 \setminus \text{int}(N(K^{m,n}))$ は次の分解をもつ.

$$S^4 \setminus \text{int}(N(K^{m,n})) = (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1)$$

同様に, $D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2$ と $(S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1$ の貼り合わせ写像 $e : \partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2 \rightarrow \partial((S^3 \setminus \text{int}N(K)) \times S^1)$ は次のように定義される.

$$e(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - n\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2).$$

最後に, $D_m^2 \times F^* \times D_n^2$ が $(\partial D_m^2 \times \partial E_m^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times \partial E_n^{c*} \times \partial D_n^2)$ の錐で得られることに注意をすると, $S^3 \setminus \text{int}N(K) \times S^1$ の貼り合わせは g と e の自然な拡張で得られることがわかる.

これらの貼り合わせ写像を用いて S^4 の分解 (2.2) は次のようになる.

$$S^4 = ((D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2)) \cup_{e''} ((D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int} N(K)) \times S^1)). \quad (3.1)$$

ここで, e'' は e を $(D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2)$ へと拡張した写像である.

ここまでの考察で S^4 の分解を与えることができたので, 以下では Gluck twist によって得られる 4次元多様体の分解について説明する. 先に Gluck twist の具体的な表示を与えておく. 2次元結び目の近傍の境界と微分同相である $S^2 \times \partial B^2$ を次の3つの連結成分に分ける¹.

$$S^2 \times \partial B^2 = (D^2 \times \partial I \times \partial B^2) \cup (S^1 \times I \times \partial B^2).$$

ここで $D^2 \times \partial I \times \partial B^2$ に関して, D^2 の極座標を (r, θ) , ∂B^2 の座標を同じく極座標で ϕ とすると, $S^1 \times I \times \partial B^2$ に関して, 第一成分の S^1 の座標は θ , 第三成分の ∂B^2 座標は ϕ を用いて表すことができる. また, I の座標を x で書くことにする. 注意として, θ は S^2 上の緯線に平行な座標, x は S^2 上の経線に平行な座標である. この座標を用いて Gluck twist $\gamma = \nu \cup \nu'$ は次のように書ける.

$$\nu((r, \theta), x, \phi) = ((r, \theta - \phi), x, \phi), \quad ((r, \theta), x, \phi) \in D^2 \times \partial I \times \partial B^2,$$

$$\nu'(\theta, x, \phi) = (\theta - \phi, x, \phi), \quad (\theta, x, \phi) \in S^1 \times I \times \partial B^2.$$

Branched twist spin $K^{m,n}$ に沿った Gluck twist で得られる 4次元多様体を $\Sigma(K^{m,n})$ で表すこととし, $K^{m,n}$ が Gluck twist によって変化した 2次元結び目を $K_\Sigma^{m,n}$ で表ことにすると, $\Sigma(K^{m,n})$ と $K_\Sigma^{m,n}$ は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Sigma(K^{m,n}) = & ((D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\text{id}} (\partial D^2 \times I \times B^2)) \cup_{\gamma \circ e''} \\ & ((D_m^2 \times E_m^* \times \partial D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int} N(K)) \times S^1)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$K_\Sigma^{m,n} = (D^2 \times \partial I \times \{0\}) \cup (\partial D^2 \times I \times \{0\}) \subset \Sigma(K^{m,n}).$$

Branched twist spin $K^{m,n}$ は定義から対となる $K^{n,m}$ が存在し, $K^{m,n}$ に沿った Gluck twist によって $K^{n,m}$ も新たな 2次元結び目へと変化する. この結び目を $K_\Sigma^{n,m} := (\{0\} \times \partial I \times B^2) \cup (\{0\} \times E_m^* \times \partial D_n^2) \subset \Sigma(K^{m,n})$ と書くことにする. このことから $\Sigma(K^{m,n})$ は情報として全空間と 2つの結び目の組 $(\Sigma(K^{m,n}), K_\Sigma^{m,n}, K_\Sigma^{n,m})$ を持つ. この 3つ組に対して次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (F.[4]). 3つ組 $(\Sigma(K^{m,n}), K_\Sigma^{m,n}, K_\Sigma^{n,m})$ と $(\Sigma(K^{m+n,n}), K_\Sigma^{m,m+n}, K_\Sigma^{m+n,n})$ は組として微分同相である.

証明の概説:

Gordon は $\Sigma(K^{m,1})$ の分解を与え, そのピースの座標をうまく取り替えることで, $\Sigma(K^{m,1})$ と $\Sigma(K^{m+1,1})$ が微分同相であることを示した [8]. 定理 3.1 は S^4 の分解 (3.2) に対して Gordon のアイデアを一般化することによって得られる. 以下では, 細かい議論は飛ばして一般化した Gordon のアイデアを説明し, 証明を与える. 定理 3.1

¹ 以下に出てくる 2次元円板 D^2 と区別するため B^2 を用いている.

の主張直前で述べたように, branched twist spin $K^{m,n}$ は対として $K^{n,m}$ を持つ. これらの近傍 $N(K^{m,n})$ と $N(K^{n,m})$ は(3.1)内の記号を用いて

$$K^{m,n} = ((D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2)),$$

$$K^{n,m} = ((D_m^2 \times F^* \times D_n^2) \cup_{\text{id}} (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2)),$$

と表される. 一方で, $\Sigma(K^{m,n})$ 内では $N(K_\Sigma^{m,n})$ と $N(K_\Sigma^{n,m})$ は次のように表される.

$$K_\Sigma^{m,n} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\text{id}} (\partial D^2 \times I \times B^2),$$

$$K_\Sigma^{n,m} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_\nu (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2).$$

式(3.2)の右辺の座標を取り替えることにより, 次のように $K_\Sigma^{m,n}$, $K_\Sigma^{n,m}$ を表すことができる.

$$K_\Sigma^{m,n} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\nu^{-1}} (D^2 \times I \times \partial B^2),$$

$$K_\Sigma^{n,m} = (D^2 \times \partial I \times B^2) \cup_{\text{id}} (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2).$$

この座標の取り替えによって $\Sigma(K^{m,n})$ は図4の右図のような分解を持つ. ここで, 左図

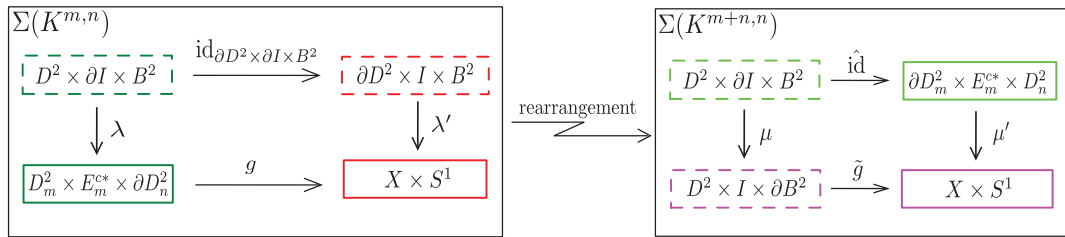


図4: Decompositions of $\Sigma(K^{m,n})$ and $\Sigma(K^{m+n,n})$

の λ と λ' は $D^2 \times \partial I \times B^2$ と $\partial D^2 \times I \times B^2$ の貼り合わせ写像 e'' と Gluck twist $\gamma = \nu \cup \nu'$ の合成写像で得られるものであり, 右図の μ と μ' は次で表される $D^2 \times \partial I \times B^2$ と $\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2$ の貼り合わせ写像 \tilde{e}'' と Gluck twist の逆写像 $\gamma^{-1} = \nu^{-1} \cup \nu'^{-1}$ の合成写像である.

$$\tilde{e}''(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - (m+n)\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2).$$

この入れ替えが Gordon によるアイデアであり, 本来であればもっと段階を踏んでピースの取り替えを行うのだが, 今回は途中を割愛して, 最初と最後の分解の様子のみを説明している(詳細は[4]を見よ).

さて, Gluck twist は対合 (involution) であることから, γ と γ^{-1} はアイソトピックであり, さらに上のピースの取り替えは K の位相型を変えないことに注意すると, 図3.2の右は \tilde{e}'' の定義から $\Sigma(K^{m+n,n})$ の分解を与えている. 以上により全空間 $\Sigma(K^{m,n})$ と $\Sigma(K^{m+n,n})$ の微分同相が従う. さらに, 先ほどのピースの入れ替えによって $\Sigma(K^{m,n})$ 内で $K_\Sigma^{m,n}$ と $K_\Sigma^{n,m}$ と表されていた結び目は, $\Sigma K^{m+n,n}$ 内では $K_\Sigma^{m,m+n}$ と $K_\Sigma^{m+n,n}$ で表される結び目に移ることがわかる. よって主張が成り立つ. \square

注意 3.2. 定理1.1で述べたように $\Sigma(K^{m,n})$ は S^4 と微分同相になることはすでに知られているが, 定理3.1はその別証明を与える. 何故ならば, 定理3.1の主張を繰り返し適用することで, $\Sigma(K^{m,n})$ は $\Sigma(K^{0,1})$ もしくは $\Sigma(K^{1,1})$ と微分同相になることがわか

る。どちらの場合にも Gordon の場合に帰着され、 S^4 と微分同相であることが示される。一見すると、定理 3.1 では $K^{m,n}$ の m しか変化できないように思えるが、 $\Sigma(K^{m,n})$ が局所滑らかで効果的な S^1 -作用を許容することから、 $\Sigma(K^{m,n})$ は $\{(S^3, K), m, n\}$ タイプの orbit data を持つ。Orbit data の m, n に順序はなく、この orbit data から復元される 4 次元多様体は微分同相を除いて一意であるので、Gluck twist を施す結び目を入れ替えることにより、 n についても変化をさせることができる。

式 (3.2) を用いて $\Sigma(K^{m,n})$ が局所滑らかで効果的な S^1 -作用を許容することは次のことから従う。Branched twist spin の定義から S^4 の部分集合である $K^{m,n}$ の結び目補空間である $(D_m^2 \times E_m^* \times \partial D_n^2) \cup_g ((S^3 \setminus \text{int} N(K)) \times S^1)$ 上には S^1 -作用が定義されている。この作用は $\Sigma(K^{m,n})$ へと拡張することができ、orbit data は $\{(S^3, K), m, m+n\}$ である。より詳しくは、Gluck twist により軌道空間は図 5 のように結び目を変えず、例外軌道のタイプのみを変える。定理 3.1 から $K^{m,n}$ の結び目補空間は同時に $K_\Sigma^{n,m+n}$

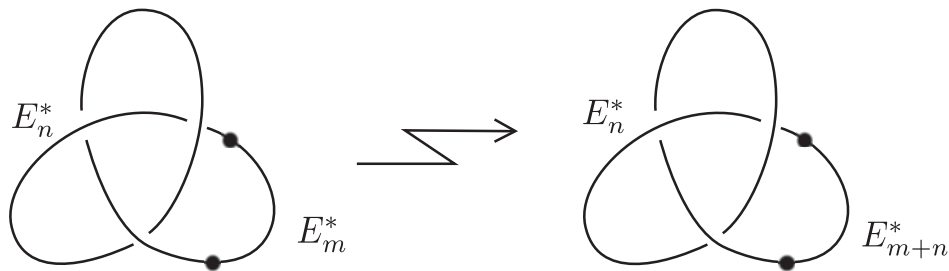


図 5: $K^{n,m}$ に沿った Gluck twist による軌道空間の変化

の結び目補空間であることがわかる。軌道空間内では特に $K_\Sigma^{n,m+n}$ は例外軌道 \mathbb{Z}_{m+n} -タイプと固定点の和集合として構成されていることがわかる。

このことから次の定理が従う。

定理 3.3 (F.). $K_\Sigma^{m,n} = K^{m,m+n}$.

ファイバー結び目に関しては次の定理が Plotnick によって知られている。

定理 3.4. 非自明な 2 次元ファイバー結び目 K に対して、そのモノドロミーの位数が奇数であれば、 K と K_Σ は異なる。

Branched twist spin $K^{m,n}$ はファイバー結び目であり、特にそのモノドロミーの位数は m である。よって次のことが従う。

系 3.5. 非自明な branched twist spin $K^{m,n}$ に対して、 m が奇数であれば $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ は異なる。

これまでの branched twist spin の分類に関する先行研究では、Hillman と Plotnick による K に制限を設けた branched twist spin の非自明性 [6] や、 m が偶数である場合の判別を行う十分条件 [3] しか知られていなかったが、今回は m が奇数である場合の判別条件を与えており、筆者の知る限り初めての結果である。

参考文献

- [1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionalen Flächen im R^4* , Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4 (1926), 47–72.
No.57 Springer-Verlag, 1977.

- [2] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.
- [3] M. Fukuda, *Irreducible $SL(2, \mathbb{C})$ -metabelian representations of branched twist spins*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 28, No. 2, (2019), 1950007.
- [4] M. Fukuda, *The Gluck twist on branched twist spins*, arxiv:1811.05109.
- [5] R. Jacoby, *One-parameter transformation groups of the three-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 131–140.
- [6] J. A. Hillman and S. P. Plotnick, *Geometrically fibered two-knots*, Math. Ann. **287** (1990) 259–273.
- [7] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 308–333.
- [8] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585–596.
- [9] R. A. Litherland, *Deforming twist-spun knots*, Trans. Amer. math. Soc. **250** (1979), 311–331.
- [10] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.
- [11] S. Plotnick, *The homotopy type of four-dimensional knot complements*, Math. Z. **183** (1983), 447–471.
- [12] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lec. Series, **7**, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1976.
- [13] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserner Raume*, Acta Math. **60** (1932), 147–238.
- [14] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.
- [15] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.

