

## はしがき

この講演集は 2018 年 8 月 18 日から 8 月 21 日までの 4 日間、信州大学松本キャンパスにおいて開催される第 65 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

### 平成 30 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究 (S)  
研究代表者 藤原 耕二 (京都大学)  
研究課題名 幾何学的群論の深化と展開  
研究課題/領域番号 15H05739

研究種目 基盤研究 (S)  
研究代表者 佐伯 修 (九州大学)  
研究課題名 幾何的トポロジーと写像の特異点論の革新的研究  
研究課題/領域番号 17H06128

研究種目 基盤研究 (A)  
研究代表者 大槻 知忠 (京都大学)  
研究課題名 結び目と 3 次元多様体の量子トポロジー  
研究課題/領域番号 16H02145

世話人： 玉木 大 (信州大学)  
栗林 勝彦 (信州大学)  
片長 敦子 (信州大学)  
佐伯 修 (九州大学)  
遠藤 久顕 (東京工業大学)

共催： 日本数学会トポロジー分科会  
信州大学全学教育機構

## 第65回 トポロジーシンポジウム

日時 2018年8月18日(土)午後～8月21日(火)午前

場所 信州大学 全学教育機構 第20講義室, 〒390-0802 長野県松本市旭3-1-1

### プログラム

#### 8月18日(土)

15:00-16:00 境 圭一 (信州大学)

The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots

16:30-17:30 入江 慶 (東京大学)

Chain level string topology, pseudo-holomorphic disks, and Lagrangian submanifolds

#### 8月19日(日)

9:30-10:30 寺本 圭佑 (神戸大学・日本学術振興会特別研究員 PD)

カスプ辺の法写像の性質

11:00-12:00 古宇田 悠哉 (広島大学)

Shadow complexity of 3- and 4-manifolds

13:30-14:30 今野 北斗 (東京大学・日本学術振興会特別研究員 DC1)

Gauge theory for families of 4-manifolds

15:00-16:00 J. Scott Carter (サウスアラバマ大学)

The language of surfaces

16:30-17:30 企画講演 大鹿 健一 (大阪大学)

3次元多様体と Klein 群—Thurston の発想を今一度振り返る

## 8月20日(月)

9:30–10:30 横山 知郎 (京都教育大学・JST さきがけ)

曲面流について

11:00–12:00 寺本 央 (北海道大学・JST/PRESTO)

結晶点群、時間反転対称性の下でのバンド構造の幾何学的分類

13:30–14:30 伊敷 喜斗 (筑波大学・日本学術振興会特別研究員 DC1)

カントール距離空間の擬対称不変性質

15:00–16:00 石川 勝巳 (京都大学・日本学術振興会特別研究員 DC1)

Smooth quandle の局所構造とその変形

16:30–17:30 山下 靖 (奈良女子大学)

メビウス変換群の離散性判定問題について

## 8月21日(火)

9:30–10:30 片山 拓弥 (広島大学・日本学術振興会特別研究員 DC2)

曲面の写像類群の仮想埋め込みについて

11:00–12:00 Aniceto Murillo (マラガ大学)

Quillen rational homotopy theory revisited

# THE SPACE OF SHORT ROPES AND THE CLASSIFYING SPACE OF THE SPACE OF LONG KNOTS

KEIICHI SAKAI

ABSTRACT. An overview on recent progress in the study of the spaces of long embeddings is given. Main focus is put on joint work with Syunji Moriya (Osaka prefecture University); the classifying space of the topological monoid of long knots is shown to be weakly equivalent to the space of short (or reducible) ropes.

## 1. AN OVERVIEW

An embedding  $f: \mathbb{R}^j \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  is said to be a *long  $j$ -embedding* in  $\mathbb{R}^n$  if  $f$  coincides with the standard inclusion  $\mathbb{R}^j \hookrightarrow \mathbb{R}^j \times \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$  outside  $[0, 1]^{\times j}$ . Let  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  denote the space of long  $j$ -embeddings in  $\mathbb{R}^n$  endowed with  $C^\infty$ -topology. The main Theorem 1.5 describes the classifying space of  $B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ . The author would like to firstly review recent trends in the study of such embedding spaces that motivate us to consider the classifying spaces. The author also hopes that this survey might get any young researchers interested in this topic.

The set  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))$  can be seen as the set of isotopy classes of embeddings. In fact the knot theory, the study of isotopy classes of embeddings  $S^1 \hookrightarrow S^3$ , is equivalent to the study of  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ :

**Fact 1.1.** The 1-point compactification  $\mathbb{R}^n \rightarrow S^n$  gives an isomorphism

$$\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\text{Emb}(S^j, S^n))$$

of monoids, where the monoid structure is given by the *connected sum*.

The connected sum on  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  is defined as a concatenation of two embeddings in the  $x_1$ -direction. This makes  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  a topological monoid, whereas the monoid structure for  $S^j \hookrightarrow S^n$  is defined only on  $\pi_0$ . This monoid is commutative, and in particular  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$  is freely generated by the isotopy classes of prime (long) knots.

**1.1. Cohomology of  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$ .** It is straightforward to see that  $H^0(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n); A)$  is the space of isotopy invariants of long  $j$ -embeddings in  $\mathbb{R}^n$  (or equivalently  $S^j \hookrightarrow S^n$  by Fact 1.1) with values in  $A$ . Among them are the *Vassiliev type invariants*. From the knot-theoretic viewpoint it might be interesting what the positive-degree cohomology classes of  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  mean. Computation of cohomology of such mapping spaces (or  $H$ -spaces) as  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  has also been one of the central problems in algebraic topology. We review some approaches to  $H^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))$ , with relations to Vassiliev invariants in mind.

**1.1.1. Vassiliev's approach to  $H^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n))$**  [35]. Regard  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$  as a subspace of the contractible space  $\text{Map}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$  of “long maps”. By the “infinite dimensional Alexander duality” we may alternatively compute  $H_*(\Sigma_n)$ , where  $\Sigma_n$  (called the *discriminant*) is the complement of  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$  in  $\text{Map}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$ . The information of multipoints and singularities of maps induces a natural filtration on  $\Sigma_{n,1}$ . Roughly speaking the Alexander duals of strata of maps with  $k$  transverse double points are the Vassiliev invariants of order exactly

---

*Date:* June 22, 2018.

The speaker is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP25800038 and JP16K05144.

$k$  (a combinatorial characterization is given in [5]), and they appear as elements of the diagonal part  $E_1^{-k,k}$  of the induced spectral sequence. When  $n \geq 4$ , this spectral sequence in fact converges to  $H^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n))$  and moreover collapses at  $E_1$  over rationals (see §1.1.3 below). This also collapses at  $E_1$  over rationals even if  $n = 3$ ; see [23, 33].

1.1.2. *Chern-Simons perturbative theoretic approach.* One way to produce all the Vassiliev invariants of (long) knots is the integration over *configuration spaces* associated with *graphs*.

**Example 1.2** (see [7, 20, 34, 37]). The order two invariant is essentially unique (up to constant multiplications) and is given by

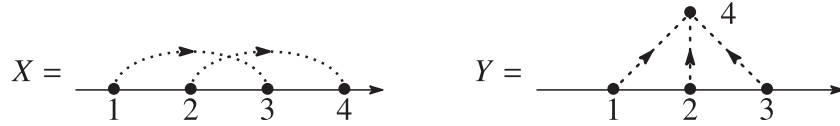
$$f \mapsto \int_{C_X(f)} \varphi_{X,f}^* \text{vol}_{S^2}^{\times 2} - \int_{C_Y(f)} \varphi_{Y,f}^* \text{vol}_{S^2}^{\times 3},$$

where

$$C_X(f) := \{(x_1, \dots, x_4) \in (\mathbb{R}^1)^{\times 4} \mid x_1 < \dots < x_4\} = \text{Conf}_4(\mathbb{R}^1),$$

$$C_Y(f) := \{(x_1, x_2, x_3; y_4) \in \text{Conf}_3(\mathbb{R}^1) \times \mathbb{R}^3 \mid f(x_i) \neq y_4 \text{ for } i = 1, 2, 3\} \subset \text{Conf}_3(\mathbb{R}^1) \times \mathbb{R}^3$$

are configuration spaces associated with (the vertices of) the graphs



and  $\varphi_{X,f}: C_X(f) \rightarrow (S^2)^{\times 2}$  and  $\varphi_{Y,f}: C_Y(f) \rightarrow (S^2)^{\times 3}$  are defined by

$$\varphi_{X,f}(x_1, \dots, x_4) := \left( \frac{f(x_3) - f(x_1)}{|f(x_3) - f(x_1)|}, \frac{f(x_4) - f(x_2)}{|f(x_4) - f(x_2)|} \right) \in (S^2)^{\times 2},$$

$$\varphi_{Y,f}(x_1, x_2, x_3; y_4) := \left( \frac{y_4 - f(x_i)}{|y_4 - f(x_i)|} \right)_{i=1,2,3} \in (S^2)^{\times 3}.$$

In general, for any weight system  $W$  of order  $k$  (see [3]), a formal sum of trivalent graphs  $\sum_{\Gamma; |V(\Gamma)|=k} W(\Gamma)\Gamma$  (added by some “correction terms”) gives an order  $k$  invariant via the similar integrations over configuration spaces  $C_\Gamma$  as above.

Generalizing the above construction, we have a linear map  $I: \mathcal{G}_{n,j}^* \rightarrow \Omega_{DR}^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))$ , where  $\mathcal{G}_{n,j}^*$  is the cochain complex consisting of (not necessarily trivalent) graphs and  $\Omega_{DR}^*$  is the de Rham complex functor. Moreover the map  $I$  restricted to particular graphs is a cochain map in some nice dimensions;

- $n > 3, j = 1$  [14],
- both  $n, j$  are odd and  $n > j > 1$ ;  $I|_{\text{1-loop graphs}}$  is a cochain map [15, 27, 30, 38],
- both  $n, j$  even and  $n > j \geq 2$ ;  $I|_{\text{tree graphs}}$  is a cochain map [27].

In other cases, the map  $I$  gives an element of  $H^1(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$  [28] and a nontrivial element of  $H_{DR}^{2n-3j-3}(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))$  for  $2n - 3j - 3 \geq 0$  with  $j > 1, n - j$  odd [27]. In particular if  $2n - 3j - 3 = 0$  (then  $n = 6k, n = 4k - 1$  for some  $k \geq 1$ ), the latter coincides with the Haefliger invariant [19]. These cohomology classes generalize the Vassiliev invariants in some sense.

1.1.3. *Embedding calculus.* As we have seen in the above, configuration spaces often play important roles in the study of embedding spaces. One of the reason is that there exist evaluation maps

$$\text{ev}_k: \text{Conf}_k(\mathbb{R}^j) \times \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n), \quad \text{ev}_k(x_1, \dots, x_k; f) := (f(x_1), \dots, f(x_k)).$$

These maps approximate embeddings by a finite number of points, and the adjoint map  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Map}(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^j), \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$  may be expected to become highly connected

as  $k$  increases. This may be thought of as a motivative idea of *manifold calculus* [39, 18]. In fact there exists a (homotopy) commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} T_\infty \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_2 \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & T_1 \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) \\ & & & & \swarrow & & \swarrow \\ & & & & & & \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) \end{array}$$

where the horizontal arrows form a tower of fibrations (called the *Taylor tower* since it has some similarities to the Taylor expansion of functions), and the connectivity of the map  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n) \rightarrow T_k \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  is approximately  $k(n - j - 2)$ . The space  $T_k \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  is given by the homotopy limit of the diagram consisting of the spaces of punctured embeddings with at most  $k$  holes (with some tangential data). The tower enables us to describe (a variant of)  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  as a derived mapping space of operads [2]. Such descriptions provide certain graph complexes that compute  $H^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))$  for  $n \geq 2j + 2$  and that prove the collapse of the Vassiliev spectral sequence. They look very similar to that appeared in §1.1.2.

When  $(n, j) = (3, 1)$ , it is not known whether  $T_\infty \text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  recovers  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  or not. But the diagram of spaces that is used to define  $T_{k+1} \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  consists of  $2^{k+1}$  spaces, each of which is the space of embeddings with  $l$  holes,  $0 \leq l \leq k + 1$ . This looks similar to the combinatorial characterization of Vassiliev invariants of order  $\leq k$ . Indeed it is known that the order two invariant factors through  $T_3 \text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  [13], and for general  $k \geq 2$  the  $k + 1$ -st stage produces order  $k$  invariants (see [12, 26, 29, 36]).

**1.2. Embedding spaces as  $\mathcal{D}$ -algebras.** The *little  $m$ -disks operad* is the collection  $\mathcal{D}^m := \{\mathcal{D}_k^m\}_{k \geq 0}$  of spaces, where  $\mathcal{D}_k^m$  is the space of configurations of  $k$  disjoint  $m$ -disks in the unit  $m$ -disk. Compositions of embeddings give maps  $\mathcal{D}_k^m \times (\mathcal{D}_{l_1}^m \times \dots \times \mathcal{D}_{l_k}^m) \rightarrow \mathcal{D}_{l_1 + \dots + l_k}^m$  that encode higher commutativity of  $m$ -fold loop spaces [6, 21]. The little  $j$ -disks operad acts on  $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$ , namely we have maps  $\mathcal{D}_k^j \times (\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))^{\times k} \rightarrow \text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  that encodes all the possible ways to take connected sums of  $k$  long embeddings. Considering the space of “framed” long embeddings, this action is extended to that of  $\mathcal{D}^{j+1}$  [8]. If  $n - j \geq 3$ , then  $\pi_0(\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n))$  is a group and hence the loop space recognition theorem [21] deduces that  $\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  is a  $(j + 1)$ -fold loop space. Although  $\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  is not a two-fold loop space because  $\pi_0(\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$  is not a group, it is a “free  $\mathcal{D}^2$ -space” and the homotopy type of each path component of  $\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  can be computed in principle [10, 11].

**1.3. The group completion of the long knot space; the main theorem.** As we have seen in §1.1, in the (meta)stable range of dimensions ( $n - j \geq 3$ ,  $n \geq 2j + 2$ , or  $2n - 3j - 3 \geq 0$  and  $j \geq 2$ ),  $\pi_*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)) \otimes \mathbb{Q}$  and  $H^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n); \mathbb{Q})$  can in principle be computed by using algebraic models. On the other hand, in particular the codimension two cases, these spaces are interesting (from knot theoretic viewpoint) but we can obtain only the information of  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^{n-2}, \mathbb{R}^n))$  via homotopy-theoretic methods. For example  $\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n-2}, \mathbb{R}^n)$  admits an action of little 2-disks operad, but it is not homotopy equivalent to any two-fold loop space since  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^{n-2}, \mathbb{R}^n))$  can never be a group [9]. The group completion  $\Omega B \text{Emb}(\mathbb{R}^{n-2}, \mathbb{R}^n)$  would be better from the homotopy-theoretic viewpoint (in fact  $\Omega B \text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n-2}, \mathbb{R}^n)$  is homotopy equivalent to a two-fold loop space).

The following result and the conjecture of Mostovoy [25] are thus quite curious;

**Theorem 1.3** ([25]). The fundamental group of the space  $B_2$  of “short ropes” (see Definition 1.10 below) is isomorphic to  $\widehat{\pi}_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ , the group completion of  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ .

**Conjecture 1.4** ([25]).  $B_2$  would be the classifying space  $B \text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  of  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ .

The conjecture 1.4 has been solved affirmatively in joint work [24] with Moriya. In fact it can be proved in a slightly generalized form. Outline of the proof is given in §2.

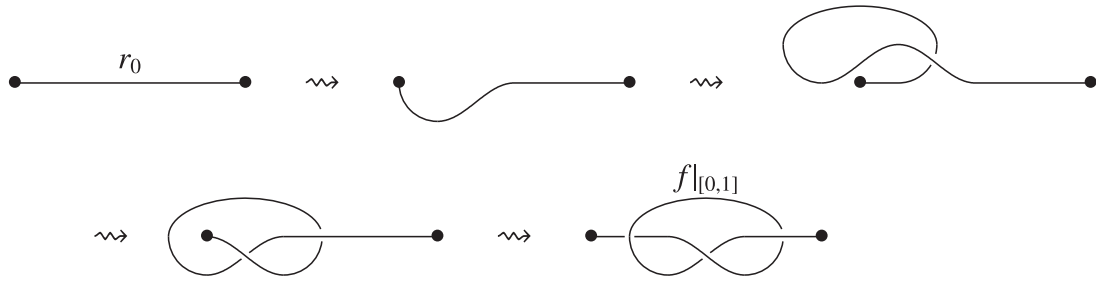


FIGURE 1.1. Tying the tight rope to get a (part of) long knot

**Theorem 1.5** ([24]). For  $n \geq 3$ , the space  $B_2$  of short ropes in  $\mathbb{R}^n$  is weakly homotopy equivalent to  $B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$ .

1.4. **Questions.** If  $n > 3$ , then  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n))$  is the trivial group and hence  $B_2$  is a *delooping* of  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$  (see [22]):

$$\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n) \sim \Omega B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n) \sim \Omega B_2.$$

In fact P. Salvatore [31] proved that  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$  ( $n > 3$ ) is weakly equivalent to a double loop space, and we can expect that  $B_2$  has a further delooping.

As mentioned in §1.2,  $\text{Emb}^{\text{fr}}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$  is acted on by the little 2-disks operad. Theorem 1.5 is valid for framed cases, and thus the space of *framed* short ropes in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) is expected to have a delooping.

**Question 1.6.** What are deloopings of the spaces of (framed) short ropes in  $\mathbb{R}^n$ ?

For  $n = 3$ , Theorem 1.5 gives a partial information of  $H_*(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ :

**Theorem 1.7** ([4]). Let  $M$  be a topological monoid. If  $\pi_0(M)$  is included in the center of the Pontrjagin ring  $H_*(M)$ , then there exists a ring isomorphism  $H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}] \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega BM)$ .

**Question 1.8.** Compute  $H_*(\Omega B_2)$ . Which Vassiliev invariants come from short ropes?

**Question 1.9.** What is  $B\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$  for  $j \geq 2$ ?

1.5. **Mostovoy's map**  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega B_2$ . Mostovoy's Theorem 1.3 implies that the classification of 1-parameter families of short ropes generalizes knot theory, and it would be worth describing the isomorphism  $\pi_1(B_2) \rightarrow \widehat{\pi}_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$  explicitly.

**Definition 1.10** ([25]). A *rope* is an embedding  $r: [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  such that  $r(i) = (i, 0, 0)$  for  $i = 0, 1$ . A rope is said to be *short* if its arc-length is not greater than 3. The space of short ropes equipped with the  $C^\infty$ -topology is denoted by  $B_2$ .

The *tight rope* is the short rope  $r_0$  defined by  $r_0(t) := (t, 0, 0)$  for  $0 \leq t \leq 1$ .

Clearly the length of any rope is not less than 1. The subscript “2” indicates that  $B_2$  is the space of ropes whose lengths are  $\leq 1 + 2$ .

After reducing the size of  $f \in \text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$  enough,  $f|_{[0,1]}$  gives a short rope. This rope can be joined to the tight rope in  $B_2$  in the following two ways (see Figure 1.1):

- (1) “tying rope around  $(0, 0, 0)$ ” to get  $f|_{[0,1]}$ ,
- (2) “tying rope around  $(1, 0, 0)$ ” to get  $f|_{[0,1]}$ .

Gluing the isotopy (1) and the inverse of (2), we obtain a loop in  $B_2$  based at  $r_0$ . Therefore we get a map  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega B_2$ . In other words, a natural map  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow B_2$  given by  $f \mapsto f|_{[0,1]}$  is null-homotopic and there exist two null-homotopies, and hence we have a map  $\widetilde{\Sigma}\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow B_2$ . Mostovoy has proved that this map induces an isomorphism on  $\pi_1$ . Because  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$  is a free commutative monoid, we have an injective homomorphism  $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)) \hookrightarrow \widehat{\pi}_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)) \cong \pi_1(B_2)$  of monoids. Thus for example an invariant of the homotopy classes of loops of short ropes restricts to a knot invariant.

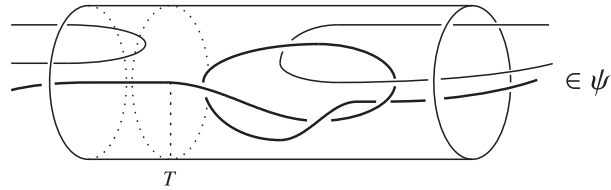


FIGURE 2.1. An element of  $\psi$  (the long component is drawn with a thick curve)

## 2. OUTLINE OF THE PROOF OF THEOREM 1.5

Below let  $D^m$  denote the *open* unit  $m$ -disk. The proof of Theorem 1.5 goes as follows;

- (1) Define a space  $\psi$  of certain 1-manifolds in  $\mathbb{R}^1 \times D^2$  (Definition 2.2) and a topological category  $\mathcal{K}$  of long knots (Definition 2.4), and prove that  $B\mathcal{K} \sim \psi$  (Theorem 2.8).
- (2) Introduce the notion of *reducible ropes* (Definition 2.9) and show that  $B_2$  is weakly equivalent to the space  $\mathcal{R}$  of reducible ropes (Theorem 2.10; the proof will be omitted).
- (3) Define the *cutting-off map*  $c: \mathcal{R} \rightarrow \psi$  and prove that this is a weak equivalence (§2.3).

Step (1) looks similar to the argument of [16]; the homotopy types of the classifying spaces of some cobordism categories have been studied in [16], and the methods in [16] work well for long knots because long knots can be considered as a kind of cobordisms. We need step (2) because reducible ropes fit better into the framework of step (1) and perhaps  $\mathcal{R}$  might be easier to deal with than  $B_2$ . The map  $c$  defined in step (3) is geometric and hence might be useful in applying the “rope theory” to the knot theory.

Below we only consider the case of  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ . For details see [24].

**2.1. The space of reducible 1-manifolds.** For a submanifold  $M \subset \mathbb{R}^1 \times D^2$  and a subset  $A \subset \mathbb{R}^1$ , we denote  $M|_A := M \cap (A \times D^2)$ . If  $A = \{T\}$  then we abbreviate it as  $M|_T$  and think of  $M|_T \subset D^2$  in a natural way.

**Definition 2.1.** A 1-manifold  $M \subset \mathbb{R}^1 \times D^2$  is said to be *reducible*<sup>1</sup> at  $T$  if it intersects  $\{T\} \times D^2$  transversely at exactly one point. If moreover  $M|_{(T-\epsilon, T+\epsilon)} = (T-\epsilon, T+\epsilon) \times \{M|_T\}$  for some  $\epsilon > 0$ , then we say  $M$  is *strongly reducible* at  $T$ . See Figure 2.1.

**Definition 2.2.** Define the set  $\psi$  as consisting of 1-manifolds  $M \subset \mathbb{R}^1 \times D^2$  such that

- (i)  $\partial M = \emptyset$ ,
- (ii) each path component of  $M$  is a closed, non-compact *subset* of  $\mathbb{R}^3$ , and
- (iii) there exists  $T$  such that  $M$  is reducible at  $T$  (see Figure 2.1).

By the above conditions (i)-(iii), we see that for any  $M \in \psi$  has exactly one path component  $M_0$  satisfying  $M|_T \neq \emptyset$  for any  $T \in \mathbb{R}^1$ . We say such a component is *long*. Other components are (if they exist) *long on exactly one side*; we say  $M_1$  is *long in the left* (resp. *right*) if there exists  $T \in \mathbb{R}^1$  such that  $M_1|_s \neq \emptyset$  for any  $s \leq T$  but  $M_1|_{(T, \infty)} = \emptyset$  (resp.  $M_1|_s \neq \emptyset$  for any  $s \geq T$  but  $M_1|_{(-\infty, T)} = \emptyset$ ).

We topologize  $\psi$  as in [16, §2.1]. Roughly speaking  $M, N \in \psi$  are “close to each other if they are close in a compact set”. This topology looks very similar to the “weak  $C^\infty$ -topology” [1, §I-4 D].

**Example 2.3.** Let  $\alpha: [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$  be a monotonically increasing function with  $\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} \infty$ . Let  $M(t) \in \psi$  ( $0 \leq t < 1$ ) be a family of 1-manifolds satisfying  $M(t)|_{[-\alpha(t), \alpha(t)]} = [-\alpha(t), \alpha(t)] \times \{0\}$ . This family converges to the trivial long knot  $\mathbb{R}^1 \times \{0\} \in \psi$  as  $t \rightarrow 1$ . See also [16, Example 2.2].

<sup>1</sup>This word comes from the knot theory; if  $M$  is reducible at  $T$ , then  $M$  can be decomposed into a “connected sum” of  $M|_{(-\infty, T]}$  and  $M|_{[T, \infty)}$ . But the author does not think it is the best terminology, because  $M|_{(-\infty, T]}$  and  $M|_{[T, \infty)}$  are not necessarily “non-trivial”. The author would like to ask readers to suggest any better terminology.



## 2.2. The category of long knots.

**Definition 2.4.** Define the *topological category*  $\mathcal{K}$  of long knots as follows. Define  $\text{Ob}(\mathcal{K}) = D^2$  equipped with the usual topology. For  $p, q \in D^2$ , non-identity morphisms from  $p$  to  $q$  are “long knots from  $p$  to  $q$ ,” namely pairs  $(T, M) \in \mathbb{R}_{>0}^1 \times \psi$  such that

- (a)  $M$  is connected (and hence long by the conditions in Definition 2.2),
- (b) there exists  $\epsilon > 0$  such that  $M|_{(-\infty, \epsilon)} = (-\infty, \epsilon) \times \{p\}$  and  $M|_{(T-\epsilon, \infty)} = (T-\epsilon, \infty) \times \{q\}$ .

We define the identity morphism  $\text{id}: p \rightarrow p$  to be  $(0, \mathbb{R}^1 \times \{p\})$ . We topologize the set of all morphisms  $\bigcup_{p,q} \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, q)$  as a subspace of  $(\{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}) \times \psi$ , where  $\sqcup$  stands for the disjoint union. The composition  $\circ: \text{Map}_{\mathcal{K}}(q, r) \times \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, q) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, r)$  is given by the connected sum

$$(T', M') \circ (T, M) := (T + T', M|_{(-\infty, T]} \cup (M'|_{[0, \infty)} + T\mathbf{e}_1)),$$

where  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  and  $+T\mathbf{e}_1$  is the parallel translation by  $T$  in the  $\mathbb{R}^1$ -direction.

The category  $\mathcal{K}$  has a contractible object space and its morphism space is homotopy equivalent to  $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \sqcup \{\text{id}\}$ . One of the reasons why we topologize the morphism space so that the identity maps are separated is that it makes a proof of “goodness” of the nerve  $N_*\mathcal{K}$  of  $\mathcal{K}$  (see [17, 32]) easier; see below.

The *nerve* of  $\mathcal{K}$  is by definition a *simplicial space*  $N_*\mathcal{K} = \{N_l\mathcal{K}\}_{l \geq 0}$  where  $N_l\mathcal{K}$  is the space of composable  $l$  morphisms in  $\mathcal{K}$ . Thus  $N_l\mathcal{K}$  is the space of long knots that are connected sums of at least  $l$  long knots;

$$N_l\mathcal{K} = \{(T_1 \leq \cdots \leq T_l; M) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^1)^{\times l} \times \psi \mid \\ M \text{ is a long knot that is strongly reducible at each } T_i\}.$$

The *classifying space*  $B\mathcal{K}$  of  $\mathcal{K}$  is by definition the *geometric realization* of  $N_*\mathcal{K}$ . To show  $B\mathcal{K} \sim \psi$ , we introduce two intermediate posets  $\mathcal{D}$  and  $\mathcal{D}^\perp$  and find a sequence of (weak) homotopy equivalences  $B\mathcal{K} \xleftarrow{\cong} B\mathcal{D}^\perp \xrightarrow{\cong} B\mathcal{D} \xrightarrow{\cong} \psi$ .

**Definition 2.5.** Define spaces  $\mathcal{D}^\perp \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^1 \times \psi$  by respectively

$$\mathcal{D}^{(\perp)} := \{(T, M) \in \mathbb{R}^1 \times \psi \mid M \text{ is (strongly) reducible at } T\}$$

and define a partial order  $\leq$  on  $\mathcal{D}$  so that  $(T, M) \leq (T', M')$  if  $M = M'$  and  $T \leq T'$ . We regard  $\mathcal{D}^{(\perp)}$  as a topological category in a natural way;  $\text{Ob}(\mathcal{D}^{(\perp)}) = \mathcal{D}^{(\perp)}$  and  $\text{Map}_{\mathcal{D}^{(\perp)}}(x, y) = \{(x, y)\}$  if  $x \leq y$  and  $\emptyset$  otherwise. We topologize  $\bigcup_{x,y \in \mathcal{D}} \text{Map}_{\mathcal{D}}(x, y)$  as a subspace of  $(\Delta \sqcup (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta)) \times \psi$ , where  $\Delta := \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$  is the diagonal set.

**Remark 2.6.** For  $(T, M) \in \mathcal{D}$ ,  $M$  is not necessarily connected, but any path components of  $M$  that are “one-sided long” are separated, namely all the left-sided (resp. right-sided) long components are contained in  $(-\infty, T) \times D^2$  (resp.  $(T, \infty) \times D^2$ ).

Remark that the  $l$ -th space of the nerve of  $\mathcal{D}^{(\perp)}$  is

$$N_l\mathcal{D}^{(\perp)} = \{(T_0 \leq \cdots \leq T_l; M) \mid M \in \psi \text{ is (strongly) reducible at each } T_i\}.$$

By the definition of the topologies of  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{D}^{(\perp)}$ , the identity morphisms form disjoint path components, thus their nerves are *good* simplicial spaces (see [32, Appendix A]).

**Proposition 2.7.** There exists a sequence of simplicial maps  $N_*\mathcal{K} \leftarrow N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{D}$  each of which is a degreewise homotopy equivalence. Since they are good simplicial spaces, this induces a sequence of homotopy equivalences  $B\mathcal{K} \xleftarrow{\cong} B\mathcal{D}^\perp \xrightarrow{\cong} B\mathcal{D}$  (see [32, Appendix A]).

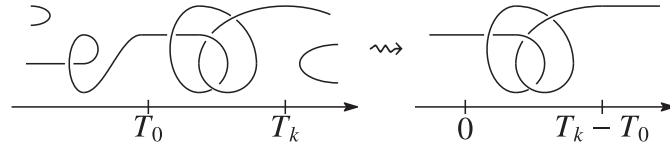
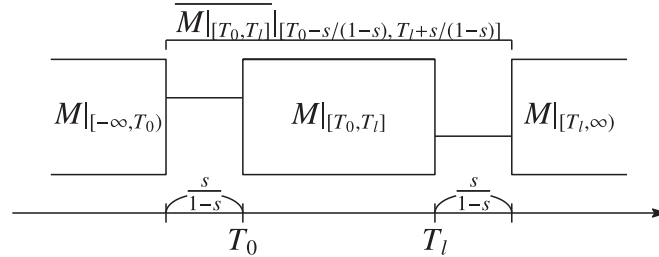


FIGURE 2.2. Cutting-off and long-extension

FIGURE 2.3. The homotopy from  $G \circ F$  to  $\text{id}$  in the proof of Proposition 2.7

*Proof.* Firstly the natural inclusion induces a simplicial map  $N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{D}$ . It is a degree-wise homotopy equivalent because, for any  $(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) \in N_l\mathcal{D}$ , we can canonically transform  $M$  so that  $M$  becomes strongly reducible at each  $T_i$  [16, Lemma 3.4].

Define a functor  $F: \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{K}$  on objects by  $(T, M) \mapsto M|_T$  and on morphisms by

$$F(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) := (0 \leq T_1 - T_0 \leq \dots \leq T_l - T_0; \overline{M|_{[T_0, T_l]} - T_0 e_1}),$$

where

$$(2.1) \quad \overline{M|_{[T_0, T_l]}} := ((-\infty, T_0) \times M|_{T_0}) \cup M|_{[T_0, T_l]} \cup ([T_l, \infty) \times M|_{T_l})$$

(see Figure 2.2) is obtained by cutting  $M|_{(-\infty, T_0]} \sqcup M|_{[T_l, \infty)}$  off and adding two half-lines. We call it the *long-extension* of  $(T_0 \leq \dots \leq T_l; M)$ . Remark 2.6 confirms that  $\overline{M|_{[T_0, T_l]}}$  is a morphism in  $\mathcal{K}$ . This induces a simplicial map  $F: N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{K}$ .

The “inverse”  $G: N_*\mathcal{K} \rightarrow N_*\mathcal{D}^\perp$  is defined by  $G(p) := (0, \mathbb{R}^1 \times \{p\})$  on level zero and by the natural inclusion on positive levels. It is not induced by any functor, but is a degreewise homotopy inverse to  $F$ . Indeed  $F \circ G$  is the identity, and

$$G \circ F(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) = (0 \leq T_1 - T_0 \leq \dots \leq T_l - T_0; \overline{M_0|_{[T_0, T_l]}})$$

is a result of a homotopy that “throws  $M|_{(-\infty, T_0]}$  and  $M|_{[T_l, \infty)}$  away to  $\pm\infty$ ” (see Figure 2.3), and is homotopic to the identity by the definition of the topology of  $\psi$ ; see Example 2.3.  $\square$

**Theorem 2.8.** The forgetful map  $N_l\mathcal{D} \rightarrow \psi$  given by  $(T_1 \leq \dots \leq T_l; M) \mapsto M$  induces a weak equivalence  $u: B\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \psi$ .

*Outline of proof.* This is proved by showing the relative homotopy group  $\pi_m(\psi'_s, B\mathcal{D})$  (where  $\psi'_s$  is the mapping cone of  $u$ ) vanishes for all  $m$ . This holds essentially because the fiber of  $N_l\mathcal{K} \rightarrow \psi$  is a union of  $l$ -simplices. See also [16, Theorem 3.10].  $\square$

**2.3. The space of reducible ropes.** We first extend the meaning of ropes (compare the following Definition 2.9 with Definition 1.10).

**Definition 2.9** ([25]). A *rope* is a compact connected 1-submanifold  $r \subset \mathbb{R}^1 \times D^2$  with nonempty boundary  $\partial r = \{r_0, r_1\}$  satisfying  $r_i \in \{i\} \times D^2$ . A *reducible rope* is a rope that is reducible at some  $t \in (0, 1)$  in the sense of Definition 2.1. Denote by  $\mathcal{R}$  the space of reducible ropes equipped with the same topology as  $\psi$ .

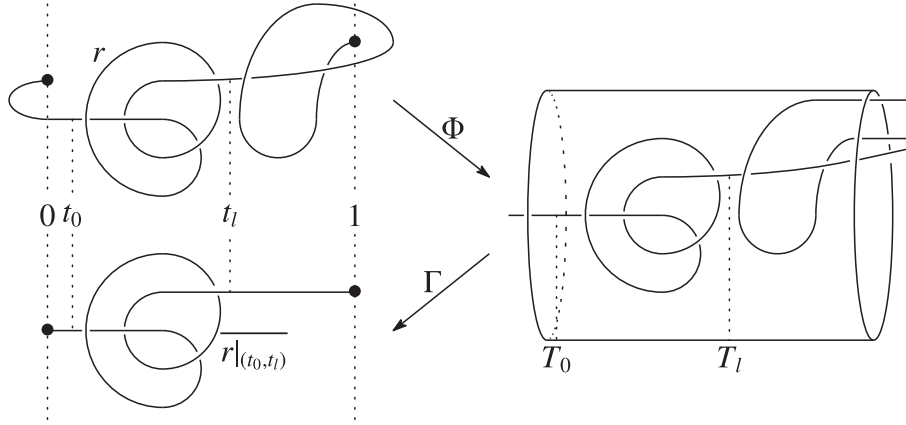


FIGURE 2.4. The maps  $\Phi$  and  $\Gamma$

By inspection we see that Mostovoy’s short rope (Definition 1.10) must be reducible at some  $t \in (0, 1)$ . Thus there exists an injective map  $B_2/\text{Diff}_+[0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ , where  $\text{Diff}_+[0, 1]$  acts on  $B_2$  as parameter changes. Composing the natural projection  $B_2 \rightarrow B_2/\text{Diff}_+[0, 1]$  (this is a homotopy equivalence because  $\text{Diff}_+[0, 1]$  is contractible), we have a map  $B_2 \rightarrow \mathcal{R}$ .

**Theorem 2.10.** The above map  $B_2 \rightarrow \mathcal{R}$  is a weak homotopy equivalence.

The proof is not difficult but technical. See [24, §3].

Choose and fix an orientation preserving diffeomorphism  $f: (0, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ , and define the cutting-off map  $c: \mathcal{R} \rightarrow \psi$  by

$$c(r) := (f \times \text{id}_{D^2})(r|_{(0,1)}).$$

See also Figure 2.4 below. Notice the similarity between  $c$  and the “long-extension” (2.1).

The rest of this article is devoted to showing that  $c$  is a weak equivalence. As we have done in §2.2, we introduce posets  $\mathcal{E}^{(\perp)}$  that intermediate  $\mathcal{R}$  and  $\psi$ .

**Definition 2.11.** Define the spaces  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}^\perp$  by respectively

$$\mathcal{E}^{(\perp)} := \{(t, r) \in (0, 1) \times \mathcal{R} \mid r \text{ is strongly reducible at } t\},$$

and define partial order  $\leq$  on  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}^\perp$  so that  $(t, r) \leq (t', r')$  if  $r = r'$  and  $t \leq t'$ . We equip  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}^\perp$  with a structure of topological categories in the same way as  $\mathcal{D}$ ;  $\bigcup_{x,y} \text{Map}_{\mathcal{E}^{(\perp)}}(x, y)$  is topologized as subspaces of  $(\Delta \sqcup ((0, 1) \times (0, 1) \setminus \Delta)) \times \mathcal{R}$ .

Notice that the nerve of  $\mathcal{E}^{(\perp)}$  is the space of “connected sums of ropes”;

$$N_l \mathcal{E}^{(\perp)} = \{(t_0 \leq \dots \leq t_l; r) \in (0, 1)^{\times(l+1)} \times \mathcal{R} \mid r \text{ is (strongly) reducible at each } t_i\}.$$

The nerves  $N_* \mathcal{E}^{(\perp)}$  are good simplicial spaces; the reason is the same as for  $N_* \mathcal{K}$ .

**Proposition 2.12.** There exists a sequence of simplicial maps  $N_* \mathcal{E} \xleftarrow{\cong} N_* \mathcal{E}^\perp \xrightarrow{\cong} N_* \mathcal{D}^\perp$  each of which is a degreewise homotopy equivalence. Since they are good simplicial spaces, this induces a sequence of homotopy equivalences  $B\mathcal{E} \xleftarrow{\cong} B\mathcal{E}^\perp \xrightarrow{\cong} B\mathcal{D}^\perp (\simeq B\mathcal{K})$ .

*Proof.* The inclusion functor  $\mathcal{E}^\perp \rightarrow \mathcal{E}$  induces a levelwise homotopy equivalence  $N_* \mathcal{E}^\perp \xrightarrow{\cong} N_* \mathcal{E}$ . The reason is the same as for  $\mathcal{D}^\perp \hookrightarrow \mathcal{D}$  (compare this with Proposition 2.7).

Recalling  $f: (0, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$  and  $c$  from the above, define a functor  $\Phi: \mathcal{E}^\perp \rightarrow \mathcal{D}^\perp$  by

$$\Phi(t; r) := (f(t); c(r)),$$

and for any  $l \geq 0$  define a map  $\Gamma: N_l \mathcal{D}^\perp \rightarrow N_l \mathcal{E}^\perp$  by

$$\Gamma(T_0 \leq \cdots \leq T_l; M) := (t_0 \leq \cdots \leq t_l; (f^{-1} \times \text{id}_{D^2})(\overline{M|_{[T_0, T_l]}})),$$

(recall  $\overline{M|_{[T_0, T_l]}}$  from (2.1)), where  $t_i := f^{-1}(T_i) \in (0, 1)$ . See Figure 2.4.

Notice that, if  $N$  is “knotted” outside any compact set, then possibly  $r := (f^{-1} \times \text{id}_{D^2})(N)$  might not be a regular (or tame) submanifold of  $\mathbb{R}^1 \times D^2$ . But if  $N = \overline{M|_{[T_0, T_l]}}$  then it is a union of straight lines outside  $[T_0, T_l] \times D^2$  and  $r$  is indeed a regular submanifold.

The functor  $\Phi$  induces a simplicial map  $\Phi: N_*\mathcal{E}^\perp \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ . It is in fact a levelwise homotopy equivalence with homotopy inverse  $\Gamma$ . Indeed  $\Phi \circ \Gamma$  is given by

$$\Phi \circ \Gamma(T_0 \leq \cdots \leq T_l; M) = (T_0 \leq \cdots \leq T_l; \overline{M|_{[T_0, T_l]}})$$

and it is homotopic to the identity by the similar argument to  $G \circ F \simeq \text{id}$  in the proof of Proposition 2.7. Next  $\Gamma \circ \Phi$  is given by

$$\Gamma \circ \Phi(t_0 \leq \cdots \leq t_l; r) := (t_0 \leq \cdots \leq t_l; \overline{r|_{(t_0, t_l)}}),$$

where

$$\overline{r|_{(t_0, t_l)}} := ([0, t_0] \times r|_{t_0}) \cup r|_{(t_0, t_l)} \cup ([t_l, 1] \times r|_{t_l}) \in \mathcal{R}$$

is the “long-extension” of  $r|_{(t_0, t_l)}$ , namely we replace  $r|_{(-\infty, t_0]} \cup r|_{[t_l, \infty)}$  with straight segments (see Figure 2.4). Thus to show  $\Gamma \circ \Phi \simeq \text{id}$ , we have to show that  $r|_{(-\infty, t_0]} \cup r|_{[t_l, \infty)}$  can be unknotted in a canonical way.

One way to do this has been given in [25, Lemma 10]. The outline is as follows. Notice that  $r|_{(-\infty, t_0]}$  can be seen as a rope that is strongly reducible at the endpoint  $r|_{t_0}$ . Parametrize  $r|_{(-\infty, t_0]}$  by some  $\rho: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  and consider a family of “truncated ropes”  $\rho|_{[s, 1]}$  ( $0 \leq s \leq 1$ ). Using some rotation-like homotopy centered at  $r|_{t_0}$ , the truncated rope  $\rho|_{[s, 1]}$  can be transformed to a rope whose endpoints are  $(0, 0, 0)$  and  $r|_{t_0}$ . This homotopy gives a way to unknot  $r|_{(-\infty, t_0]}$  keeping  $r$  strongly reducible at each  $t_i$ . Similarly  $r|_{[t_l, \infty)}$  can be unknotted and hence  $\Gamma \circ \Phi$  is homotopic to the identity.  $\square$

**Theorem 2.13.** The forgetful map  $N_l\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$  given by  $(t_0 \leq \cdots \leq t_l; r) \mapsto r$  induces a weak equivalence  $v: B\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ .

The proof is almost the same as that of Theorem 2.8. Thus we have  $\mathcal{R} \sim B\mathcal{K}$ :

**Corollary 2.14.** There exists a homotopy commutative diagram consisting of (weak) homotopy equivalences, where  $u', v'$  are the composite of  $u, v$  with the inclusions:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{\sim} & \psi \\ v' \uparrow \sim & & u' \uparrow \sim \\ B\mathcal{E}^\perp & \xrightarrow{\sim} & B\mathcal{D}^\perp \xrightarrow{\sim} B\mathcal{K} \end{array}$$

#### ACKNOWLEDGMENT

The author expresses his great appreciation to the organizers of the 65th Topology Symposium for giving this chance to talk. The author is also grateful to Syunji Moriya, Tadayuki Watanabe and Katsuhiko Kuribayashi for fruitful discussions, comments, and their supports.

#### REFERENCES

- [1] M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [2] G. Arone and V. Turchin, *On the rational homology of high dimensional analogues of spaces of long knots*, *Geom. Topol.* **18** (2014), 1261–1322.
- [3] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, *Topology* **34** (1995), 423–472.
- [4] M. G. Barratt, *A note on the cohomology of semigroups*, *J. London Math. Soc.* **36** (1961), 496–498.
- [5] J. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev’s invariants*, *Invent. Math.* **111** (1993), no. 1.

- [6] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy-everything H-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1117–1122.
- [7] R. Bott and C. Taubes, *On the self-linking of knots*, J. Math. Phys. **35** (1994), no. 10, 5247–5287.
- [8] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology **46** (2007), 1–27.
- [9] ———, *A family of embedding spaces*, Geom. Topol. Monogr., **13** (2018), 41–83.
- [10] ———, *Topology of spaces of knots in dimension 3*, Proc. Lond. Math. Soc. **101** (2010), no. 2, 477–496.
- [11] R. Budney and F. R. Cohen, *On the homology of the space of knots*, Geom. Topol. **13** (2009), 99–139.
- [12] R. Budney, J. Conant, R. Koytcheff, and D. Sinha, *Embedding calculus knot invariants are of finite type*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), no. 3, 1701–1742.
- [13] R. Budney, J. Conant, K. P. Scannell, and D. Sinha, *New perspectives on self-linking*, Adv. Math. **191** (2005), no. 1, 78–113.
- [14] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 949–1000.
- [15] A. Cattaneo and C. Rossi, *Wilson surfaces and higher dimensional knot invariants*, Comm. Math. Phys. **256** (2005), no. 3, 513–537.
- [16] S. Galatius and O. Randal-Williams, *Monoids of moduli spaces of manifolds*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 3, 1243–1302.
- [17] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [18] T. Goodwillie and M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory II*, Geom. Topol. **3** (1999), 103–118.
- [19] A. Haefliger, *Knotted  $(4k - 1)$ -spheres in  $6k$ -space*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 452–466.
- [20] T. Kohno, *Vassiliev invariants and de Rham complex on the space of knots*, Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993), Contemp. Math., vol. 179, pp. 123–138.
- [21] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer Verlag, Berlin, 1972, Lecture Notes in Math., vol. 271.
- [22] D. McDuff and G. Segal, *Homology fibrations and the “group-completion” theorem*, Invent. Math. **31** (1975/76), no. 3, 279–284.
- [23] S. Moriya, *Multiplicative formality of operads and Sinha’s spectral sequence for long knots*, Kyoto J. Math. **55** (2015), no. 1, 17–27.
- [24] S. Moriya and K. Sakai, *The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots*, to appear in Algebraic and Geometric Topology.
- [25] J. Mostovoy, *Short ropes and long knots*, Topology **41** (2002), no. 3, 435–450.
- [26] B. Munson, *Embeddings in the  $3/4$  range*, Topology **44** (2005), no. 6, 1133–1157.
- [27] K. Sakai, *Configuration space integral for embedding spaces and the Haefliger invariant*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 12, 1597–1644.
- [28] ———, *An integral expression of the first non-trivial one-cocycle of the space of long knots in  $\mathbb{R}^3$* , Pac. J. Math. **250** (2011), no. 2, 407–419.
- [29] ———, *Lin-Wang type formula for the Haefliger invariant*, Homology Homotopy Appl. **17** (2015), no. 2, 317–341.
- [30] K. Sakai and T. Watanabe, *1-loop graphs and configuration space integral for embedding spaces*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **152** (2012), no. 3, 497–533.
- [31] P. Salvatore, *Knots, operads and double loop spaces*, Int. J. Res. Not. (2006).
- [32] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 34, 105–112.
- [33] P. A. Songhafou-Tsopméné, *Formality of Sinha’s cosimplicial model for long knots spaces*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), no. 4, 2193–2205.
- [34] D. Thurston, *Integral expressions for the Vassiliev knot invariants*, Senior Thesis, Harvard University, 1995.
- [35] V. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*, Trans. Math. Monographs, vol. 98, Amer. Math. Soc.
- [36] I. Volić, *Finite type knot invariants and calculus of functors*, Comp. Math. **142** (2006), no. 1, 222–250.
- [37] I. Volić, *A survey of Bott-Taubes integration*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007), no. 1, 1–42.
- [38] T. Watanabe, *Configuration space integral for long  $n$ -knots and the Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 47–92.
- [39] M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory I*, Geom. Topol. **3** (1999), 67–102.

# Chain level string topology, pseudo-holomorphic disks, and Lagrangian submanifolds

入江 慶 (東京大学大学院数理科学研究科)\*

## 1. Lagrange 部分多様体のトポロジー

シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  とは  $2n$  次元の多様体  $M$  と  $M$  上の閉かつ非退化な 2 形式  $\omega$  との組である. もっとも基本的なのは

$$(\mathbb{C}^n, \omega_n := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$$

で, 任意のシンプレクティック多様体は局所的にはこの形に書けることが知られている (Darboux の定理).  $M$  の  $n$  次元部分多様体  $L$  であって  $\omega|_L \equiv 0$  となるものを  $(M, \omega)$  の Lagrange 部分多様体という. Lagrange 部分多様体はシンプレクティック幾何学の基本的な研究対象であるので, 与えられたシンプレクティック多様体の Lagrange 部分多様体を「分類」せよというのは自然な問題である. ところが次の問題すら完全解決からはほど遠い:

**問題 1.1** 与えられた  $n$  次元閉多様体  $L$  に対して, 埋込  $e: L \rightarrow \mathbb{C}^n$  で  $e^*\omega_n \equiv 0$  を満たすもの (Lagrange 埋込) が存在するか判定せよ.

$\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$  は  $\omega_n$  について Lagrange 部分多様体であるので  $n$  次元トーラスは  $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$  への Lagrange 埋込を持つ. 一方,  $L$  から  $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$  への Lagrange 埋込が存在するなら  $L$  の Euler 数は偶数であり, また  $L$  が向き付け可能なら Euler 数は 0 であることが初等的な考察から分かる. このような初等的な考察を越える (おそらく) 最初の結果は Gromov による次の定理 1.2 である.

閉複素円盤  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  を  $D$  とおく.

**定理 1.2 (Gromov [9])**  $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$  の任意の閉 Lagrange 部分多様体  $L$  について, 正則写像  $u: (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, L)$  で  $\int_D u^*\omega_n > 0$  を満たすものが存在する.

Stokes の定理から  $\langle \sum_{i=1}^n x_i dy_i|_L, u|_{\partial D} \rangle = \int_D u^*\omega_n$  であるので  $H^1(L; \mathbb{R}) \neq 0$ , 特に  $L$  は単連結でないことが分かる.

Fukaya [6] は, Gromov が定理 1.2 を証明するのに用いた擬正則円盤のモジュライ空間の理論と, Chas-Sullivan [2] によるストリング・トポロジー (ループ空間上の交叉積の理論) とを合わせていくつかの重要な結果を得, 特に  $(\mathbb{C}^3, \omega_3)$  への Lagrange 埋込を持つ素な三次元有向閉多様体を決定した (定理 2.3).

しかし [6] の議論はストリング・トポロジーにおける交叉積をチェイン・レベルで定義したものを使う必要があり, そのようなものを厳密に取り扱う枠組は当時は与えられていなかった. 講演者は, Chas-Sullivan [2] が発見した自由ループ空間のホモロジー上の Batalin-Vilkovisky (BV) 代数構造をチェイン・レベルに持ち上げる枠組を [12] で

本研究は日本学術振興会海外特別研究員派遣制度の支援を受けた.

\* e-mail: iriek@ms.u-tokyo.ac.jp

<sup>1</sup> 本稿では多様体は全て  $C^\infty$  級とする.

導入し、それと擬正則曲線の理論 (特に, Fukaya-Oh-Ohta-Ono [8] による擬正則円盤のモジュライ空間上の倉西構造の構成とその摂動) を合わせて, [13] において上で述べた議論を厳密に実行した. これを解説するのが本稿の目的である.

本稿の構成は次のようである. まず2節で主結果 (定理 2.1) を述べ, Lagrange 部分多様体のトポロジーへの応用を与える. 3節でストリング・トポロジー, 特にループ括弧積について説明し, 4節で Fukaya [6] に基づき主結果の証明のアイデアを説明する. 5節では [12] で導入した自由ループ空間の鎖複体モデルを説明し, 6節では, 5節の内容と擬正則円盤のモジュライ空間の理論をあわせて, 主結果の証明を概説する.

## 2. 主結果とその応用

本節では2.1節で若干の準備をした後に2.2節で主結果 (定理 2.1) とその応用を述べる.

### 2.1. 準備

#### 2.1.1. $L_\infty$ 代数

3節で説明するように, 閉多様体の自由ループ空間のホモロジーの上にはループ括弧積による Lie 代数の構造が定まる. 本稿で重要な役割を果たすのは, この演算をチェイン・レベルで定義することで得られる高次のループ括弧積 (Massey 積のたぐい) である. このようなものを扱う枠組として  $L_\infty$  代数 (ホモトピー Lie 代数ともよばれる) の概念が便利である. ここではとりあえず定義だけ説明する.

$V$  を  $\mathbb{Z}$  次数付ベクトル空間とする (係数体は標数 0, 本稿では主に  $\mathbb{R}$  の場合を考える).  $(\ell_k)_{k \geq 1}$  で次の条件を満たすものを  $V$  上の  $L_\infty$  構造といい,  $V$  と  $(\ell_k)_{k \geq 1}$  の組を  $L_\infty$  代数という:

- 任意の  $k \geq 1$  について,  $\ell_k$  は  $\wedge^k V$  から  $V$  への次数  $k - 2$  の線形写像.
- 任意の  $k \geq 1$  と  $x_1, \dots, x_k \in V$  について

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ \sigma \in \mathcal{S}_k}} \frac{(-1)^\star}{k_1!(k_2-1)!} \ell_{k_2}(\ell_{k_1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k_1)}), x_{\sigma(k_1+1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = 0 \quad (1)$$

が成立する (符号  $\star$  を表す式は省略する).

(1) は  $k = 1$  のときは  $\ell_1^2 = 0$  つまり  $(V, \ell_1)$  が鎖複体であることを表す.  $k = 2$  のときは  $\ell_2$  が Leibniz 則を満たすこと,  $k = 3$  のときは  $\ell_2$  が Jacobi 則をホモトピー  $\ell_3$  を法として満たすことを表している. 特に任意の  $k \geq 3$  について  $\ell_k = 0$  となるならば Jacobi 則は厳密に成立し, そのような  $L_\infty$  代数を dg Lie 代数という. 本稿では, dg Lie 代数の場合は  $\ell_1$  を  $\partial$ ,  $\ell_2$  を  $\{, \}$  と書く.

#### 2.1.2. Maslov 類

$L$  を  $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$  の閉 Lagrange 部分多様体とする. まず, Maslov 類  $\mu_L \in H^1(L; \mathbb{Z})$  を定義しよう (混乱の恐れのないときは  $\mu_L$  を単に  $\mu$  と書く).

$\mathbb{C}^n$  の実  $n$  次元部分ベクトル空間  $V$  で  $\omega_n|_V \equiv 0$  を満たすもの全体のなす集合を  $\text{GLag}_n$  とおき, 次のような写像の列を考える:

$$\rho_L: L \rightarrow \text{GLag}_n \cong U(n)/O(n) \rightarrow U(1).$$

一つ目の写像は各  $x \in L$  に  $T_x L \subset \mathbb{C}^n$  を与えることで、二つ目は  $U(n)/O(n) \rightarrow \text{GLag}_n; [U] \mapsto U(\mathbb{R}^n)$  で定義され、三つ目は  $\det^2$  である。このとき  $\mu_L := \rho_L^*[U(1)]$  と定義する。  $\mathbb{Z}$  のイデアル  $\mu_L(H_1(L: \mathbb{Z}))$  を生成する非負整数を  $L$  の最小 Maslov 数という。  $L$  が向き付け可能なときは最小 Maslov 数は偶数であることが容易に分かる。

### 2.1.3. ループ空間の記号

次にループ空間に関する記号をいくつか導入する。  $\mathcal{L}L := C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, L)$  とおき  $C^\infty$  級位相を入れる。  $a \in H_1(L: \mathbb{Z})$  に対して  $\mathcal{L}^a L := \{\gamma \in \mathcal{L}L \mid [\gamma] = a\}$  とおき

$$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}^a L) := H_{*+n+\mu(a)-1}(\mathcal{L}^a L: \mathbb{R}), \quad \mathbb{H}_*(\mathcal{L}L) := \bigoplus_{a \in H_1(L: \mathbb{Z})} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}^a L)$$

とおく。任意の  $a \in H_1(L: \mathbb{Z})$  に対して  $\bar{a} \in H_2(\mathbb{C}^n, L: \mathbb{Z})$  を  $\partial \bar{a} = a$  で定義し、任意の実数  $E > 0$  に対して

$$F^E \mathbb{H}_*(\mathcal{L}L) := \bigoplus_{\omega_n(\bar{a}) > E} \mathbb{H}(\mathcal{L}^a L)$$

とおけば  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}L)$  上の自然な Filtration (Action Filtration) が定まる。最後に Action Filtration による完備化を定義する：

$$\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L) := \varprojlim_{E \rightarrow \infty} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}L) / F^E \mathbb{H}_*(\mathcal{L}L).$$

## 2.2. 主結果とその応用

次の定理 2.1 が本稿の主結果である。

**定理 2.1**  $L$  は  $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$  の閉 Lagrange 部分多様体で、向きとスピン構造<sup>2</sup>を持つとする。このとき、  $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}L)$  上の  $L_\infty$  構造  $(\ell_k)_{k \geq 2}$  ( $\ell_1 = 0$  とする) と  $X \in \widehat{\mathbb{H}}_{-1}(\mathcal{L}L)$ ,  $Y \in \widehat{\mathbb{H}}_2(\mathcal{L}L)$  で次の条件を満たすものが存在する：

(i): 任意の  $k \geq 2$  と  $a_1, \dots, a_k \in H_1(L: \mathbb{Z})$  に対して

$$\ell_k(\mathbb{H}(\mathcal{L}^{a_1} L) \wedge \dots \wedge \mathbb{H}(\mathcal{L}^{a_k} L)) \subset \mathbb{H}(\mathcal{L}^{a_1 + \dots + a_k} L)$$

が成り立つ。特に  $\ell_k$  は Action Filtration を保つので、  $\widehat{\mathbb{H}}(\mathcal{L}L)$  の上にのびる。

(ii): ある  $\varepsilon > 0$  が存在して  $X \in F^\varepsilon \widehat{\mathbb{H}}_{-1}(\mathcal{L}L)$  が成り立つ。

(iii):  $X \in \widehat{\mathbb{H}}_{-1}(\mathcal{L}L)$  と  $Y \in \widehat{\mathbb{H}}_2(\mathcal{L}L)$  は

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ell_k(X, \dots, X)}{k!} = 0, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ell_k(Y, X, \dots, X)}{(k-1)!} \Big|_{a=0} = [L] \quad (2)$$

を満たす (特に  $X$  は  $L_\infty$  構造  $(\ell_k)_{k \geq 2}$  の Maurer-Cartan 元)。

(2) の二つの式の左辺は無限和であるが、条件 (ii) より完備化  $\widehat{\mathbb{H}}_*(\mathcal{L}L)$  において意味を持つことに注意。また二つ目の式の右辺の  $[L]$  は、各  $p \in L$  に対して  $p$  への定置ループを対応させる写像  $L \rightarrow \mathcal{L}L$  から定まるホモロジー上の線形写像  $H_*(L) \rightarrow H_*(\mathcal{L}L)$  による  $L$  の基本類の像である。

<sup>2</sup> スピン構造は、  $L$  に境界を持つ擬正則円盤のモジュライ空間の向きを決めるのに使う。実際はより弱い構造である相対スピン構造で十分である。 [7] Chapter 8 参照。



定理 2.1 から導かれる, Lagrange 部分多様体のトポロジーに関する重要な結果を二つ説明する (いずれも Fukaya [6] による). 証明の詳細については [6] または [14] を参照されたい.

まず (2) の二つ目の式から, ある  $a_1, \dots, a_{k-1} \in H_1(L; \mathbb{Z})$  が存在して

$$X(-a_1), \dots, X(-a_{k-1}), Y(a_1 + \dots + a_{k-1}) \neq 0$$

となる. これと, 一般に閉多様体  $X$  が aspherical (つまり  $\pi_{\geq 2}(X) = 0$ ) ならば任意の  $i > \dim X$  について  $H_i(\mathcal{L}X; \mathbb{Z}) = 0$  となることを用いると次が示される:

**定理 2.2**  $L$  が定理 2.1 の条件を満たし aspherical ならば  $L$  の最小 Maslov 数は 2.

特に  $L$  が  $n$  次元トーラスと同相なら最小 Maslov 数 2 であることが分かるが, これは Audin [1] による予想であった. この Audin 予想については多くの人の研究があったが, 最近出版された Cieliebak-Mohnke [3] で最終的に解決されたようである. もう一つの重要な結論は次の定理である:

**定理 2.3**  $L$  が向きづけ可能かつ素な三次元閉多様体とするとき次の二つは同値:

(i):  $L$  から  $(\mathbb{C}^3, \omega_3)$  への Lagrange 埋込が存在する.

(ii):  $L$  は  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  と閉曲面との直積と同相.

(ii)  $\implies$  (i) は初等的に確認できる. 難しいのは (i)  $\implies$  (ii) であり, これは定理 2.1 とループ空間のトポロジーについての初等的な考察, および古典的な三次元多様体論をあわせて証明される. なお Lagrange 部分多様体が単調という強い仮定のもとでは ( $L$  が素であることを仮定しなくても) 同様の結論が成立することが Damian [4] および Evans-Kędra [5] により示されていた.

### 3. スtring・トポロジー, 特にループ括弧積

String・トポロジーとは, Chas-Sullivan により [2] で創始された, (多様体の) 自由ループ空間上の交叉積の理論である. 本稿では特に, 自由ループ空間のホモロジー上に Lie 代数の構造を定めるループ括弧積 (Loop Bracket) が重要な役割を果たす. 本節では, その定義を (正確さはやや犠牲にして) 説明する.

$M$  を  $n$  次元閉多様体とし自由ループ空間  $\mathcal{L}M = C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$  への  $C^\infty$  級写像  $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathcal{L}M$ ,  $\tau: \Delta^\ell \rightarrow \mathcal{L}M$  を考える.  $M$  への写像

$$e_\sigma: \Delta^k \rightarrow M; p \mapsto \sigma(p)(0), \quad \bar{e}_\tau: \Delta^\ell \times [0, 1] \rightarrow M; (q, \theta) \mapsto \tau(q)(\theta)$$

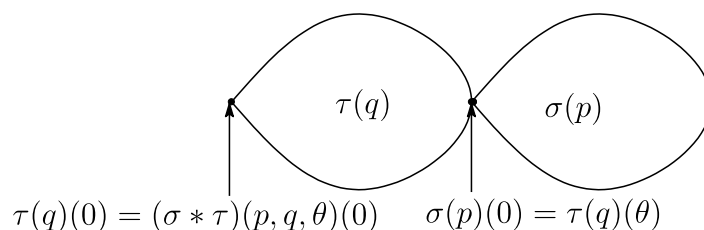
を考え, そのファイバー積から  $\mathcal{L}M$  への写像

$$\sigma * \tau: \Delta^k_{e_\sigma} \times_{\bar{e}_\tau} (\Delta^\ell \times [0, 1]) \rightarrow \mathcal{L}M \quad (3)$$

を

$$(\sigma * \tau)(p, q, \theta)(t) := \begin{cases} \tau(q)(2t) & (0 \leq t \leq \theta/2) \\ \sigma(p)(2t - \theta) & (\theta/2 \leq t \leq (1 + \theta)/2) \\ \tau(q)(2t - 1) & ((1 + \theta)/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定義する<sup>3</sup>.



$e_\sigma$  と  $e_\tau$  が  $M$  上で横断的に交わっているとすると、そのファイバー積は  $k + l + 1 - n$  次元のコンパクト角付き多様体になり、その単体分割をとれば写像  $\sigma * \tau$  は  $\mathcal{L}M$  上の  $k + l + 1 - n$  次元の特異鎖を定める<sup>4</sup>。記号の濫用でこれも  $\sigma * \tau$  と書く。

そこでループ括弧積  $\{, \} : H_*(\mathcal{L}M)^{\otimes 2} \rightarrow H_{*+1-n}(\mathcal{L}M)$  を

$$\left\{ \left[ \sum_i a_i \sigma_i \right], \left[ \sum_j b_j \tau_j \right] \right\} := \left[ \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i * \tau_j + (-1)^* \tau_j * \sigma_i) \right]$$

で定義する (符号  $*$  は省略)。ここで  $a_i$  と  $b_j$  は係数、 $\sigma_i$  と  $\tau_j$  は単体からの写像を表す。 $\sigma_i * \tau_j$  と  $\tau_j * \sigma_i$  は横断正則性条件が成立している場合にしか定義されないが、今の場合は、与えられたホモロジー類に対して、それを満たすようなサイクルをとればよいので問題ない。また、右辺のサイクルは  $*$  積を定義する際の単体分割の取り方に依存するが、ホモロジー類は一意に決まるので上の定義は well-defined である。

Chas-Sullivan [2] は、このようにして定義されたループ括弧積が  $H_{*+n-1}(\mathcal{L}M)$  に次数付 Lie 代数の構造を定めることを示した。これは Batalin-Vilkovisky (BV) 代数というより大きい代数構造の一部であるが、そのシンプレクティック・トポロジーへの応用はまだあまりないと思われる。(BV 構造の他の部分として、結合的な積構造を定めるループ積があるが、[10] ではその Hamilton 力学系の周期解への応用を与えた。)

#### 4. ループ括弧積と擬正則円盤のモジュライ空間

本節では、定理 2.1 の証明の直観的なアイデア (Fukaya [6] による) を説明する。まず  $L$  に境界を持つ正則円盤全体のなすモジュライ空間を考える。 $a \in H_1(L; \mathbb{Z})$  に対して

$$\mathring{M}(\bar{a}) := \{u : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, L) \mid \bar{\partial}u = 0, [u] = \bar{a}\} / \text{Aut}(D, 1)$$

とおき ( $D$  は閉複素円盤)、 $L$  のループ空間  $\mathcal{L}^a L$  への写像

$$e\dot{v}_a : \mathring{M}(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{L}^a L; \quad [u] \mapsto u|_{\partial D}$$

を考える。左辺の  $[u]$  は  $\text{Aut}(D, 1)$  分の不定性があるためこれは well-defined ではないが、とりあえず議論を進める。 $\mathring{M}(\bar{a})$  は自然な位相についてコンパクトにならないが、安定写像を付け加えることで得られる標準的なコンパクト化が存在し、これを  $M(\bar{a})$  と書く。また  $e\dot{v}_a$  をのぼして  $ev_a : M(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{L}^a L$  を定義する<sup>5</sup>。

<sup>3</sup>ただし右辺は一般には  $C^\infty$  級ではないので、この定義は適当に修正する必要がある。その修正の仕方に標準的なものはないので、特にチェイン・レベルで話を作るときはこのステップは慎重に議論する必要があるが、ここではこの点には深入りしない。

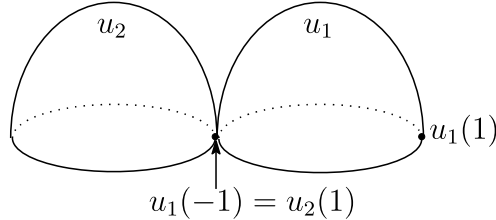
<sup>4</sup>もちろん単体分割の取り方は一意でないがこれは well-defined でないが、その点もとりあえず深入りしない。

<sup>5</sup>このようにのぼせるためには、 $e\dot{v}_a$  を定義するときループのパラメータ付けを慎重に定める必要がある。

安定写像の定義は本稿では説明しないが ([7] Chapter 3 参照), いま重要なのは  $\mathcal{M}(\bar{a})$  の余次元1の境界  $\partial_1 \mathcal{M}(\bar{a})$  の内部  $(\partial_1 \mathring{\mathcal{M}})(\bar{a})$  が一点で貼りあった二つの正則円盤のモジュライ空間と同一視できることである. これを

$$(\partial_1 \mathring{\mathcal{M}})(\bar{a}) = \{(u_1, u_2) \mid \bar{\partial}u_1 = \bar{\partial}u_2 = 0, \quad [u_1], [u_2] \neq 0, \quad [u_1] + [u_2] = \bar{a}, \\ u_1(-1) = u_2(1)\} / (\text{Aut}(D, \{-1, 1\}) \times \text{Aut}(D, 1)) \quad (4)$$

と書こう.



さて

$$x(a) := (\text{ev}_a)_* [\mathcal{M}(\bar{a})] \in C_{n+\mu(a)-2}(\mathcal{L}^a L) \quad (5)$$

とおこう. ここで  $[\mathcal{M}(\bar{a})]$  はモジュライ空間  $\mathcal{M}(\bar{a})$  の (境界を法とした) 相対基本ホモロジー類を表す「鎖」であり, 右辺の  $C_*(\mathcal{L}^a L)$  はループ空間  $\mathcal{L}^a L$  の「鎖」全体のなす複体を表す. 勿論これは直観的な説明であり, (5) 式に意味を付けて本節の残りの議論を正当化することが次節以降の目標となるが, とりあえず議論をすすめる. [6] の重要な洞察は

$$\partial x(a) = \frac{1}{2} \sum_{a_1+a_2=a} \{x(a_1), x(a_2)\} \quad (6)$$

が成り立つということである. ここで右辺の  $\{, \}$  はチェイン・レベルで定義されたループ括弧積である. (6) は, 直観的には,  $\partial_1 \mathcal{M}(\bar{a})$  の記述 (4) とループ括弧積のチェイン・レベルの記述 (3節) がちょうど対応することにより説明される.

さて  $x := \sum_{\mathcal{M}(\bar{a}) \neq \emptyset} x(a)$  は無限和であるが, Gromov コンパクト性より

$$\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L) := \varprojlim_{E \rightarrow \infty} \left( \bigoplus_{a \in H_1(L; \mathbb{Z})} C_{*+n+\mu(a)-1}(\mathcal{L}^a L) \right) / \left( \bigoplus_{\omega_n(\bar{a}) > E} C_{*+n+\mu(a)-1}(\mathcal{L}^a L) \right)$$

の元として意味を持ち, Maurer-Cartan 方程式  $\partial x - \frac{1}{2}\{x, x\} = 0$  を満たす. さらに  $\mathbb{C}^n$  上の (コンパクト台) Hamilton 微分同相写像  $\varphi$  で  $\varphi(L) \cap L = \emptyset$  を満たすものが存在することから, Cauchy-Riemann 方程式の Hamilton 摂動の1パラメータ族を考えて上と同様な議論をすることで,  $y \in \widehat{\mathcal{C}}_2(\mathcal{L}L)$  で  $(\partial y - \{x, y\})|_{a=0}$  が  $L$  の基本類を代表するサイクルとなるようなものがとれる.

以上は鎖複体  $\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L)$  上の議論であったが,  $L_\infty$  代数に対する Homotopy Transfer Theorem ([15] Section 10.3 参照) を使うと,  $\widehat{\mathfrak{H}}_*(\mathcal{L}L)$  上の  $L_\infty$  代数構造  $(\ell_k)_{k \geq 2}$  で dg Lie 代数  $(\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L), \{, \})$  とホモトピー同値なものが定義され, さらに鎖  $x, y$  に対応して,  $\widehat{\mathfrak{H}}_*(\mathcal{L}L)$  の元  $X, Y$  で定理 2.1 の条件を満たすものがとれる (このステップの詳細は [14] を参照されたい).

以上が定理 2.1 の証明の概要であるが, これを正当化するにはまず, 自由ループ空間  $\mathcal{L}L$  の適切な鎖複体モデル  $\widehat{\mathcal{C}}_*(\mathcal{L}L)$  を見つける必要がある. これは純トポロジー的な問題であり, 5節で論じる. 次に鎖  $x, y$  を定義するには, 擬正則曲線 (およびその Hamilton 摂動) のモジュライ空間の基本鎖を考える必要があるが, そのためにモジュライ空間の仮想摂動のテクニックを用いる. これを6節で論じる.

## 5. 自由ループ空間の鎖複体モデル

本節では[12]に基づいて自由ループ空間の鎖複体モデルを導入する. 本節の内容は, ほぼ[11]の5.2節と同じであるが, 両者の間にはいろいろ細かい違いがあることを注意しておく. 本節の内容は純トポロジー的なものであるので, 任意の  $n$  次元有向閉多様体 ( $M$  とかく) の上で論じる.

まず任意の  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して

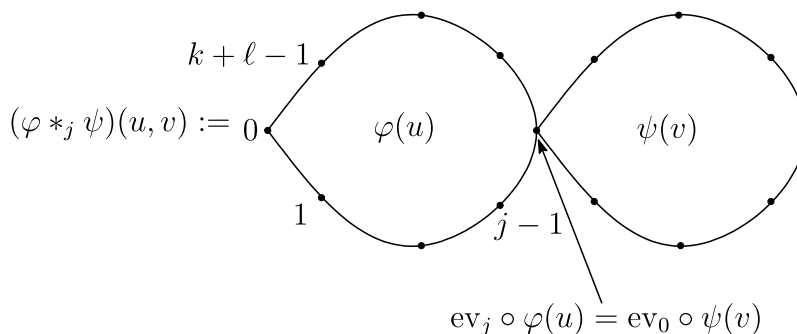
$$\mathcal{L}_{k+1}M := \{(T, \gamma, t_1, \dots, t_k) \mid T \in \mathbb{R}_{>0}, \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, M), \\ 0 < t_1 < \dots < t_k < T, \partial_t^m \gamma(t_j) = 0 \quad (\forall m \geq 1, 0 \leq \forall j \leq k)\}$$

とおく. これは  $k+1$  個の標識点  $t_0 := 0, t_1, \dots, t_k$  を持つ  $M$  上の自由ループ全体のなす空間である. 最後の条件は, 各標識点の上で  $m$  階の微分が任意の  $m \geq 1$  について消えているというもので, これは  $C^\infty$  級という条件を保ったままループの concatenation をとるために必要となる. 各  $j \in \{0, \dots, k\}$  に対して,  $\text{ev}_j : \mathcal{L}_{k+1}M \rightarrow M$  を  $\text{ev}_j(T, \gamma, t_1, \dots, t_k) := \gamma(t_j)$  で定義する.

集合  $\mathcal{L}_{k+1}M$  の上には位相を考えず, かわりにプロットというものを考える. 任意の自然数  $n$  について  $\mathbb{R}^n$  の有向部分多様体全体のなす集合を  $\mathcal{U}_n$  とおき  $\mathcal{U} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n$  とおく.  $U \in \mathcal{U}$  と写像  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{L}_{k+1}M$  の組  $(U, \varphi)$  で次の条件 (a), (b) を満たすものを  $\mathcal{L}_{k+1}M$  上のプロットとよび, プロット全体の集合を  $\mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)$  と書く.

- (a):  $\varphi$  は  $C^\infty$  級写像. つまり  $\varphi = (T^\varphi, \gamma^\varphi, t_1^\varphi, \dots, t_k^\varphi)$  とおけば  $T^\varphi, t_1^\varphi, \dots, t_k^\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}_{>0})$  で, かつ  $\{(u, t) \mid u \in U, 0 \leq t \leq T^\varphi(u)\} \rightarrow M; (u, t) \mapsto \gamma^\varphi(u)(t)$  は  $C^\infty$  級写像.
- (b):  $\text{ev}_0 \circ \varphi : U \rightarrow M$  は沈め込み.

任意の  $(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)$ ,  $(V, \psi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\ell+1}M)$  と  $j \in \{1, \dots, k\}$  について, 条件 (b) よりファイバー積  $U_{\text{ev}_j \circ \varphi \times \text{ev}_0 \circ \psi} V$  は再び  $\mathcal{U}$  の元になり (向きを決める必要があるが), ループの concatenation をとることで自然な写像  $\varphi *_j \psi : U_{\text{ev}_j \circ \varphi \times \text{ev}_0 \circ \psi} V \rightarrow \mathcal{L}_{k+\ell}M$  が定義できる.



そこでプロットのファイバー積を定める写像

$$\circ_j : \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M) \times \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\ell+1}M) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+\ell}M)$$

を

$$(U, \varphi) \circ_j (V, \psi) := (U_{\text{ev}_j \circ \varphi \times \text{ev}_0 \circ \psi} V, \varphi *_j \psi)$$

で定義する.

次にプロットを用いてループ空間のホモロジーを計算するために、プロットとコンパクト台微分形式を組み合わせた de Rham 鎖というものを考える。任意の  $N \in \mathbb{Z}$  に対して  $\mathbb{R}$  ベクトル空間

$$C_N^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M) := \left( \bigoplus_{(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)} \mathcal{A}_c^{\dim U - N}(U) \right) / Z_N$$

を考える。ただし  $\mathcal{A}_c^*(U)$  は  $U$  上のコンパクト台微分形式全体のなす  $\mathbb{R}$  ベクトル空間であり、 $Z_N$  は

$$(U, \varphi, \pi_! \omega) - (V, \varphi \circ \pi, \omega)$$

の形のもので生成される部分空間である (ここで  $(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+1}M)$ ,  $V \in \mathcal{U}$ ,  $\pi : V \rightarrow U$  は  $C^\infty$  級の沈め込みであり、 $\pi_!$  はファイバーに沿った積分を表す)。  $C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$  上の境界作用素  $\partial$  は

$$\partial[(U, \varphi, \omega)] := (-1)^{|\omega|+1}[(U, \varphi, d\omega)]$$

で定義する。ファイバーに沿った積分は外微分と (符号を法にして) 可換なのでこれは well-defined であり、明らかに  $\partial^2 = 0$  を満たす。このようにして得られる鎖複体  $C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$  を  $\mathcal{L}_{k+1}M$  の de Rham 鎖複体、その元を de Rham 鎖ということにする。またそのホモロジーを  $H_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$  と書く。このホモロジーは次の補題から計算される:

**補題 5.1** (i): 任意の  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について、標識点を忘れることで定義される写像

$$\mathcal{L}_{k+1}M \rightarrow \mathcal{L}_1M; \quad (T, \gamma, t_1, \dots, t_k) \rightarrow (T, \gamma)$$

が誘導する線形写像  $H_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M) \rightarrow H_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_1M)$  は同形である。

(ii): 同形  $H_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_1M) \cong H_*^{\text{sing}}(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$  が成り立つ。ただし右辺は  $\mathcal{L}M = C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$  に  $C^\infty$  位相を入れたものの  $\mathbb{R}$  係数特異ホモロジー。

補題 5.1 (ii) は、 $M$  の自由ループ空間を  $M$  上の broken geodesics の空間の列で近似して、有限次元多様体に対する de Rham の定理に帰着することで証明される。

さて de Rham 鎖のファイバー積は容易に定義できる。すなわち、整数  $1 \leq j \leq k$  と  $\ell \geq 0$  に対して、鎖写像  $\circ_j : C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M) \otimes C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{\ell+1}M) \rightarrow C_{*-n}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+\ell}M)$  を

$$[(U, \varphi, \omega)] \circ_j [(V, \psi, \eta)] := (-1)^* [(U \times_{\text{ev}_j \circ \varphi} V, \varphi *_j \psi, \omega \times \eta)]$$

で定義する (符号  $*$  は省略)。そこで  $\prod_{k=0}^\infty C_{*+n+k-1}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$  上の dg Lie 代数の構造が次の式で定義できる:

$$\begin{aligned} (\partial x)_k &:= \partial(x_k), \\ (x * y)_k &:= \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ 1 \leq j \leq k_1}} (-1)^* x_{k_1} \circ_j y_{k_2}, \\ \{x, y\} &:= x * y - (-1)^{|x||y|} y * x. \end{aligned}$$

これを用いて、自由ループ空間  $\mathcal{L}M$  の鎖複体モデルを次のように定めよう:

**定理 5.2 ([12])**  $\mu = (\mu_k)_{k \geq 0} \in \prod_{k=0}^{\infty} C_{n+k-2}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M)$  が次の条件を満たすとすると :

- (i):  $\mu$  は Maurer-Cartan 元, つまり  $\partial\mu - \frac{1}{2}\{\mu, \mu\} = 0$  が成り立つ.
- (ii):  $\mu_0 = \mu_1 = 0$ . (これと (i) から  $\partial\mu_2 = 0$  が導かれる.)
- (ii): 同形  $H_n^{\text{dR}}(\mathcal{L}_3M) \cong H_n^{\text{sing}}(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$  を通じて,  $[\mu_2] \in H_n^{\text{dR}}(\mathcal{L}_3M)$  は  $[M] \in H_n^{\text{sing}}(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$  に対応する.

このとき同形

$$H_* \left( \prod_{k=0}^{\infty} C_{*+n+k-1}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}M), \partial_\mu \right) \cong H_{*+n-1}^{\text{sing}}(\mathcal{L}M : \mathbb{R}) \quad (7)$$

が成立する. ただし  $\partial_\mu x := \partial x - \{\mu, x\}$ .

$\mu$  にもう少し条件を付けると (7) が Lie 代数の同形であることも言えるが, 定理 2.1 の証明には直接は必要ないので省略する.

## 6. 定理 2.1 の証明

本節では定理 2.1 の証明を概説する. 6.1 節で定理 2.1 をその「チェイン版」である定理 6.1 に帰着し, 6.2 節では定理 6.1 の証明の重要な一部である Maurer-Cartan 元の構成 (ここで正則円盤のモジュライ空間を用いる) を説明する.

以降  $L$  は  $(\mathbb{C}^n, \omega_n)$  の閉 Lagrange 部分多様体で向きとスピン構造を持つものとする.

### 6.1. チェイン版への帰着

まず前節で導入した自由ループ空間の鎖複体モデルを少し変更する必要があるので, それを説明する. 任意の  $a \in H_1(L : \mathbb{Z})$  に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k+1}^a L &:= \{(T, \gamma, t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{L}_{k+1}L \mid [\gamma] = a\}, \\ C(a)_* &:= \prod_{k=0}^{\infty} C_{*+n+k-1+\mu(a)}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}^a L) \end{aligned}$$

とし,

$$\widehat{C}_* := \varprojlim_{E \rightarrow \infty} \left( \bigoplus_{a \in H_1(L : \mathbb{Z})} C(a)_* \right) / \left( \bigoplus_{\omega_n(\bar{a}) > E} C(a)_* \right)$$

とおく.  $\widehat{C}_*$  は次の式により dg Lie 代数の構造を持つ :

$$\begin{aligned} (\partial x)(a, k) &:= \partial(x(a, k)), \\ (x * y)(a, k) &:= \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ 1 \leq j \leq k \\ a_1+a_2=a}} (-1)^* x(a_1, k_1) \circ_j y(a_2, k_2), \\ \{x, y\} &:= x * y - (-1)^{|x||y|} y * x. \end{aligned}$$

この dg Lie 代数の上で定理 2.1 の「チェイン版」を述べることができる :

**定理 6.1**  $x \in \widehat{C}_{-1}, y \in \widehat{C}_2, z \in \widehat{C}_1$  で次の条件を満たすものが存在する :

- $\partial x - \frac{1}{2}\{x, x\} = 0, \partial y - \{x, y\} = z.$
- $x(a, k) \neq 0 \implies \omega_n(\bar{a}) > 0$  or  $a = 0, k \geq 2.$  (これから  $\partial x(0, 2) = 0$  が従う.)
- 同形  $H_n^{\text{dR}}(\mathcal{L}_3 L) \cong H_n^{\text{sing}}(\mathcal{L}L)$  を通じて  $[x(0, 2)]$  は  $(-1)^{n+1}[L]$  に対応する.
- $z(a, k) \neq 0 \implies \omega_n(\bar{a}) > 0$  or  $a = 0.$  (これから  $\partial z(0, 0) = 0$  が従う.)
- 同形  $H_n^{\text{dR}}(\mathcal{L}_1 L) \cong H_n^{\text{sing}}(\mathcal{L}L)$  を通じて  $[z(0, 0)]$  は  $(-1)^{n+1}[L]$  に対応する.

定理2.1を定理6.1から導くのは易しい. 実際  $x^0 := \sum_{k \geq 2} x(0, k)$  は  $\partial x^0 - \frac{1}{2}\{x^0, x^0\} = 0$  を満たし  $H_*(\widehat{C}, \partial_{x^0}) \cong \widehat{\text{H}}_*(\mathcal{L}L)$  が成り立つ (つまり  $x^0$  が定理5.2における  $\mu$  の役割を果たす). さらに  $x^+ := x - x^0$  および  $y$  は

$$\partial_{x^0} x^+ - \frac{1}{2}\{x^+, x^+\} = 0, \quad \partial_{x^0} y - \{x^+, y\} = z$$

を満たす. そこで Homotopy Transfer Theorem を用いて  $(\widehat{C}, \partial_{x^0}, \{, \})$  とホモトピー同値な  $L_\infty$  代数構造を  $\widehat{\text{H}}_*(\mathcal{L}L)$  の上に定義し,  $x^+, y$  に対応する元を  $X, Y$  とおけば定理2.1の条件を満たす.

さて定理6.1を示すには鎖  $x, y, z$  を定義する必要がある. どれも本質的に同じであるので, 次小節では,  $L$  に境界を持つ正則円盤のモジュライ空間から Maurer-Cartan 元  $x$  を定義する方法を説明する.

## 6.2. Maurer-Cartan 元の構成

定理6.1の条件を満たす  $x \in \widehat{C}_{-1}$  を定義するには, 任意の  $a \in H_1(L; \mathbb{Z})$  と  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $x(a, k) \in C_{n+\mu(a)+k-2}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}^a L)$  を定義して

$$\partial x(a, k) = \sum_{\substack{a_1+a_2=a \\ k_1+k_2=k+1 \\ 1 \leq j \leq k_1}} (-1)^x x(a_1, k_1) \circ_j x(a_2, k_2)$$

が成り立つようにする必要がある. 以降の議論では  $\omega_n(\bar{a}) > 0$  あるいは  $a = 0, k \geq 2$  の場合のみを考え, その他の場合は  $x(a, k) := 0$  とおく. モジュライ空間

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{M}}_{k+1}(\bar{a}) &:= \{(u, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}) \mid u : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, L), \bar{\partial} u = 0, \\ &\quad [u] = \bar{a}, 0 < \theta_1 < \dots < \theta_k < 2\pi\} / \text{Aut}(D, 1) \end{aligned}$$

を考え任意の  $j \in \{0, \dots, k\}$  に対して  $\mathring{\text{ev}}_j : \mathring{\mathcal{M}}_{k+1}(\bar{a}) \rightarrow L$  を

$$\mathring{\text{ev}}_j : [(u, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k})] \mapsto u(e^{i\theta_j})$$

で定義する (ただし  $\theta_0 := 0$  とおく).  $\mathring{\mathcal{M}}_{k+1}(\bar{a})$  に安定写像を付け加えて得られるコンパクト化を  $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  と書くと,  $\mathring{\text{ev}}_j$  を延長して  $\text{ev}_j : \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a}) \rightarrow L$  が定義される.

$\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  は適切な位相によりコンパクト Hausdorff 空間になるが,  $x(a, k)$  を定義するには位相構造だけでは不十分で, まずモジュライ空間  $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  上の倉西構造が必要である.  $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  は, ある Banach 多様体上の Banach ベクトル束の Fredholm 切断の零点として表される<sup>6</sup> ので, 各点の近傍では, 有限次元多様体上の有限次元ベクトル束

<sup>6</sup> モジュライ空間の境界の部分ではこの記述は不正確である.

の切断の零点として表すことができる. より明示的には, 各  $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  に対して以下のデータを与えることができる<sup>7</sup>:

- 有限次元有向角付多様体  $U_p$
- $U_p$  上の有限次元有向ベクトル束  $\mathcal{E}_p$
- ベクトル束  $\mathcal{E}_p \rightarrow U_p$  の  $C^\infty$  級切断  $s_p$
- 開埋込  $\psi_p : (s_p)^{-1}(0) \rightarrow \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  で  $p \in \text{Im } \psi_p$  を満たすもの

以上の四つ組  $(U_p, \mathcal{E}_p, s_p, \psi_p)$  を  $p$  における有向倉西チャートという<sup>8</sup>. モジュライ空間  $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  上の有向倉西構造とは

- 任意の  $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  における有向倉西チャート  $\mathcal{U}_p = (U_p, \mathcal{E}_p, s_p, \psi_p)$
- 任意の  $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a}), q \in \text{Im } \psi_p$  に対する  $\mathcal{U}_q$  から  $\mathcal{U}_p$  への座標変換

であって座標変換たちのあいだの整合性が成り立つものをいう. («座標変換」と「整合性」)の定義は省略する. [8] Section 3を見よ.)

さて  $x(a, k)$  を定義するには, さらに各  $p \in \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  に対して (倉西チャートの間の座標変換と整合的であるように) 以下のデータを与える必要がある:

- $C^\infty$  級写像  $\text{ev}_p : U_p \rightarrow \mathcal{L}_{k+1}^a L$  (ループ空間への evaluation map)
- $s_p$  の CF (continuous family) 摂動

後者のCF摂動について少し説明しよう<sup>9</sup>.  $s_p$  はベクトル束  $\mathcal{E}_p \rightarrow U_p$  の  $C^\infty$  級切断であるが, 一般に零と横断的であるとは限らず, これがモジュライ空間の基本鎖を定義する際には問題になる. そこで十分大きい自然数  $D_p$  をとって射影  $\text{pr}_{U_p} : \mathbb{R}^{D_p} \times U_p \rightarrow U_p$  を考え,  $(\text{pr}_{U_p})^* \mathcal{E}_p$  の  $C^\infty$  級切断の族  $(s_p^\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1]}$  で以下の条件を満たすものをとる:

- コンパクト  $C^1$  位相について  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_p^\varepsilon = (\text{pr}_{U_p})^* s_p$ .
- 任意の  $\varepsilon > 0$  について  $s_p^\varepsilon$  は零に横断的であり,  $\text{ev}_0 \circ \psi_p \circ \text{pr}_{U_p} : (s_p^\varepsilon)^{-1}(0) \rightarrow L$  は沈め込み.

さらに  $\omega_p \in \mathcal{A}_c^{D_p}(\mathbb{R}^{D_p})$  で  $\int_{\mathbb{R}^{D_p}} \omega_p = 1$  を満たすものをとる. 以上の組  $(D_p, (s_p^\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1]}, \omega_p)$  が  $s_p$  の CF 摂動である.

以上のデータが与えられると,  $\varepsilon \in (0, 1]$  が十分小さいとき  $x_\varepsilon(a, k) \in C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+1}^a L)$  を次のように定義することができる.  $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  上の点列  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$  で  $\bigcup_{i=1}^N \text{Im } \psi_{p_i} = \mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  を満たすものと「1の分割」 $(\chi_{p_i} : U_{p_i} \rightarrow [0, 1])_{1 \leq i \leq N}$  をとり

$$x_\varepsilon(a, k) := \sum_{i=1}^N (-1)^* ((s_{p_i}^\varepsilon)^{-1}(0), \text{ev}_{p_i} \circ \text{pr}_{U_{p_i}}, (\text{pr}_{\mathbb{R}^{D_{p_i}}})^* \omega_{p_i} \wedge (\text{pr}_{U_{p_i}})^* \chi_{p_i})$$

<sup>7</sup> 標準的には決まらない.

<sup>8</sup> 通常の定義では  $U_p$  は orbifold,  $\mathcal{E}_p$  は orbibundle とするが, 今の状況では群作用を考えず多様体上のベクトル束を考えれば十分である.

<sup>9</sup> 以下に続く CF 摂動の説明はアイデアを説明するために単純化されており, 実際の定義 ([8] Section 7, 9) とは微妙に異なる.



とおけばよい<sup>10</sup>. ここで右辺が  $(p_i)_i$  や  $(\chi_{p_i})_i$  のとり方によらないためには  $\varepsilon$  が十分小さい必要がある.

以上の議論ではモジュライ空間  $\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a})$  を固定していたが,  $(a, k)$  を動かした場合, 複数のモジュライ空間たちは

$$\partial\mathcal{M}_{k+1}(\bar{a}) \cong \bigsqcup_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ a_1+a_2=a \\ 1 \leq j \leq k_1}} \mathcal{M}_{k_1+1}(\bar{a}_1)_{\text{ev}_j} \times_{\text{ev}_0} \mathcal{M}_{k_2+1}(\bar{a}_2) \quad (8)$$

により関係付けられている. 各モジュライ空間に対して, ループ空間への evaluation map と CF 摂動を (8) と整合的になるようにとれば<sup>11</sup>, (8) から

$$\partial x_\varepsilon(a, k) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ a_1+a_2=a \\ 1 \leq j \leq k_1}} (-1)^* x_\varepsilon(a_1, k_1) \circ_j x_\varepsilon(a_2, k_2)$$

が導かれる. ここで注意すべきことは,  $\varepsilon$  を決めるには一度に有限個のモジュライ空間しか扱えないことである. したがって十分小さい  $\varepsilon > 0$  毎に Maurer-Cartan 方程式  $\partial x - \frac{1}{2}\{x, x\} = 0$  の近似解  $x_\varepsilon$  を構成し,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限として Maurer-Cartan 元を構成するという議論が必要になる. これと実質的に同じ議論は Lagrangian Floer Theory の設定において [7] Section 7.2.3 で論じられているが, 今の状況では [13] Section 6 で詳細に論じられている.

## 参考文献

- [1] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv. 63 (1988), 593–623.
- [2] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, arXiv:math/9911159.
- [3] K. Cieliebak, K. Mohnke, *Punctured holomorphic curves and Lagrangian embeddings*, Invent. Math. 212 (2018), 213–295.
- [4] M. Damian, *On the topology of monotone Lagrangian submanifolds*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 48 (2015), 237–252.
- [5] J. Evans, J. Kędra, *Remarks on monotone Lagrangians in  $\mathbb{C}^n$* , Math. Res. Lett. 21 (2014), 1241–1255.
- [6] K. Fukaya, *Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology*, Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, 231–276, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006.
- [7] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction, Part I and II*, AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.1 and 46.2, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).
- [8] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Kuranishi structure, Pseudo-holomorphic curve, and Virtual fundamental chain: Part 1 and 2*, arXiv:1503.07631v1, 1704.01848v1.
- [9] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.
- [10] K. Irie, *Hofer-Zehnder capacity of unit disk cotangent bundles and the loop product*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), 2477–2497.

<sup>10</sup> この説明もアイデアを伝えるために単純化されており, 実際の定義 ([13] Section 8) とは異なる.

<sup>11</sup> このステップは非常に慎重に議論する必要がある.

- [11] K. Irie, *Chain level operations in string topology via de Rham chains*, 第62回トポロジーシンポジウム予稿.
- [12] K. Irie, *A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains*, Int. Math. Res. Notices, doi: 10.1093/imrn/rnx023.
- [13] K. Irie, *Chain level loop bracket and pseudo-holomorphic disks*, arXiv:1801.04633v2.
- [14] J. Latschev, *Fukaya's work on Lagrangian embeddings*, Free loop spaces in geometry and topology, 243–270, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 24, Eur. Math. Soc., Zürich, 2015.
- [15] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 346. Springer, Heidelberg, 2012.

## カスプ辺の法写像の性質

神戸大学大学院理学研究科 寺本 圭佑\*

(Department of Mathematics, Kobe University, Keisuke Teramoto)

### 1 はじめに

$\Sigma \subset \mathbf{R}^2$  を領域とし,  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $C^\infty$  級写像とする. このとき,  $f$  がフロントル (frontal) であるとは,  $f$  に沿う写像  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  が存在し, 任意の  $q \in \Sigma$ ,  $X \in T_q \Sigma$  に対し,  $\langle df_q(X), \nu(q) \rangle = 0$  が成り立つときをいう. さらに, フロントル  $f$  が波面 (フロント, wave front) であるとは, 写像の組  $(f, \nu): \Sigma \rightarrow T_1 \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{R}^3 \times S^2$  がはめ込みになるときをいう. 写像  $\nu$  を  $f$  の単位法写像 (unit normal map) あるいはガウス写像 (Gauss map) と呼ぶ. 点  $p \in \Sigma$  が  $f$  の特異点であるとは,  $f$  が  $p$  ではめ込みとならない点のことをいう. 波面のジェネリックな特異点は, カスプ辺 (cuspidal edge) とツバメの尾 (swallowtail) であることが知られており, これらは,  $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$  及び  $(u, v) \mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$  にそれぞれ  $\mathcal{A}$  同値な写像である. 近年, フロントルや波面に対して, 多くの微分幾何学的な研究があり, 様々な不変量が導入されてきている ([7, 8, 14–21, 23–30]). 本講演では, カスプ辺の不変量とガウス写像  $\nu$  及び法線叢に現れる特異点や幾何学的性質 ([29, 30]) について紹介する.

### 2 準備

$(\Sigma; u, v) \subset \mathbf{R}^2$  を領域,  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロントルとする. また,  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  を  $f$  の単位法写像 (ガウス写像) とし,  $S(f) (\subset \Sigma)$  で  $f$  の特異点集合を表す. 関数  $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v) \quad (f_u = \partial f / \partial u, f_v = \partial f / \partial v)$$

で定める. この関数をフロントル  $f$  の符号付き面積密度関数 (signed area density function) と呼ぶ. 符号付き面積密度関数の定義から  $\lambda^{-1}(0) = S(f)$  がわかる. 点  $p \in S(f)$  が  $f$  の非退化特異点であるとは,  $d\lambda(p) \neq 0 \iff (\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0)$  のときをいう. 非退化特異点  $p \in S(f)$  に対して, 陰関数定理から,  $p$  の近傍  $U (\subset \Sigma)$  と正則曲線  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in U$  ( $\varepsilon > 0$ ) で,  $\lambda(\gamma(t)) = 0$  を満たすものが存在する. さらに,  $S(f) \cap U$  上で  $df(\eta) = 0$  を満たすもの  $U$  上のベクトル場  $\eta$  が存在する. この曲線とベクトル場をそれぞれ特異曲線 (singular curve), 退化ベクトル場 (null vector field) と呼ぶ. さらに,  $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$  を特異ローカス (singular locus) と呼ぶ. カスプ辺やツバメの尾は非退化特異点である. また, カスプ辺の特異ローカス  $\hat{\gamma}$  は正則空間曲線, ツバメの尾の特異ローカスは  $t \mapsto (t^2, t^3, t^4)$  に  $\mathcal{A}$  同値な特異点付き空間曲線 (枠付き曲線 [9]) となる. これらの特異点に対する判定法が知られている.

**事実 2.1** ([15, 25]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $p \in S(f)$  を非退化特異点,  $\lambda$  を符号付き面積密度関数,  $\gamma$  を  $p$  を通る特異曲線,  $\eta$  を退化ベクトル場とする. また,  $\delta(t) = \det(\gamma', \eta)(t)$  とする. ただし,  $\gamma' = d\gamma/dt$  である. このとき,

- (1)  $f$  が  $p$  でカスプ辺  $\iff \eta\lambda(p) \neq 0 \iff \delta(0) \neq 0$ .
- (2)  $f$  が  $p$  でツバメの尾  $\iff \eta\lambda(p) = 0, \eta\eta\lambda(p) \neq 0 \iff \delta(0) = 0, \delta'(0) \neq 0$ .

波面やフロントルに現れるその他の特異点に対する判定法が知られている ([5, 11, 12, 25]).

本研究は, 日本学術振興会特別研究員奨励費 (課題番号 17J02151) の助成を受けています.

\*e-mail: teramoto@math.kobe-u.ac.jp

## 2.1 カスパ辺の不変量

ここでは,  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $p \in S(f)$  をカスパ辺とする. 点  $p$  の近傍  $U$  をとり,  $\gamma$  を  $\gamma(0) = p$  を満たす特異曲線とする. カスパ辺の不変量を紹介するために, 次のベクトル場の組を導入する ([17]).

**定義 2.2.**  $U$  上のベクトル場の組  $(\xi, \eta)$  が許容的 (**adapted**) であるとは,

- (1)  $\xi$  は  $S(f) \cap U$  上  $\gamma'$  に平行,
- (2)  $\eta$  は  $S(f) \cap U$  上  $f$  の退化ベクトル場,
- (3)  $(\xi, \eta)$  は正の向きを与える

ときをいう.

許容的なベクトル場の組  $(\xi, \eta)$  を用いて,  $S(f) \cap U$  上で定義される次のカスパ辺の不変量を定める:

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \operatorname{sgn}(\eta\lambda) \frac{\det(\xi f, \xi\xi f, \nu)}{|\xi f|^3}, \quad \kappa_\nu = \frac{\langle \xi\xi f, \nu \rangle}{|\xi f|^2}, \quad \kappa_c = \frac{|\xi f|^{3/2} \det(\xi f, \eta\eta f, \eta\eta\eta f)}{|\xi f \times \eta\eta f|^{5/2}}, \\ \kappa_t &= \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \eta\eta\xi f)}{|\xi f \times \eta\eta f|^2} - \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi f) \langle \xi f, \eta\eta f \rangle}{|\xi f|^2 |\xi f \times \eta\eta f|^2}, \\ \kappa_i &= \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi\xi f)}{|\xi f|^3 |\xi f \times \eta\eta f|} - 3 \frac{\langle \xi f, \eta\eta f \rangle \det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi f)}{|\xi f|^5 |\xi f \times \eta\eta f|}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$\kappa_s$  は特異曲率 (**singular curvature**) ([24]),  $\kappa_\nu$  は極限法曲率 (**limiting normal curvature**) ([18, 24]),  $\kappa_c$  はカスパ的曲率 (**cuspidal curvature**) ([18]),  $\kappa_t$  はカスパ的捩率 (**cuspidal torsion**) ([17]),  $\kappa_i$  は変曲曲率 (**edge inflectional curvature**) ([17]) と呼ばれる不変量である. 特に,  $\kappa_s$  は内在的な不変量であり, カスパ辺の凹凸に関係している (図 1) ([8, 24]). また,  $\kappa_c \neq 0$  であることに注意する ([18, Proposition 3.11]).

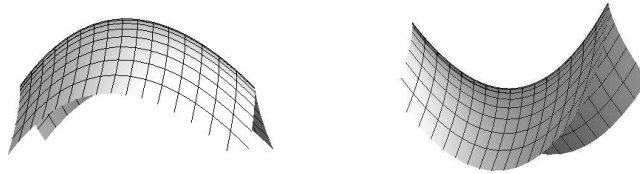


図 1:  $\kappa_s > 0$  のカスパ辺 (左) と  $\kappa_s < 0$  のカスパ辺 (右).

さて,  $K, H$  を  $U \setminus S(f)$  で定義された  $f$  のガウス曲率, 平均曲率とする. 平均曲率  $H$  はカスパ辺の近くで非有界な関数になることが知られている. これらを用いて, 関数  $\kappa_j: U \setminus S(f) \rightarrow \mathbf{R}$  ( $j = 1, 2$ ) を

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.2)$$

と定める. これらは主曲率と呼ばれる曲率である. 主曲率の一方は,  $U$  上の有界な  $C^\infty$  級関数に拡張でき, もう一方はカスパ辺の近くで非有界になる ([19, 27, 28]). 有界な主曲率を  $\kappa$ , 非有界となる主曲率を  $\hat{\kappa}$ ,  $\hat{\kappa} = \lambda\hat{\kappa}$  とすると,  $\gamma$  上で,  $\kappa = \kappa_\nu$  であり,  $\hat{\kappa}$  は  $\kappa_c$  の零でない関数倍になる. 特に,  $\hat{\kappa}(p) \neq 0$  となることに注意する.  $U$  上の零でないベクトル場  $V$  で,

$$(II - \kappa I)V = 0$$

を満たすものを  $\kappa$  に関する主方向という. ただし,

$$I = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_v \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} \langle f_{uu}, \nu \rangle & \langle f_{uv}, \nu \rangle \\ \langle f_{uv}, \nu \rangle & \langle f_{vv}, \nu \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

で与えられる  $2 \times 2$  行列である. さらに,

$$(\lambda II - \hat{\kappa}I)\tilde{V} = 0$$

を満たす零でない  $U$  上のベクトル場を  $\tilde{\kappa}$  に関する主方向という.

**定義 2.3.** カスプ辺  $p$  が峰点 (ridge point) であるとは,  $V_\kappa(p) = 0$  であるときをいう. また,  $p$  が  $k$  次の峰点 ( $k$ -th order ridge point) であるとは,  $V^{(m)}\kappa(p) = 0$  ( $1 \leq m \leq k$ ),  $V^{(k+1)}\kappa(p) \neq 0$  であるときをいう. また,  $p$  が副放物点 (sub-parabolic point) であるとは,  $\tilde{V}\kappa(p) = 0$  となるときをいう.

正則曲面に関する峰点や副放物点の性質については, [4, 6, 10, 22] を参照.

カスプ辺の不変量と峰点, 副放物点には次の関係がある.

**命題 2.4** ([27, 29]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $p$  を  $f$  のカスプ辺とする.

- (1)  $p$  が峰点  $\iff 4\kappa_t(p)^3 + \kappa_i(p)\kappa_c(p)^2 = 0$ .
- (2)  $p$  が副放物点  $\iff 4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 = 0$ .

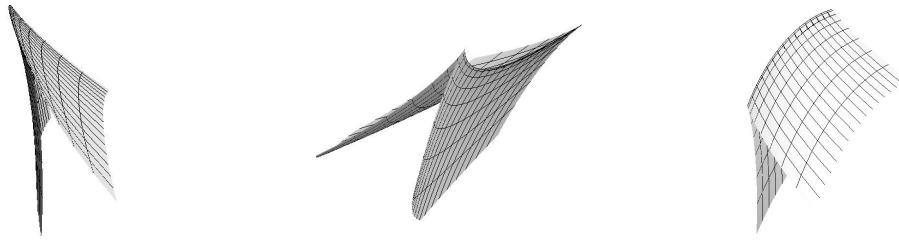


図 2: 峰点を持つカスプ辺 (左), 副放物点を持つカスプ辺 (中央), どちらでもないカスプ辺 (右). 副放物点では  $\kappa_s \leq 0$  となるので非凸なカスプ辺となる.

カスプ辺の特異ローカスが曲率線 (line of curvature) になるということを, 有界な主曲率に関する主方向  $V$  が, 特異曲線  $\gamma$  の接ベクトル  $\gamma'$  と  $\gamma$  に沿って平行であると定める. このとき, 次が成り立つ.

**命題 2.5** ([13, 28]). 波面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が  $p \in \Sigma$  でカスプ辺を持つとする. また,  $\gamma$  を点  $p$  を通る特異曲線であるとする. このとき, 特異ローカス  $\hat{\gamma}$  が  $f$  の曲率線  $\iff \gamma$  上  $\kappa_t = 0$ .

## 2.2 同次元間の Morin 写像と波面の特異点

法線叢の特異点を解析するために同次元間の Morin 特異点と波面の特異点の関係を紹介する.  $A_k$ -Morin 特異点とは,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_1x_n + \dots + x_{k-1}x_n^{k-1} + x_n^{k+1}) \quad (k \leq n)$$

に原点で  $A$  同値である写像芽  $f: (\mathbf{R}^n, p) \rightarrow (\mathbf{R}^n, f(p))$  のことである ([25]).  $A_0$ -Morin 特異点は, 正則点であることを注意する.  $A_k$ -Morin 特異点に対して, 次の判定法が知られている.

**事実 2.6** ([25, Theorem A.1]).  $k \leq n$  と仮定する.  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の領域,  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  を  $C^\infty$  級写像,  $p$  を  $f$  の余階数 1 の特異点 ( $\text{rank } df_p = n - 1$ ) とする. このとき,  $f$  が  $p$  で  $A_k$ -Morin 特異点を持つための必要十分条件は,

- (1)  $\Lambda = \Lambda' = \dots = \Lambda^{(k-1)} = 0$  かつ  $\Lambda^{(k)} \neq 0$  が  $p$  で成立する,
- (2)  $(\Lambda, \Lambda', \dots, \Lambda^{(k-1)}): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^k$  は  $p$  で非特異である.

ただし,  $\Lambda = \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  は  $\Omega$  の局所座標系,  $\Lambda' = \eta\Lambda$ ,  $\Lambda^{(i)} = \eta\Lambda^{(i-1)}$  であり,  $\eta$  は,  $df_q(\eta) = 0$  ( $\forall q \in S(f) \cap \Omega$ ) を満たす  $\Omega$  上で定義された零でないベクトル場 ( $f$  の退化ベクトル場).

一方, 原点において

$$X \mapsto \left( (k+1)t^{k+2} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j, -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k jt^{j-1} x_j, X_1 \right)$$

で定義される写像芽を  $A_{k+1}$ -**front** 特異点という. ただし,  $X = (t, x_2, \dots, x_n)$ ,  $X_1 = (x_2, \dots, x_n)$  ([1, 25]).

**注意 2.7.**  $n = 2$  としたとき,  $A_1$ -front 特異点の像は正則点,  $A_2$ -front 特異点の像はカスプ辺,  $A_3$ -front 特異点の像はツバメの尾である ([1, 25]などを参照).

$A_k$ -front 特異点と  $A_k$ -Morin 特異点の間に, 次の関係が知られている.

**事実 2.8** ([25, Corollary 2.11]).  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^{n+1}$  の領域,  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  を  $C^\infty$  級写像とする. 点  $p \in \Omega$  は  $f$  の特異点であり,  $f$  のヤコビ行列式の外微分が  $p$  で消えないと仮定する. このとき, 次は同値である.

- (1)  $p$  は  $f$  の  $A_k$ -Morin 特異点である.
- (2)  $f|_{S(f)}$  は波面であり,  $p$  は  $f|_{S(f)}$  の  $A_k$ -front 特異点である.

### 2.3 平面間の写像の特異点

カスプ辺の法写像の特異点を考察するために, 平面間の写像の特異点を考える.  $f: (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow (\mathbf{R}^2, f(p))$  を平面間の  $C^\infty$  級写像芽とする. Whitney [31] は, 折り目特異点 (**fold**) とカスプ特異点 (**cusp**) がジェネリックな特異点であることを示した. 折り目特異点は,  $(u, v) \mapsto (u, v^2)$  に  $A$ -同値な写像芽をいい, カスプ特異点は,  $(u, v) \mapsto (u, v^3 + uv)$  に  $A$ -同値な写像芽をいう. また,  $A_e$  余次元が 1 のものは, 唇 (**lips**), 嘴 (**beaks**), ツバメの尾 (**swallowtail**) であることが知られている. これらは順に,  $(u, v) \mapsto (u, v^3 + u^2v)$ ,  $(u, v^3 - u^2v)$  と  $(u, v^4 + uv)$  にそれぞれ  $A$  同値な写像芽として定義される.

関数 (芽)  $\Lambda: (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\Lambda(u, v) = \det(f_u, f_v)$  とすると, 点  $p \in \mathbf{R}^2$  が  $f$  の特異点であることと  $\Lambda(p) = 0$  であることは同値である. この関数  $\Lambda$  (の零でない関数倍) を特異点識別子 (**singularity identifier**) と呼ぶ. また, 波面と同様に特異点  $p$  が非退化であるとは,  $d\Lambda(p) \neq 0$  のときをいう.

点  $p$  が非退化特異点であるとき, ある近傍  $U$  と曲線  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  があって,  $U$  上で  $\Lambda(\gamma(t)) = 0$  が成立する. また, 点  $p$  が (余) 階数 1 の特異点であるとき,  $U$  上の零にならないベクトル場  $\eta$  で,  $df_p(\eta) = 0$  を満たすものが存在する. このベクトル場を退化ベクトル場と呼ぶ.

**事実 2.9** ([25, 31]).  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を  $C^\infty$  級写像とし,  $p \in \mathbf{R}^2$  を  $f$  の特異点とする. このとき,

- (1)  $f$  が  $p$  で折り目特異点  $\iff \eta\Lambda(p) \neq 0$ .
- (2)  $f$  が  $p$  でカスプ特異点  $\iff d\Lambda(p) \neq 0, \eta\Lambda(p) = 0, \eta\eta\Lambda(p) \neq 0$ .
- (3)  $f$  が  $p$  でツバメの尾  $\iff d\Lambda(p) \neq 0, \eta\Lambda(p) = \eta\eta\Lambda(p) = 0, \eta\eta\eta\Lambda(p) \neq 0$ .
- (4)  $f$  が  $p$  で唇  $\iff d\Lambda(p) = 0, \det \text{Hess}(\Lambda(p)) > 0$ .
- (5)  $f$  が  $p$  で嘴  $\iff d\Lambda(p) = 0, \eta\eta\Lambda(p) \neq 0, \det \text{Hess}(\Lambda(p)) < 0$ .

### 3 カスプ辺の法線叢

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面とし,  $p \in \Sigma$  を  $f$  のカスプ辺とする. また,  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  を単位法写像とする. このとき,  $p$  の近傍  $U$  と特異曲線  $\gamma$ , 退化ベクトル場  $\eta$  がある.  $(u, v)$  を  $U$  の局所座標系とする. ここで, 次の写像を考える.

$$\mathcal{F}: U \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \mathcal{F}(u, v, w) = f(u, v) + w\nu(u, v). \quad (3.1)$$

この写像  $\mathcal{F}$  はカスプ辺  $f$  の法線叢 (**normal congruence**) である. さて,  $\kappa$  を  $U$  上で定義される有界な主曲率で  $\kappa(p) \neq 0$ ,  $\tilde{\kappa}$  を  $p$  の近くで非有界な主曲率,  $\hat{\kappa} = \lambda\tilde{\kappa}$  とする. これらを用いると,  $\mathcal{F}$  の特異点集合  $S(\mathcal{F})$  は,  $S(\mathcal{F}) = \{(u, v, w) \mid w = 1/\kappa(u, v)\} \cup \{(u, v, w) \mid w = \lambda(u, v)/\hat{\kappa}(u, v)\}$  となる. また,  $\mathcal{F}$  の特異値集合は,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S(\mathcal{F})) = & \left\{ f(u, v) + \frac{1}{\kappa(u, v)}\nu(u, v) \mid (u, v) \in U, w = \frac{1}{\kappa(u, v)} \right\} \\ & \cup \left\{ f(u, v) + \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)}\nu(u, v) \mid (u, v) \in U, w = \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

いま, 写像  $FC_f, \widehat{FC}_f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$  をそれぞれ,

$$FC_f(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa(u, v)}\nu(u, v), \quad \widehat{FC}_f(u, v) = f(u, v) + \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)}\nu(u, v) \quad (3.3)$$

とすると, これらは, カスプ辺  $f$  の焦曲面 (**focal surfaces**)(cf. [13]) を与えている. もし, 点  $p$  で,  $\kappa(p) = 0$  なら,  $FC_f$  は定義できないが,  $\hat{\kappa}(p) \neq 0$  であるので,  $\widehat{FC}_f$  は, そのような点でも定義できる. また, 特異曲線  $\gamma$  上で,  $\lambda(\gamma(t)) = 0$  なので,  $\widehat{FC}_f \circ \gamma = f \circ \gamma = \hat{\gamma}$  となり, カスプ辺の特異ローカスは,  $\widehat{FC}_f$  上の正則曲線となる. これは, カスプ辺特有の性質である. 上の焦曲面  $FC_f, \widehat{FC}_f$  は, ツバメの尾などに対しても定義できることに注意する.

まず, 有界な主曲率に関する焦曲面  $FC_f$  の特異点について, 事実 2.6 と事実 2.8 を用いることにより, 次の結果を得る.

**定理 3.1** ([29, Theorem 3.6]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面とし,  $p \in \Sigma$  をカスプ辺とする.  $\kappa$  が  $p$  の近くで  $C^\infty$  級の主曲率であり,  $\kappa(p) \neq 0$  とする. このとき,  $\kappa$  に関する焦曲面  $FC_f$  について次が成立する.

- (1)  $FC_f$  が  $p$  で非特異  $\iff p$  は  $f$  の峰点でない.
- (2)  $FC_f$  が  $p$  でカスプ辺  $\iff p$  は  $f$  の 1 次の峰点.
- (3)  $FC_f$  が  $p$  でツバメの尾  $\iff p$  は  $f$  の 2 次の峰点であり  $p$  を通る峰点の集合は (局所的に) 正則曲線となる.

この結果は, 正則曲面の場合と同様な結果である ([4, 10, 22]).

次に,  $\widehat{FC}_f$  について考察する. まず, 次のことが言える.

**命題 3.2** ([29, Proposition 3.7]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu$  を  $f$  の単位法写像,  $p \in \Sigma$  を  $f$  のカस्प辺とする. このとき, 焦曲面  $\widehat{FC}_f$  は,  $p$  で正則となる. さらに,  $f$  上の点  $f(p)$  における極限接平面と  $\widehat{FC}_f(p)$  における接平面は直交する. ただし,  $f$  の  $f(p)$  における極限接平面とは,  $\nu(p)$  に直交する平面のことである.

このことから, 焦曲面  $\widehat{FC}_f$  のガウス曲率や平均曲率とカस्प辺の不変量の関係を点  $p$  の近くで考えることができる. 実際, 次のことが言える.

**定理 3.3** ([29, Theorem 3.8]).  $\widehat{FC}_f$  のガウス曲率  $K_{\widehat{FC}_f}$  と平均曲率  $H_{\widehat{FC}_f}$  は, 特異曲線  $\gamma$  に沿って,

$$K_{\widehat{FC}_f} = -\frac{1}{4}(4\kappa_t^2 + \kappa_s\kappa_c^2), \quad H_{\widehat{FC}_f} = \pm\frac{1}{8}(\kappa_c^2 - 4\kappa_s)$$

で与えられる. ただし,  $H_{\widehat{FC}_f}$  の符号  $\pm$  は,  $\widehat{FC}_f$  の単位法写像の向きに依存する.

定理 3.3 と命題 2.4 から, 次のことが言える.

**系 3.4** ([29, Corollary 3.9]).  $K_{\widehat{FC}_f}(p) = 0 \iff p$  は  $f$  の副放物点.

焦曲面  $\widehat{FC}_f$  に対して, 点  $p$  が  $\widehat{FC}_f$  の楕円点 (elliptic point), 放物的点 (parabolic point) または 双曲点 (hyperbolic point) とは, それぞれ  $K_{\widehat{FC}_f} > 0, = 0$  or  $< 0$  となるときをいう (cf. [10]). 定理 3.3 から, 次の性質を得る.

**系 3.5** ([29, Corollary 3.10]).  $f$  を  $\mathbf{R}^3$  内の波面,  $p$  を  $f$  のカस्प辺,  $\widehat{FC}_f$  を  $f$  の焦曲面とする.

(1)  $\widehat{FC}_f$  の点  $p$  は, 次のように分類される:

- $p$  は  $\widehat{FC}_f$  の楕円点  $\iff p$  で  $4\kappa_t^2 + \kappa_s\kappa_c^2 < 0$ ,
- $p$  は  $\widehat{FC}_f$  の放物的点  $\iff p$  で  $4\kappa_t^2 + \kappa_s\kappa_c^2 = 0$ ,
- $p$  は  $\widehat{FC}_f$  の双曲点  $\iff p$  で  $4\kappa_t^2 + \kappa_s\kappa_c^2 > 0$ .

さらに, ガウス曲率  $K_{\widehat{FC}_f}$  が点  $p$  で非負  $\iff \kappa_s$  が  $p$  で非正.

特に,  $K_{\widehat{FC}_f}$  が  $\gamma$  に沿って真に正なら,  $\kappa_s$  は真に負になる.

(2) 平均曲率  $H_{\widehat{FC}_f}$  が  $\gamma$  に沿って零なら,  $\kappa_s$  は  $\gamma$  に沿って真に正となる.

## 4 カस्प辺のガウス写像の特異点とガウス曲率の振る舞い

この節では, カस्प辺のガウス写像の特異点について考える.  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  を  $f$  のガウス写像,  $f$  が  $p \in \Sigma$  でカस्प辺を持つとする. また,  $\kappa$  を点  $p$  の近傍  $U$  上で有界な主曲率,  $\mathbf{V}$  を  $\kappa$  に関する主方向ベクトルとし,  $\hat{\kappa}$  で  $p$  の近くで非有界な主曲率を表す. このとき, ガウス写像  $\nu$  の特異点識別子  $\Lambda$  は, ワインガルテンの公式を用いると,

$$\Lambda = \det(\nu_u, \nu_v, \nu) = \kappa \hat{\kappa}$$

と表せる. ただし,  $\hat{\kappa} = \lambda \tilde{\kappa}$  であり,  $\lambda$  は  $f$  の符号付き面積密度関数である. 点  $p$  で,  $\hat{\kappa}(p) \neq 0$  であるので,  $\nu$  の特異点識別子として  $\tilde{\Lambda} = \kappa$  ととれる. したがって,  $\nu$  の特異点集合は,  $S(\nu) \cap U = \{q \in U \mid \kappa(q) = 0\}$  で与えられる. これを  $f$  の放物点集合と呼ぶ. また,  $\kappa^{-1}(0)$  で定義される  $U$  上の曲線を放物点曲線 (parabolic curve) と呼ぶ. このとき, 次のことがわかる.

**命題 4.1** ([18, 30]). 放物点曲線が  $p$  を通る  $\iff \kappa_\nu(p) = 0$  が成立.



以下, 命題 4.1 の状況を考える. つまり, 点  $p$  が  $f$  と  $\nu$  両方の特異点となっているとする. このとき, 事実 2.9 から次が成り立つ.

**定理 4.2** ([30, Theorem 3.3]). 上の仮定の下, 次が成立.

(1)  $p$  が  $\kappa$  の正則点とする.

- $p$  が  $\nu$  の折り目特異点  $\iff p$  は  $f$  の峰点でない.
- $p$  が  $\nu$  のカスプ特異点  $\iff p$  は  $f$  の 1 次の峰点.
- $p$  が  $\nu$  のツバメの尾特異点  $\iff p$  は  $f$  の 2 次の峰点.

(2)  $p$  が  $\kappa$  の臨界点とする.

- $p$  が  $\nu$  の唇特異点  $\iff \det \text{Hess}(\kappa(p)) > 0$ .
- $p$  が  $\nu$  の嘴特異点  $\iff \det \text{Hess}(\kappa(p)) < 0$  であり,  $p$  は  $f$  の 1 次の峰点.

正則曲面の場合にも同様の特徴づけが成り立つ ([2]).

さて,  $p$  が放物点で,  $\kappa$  の正則点である場合を考える. このとき, 放物点曲線は  $p$  の近くで正則曲線となる. 放物点曲線と  $f$  の特異曲線の接触を考える.

**定義 4.3** ([10]).  $\alpha: I \ni t \mapsto \alpha(t) \in \mathbf{R}^2$  を正則平面曲線,  $\beta$  を関数  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  の零点集合で定義される別の正則平面曲線とする. このとき,  $\alpha$  が  $\beta$  と点  $t_0 \in I$  で  $(k+1)$  点接触を持つとは, 合成関数  $g(t) = F(\alpha(t))$  が,

$$g(t_0) = g'(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0, \quad g^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

を満たすときをいう. ただし,  $g^{(i)} = d^i g / dt^i$  ( $1 \leq i \leq k+1$ ). さらに,  $\alpha$  が  $\beta$  と点  $t_0$  で少なくとも  $(k+1)$  点接触を持つとは, 関数  $g(t) = F(\alpha(t))$  が,

$$g(t_0) = g'(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0.$$

を満たすときをいう.

カスプ辺に対して, 次のことが成り立つ.

**補題 4.4** ([30, Lemma 3.5]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu$  をそのガウス写像,  $p \in \Sigma$  をカスプ辺とする.  $\kappa$  を  $p$  の近くで有界な主曲率とする. このとき,  $\kappa = 0$  によって定められる放物点曲線が  $p$  で正則となるための必要十分条件は, 点  $p$  において  $\kappa'_\nu \neq 0$  または  $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 \neq 0$  が成立することである.

定義 4.3 と 補題 4.4 より, 次のことがわかる.

**命題 4.5** ([30, Proposition 3.6]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu$  を  $f$  のガウス写像,  $p \in \Sigma$  をカスプ辺とする.  $\kappa$  を  $p$  の近くで有界な主曲率関数とし,  $\kappa(p) = 0$ ,  $(\partial_u \kappa(p), \partial_v \kappa(p)) \neq (0, 0)$  を満たすとする. このとき, 点  $p$  を通る  $f$  の特異曲線  $\gamma$  が  $p$  において  $\kappa^{-1}(0)$  で定義される放物点曲線と  $(k+1)$  点接触 ( $k \geq 1$ ) を持つための必要十分条件は,  $4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 \neq 0$ ,

$$\kappa_\nu(p) = \kappa'_\nu(p) = \cdots = \kappa_\nu^{(k)}(p) = 0 \text{ かつ } \kappa_\nu^{(k+1)}(p) \neq 0$$

が成り立つことである.

さて, 波面のガウス曲率  $K$  は, 一般に特異点で非有界となることが知られている. しかし, カスプ辺の場合, そのガウス写像がカスプ辺において特異点を持つとき, 次のことが知られている.

**事実 4.6** ([18, Corollary 3.12]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu$  を  $f$  のガウス写像とし,  $p \in \Sigma$  で  $f$  がカスプ辺を持つとする. このとき, 次は同値:

- (1)  $\kappa_\nu(p) = 0$  (resp.  $\kappa_\nu(p) = \kappa'_\nu(p) = 0$ ).
- (2)  $f$  のガウス曲率  $K$  は  $p$  に近づくととき, 有限個の近づき方を除いたすべての近づき方に関して有界 (resp. 連続).

事実 4.6 の主張 (2) は, ガウス曲率  $K$  がカスプ辺  $p$  において, 有理的有界 (**rationaly bounded**) (resp. 有理的連続 (**rationaly continuous**)) であることを意味している. 関数の有理的有界性や有理的連続性の正確な定義は [18, Definition 3.4] を参照.

命題 4.5 と事実 4.6 から, 次のことがわかる.

**系 4.7** ([30, Corollary 3.7]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $p \in \Sigma$  をカスプ辺とする. このとき,  $f$  のガウス曲率  $K$  が  $p$  で有理的有界であるための必要十分条件は, 放物点曲線が  $p$  を通ることである. さらに, 特異曲線  $\gamma$  と放物点曲線が  $p$  で少なくとも 2 点接触を持つとき,  $K$  が  $p$  において有理的連続となる.

逆に, 次のことが言える.

**命題 4.8** ([30, Proposition 3.8]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  を  $f$  のガウス写像,  $p$  をカスプ辺とする.  $f$  のガウス曲率  $K$  が  $p$  において有理的連続であるとする. このとき,  $\nu$  が  $p$  でカスプ特異点を持つための必要十分条件は,  $\kappa_t(p) = 0$  かつ  $\kappa_s(p)\kappa'_i(p) \neq 0$  となることである.

カスプ辺が特別な性質を持つ場合について考える. まず, カスプ辺の特異ローカスが曲率線である場合を考える. これは, 命題 2.5 より, 特異曲線上で  $\kappa_t$  が恒等的に零となることであつた. このとき, 次のことが言える.

**命題 4.9** ([30, Proposition 3.9]).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $\nu$  をそのガウス写像,  $p \in \Sigma$  をカスプ辺とする.  $\gamma$  を  $p$  を通る特異曲線とする.  $\kappa$  が  $p$  の近くで有界な主曲率であり, 放物点曲線  $\kappa^{-1}(0)$  が  $p$  を通る正則曲線とする. さらに, 特異ローカス  $\hat{\gamma}$  が曲率線であるとする. このとき,

- (1)  $p$  が  $\nu$  の折り目特異点  $\iff \kappa'_\nu(p) \neq 0$  が成立.
- (2)  $p$  が  $\nu$  のカスプ特異点  $\iff \kappa'_\nu(p) = 0, \kappa''_\nu(p) \neq 0$  かつ  $\kappa_s(p) \neq 0$  が成立.
- (3)  $p$  が  $\nu$  のツバメの尾特異点  $\iff \kappa'_\nu(p) = \kappa''_\nu(p) = 0, \kappa'''_\nu(p) \neq 0$  かつ  $\kappa_s(p) \neq 0$  が成立.

命題 4.5, 4.9 と系 4.7 から次のことが従う.

**系 4.10** ([30, Corollary 3.10]). 命題 4.9 と同じ状況で, 点  $p$  が  $\nu$  のカスプ特異点 (resp. ツバメの尾特異点) であるための必要十分条件は,  $\gamma$  が  $p$  において  $\kappa^{-1}(0)$  と 2 点接触 (resp. 3 点接触) を持つことである. さらに,

- (1)  $p$  が  $\nu$  の折り目特異点  $\implies f$  のガウス曲率  $K$  は  $p$  で有理的有界だが有理的連続でない.
- (2)  $p$  が  $\nu$  のカスプ特異点またはツバメの尾特異点  $\implies K$  は  $p$  において有理的連続.

次に, 波面  $f$  のガウス曲率  $K$  がカスプ辺  $p$  の近くで有界となる場合を考える. このとき,  $p$  を通る特異曲線  $\gamma$  に沿って極限法曲率  $\kappa_\nu$  が恒等的に零になる ([18, Theorem 3.9], [24, Theorem 3.1]). さらに,  $p$  の近くで  $f$  のガウス写像  $\nu$  の特異点集合と  $f$  の特異点集合が一致する. すなわち,  $\gamma$  が放物点曲線となっている.

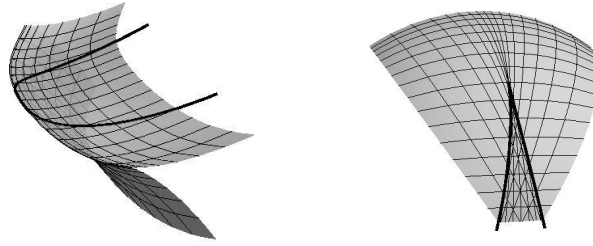


図 3: 特異ローカスが曲率線となるカस्प辺 (左) とそのガウス写像 (右). 太い曲線は放物点曲線の像であり, カस्प辺の特異曲線と 2 点接触を持つ.

**命題 4.11** ([30, Proposition 3.12]).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面,  $p \in \Sigma$  を  $f$  のカस्प辺,  $\nu : \Sigma \rightarrow S^2$  を  $f$  のガウス写像とする.  $f$  のガウス曲率  $K$  が  $p$  の十分小さな近傍上で有界であると仮定する. このとき,

- (1)  $p$  が  $\nu$  の折り目特異点  $\iff \kappa_t(p) \neq 0$  かつ  $4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 \neq 0$  が成立.
- (2)  $p$  が  $\nu$  のカस्प特異点  $\iff \kappa_t(p) = 0, \kappa'_t(p) \neq 0$  かつ  $\kappa_s(p) \neq 0$  が成立.

これと類似の特徴づけが, 3 次元双曲空間  $H^3$  や 3 次元 de Sitter 空間  $S_1^3$  内の (空間的) 平坦波面及び,  $H^3$  内の Bryant 型線形 Weingarten 波面に対して知られている ([16, 23]).

## 参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I.*, Monographs in Mathematics, **82**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Mathematics **55**, Pitman, 1981.
- [3] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, *Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **125** (1999), 243–268.
- [4] J. W. Bruce and F. Tari, *Extrema of principal curvature and symmetry*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **39** (1996), 397–402.
- [5] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [6] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 387–408.
- [7] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Framed surface in the Euclidean space*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) (2018).
- [8] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26**, No. 4 (2015), 34pp.
- [9] S. Honda and M. Takahashi, *Framed curves in the Euclidean space*, Adv. Geom. **16** (2016), no. 3, 265–276.
- [10] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.
- [11] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.

- [12] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.
- [13] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh Ser. A **133** (2003), no. 6, 1341–1359.
- [14] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Flat surfaces along cuspidal edges*, J. Singul. **16** (2017), 73–100.
- [15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [16] M. Kokubu and M. Umehara, *Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 14-15, 1903–1918.
- [17] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), 445–462.
- [18] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat., **154**, Springer, Tokyo, 2016.
- [19] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **221** (2005), 303–351.
- [20] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 73–90.
- [21] R. Oset Sinha and F. Tari, *On the flat geometry of the cuspidal edge*, to appear in Osaka J. Math., arXiv:1610.08702.
- [22] I. R. Porteous, *Geometric differentiation*, Cambridge University Press, 2001.
- [23] K. Saji and K. Teramoto, *Dualities of geometric invariants on cuspidal edges on flat fronts in the hyperbolic space and the de Sitter space*, arXiv:1806.07065.
- [24] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [25] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada,  *$A_k$  singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [26] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010), 591–607.
- [27] K. Teramoto, *Parallel and dual surfaces of cuspidal edges*, Differential Geom. Appl. **44** (2016), 52–62.
- [28] K. Teramoto, *Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts*, to appear in Adv. Geom., arXiv:1612.00577v2.
- [29] K. Teramoto, *Focal surfaces of wave fronts in the Euclidean 3-space*, to appear in Glasgow Math. J., arXiv:1804.06123.
- [30] K. Teramoto, *Singularities of Gauss maps of wave fronts with non-degenerate singular points*, arXiv:1806.08140.
- [31] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62** (1955), 374–410.

## Shadow complexity of 3- and 4-manifolds

古宇田 悠哉 (広島大学)\*

## 序論

本稿の主角である shadow とは, 大雑把に述べると可微分 4 次元多様体の局所平坦な 2-骨格のことである. Shadow は 1990 年代前半に Turaev [34, 35] により, 3, 4 次元多様体を組み合わせ的に表示する道具として定義され, その研究は以後主に 2 つの方向に展開されてきた. 1 つは Turaev 自身が目指した量子不変量の研究であり, もう 1 つは shadow complexity の研究である. 本稿では後者に焦点を当てる<sup>1</sup>. ここで, 3, 4 次元多様体の shadow complexity とはその多様体の shadow の頂点数の最小値のことである. 定義から shadow complexity は多様体のある種の組み合わせ的な複雑度をはかる量であるが, Costantino-Thurston [11] はこの値と 3 次元多様体の幾何構造との深い関係を見抜いた. このことは shadow の polyhedron としての「基本的なピース」への分解が 3 次元の幾何構造と非常に相性が良いことに起因する. さらに, この事実は可微分 4 次元多様体の研究においても基本的な役割を果たす. 本稿ではこれらの事項を中心に 3, 4 次元多様体の shadow complexity に関する研究の現況を報告する.

## 1. Shadow とその一般論

本章では shadow の定義と基本事項について概説する. Shadow の一般論に関してより詳しくは Turaev [35], Costantino [4, 5] を参照のこと. 以下, 本稿を通じて特に断らない限り 3, 4 次元多様体は連結, コンパクト, 可微分かつ向き付けられているとする.

## 1.1. Simple polyhedron

2 次元の有限 CW 複体  $P$  の各点が図 1 のいずれかと同相な正則近傍を持つとき  $P$  を **simple polyhedron** とよぶ. 図 1 (iii) と同相な正則近傍を持つ点を  $P$  の頂点と

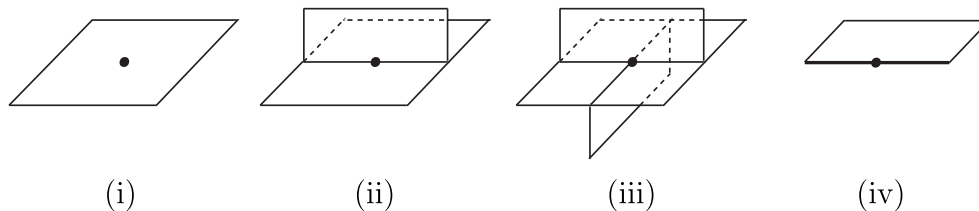


図 1: Simple polyhedron の局所モデル.

よび,  $P$  の頂点全体の集合を  $V(P)$  と表す. 図 1 (ii), (iii) のいずれかと同相な正則近傍を持つ点の集合を  $P$  の特異集合とよび  $S(P)$  と表す. 図 1 (iv) と同相な正則近傍を持つ点からなる集合を  $P$  の境界とよび,  $\partial P$  と表す. 以下,  $c(P) := |V(P)|$  とおく.  $S(P) \setminus V(P)$  の各連結成分を辺とよび,  $P \setminus S(P)$  の各連結成分を領域とよぶ.  $P$  の各辺は開区間もしくは円周である.  $P$  の境界に接触しない領域を内部領域とよぶ.

本研究は JSPS 科研費 (課題番号: 17K05254) の助成を受けたものである.

\* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1 広島大学大学院理学研究科

e-mail: ykoda@hiroshima-u.ac.jp

<sup>1</sup>Shadow を用いた量子不変量の研究については [34, 35, 2, 32, 15, 33, 8, 9, 3]などを参照されたい.

Simple polyhedron  $P$  の  $V(P) \subset S(P) \subset P$  なる階層が  $P$  の CW 構造を与えるとき,  $P$  を **special polyhedron** とよぶ. Special polyhedron の領域はすべて円盤であるので,  $P$  の位相型は  $S(P)$  の近傍のみで決まることに注意する.

Simple polyhedron  $P$  の各領域に, 次の条件を満たす向き (branching) が与えられたものを **branched polyhedron** とよぶ.

- $P$  の各辺において, 辺を共有している 3 枚の領域の向きが誘導する辺の向きのうち, 互いに逆向きのもが存在する.

Branching が与えられた polyhedron  $P$  は図 2 のような局所モデルで表すことが出来る. 一般に simple polyhedron の領域は向き付け可能であるとは限らないが, branched

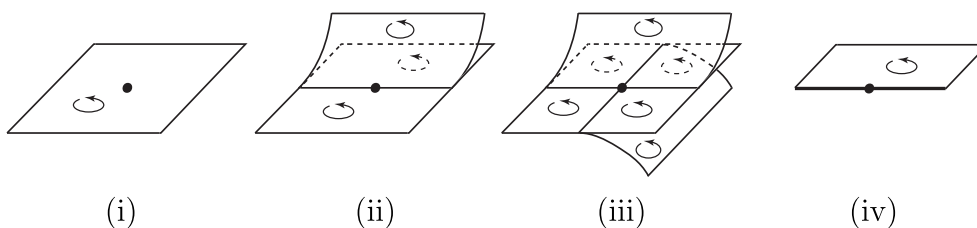


図 2: Branched polyhedron の局所モデル.

polyhedron の各領域は特に向き付け可能である. Simple polyhedron の各領域が向き付け可能であっても, branching が定められるとは限らない.

## 1.2. Shadow

**定義.**  $X$  を向き付けられた閉 3 次元多様体とする.  $\partial N = X$  なる向き付けられたコンパクト可微分 4 次元多様体  $N$  に埋め込まれた simple polyhedron  $P$  が次の条件を満たすとき,  $P$  を  $N$  (あるいは  $X$ ) の **shadow** とよぶ:

- $N$  に自然な PL 構造を入れると,  $N$  は  $P$  に collapse する;
- $P$  は局所平坦, すなわち  $P$  の各点の近傍は滑らかな  $\mathbb{R}^3 \subset N$  に含まれる; かつ
- $P \cap \partial N = \partial P$ .

$X$  内の絡み目  $L$  が  $L \subset \partial P$  を満たすとき,  $P$  は  $(X, L)$  の shadow であるともいう. また,  $N$  の境界が  $\#k(S^1 \times S^2)$  ( $k \geq 0$ ) であるとき<sup>2</sup>,  $P$  を  $N$  に 3-ハンドルおよび 4-ハンドルを接着して得られる閉 4 次元多様体  $M$  の shadow ともよぶ<sup>3</sup>.

境界付き 4 次元多様体  $N$  の shadow  $P$  の内部領域に対し, **gleam** とよばれる半整数値の coloring  $gl: \{P \text{ の内部領域} \} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  が次のようにして定まる.  $R$  を  $P$  の内部領域とし,  $i: R \hookrightarrow P$  を包含写像とする. 内部が  $R$  と同相なコンパクト曲面を  $\bar{R}$  とおく. ここでは領域  $R$  が向き付け可能であり,  $i$  の自然な拡張  $\bar{i}: \bar{R} \rightarrow P$  が単射であるときのみ解説する. 簡単のため,  $\bar{i}(\bar{R})$  と  $\bar{R}$  を同一視する.  $N$  に Riemann 計量を入れ,  $\bar{R}$  の法バンドル  $\nu(\bar{R})$  の射影化  $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$  を考える.  $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$  は  $\bar{R}$  上の  $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$  バンドルである. 定義より  $\partial\bar{R}$  の各点  $p$  に対し, その近傍  $\text{Nbd}(p; P)$  を含む滑らかな  $\mathbb{R}^3 \subset N$  が存在する. この  $\mathbb{R}^3$  内では  $p$  における  $\bar{R}$  の法方向に対応する  $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$  の点が一意的に定まるので, これを  $s(p)$  とおく. これにより,  $\partial\bar{R}$  上のセクション  $s: \partial\bar{R} \rightarrow \mathbb{P}\nu(\bar{R})$  が定まる. こ

<sup>2</sup>  $\#0(S^1 \times S^2) = S^3$  と解釈する.

<sup>3</sup> Laudénbach-Poénaru [19] の定理により, この  $M$  は  $N$  から微分同相を法として一意的に決まる.

のセクション  $s$  を  $\bar{R}$  全体に拡張するための障害 (Euler 類) は  $H^2(\bar{R}, \partial\bar{R}; \pi_1(S^1)) = \mathbb{Z}$  の元で与えられる. これを 2 で割ったものが  $R$  の gleam  $\text{gl}(R)$  である.  $N$  の向きとの同調性を加味すると,  $R$  の向きを逆にしても  $\mathbb{P}\nu(\bar{R})$  のファイバーの向きも逆になるので,  $\text{gl}(R)$  の値は影響を受けない. 一般に  $\text{Nbd}(\partial\bar{R}; P) - R$  はいくつかのアニュラスと Möbius バンドからなる. この Möbius バンドの数を  $m_R$  とおくと,  $\text{gl}(R)$  の値は

$$\text{gl}(R) - \frac{1}{2}m_R \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

を満たす. この条件は  $P$  の組み合わせ構造のみに依存することに注意する.

Simple polyhedron  $P$  に上の条件 (1) を満たす coloring  $\text{gl} : \{P \text{ の内部領域} \} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  が定められたものを **shadowed polyhedron** とよび,  $(P, \text{gl})$  と表す. Turaev [35] は,  $(P, \text{gl})$  から 4 次元多様体  $N$  が一意的に復元されることを示した. まとめると次のようになる.

- 定理 1.1** (Turaev [35]).
1. 向き付けられたコンパクト可微分 4 次元多様体の shadow  $P$  に対し,  $P$  の gleam が自然な方法で一意的に定まる.
  2. Shadowed polyhedron  $(P, \text{gl})$  に対し, 向き付けられた境界付きコンパクト可微分 4 次元可微分多様体  $N$  と  $P$  の  $N$  への shadow としての埋め込みで, その埋め込みから定まる  $P$  の gleam が  $\text{gl}$  と一致するものが一意的に存在する.

容易に確かめられるように, 任意の 4 次元 2-ハンドル体は shadow を持つ. 同様に, 任意の 3 次元多様体  $X$  とその中の絡み目  $L$  (空でもよい) の対  $(X, L)$ , 閉 4 次元多様体  $M$  は shadow を持ち, またこれらは shadowed polyhedron により一意的に復元される. Polyhedron を branched polyhedron, special polyhedron, さらに branched special polyhedron に制限しても, 同様の事実が成り立つことが知られている.

**例 1.**  $S^2$  に gleam  $n$  を与えた shadowed polyhedron に対応するコンパクト 4 次元多様体  $N$  は, Euler 数が  $n$  である  $S^2$  上の  $D^2$  バンドルである. その境界は Euler 数が  $n$  である  $S^2$  上の  $S^1$  バンドル, すなわちレンズ空間  $L(n, 1)$  である (ただし,  $L(0, 1) = S^1 \times S^2$ ,  $L(\pm 1, 1) = S^3$ ,  $L(\pm 2, 1) = \mathbb{R}\mathbb{P}^3$  とみなす).  $n = 0$  であるときは,  $\partial N \cong S^1 \times S^2$  であり,  $N$  に 3-ハンドルおよび 4-ハンドルを 1 つずつ接着することで  $S^4$  を得る.  $n = 1$  であるときは,  $\partial N \cong S^3$  であり,  $N$  に 4-ハンドルを 1 つ接着することで  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  を得る. 同様に,  $n = -1$  であるとき,  $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  を得る.  $n \neq 0, \pm 1$  のときは, この shadowed polyhedron は閉 4 次元多様体の shadow にはなれない.

**例 2.**  $P' := (\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \times \{1\}) \cup (\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times S^1) \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \times S^1$  とおくと,  $P'$  は simple polyhedron ではないが,  $P'$  を適切に摂動することで唯一つの頂点をもつ simple polyhedron  $P$  を得る. この  $P$  は  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \times S^1$  の shadow であり,  $P$  の各領域の gleam は 0 である. ( $P$  の閉近傍の境界は  $\#2(S^1 \times S^2)$  であるので,  $P$  は  $\#2(S^1 \times S^2)$  の shadow でもある.)

同じ可微分多様体を表す shadowed polyhedron は一般に無数に存在する. これらに関連付けるムーブについては Turaev [35], Costantino [4] で詳しく解説されている. また, 本稿では扱わないが, branching が定められた shadow による 4 次元多様体のスピンの  $c$  構造, 複素構造, Stein 構造の研究については Costantino [4, 5, 7, 10] の研究がある.

### 1.3. Shadow complexity

4 次元 2-ハンドル体  $N$  の shadow の頂点数の最小値を  $N$  の **shadow complexity** とよび  $\text{sc}(N)$  と表す. 同様に, 閉 3 次元多様体  $X$  とその中の絡み目  $L$  (空でもよい) の

対  $(X, L)$ , および閉 4 次元多様体  $M$  に対して, **shadow complexity**  $sc(X, L)$ ,  $sc(M)$  が定義される. Shadow を branched polyhedron, special polyhedron に制限して同様に定義される complexity を  $sc^{br}(\cdot)$ ,  $sc^{sp}(\cdot)$  と表す.

Martelli [21] により, 各自然数  $n$  に対して  $sc^{sp}(M) = n$  となる可微分閉 4 次元多様体  $M$  は有限個 (つまり可微分閉 4 次元多様体に対して,  $sc^{sp}$  は finite-to-one 不変量) であることが示されている. Shadow に基づくその他の complexity は finite-to-one ではない.

**例 3.** 例 1 より,  $sc(L(p, 1)) = 0$  であること, および閉 4 次元多様体について  $sc(S^4) = sc(\mathbb{C}P^2) = sc(\overline{\mathbb{C}P^2}) = 0$  であることがわかる. また, 例 2 より  $sc(\mathbb{R}P^3 \times S^1) \leq 1$  であることが分かる. (古宇田-Martelli-直江 [17] より実は  $sc(\mathbb{R}P^3 \times S^1) = 1$  である.)

## 2. 3 次元多様体の shadow complexity

### 2.1. 双曲体積と shadow complexity

$X$  を閉 3 次元多様体,  $P \subset N$  を  $X$  の shadow とし,  $S(P)$  の各成分は少なくとも 1 つの頂点を含むとする.  $\pi: N \rightarrow P$  を collapsing から誘導される射影とする.  $P$  の頂点  $p$  の  $P$  における閉近傍を  $C$  とおき,  $\pi^{-1}(C)$  を  $D^4$  と同一視する.  $\partial C$  は 4 頂点の完全グラフ  $K_4$  の多面体  $|K_4|$  である.  $\partial C$  の  $\partial D^4 = S^3$  における閉近傍を  $V$  とおくと  $V$  は種数 3 のハンドル体 (3 次元 1-ハンドル体) である. このとき,  $W := \pi^{-1}(C) \cap X = S^3 - \text{Int } V$  も種数 3 のハンドル体であることが容易に確かめられる<sup>4</sup>. よって  $W$  は 2 つの切頂正 8 面体を図 3 のように貼り合わせることで得られる. Minsky [23] にちなんで, 2 つの切頂正 8 面体によりこのように構成された種数 3 のハンドル体はしばしば **Minsky ブロック** とよばれる.  $X' = \pi^{-1}(\text{Nbd}(S(P); P)) \cap X$  とおく.  $X'$  は各頂点ごとに構成さ

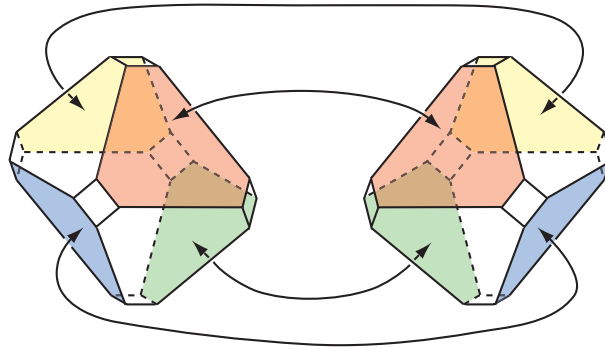


図 3: Minsky ブロックの構成.

れた Minsky ブロック (の残された 6 角形の面) どうしを,  $X$  の組み合わせ構造にしたがって貼り合わせることによって得られる. この際,  $X'$  の内部に含まれる切頂正 8 面体の各辺の周りではちょうど 4 つの切頂正 8 面体が貼り合う. したがって,  $X'$  の内部には自然に (完備な有限体積の) 双曲構造を入れることができ, この構造のもとで  $X'$  の内部は  $2c(P)$  個の理想双曲正 8 面体に分割される<sup>5</sup>. 特に  $X'$  の内部の双曲体積は  $2c(P)v_{\text{oct}}$  である. ただし,  $v_{\text{oct}} \approx 3.66$  は理想双曲正 8 面体の体積を表す. Costantino-Thurston [11] はこの構造を見出すことで次を得た.

<sup>4</sup>つまり  $V \cup W$  は  $\partial D^4 = S^3$  の種数 3 の Heegaard 分解を与えている.

<sup>5</sup> $c(P) = |V(P)|$  であった.



**定理 2.1** (Costantino-Thurston [11]).  $X$  を向き付けられた閉 3 次元多様体とする.  $X$  によらない普遍的な定数  $C > 0$  が存在し,  $X$  の Gromov ノルム  $\|X\|$  は以下の不等式を満たす:

$$\frac{v_{\text{tet}}}{2v_{\text{oct}}}\|X\| \leq \text{sc}(X) \leq C\|X\|^2.$$

ただし,  $v_{\text{tet}} \approx 1.01$  は理想双曲正 4 面体の体積を表す.

特に  $P$  が special shadow であるとき, 各領域は円盤であるので,  $X$  は  $X'$  から Dehn filling により得られる. Agol [1], Lackenby [18] による 6-Theorem と Perelman [27, 28, 29] による幾何化定理により, 各境界でのこの Dehn filling のスロープの長さが 6 よりも長ければ,  $X$  は双曲構造を持つ.  $X'$  の双曲構造は理想双曲正 8 面体の貼り合わせの情報により明示的に与えられているから, Dehn filling のスロープの長さは  $P$  の組み合わせ構造とその gleam の情報から与えられることになる.

$(P, \text{gl})$  を shadowed special polyhedron とする.  $P$  の各領域  $R$  に対し,  $\text{sl}(R) = \sqrt{4 \cdot \text{gl}(R)^2 + k^2}$  とおく. ここで  $k$  は  $R$  の閉包の境界が  $P$  の頂点を通過する回数を表す.  $\text{sl}(R)$  は  $X'$  から  $X$  を得る Dehn filling を施す際の, 対応する境界トラス上のスロープの長さに他ならない.  $R$  を  $P$  の領域全体に走らせたときの  $\text{sl}(R)$  の最小値を  $\text{sl}(P)$  とおく. Futer-Kalfagianni-Purcell [13] の結果を用いると, 次のような双曲体積の下からの評価が得られる.

**定理 2.2** (石川-古宇田 [16]).  $X$  を向き付けられた閉 3 次元多様体,  $P$  を  $X$  の branched special shadow とする.  $\text{sl}(P) > 2\pi$  であるとき,  $X$  は双曲多様体であり次が成り立つ.

$$2c(P)v_{\text{oct}} \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\text{sl}(P)}\right)^2\right)^{3/2} \leq \text{vol}(X).$$

定理 2.1, 2.2 の帰結として, 次が導かれる:

**系 2.3** (石川-古宇田 [16]).  $X$  を向き付けられた閉 3 次元多様体,  $P$  を  $X$  の special shadow とする.  $\text{sl}(P) > 2\pi\sqrt{2c(P)}$  であるとき,  $\text{sc}(X) = \text{sc}^{\text{sp}}(X) = c(P)$  が成り立つ.

つまり, 各 gleam の絶対値が十分大きい special shadow から得られる 3 次元多様体  $X$  の  $\text{sc}(X)$ ,  $\text{sc}^{\text{sp}}(X)$  は完全に決定することができる.

## 2.2. 安定写像と shadow complexity

安定写像とは, Morse 関数の一般化にあたる概念である. 2つの可微分多様体  $X, Y$  の次元の対がしかるべき範囲にあるとき, 写像空間  $C^\infty(X, Y)$  には安定写像がジェネリックに存在する<sup>6</sup>. 例えばターゲットの多様体の次元が 2 のとき, 安定写像はジェネリックに存在する.

$X$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体とする.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$  が安定写像であるとき, 特異点  $p \in X$  とその像  $f(p)$  の近傍で,  $f$  は局所的に次のいずれかで記述される:

- (1)  $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 + y^2)$ ;
- (2)  $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 - y^2)$ ;
- (3)  $(u, x, y) \mapsto (u, y^2 + ux - x^3)$ .

<sup>6</sup>  $C^\infty(X, Y)$  には Whitney  $C^\infty$  位相を入れる. 安定写像の一般論に関して詳しくは Golubitsky-Guillemin [14]などを参照のこと.

(1), (2), (3) のとき,  $p$  をそれぞれ定値折り目特異点, 不定値折り目特異点, カスプ特異点とよぶ.  $f$  の特異点の集合は  $X$  内の絡み目をなす.

$X$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$  を安定写像とする.  $X$  上の 2 点  $p_1, p_2$  が  $f$  のファイバーの同じ連結成分に含まれているとき同値であると定義する. この同値関係による  $X$  の商空間を  $W_f$  と表し  $f$  の Stein 分解とよぶ<sup>7</sup>. Stein 分解  $W_f$  は 2 次元の有限 CW 複体である. 図 4 は不定値折り目特異点を含むファイバーの近傍に対応する Stein 分解  $W_f$  の局所モデルを描いている. このうち, 図 4 (i) の点に

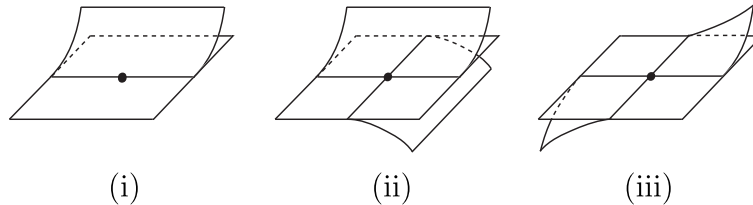


図 4: 不定値折り目特異点に対応する Stein 分解の局所モデル.

対応する  $f$  のファイバーは唯一つの不定値折り目特異点を含んでいる. 図 4 (ii), (iii) の点に対応する  $f$  のファイバーをそれぞれ  $\text{II}^2$  型,  $\text{II}^3$  型の特異ファイバーとよぶ. これらはそれぞれちょうど 2 つの不定値折り目特異点を含む. 安定写像  $f$  の  $\text{II}^2$  型,  $\text{II}^3$  型の特異ファイバーの集合をそれぞれ  $\text{II}^2(f)$ ,  $\text{II}^3(f)$  と表す<sup>8</sup>.

$X$  内の絡み目  $L$  が  $f$  の定値折り目特異点集合に含まれるとき,  $f$  を対  $(X, L)$  上の安定写像ともよぶ. 任意の対  $(X, L)$  はカスプ特異点を持たない安定写像を許容する (Levine [20] 参照). 以下, 安定写像はカスプ特異点を持たないもののみ考える. 安定写像  $f: (X, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して, その複雑度を  $c(f) := |\text{II}^2(f)| + 2|\text{II}^3(f)|$  で定義する.  $f$  を安定写像  $(X, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  全体に走らせたときの  $c(f)$  の最小値を  $\text{smc}(X, L)$  と表す.

**定理 2.4** (石川-古宇田 [16]).  $X$  を向き付けられた閉 3 次元多様体,  $L$  を  $X$  内の絡み目 (空でもよい) とする. このとき  $\text{sc}^{\text{br}}(X, L) = \text{smc}(X, L)$  が成り立つ.

$\text{sc}^{\text{br}}(X, L) \leq \text{smc}(X, L)$  であることは, Costantino-Thurston [11] の議論による. 実際, 与えられた安定写像の Stein 分解は, 「概ね」  $(X, L)$  の branched shadow とみなせる. Stein 分解の局所モデルのうち,  $\text{II}^3$ -型の特異ファイバーに対応している点 (図 4 (iii)) を  $\text{II}^2$ -型の特異ファイバー 2 つの局所モデルに置き換えることにより,  $\text{sc}^{\text{br}}(X, L) \leq \text{smc}(X, L)$  であることがわかる. 逆の不等式の証明は構成的であり, 技術的にやや複雑な議論を要する.

佐伯 [30] において,  $\text{smc}(X, L) = 0$  である必要十分条件は  $L$  の外部空間がグラフ多様体 (Gromov ノルムが 0 である多様体<sup>9</sup>) であることが示されている. 定理 2.1, 2.4 を合わせて得られる帰結はこの結果の一つの拡張とみなせる. 石川-古宇田 [16] では,  $\text{smc}(S^3, L) = 1$  なる  $S^3$  内の双曲絡み目  $L$  の完全な特徴付けが与えられている. 例えば, 8 の字結び目の  $\text{smc}$  は 1 である.

定理 2.4 と系 2.3 から, 次が導かれる:

<sup>7</sup> 商写像  $X \rightarrow W_f$  を  $q_f$  と表すと  $f = \bar{f} \circ q_f$  なる写像  $\bar{f}: W_f \rightarrow \mathbb{R}^2$  が一意的に定まる. 合成  $\bar{f} \circ q_f$  や  $q_f$  を  $f$  の Stein 分解とよぶこともある.

<sup>8</sup> これらの記号は佐伯 [31] による.

<sup>9</sup> 本来, 3 次元グラフ多様体とは  $S^1 \times D^2$  と  $S^1 \times Q$  (ただし,  $Q$  は 3 つ穴あき球面) の有限個のコピーを境界で貼り合わせて得られる多様体として定義される. Gromov ノルムによるこの言い換えは幾何化定理 (Perelman [27, 28, 29]) の帰結である.

系 2.5 (石川-古宇田 [16]).  $X$  を向き付けられた閉 3 次元多様体,  $P$  を  $X$  の branched special shadow とする.  $sl(P) > 2\pi\sqrt{2c(P)}$  であるとき,  $sc(X) = smc(X) = c(P)$  が成り立つ.

つまり, 各 gleam の絶対値が十分大きい branched special shadow から得られる 3 次元多様体  $X$  の  $smc(X)$  は完全に決定することができる.

### 3. 4 次元多様体の shadow complexity

#### 3.1. 境界付き 4 次元多様体の shadow complexity

境界付き 4 次元多様体の shadow complexity については, 直江氏による次の結果がある.

定理 3.1. 1. (直江 [24]) Shadow complexity が 0 である acyclic な 4 次元多様体は  $D^4$  と微分同相である.

2. (直江 [25]) Shadow complexity が 0 である cork は存在しない. Shadow complexity が 1 である cork は無数に存在する.

3. (直江 [26]) 任意に大きい shadow complexity を持つ cork が存在する.

定理 3.1 の 3 の証明, すなわち境界付き 4 次元多様体の shadow complexity の下からの評価には境界の 3 次元多様体の shadow complexity に関する系 2.3 が本質的に使われている.

#### 3.2. 閉 4 次元多様体の shadow complexity

下記に挙げるように, 閉 4 次元多様体  $M$  の shadow  $P \subset N$  には, 3 次元多様体  $X = \partial N$  や境界付き 4 次元多様体  $N$  の shadow とみなしたときに比して格段に難しい点がある.

難点 1 すべての shadowed polyhedron  $P$  が閉 4 次元多様体を表すわけではない.

難点 2 Shadowed polyhedron  $P$  を単純閉曲線に沿って「基本的なピース」に分解する操作は, 対応する 3 次元多様体  $X$  や境界付き 4 次元多様体  $N$  をそれぞれ  $S^1 \times S^1$ ,  $S^1 \times D^2$  により分解することに対応していたが, この分解は一般には  $M$  の  $S^1 \times S^2$  による分解には延びない.

Polyhedron を special なものに限ると, 考えるべき polyhedron は圧倒的に減り, 少なくとも上の「難点 2」を回避することができる. Costantino [6] は special shadow を用いた閉 4 次元多様体の complexity について次を得た.

定理 3.2 (Costantino [6]). 閉 4 次元多様体  $M$  が  $sc^{sp}(M) \leq 1$  を満たす必要十分条件は  $M$  が  $S^4$ ,  $\mathbb{C}P^2$ ,  $\overline{\mathbb{C}P^2}$ ,  $S^2 \times S^2$ ,  $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ ,  $\overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ ,  $\overline{\mathbb{C}P^2} \# \mathbb{C}P^2$  のいずれかと微分同相であることである.

Simple polyhedron  $P$  の特異集合  $S(P)$  の各連結成分に含まれる頂点の数の最大値を  $c^*(P)$  と表すことにする. 閉 4 次元多様体  $M$  に対し,  $P$  を  $M$  の shadow 全体に走らせたときの  $c^*(P)$  の最小値を  $M$  の connected shadow complexity とよび  $sc^*(M)$  と表す. 定義から直ちに  $sc^*(M) \leq sc(M)$  であり, 特に  $sc^*(M) = 0$  であることと  $sc(M) = 0$  であることは同値である. Shadow complexity が  $n$  以下の閉 4 次元多様体の集合を  $\mathcal{M}_n^*$  と表す. 任意の非負整数  $n$  に対し,  $\mathcal{M}_n^*$  は連結和について閉じている.

定理 3.3 (古宇田-Martelli-直江 [17]). 任意に大きい connected shadow complexity  $sc^*(M)$  を持つ閉 4 次元多様体  $M$  が存在する.

この定理の証明には Freedman [12] による群の width とよばれる不変量が使われる。

境界がいくつかの  $S^1 \times S^2$  の非交和からなる向き付けられたコンパクト 4 次元多様体をブロックとよぶ.  $S$  をブロックの有限集合とする.  $S$  からいくつかのブロックの有限個のコピーをとり, それらの境界を (向きを逆にする微分同相写像で) 貼り合わせて得られる向き付けられた閉 4 次元多様体を  $S$  で生成されるグラフ多様体とよぶ.

**定理 3.4** (Martelli [22]).  $M \in \mathcal{M}_0^*$  である必要十分条件は  $M = M' \# h\mathbb{C}P^2$  (ただし  $h \in \mathbb{Z}$  であり<sup>10</sup>,  $M'$  は 8 つのブロックからなるある族  $\mathcal{S}_0$  により生成されるグラフ多様体) と表されることである.

$\mathcal{S}_0$  のうち, 2 つは  $S^2 \times D^2$ ,  $S^2 \times Q$  (ただし,  $Q$  は 3 つ穴あき球面) である. 残りの 6 個は  $S^1 \times S^3$  から図 5 に描かれている  $S^1 \times S^2 \subset S^1 \times S^3$  内のグラフ絡み目のチューブ近傍を除くことにより得られる. Shadow complexity が 0 の閉 4 次元多様体のう

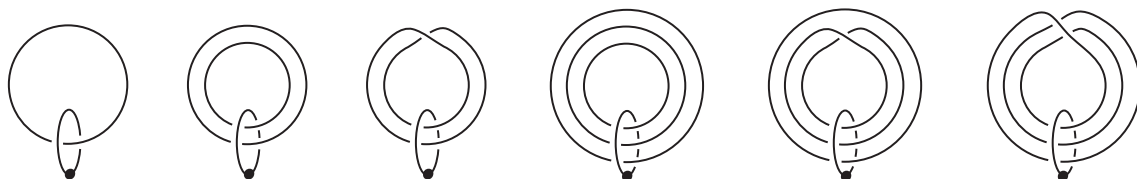


図 5:  $S^1 \times S^2$  内の 6 個の絡み目の Kirby 図式による表示.

ち, 単連結であるものは  $\#h(S^2 \times S^2)$ ,  $\#h\mathbb{C}P^2 \# \overline{k\mathbb{C}P^2}$  (ただし,  $h, k \geq 0$ ) で尽くされている (Martelli [22] 参照).

**定理 3.5** (古宇田-Martelli-直江 [17]).  $M \in \mathcal{M}_1^*$  である必要十分条件は  $M = M' \# h\mathbb{C}P^2$  (ただし  $h \in \mathbb{Z}$  であり,  $M'$  は 20 個のブロックからなるある族  $\mathcal{S}_0 \sqcup \mathcal{S}_1$  により生成されるグラフ多様体) と表されることである.

$\mathcal{S}_1$  に含まれる 12 個の多様体のうち, 11 個は  $\#2(S^1 \times S^3)$  から図 6 に描かれている  $\#2(S^1 \times S^2) \subset \#2(S^1 \times S^3)$  内の絡み目のチューブ近傍を除くことにより得られる. 図から想像されるように, これらの絡み目は simple polyhedron の頂点を 1 つ含む特異集合の近傍から構成されている. 特に, 2.1 節で述べた事実によりこれらの絡み目の  $\#2(S^1 \times S^2)$  における補空間の双曲体積は  $2v_{\text{oct}}$  である. 残りの 1 つは  $\mathbb{R}P^3 \times S^1$  から  $\mathbb{R}P^1 \times \{1\}$  のチューブ近傍を除くことにより得られる<sup>11</sup>. 定理 3.5 の証明は, 図 6 に描かれている絡み目の例外的 Dehn 手術 (のうち  $\#k(S^1 \times S^2)$  を生むもの) の決定 (「難点 1」の打開) と, shadow のムーブを用いた技術的な議論 (「難点 2」の打開) による.

定理 3.5 の帰結として,  $\mathcal{M}_1^*$  には交叉形式が  $mE_8 \oplus nH$  ( $m \neq 0$ ) なる多様体, 符号数が 0 でありダブルではない多様体, aspherical な多様体は含まれないことが分かる. 特に, K3 曲面の connected shadow complexity は 2 以上である. 一方 Costantino [6] により,  $\text{sc}^{\text{SP}}(\text{K3}) \leq 14$  であることが示されている. Connected shadow complexity を上げていったときに K3 曲面がいつ現れるのかは知られておらず, 興味深い問題として残されている.

定理 3.4, 3.5 においてブロックの集合  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$  が有限集合であることは極めて非自明な事実である. 一般の  $n \geq 2$  に対し, 定理 3.4, 3.5 のような  $\mathcal{S}_n$  が有限集合としてとれ

<sup>10</sup>  $\#0\mathbb{C}P^2 = S^4$  と解釈する.  $h < 0$  のときは  $\#h\mathbb{C}P^2 = \#|h|\overline{\mathbb{C}P^2}$  と解釈する.

<sup>11</sup> この「例外的な」ブロックが必要になる点に定理 3.5 の証明の難しさが集約されている.

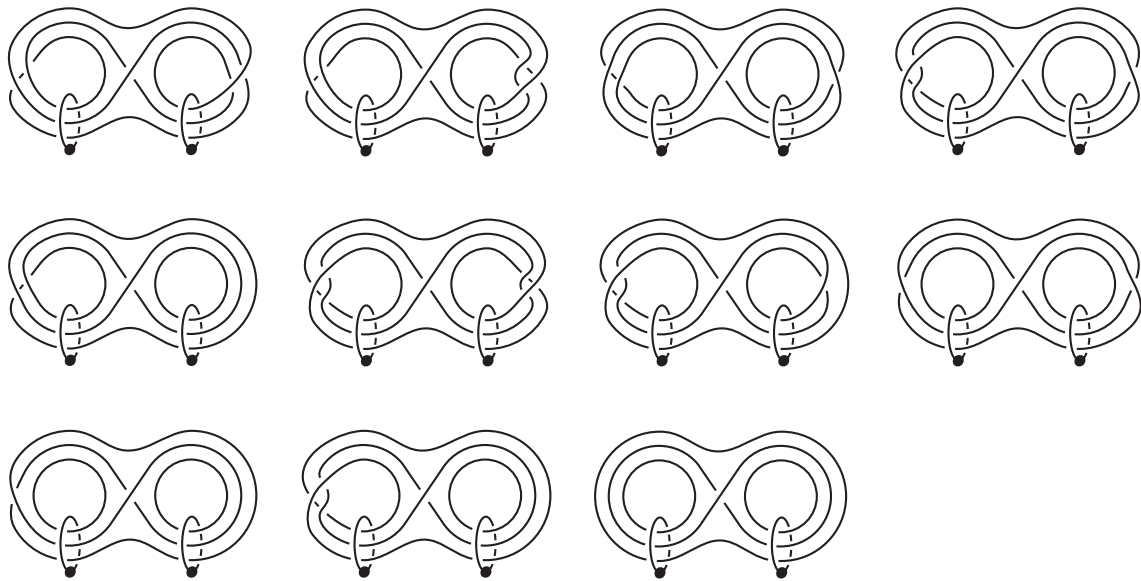


図 6:  $\#2(S^1 \times S^2)$  内の 11 個の絡み目の Kirby 図式による表示.

るかどうかは知られていない.

謝辞 本稿で取り挙げた定理のいくつかは筆者と石川昌治氏 (慶應義塾大学), Bruno Martelli 氏 (Pisa 大学), 直江央寛氏 (東北大学) との共同研究に基づきます. 石川昌治氏, 直江央寛氏には原稿に目を通していただき, いくつもの修正点をご指摘いただきました. 心よりお礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] Agol, I., Bounds on exceptional Dehn filling, *Geom. Topol.* **4** (2000), 431–449.
- [2] Burri, U., For a fixed Turaev shadow Jones-Vassiliev invariants depend polynomially on the gleams, *Comment. Math. Helv.* **72** (1997), no. 1, 110–127.
- [3] Carrega, A., Martelli, B., Shadows, ribbon surfaces, and quantum invariants, *Quantum Topol.* **8** (2017), no. 2, 249–294.
- [4] Costantino, F., *Shadows and branched shadows of 3 and 4-manifolds*, Edizioni della Normale, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, 2005.
- [5] Costantino, F., A short introduction to shadows of 4-manifolds, *Fund. Math.* **188** (2005), 271–291.
- [6] Costantino, F., Complexity of 4-manifolds, *Experiment. Math.* **15** (2006), no. 2, 237–249.
- [7] Costantino, F., Stein domains and branched shadows of 4-manifolds, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 89–111.
- [8] Costantino, F.,  $6j$ -symbols, hyperbolic structures and the volume conjecture, *Geom. Topol.* **11** (2007), 1831–1854.
- [9] Costantino, F., Coloured Jones invariants of links and the volume conjecture, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **76** (2007), no. 1, 1–15.
- [10] Costantino, F., Branched shadows and complex structures of 4-manifolds, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), no. 11, 1429–1454.
- [11] Costantino, F., Thurston, D., 3-manifolds efficiently bound 4-manifolds, *J. Topol.* **1** (2008), no. 3, 703–745.

- [12] Freedman, M. H., Group width. *Math. Res. Lett.* **18** (2011), no. 3, 433–436.
- [13] Futer, D., Kalfagianni, E., Purcell, J. S., Dehn filling, volume, and the Jones polynomial, *J. Differential Geom.* **78** (2008), no. 3, 429–464.
- [14] Golubitsky, M., Guillemin, V., *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [15] Goussarov, M. N., Interdependent modifications of links and invariants of finite degree, *Topology* **37** (1998), no. 3, 595–602.
- [16] Ishikawa, M., Koda, Y., Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, *Math. Ann.* **367** (2017), no. 3–4, 1819–1863.
- [17] Koda, Y., Martelli, B., Naoe, H., Four-manifolds with shadow-complexity one, arXiv:1803.06713.
- [18] Lackenby, M., Word hyperbolic Dehn surgery, *Invent. Math.* **140** (2000), no. 2, 243–282.
- [19] Laudenbach, F., Poénaru, V., A note on 4-dimensional handlebodies, *Bull. Soc. Math. France* **100** (1972), 337–344.
- [20] Levine, H., Elimination of cusps, *Topology* **3** (1965), suppl. 2, 263–296.
- [21] Martelli, B., Links, two-handles, and four-manifolds, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2005, no. 58, 3595–3623.
- [22] Martelli, B., Four-manifolds with shadow-complexity zero, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2011, no. 6, 1268–1351.
- [23] Minsky, Y., The classification of Kleinian surface groups. I: Models and bounds, *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 1, 1–107.
- [24] Naoe, H., Shadows of 4-manifolds with complexity zero and polyhedral collapsing, *Proc. Amer. Math. Soc.* **145** (2017), no. 10, 4561–4572.
- [25] Naoe, H., Mazur manifolds and corks with small shadow complexities, arXiv:1505.00520, to appear in *Osaka J. Math.*
- [26] Naoe, H., Corks with large shadow-complexity and exotic 4-manifolds, arXiv:1711.04942.
- [27] Perelman, G., The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math/0211159.
- [28] Perelman, G., Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math/0303109.
- [29] Perelman, G., Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math/0307245.
- [30] Saeki, O., Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, *Topology* **35** (1996), no. 3, 671–698.
- [31] Saeki, O., *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Mathematics **1854**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [32] Shumakovitch, A., Shadow formula for the Vassiliev invariant of degree two, *Topology* **36** (1997), no. 2, 449–469.
- [33] Thurston, D., The algebra of knotted trivalent graphs and Turaev’s shadow world, *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, pp. 337–362, *Geom. Topol. Monogr.* **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [34] Turaev, V. G., Shadow links and face models of statistical mechanics, *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 1, 35–74.
- [35] Turaev, V. G., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics **18**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

# Gauge theory for families of 4-manifolds

今野北斗 (東京大学・学振DC)\*

## 1. 序

本稿では、4次元多様体の連続族に対してゲージ理論を展開する「族のゲージ理論」の紹介を行う。

一般にトポロジー・幾何学において、ある対象の連続族の研究は基本的である。族の研究は、多くの場合、ひとつの対象の変形の自由度の研究、あるいは自己同型群の研究に言い換えられる。例えば、アイソトピーで2つの対象が結べるか否かを考えることは変形の自由度の研究の典型例であり、対象を束ねて得られるバンドルの特性類の研究は、自己同型群の分類空間のコホモロジーの研究に他ならない。これらはいずれもトポロジーの古典的な興味の対象である。

一方、1982年のDonaldsonのブレイクスルー以降、ゲージ理論は、古典的なトポロジーの手法を真に超えた解析的な道具立てを4次元トポロジーにもたらしてきた。そのゲージ理論を、4次元多様体の族にまで拡張すると、どのような現象が捉えられるのであろうか。そして、族に対するゲージ理論はどのような理論的な広がりを持ち得るのであろうか。これが本稿のテーマである。

族に対するゲージ理論の最初の著名な研究は、1998年に始まるRuberman [23–25]によるものである。Rubermanは、1次元空間にパラメトライズされた4次元多様体の族に対してゲージ理論を展開し、いくつかの興味深い応用を与えた。当然期待される次のステップは、高次元のパラメータ空間でパラメトライズされた族に対するゲージ理論の研究である。しかし、Rubermanの結果や議論の応用に関する研究はその後いくつかなされたものの、一般論の可能性を追求する方向は長らく発展しなかった。本稿では、族のゲージ理論の一般論の構築と応用に関する講演者の研究 [11–14]、とりわけ族のゲージ理論による4次元多様体束の特性類の研究 [14] を中心に紹介する。その基調を成す哲学は、Mumford–森田–Miller類に代表される特性類の理論の無限次元化である。

## 2. ゲージ理論とトポロジー：不変量と制約

族のゲージ理論の議論に入る前に、まずは通常の（すなわちパラメトライズされていない）ゲージ理論をトポロジーに応用する際の方法論がどのようなものなのかを説明する。その基本的な手順は、荒く述べると次のようにまとめられる。

**ステップ 1:** Yang–Mills 反自己双対方程式あるいはSeiberg–Witten 方程式を、与えられた4次元多様体の上で立式する。(そのためには、Riemann 計量などの非トポロジカルな付加データを固定する必要がある。)

**ステップ 2:** これらは非線形偏微分方程式であるが、その解空間はgenericには無限次元多様体になる。ここにゲージ変換群と呼ばれる無限次元群が作用している。この作用で解空間の商を取る。この商はモジュライ空間と呼ばれ、(genericityの下で)有限次元多様体となる。

---

本研究はJSPS 科研費16J05569および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである。

\* e-mail: hkonno@ms.u-tokyo.ac.jp

ステップ 3: モジュライ空間の幾何学的性質から, 元々偏微分方程式を立式する舞台であった4次元多様体の情報を引き出す.

ステップ 3をより詳しく述べると, モジュライ空間からの情報の引き出し方には, 大別すると次の2つのタイプがある.

- 方法1: モジュライ空間の情報を用いて不変量を定義し, 多様体の区別に用いる<sup>1</sup>.
- 方法2: モジュライ空間の性質から, 4次元多様体の古典的な不変量 (典型的には交叉形式) に何らかの制約を与える.

方法1・方法2に基づく不変量・4次元多様体への制約の典型例を下の表に挙げる<sup>2</sup>.

方法1: 不変量	方法2: 制約
Donaldson 不変量 [7], Seiberg–Witten 不変量 [26], Bauer–Furuta 不変量 [4], ⋮	Donaldson の対角化定理 [5], 随伴不等式 [16], 古田の 10/8 不等式 [10], ⋮

方法1で考察されているような不変量を用いると, 互いに同相であるが微分同相ではない, 所謂エキゾチックな4次元多様体の2対を detect できるのであった.

注意 1 与えられた4次元多様体に対して, 方法1で述べているような不変量が非自明であれば, 多くの場合 (方法2で述べているような) 何らかの制約を出すこともできる. その理由は次の通りである. ゲージ理論的不変量の定義の多くは, モジュライ空間の数え上げによるものであり, 特に不変量が非自明であれば, どんな付加データに対してもモジュライ空間が空でないことが帰結される. このこと自体が多くの幾何学的情報を持っており, 4次元多様体に制約を与える. しかし, 不変量が消えている (あるいはそもそも定義できない) 場合であっても, 方法2は通用する, すなわち4次元多様体に制約を与える議論のみは可能である場合もしばしばある. Donaldson の対角化定理はその例である.

### 3. 族のゲージ理論とトポロジー

次に, 族のゲージ理論において, 2節で述べた2つの方法, すなわち4次元多様体の不変量の構成と4次元多様体に制約を与える議論はどのように拡張されるかを述べよう.

#### 3.1. 方法1: 不変量

現時点で知られている, 方法1の族版, すなわち族のゲージ理論の不変量は以下の通りである:

1. 4次元多様体の自己微分同相写像に対する整数値不変量 (Ruberman [23–25])

<sup>1</sup>方法1を用いる場合は, 最終的に得られた不変量が, 上の手順のステップ1で取った付加データの選び方に依らないことの証明が必要となる.

<sup>2</sup>この表における Bauer–Furuta 不変量と古田の 10/8 不等式に関しては, モジュライ空間ではなく, 偏微分方程式に対応する無限次元空間の間の写像そのものを用いる. また, 表の左右は必ずしも厳密に対応しているわけではない. 例えば Seiberg–Witten 理論を用いても Donaldson の対角化定理は証明できる.



2.  $\text{spin}^c$  4次元多様体の族に対する整数値不変量 (Li-Liu [17])

3. 4次元多様体束の特性類 (K. [14])

ここで3の4次元多様体束の特性類について正確に述べておく. 本稿の考察対象は4次元多様体の族であるが, 多様体の族として最もリーズナブルなクラスのひとつはファイバー束であろう. そしてファイバー束に対するトポロジカルな不変量として最も代表的なものは特性類である. これをゲージ理論を用いて構成したい. 族のゲージ理論を用いて4次元多様体束の特性類の構成ができるのではないかということは, 1990年ごろから Donaldson [6, 8] が示唆していた. ここで述べる講演者の構成 [14] はその一つの実現を与えるものである. また, 2015年のトポロジーシンポジウムにおいて森田茂之が提起した, 次の問題に対するひとつの解答を与えるということも, 講演者のひとつのモチベーションであった:

**問 1** (森田茂之 [19]) Euler 類を真に超える特性類は存在するだろうか? 具体的問いとしては, 微分可能な閉多様体  $M$  をファイバーとするファイバーバンドルの“異種特性類”(古典的な理論では説明できない特性類) をできるだけ多く構成せよ.

ここで説明する特性類が如何なる意味で Euler 類を超えているかを一言で述べれば, ゲージ理論に基づく特性類は Euler 類の無限次元化を考えることにより定義される, ということである. すなわち, 曲面束の Mumford–森田–Miller 類のような, Euler 類に基づいて定義される多様体束の特性類の構成の無限次元化を行うことにより定義がなされる.  $SO(3)$ -Yang–Mills 方程式に基づく特性類と Seiberg–Witten 方程式に基づく特性類の2種類が定義できるのであるが, 基本的には平行しているため, 計算例の多い Seiberg–Witten 方程式に基づく特性類のみここでは述べる.  $X$  を向き付けられた4次元閉多様体とする.  $\text{Diff}^+(X)$  を  $X$  上の向きを保つ自己微分同相写像のなす群とする.  $\mathfrak{s}$  を  $X$  上のひとつの  $\text{spin}^c$  構造の同型類とし,

$$\text{Diff}(X, \mathfrak{s}) := \{ f \in \text{Diff}^+(X) \mid f^* \mathfrak{s} = \mathfrak{s} \}$$

とおく. また,  $\mathcal{O}$  を  $X$  のひとつのホモロジー的向き (homology orientation), すなわちベクトル空間  $H^1(X; \mathbb{R}) \oplus H^+(X; \mathbb{R})$  のひとつの向きとする. ここで  $H^+(X; \mathbb{R})$  は  $H^2(X; \mathbb{R})$  の交叉形式に関して正定値な最大次元の部分空間であり, 以下その次元を  $b^+(X)$  と書く.  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  の部分群  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O})$  を

$$\text{Diff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O}) := \{ f \in \text{Diff}(X, \mathfrak{s}) \mid f^* \mathcal{O} = \mathcal{O} \}$$

で定める. さて,  $\text{spin}^c$  構造 (の同型類)  $\mathfrak{s}$  に対しては, 形式的次元  $d(\mathfrak{s})$  と呼ばれる整数が定まった. これは  $X$  の特性数を用いて具体的に書けるもので,  $(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))/4$  で与えられる. ( $d(\mathfrak{s})$  のゲージ理論的な意味は4節で説明する.)

**定理 1** (K. [14])  $n$  を非負整数とし,  $b^+(X) \geq n + 2$  かつ  $d(\mathfrak{s}) = -n$  と仮定する. このとき, コホモロジー類

$$\text{SW}(X, \mathfrak{s}) \in H^n(\text{BDiff}(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z}/2)$$

および

$$\text{SW}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O}) \in H^n(\text{BDiff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O}); \mathbb{Z})$$

を, Seiberg–Witten 方程式の  $n$  次元の族を用いて構成できる.

定理1の不変量は Seiner–Witten 不変量の族版である. すなわち, 定理1において  $n = 0$  とすると,  $\text{SW}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O})$ ,  $\text{SW}(X, \mathfrak{s})$  はそれぞれ通常の Seiner–Witten 不変量およびその mod 2 に一致する.

**例 1** 定理1のコホモロジー類が非自明になるような  $X$  の例は存在する. 例えば,  $X$  が単連結で  $\mathfrak{s}$  がスピン構造から来る  $\text{spin}^c$  構造の場合  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s}) = \text{Diff}^+(X)$  であるが,

$$\text{SW}(K3\#n(S^2 \times S^2), \mathfrak{s}_{\text{spin}}) \neq 0 \text{ in } H^n(\text{BDiff}^+(K3\#n(S^2 \times S^2)); \mathbb{Z}/2)$$

が成立することが確かめられる. ここで  $\mathfrak{s}_{\text{spin}}$  は  $K3\#n(S^2 \times S^2)$  のスピン構造から来る  $\text{spin}^c$  構造である. ここで,  $n > 0$  ならば,  $K3\#n(S^2 \times S^2)$  に対する従来のゲージ理論的不変量, すなわち Donaldson 不変量や Seiber–Witten 不変量は消滅している. しかし族に対する不変量は消えていないのである.

定理1の証明, すなわち特性類の構成のアイデアは5節で説明する. ここではまず, 族のゲージ理論の不変量のひとつの応用例を説明したい. 2節で述べたように, 通常のゲージ理論の不変量を用いると, エキゾチックな現象を detect できるのであった. このような現象の族版のひとつの候補として, 次のようなものが考えられる. 4次元多様体  $X$  をファイバーとする二つのファイバー束  $X \rightarrow E_i \rightarrow B$  ( $i = 1, 2$ ) が与えられたとする. ただし,  $E_i$  の構造群  $G$  は  $X$  の微分同相群  $\text{Diff}(X)$  (あるいはその適当な部分群) とする. このとき, 少なくとも論理的には,

$E_1$  と  $E_2$  が位相的には同型だが滑らかな範疇では同型ではない

可能性がある. より正確には,  $E_i$  の構造群を  $X$  の同相群  $\text{Homeo}(X)$  に取り替えたとき両者は同型なバンドルだが,  $G$ -束としては同型でない可能性がある. そして実際, Ruberman [23] や講演者 [14] の族のゲージ理論の不変量を用いると, そのような現象を detect することができる. (このとき考えている  $E_i$  の構造群は, 適当な  $\text{spin}^c$  構造 (の同型類)  $\mathfrak{s}$  に対する  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  である.) 族のゲージ理論は, いわば族としてエキゾチックであるという現象を捉えることができるのである.

ひとつの4次元多様体を考えていたときには, 「標準的な微分構造」というものは一般には存在しない. しかし, ファイバー束を考えているときは, 自明束という標準的な族がある. そこで, 上で述べたことの特別な場合として, 次のような問いに答えることが, 族のゲージ理論の方法1による応用の典型的例となると思われる:

**問 2** 4次元多様体をファイバーとするファイバー束であって, 位相的には自明だが滑らかな範疇では自明でないものをできるだけ多く見つけよ.

現時点では, Ruberman [23] や講演者の不変量 [14] を用いて detect できているこのような族の例は,  $S^1$  上の族に限る<sup>3</sup>. しかし, 族のゲージ理論をさらに拡張することによって, 例えばトーラス  $T^2$  上の族であって位相的には自明だが滑らかな範疇では非自

<sup>3</sup> 底空間が任意の次元の場合には, 与えられた4次元多様体束が位相的に自明であると保証する手段が現時点では不足している. これは, 標語的に言えば, Freedman 理論の族版の欠如による. 近年では Freedman 理論を主たる研究領域としている人は少ないように見受けられるが, 4次元位相多様体の族に対して Freedman 理論のアナロジーがどれくらい成立するかは興味深い問いであると思われる. 「族の Freedman 理論」と呼ぶべきものと族のゲージ理論の両方が発展すれば, 4次元多様体の同相群と微分同相群の差の理解がより一層進むと期待できる.

明なものを見つけることも可能である。これには Bauer–Furuta 不変量の族版を用いる必要がある。

Bauer–Furuta 不変量は、Seiberg–Witten 不変量の精密化である。Bauer–Furuta 不変量を用いると、Seiberg–Witten 不変量ではエキゾチック構造の有無の判定が不能な 4 次元多様体に対し、その上のエキゾチック構造を detect することができる場合がある。 $T^2$  上の族であって興味深いものを Bauer–Furuta 不変量の族版で detect できるのは、大雑把に述べるとこの現象の族版に相当する。

**注意 2** このような興味深い例を detect するために必要な範疇における族の Bauer–Furuta 不変量の定式化だけであれば、講演者の特性類 [14] 以上の大きな困難はなく理論構成が進む。しかし、期待し得る範囲で可能な限り一般的に定式化を行おうとすると、gerbe と呼ばれるスタックの一種が自然に現れる。これは通常の（すなわちパラメトライズされていない）ゲージ理論には現れないものであり、理論構成自体も興味深い問題となる。

### 3.2. 方法 2 : 制約

次に方法 2 の族版を考える。現時点で知られている、方法 2 の族版、すなわち族のゲージ理論によって 4 次元多様体の族に制約を与える研究を挙げると以下の通りである：

1. 4 次元多様体上の自己微分同相のアイソトピーによる変形への制約 (Ruberman [23])
2. 4 次元多様体の自己微分同相写像の交叉形式への作用への制約 (中村 [20])
3. 4 次元位相多様体の自己同相写像の不可滑性 (中村 [21], Baraglia [3])
4. 4 次元多様体の上の正スカラー曲率計量のなす空間のトポロジーへの制約 (Ruberman [25], K. [13])
5. 4 次元多様体に埋め込まれた曲面配位への制約 (K. [11, 12])

上の内 1, 2, 3 は、4 次元多様体の自己微分同相写像に対する制約である。微分同相写像は、写像トラスを経由して、族と結びつく。これは  $S^1$  上の族であるが、より一般に、多様体に群作用が与えられると、Borel 構成により群の分類空間の上の族が得られる。上の 1, 2, 3 は、この族に対してゲージ理論を適用して得られた制約と理解することができる。4 は少々微分幾何的な応用なのでここでは割愛する。5 は、4 次元トポロジーにおける古典的な問題のひとつである、最小種数の問題の一般化に対するアプローチを与えるものである。これは様々な機会に説明させていただいたのでここでは省略する。(例えば [15] をご覧いただきたい。)

## 4. パラメータ付きモジュライ空間

ここで族のゲージ理論の最も原始的なアイデアを説明する。まず、モジュライ空間の形式的次元という概念を定義したい。ゲージ理論において扱われる偏微分方程式 (Yang–Mills 反自己双対方程式あるいは Seiberg–Witten 方程式) は、ゲージ群の作用込みで考えると、ある無限次元多様体  $B$  上の、ある Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  をファイバーとする無限次元のベクトル束  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow B$  の切断

$$s : B \rightarrow \mathcal{E} \tag{1}$$

と見なすことができる. この切断の零点集合  $s^{-1}(0)$  が, 方程式の解空間をゲージ群で割ったもの, すなわちモジュライ空間である. ここで, 各零点  $x \in s^{-1}(0)$  における  $s$  の微分  $ds_x : T_x \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$  が全射となっている状況を generic ということにする<sup>4</sup>. このとき, (無限次元の) 陰関数定理から  $s^{-1}(0)$  は多様体になるが, Fredholm 性が,  $s^{-1}(0)$  が実は有限次元であることを保証する. (モデルとして, 有限次元多様体上の有限階数のベクトル束に切断が与えられた状況を念頭において読んでいただきたい.)

generic な状況において, モジュライ空間の  $x \in s^{-1}(0)$  における接空間  $T_x(s^{-1}(0))$  は  $\text{Ker } ds_x$  に同型で,  $\text{Coker } ds_x = 0$  だから

$$\dim s^{-1}(0) = \text{Ker } ds_x - \text{Coker } ds_x \quad (2)$$

である. 等式 (2) の左辺は本当は  $s^{-1}(0)$  の  $x$  の近傍における次元と書くべきであるが, いま考えている状況では実は (2) の右辺は  $x$  に依らないのでこのまま書くことにする. 等式 (2) の右辺は, Fredholm 作用素  $ds_x$  の (解析的) 指数に他ならない. 以後 (2) の右辺を  $\text{ind } s$  と書くことにする.  $\text{ind } s$  自体は,  $s$  が generic であるか否かに拘らず定義できる. この  $\text{ind } s$  をモジュライ空間の形式的次元と呼ぶ.  $s$  が generic であれば, 形式的次元は真の次元である. 形式的次元は, ゲージ理論の方程式を考察しているトポロジカルな状況だけから定まり, Riemann 計量などの付加データには依らない. そして Atiyah–Singer の指数定理により, 特性数を用いて具体的に書くことができる.

例 2  $X$  を向き付けられた閉 4 次元多様体とする.

1.  $P \rightarrow X$  を  $X$  上の主  $SU(2)$  束とする. ( $P$  に関する) Yang–Mills 反自己双対方程式とは,  $X$  上の Riemann 計量を固定したとき,  $P$  上の接続  $A$  を未知関数とする

$$*F_A = -F_A$$

という方程式である. この方程式のモジュライの形式的次元は

$$8c_2(P) - 3(1 - b_1(X) + b^+(X))$$

で与えられる.

2.  $\mathfrak{s}$  を  $X$  上の  $\text{spin}^c$  構造とする. ( $\mathfrak{s}$  に関する) Seiberg–Witten 方程式とは,  $X$  上の Riemann 計量を固定したとき, 行列式直線束の接続  $A$  と正のスピンル  $\Phi$  を未知関数とする

$$\begin{cases} c(F_A^+) = \sigma(\Phi), \\ D_A \Phi = 0 \end{cases}$$

という方程式である. この方程式のモジュライの形式的次元は

$$\frac{1}{4}(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))$$

で与えられる.

<sup>4</sup> 本当は可約解を避けるための genericity も必要だが, それはここでは省略する.

ここで特に  $\text{ind } s < 0$  の場合を考えてみよう。トポジカルな問題への応用を考える場合には、方程式の摂動で不変な性質を考えるのが普通であるため、genericity は満たされているとしても一般性は失わない。しかし、形式的次元が負である今は、 $s$  が generic であれば、 $s^{-1}(0)$  は空である。(モデルとして、有限次元多様体上の有限階数のベクトル束を考えれば、底空間の次元よりもファイバーの次元の方が高い状況に相当する。) 空なモジュライ空間からは何ら情報が得られない。したがって、形式的次元が負である場合には、通常のゲージ理論は無力である。ここで族を考える必要が生じる。

$B$  を有限次元の滑らかな多様体とする<sup>5</sup>。  $B$  でパラメトライズされた4次元多様体  $X$  の連続族、すなわちファイバー束  $X \rightarrow E \rightarrow B$  が与えられたとしよう。ただし、ゲージ理論を考察するための設定ごと族として与えられたと仮定する。(例えば、 $SU(2)$ -Yang-Mills 方程式を考察するなら、 $SU(2)$  束  $P \rightarrow X$  の族、Seiberg-Witten 方程式を考察するなら、 $\text{spin}^c$  構造  $\mathfrak{s}$  の族が与えられたとする。) ここで付加データ (例えば Riemann 計量) の族をひとつ固定すると、ゲージ理論の方程式が  $B$  上でパラメトライズされた状況が得られる。つまり、無限次元ベクトル束とその切断 (1) が  $B$  上でパラメトライズされた状況、すなわち

$$s = \bigsqcup_{b \in B} s_b : \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{B}_b \rightarrow \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{E}_b$$

が手に入る。パラメトライズされた切断の零点集合  $s^{-1}(0) = \bigsqcup_{b \in B} s_b^{-1}(0)$  を考えよう。これをパラメータ付きモジュライ空間 (**parameterized moduli space**) という。(族として) generic な状況では、 $\dim(s^{-1}(0)) = \text{ind } s + \dim B$  である。(有限次元のモデルに戻って、有限次元多様体とその上の有限階数のベクトル束が空間  $B$  でパラメトライズされている状況を想像していただきたい。) 例えば  $\dim B = -\text{ind } s$  であれば、 $s^{-1}(0)$  は generic には0次元多様体であり、非空になり得る。形式的次元が負の状況でパラメータ付きモジュライ空間を用いる、というのが族のゲージ理論の基本的なアイデアである。

## 5. 族のゲージ理論に基づく4次元多様体束の特性類の構成

ここでは、4節で説明したことを基に、講演者 [14] による4次元多様体束の特性類の構成を説明する。既に述べたように、この特性類の定義のアイデアは、曲面束の Mumford-森田-Miller 類のような多様体束の特性類の構成の無限次元化を行うことである。これを説明するために Mumford-森田-Miller 類の定義を振り返る。少々恣意的であるが、その構成を以下の2段階に分けて理解する。 $\Sigma \rightarrow E \rightarrow B$  を曲面束としよう。

**ステップ 1:**  $E$  の“線形化”を考える。すなわち、ファイバーに沿った接束  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\text{fiber}} E \rightarrow E$  を考える。

**ステップ 2:** 線形化の Euler 類  $e(T_{\text{fiber}} E) \in H^2(E)$  を取る。

この2ステップの後、 $e(T_{\text{fiber}} E)$  のカップ積を取りファイバー積分を行うことにより Mumford-森田-Miller 類は定義された。ここで、上の2ステップの以下のような無限次元化を考える。

**ステップ I:** 非線形な対象 (例えば多様体) の上のある関数空間を考える。(非線形な対象の族が与えられた場合には、関数空間の族を考える。)

<sup>5</sup> 後々この仮定は外す。パラメトライズされた Fredholm 理論を考える際に、パラメータ空間の滑らかさは過剰な仮定であることが、Atiyah-Singer の族の指数の理論 [2] の教えるところである。

ステップ II: 無限次元多様体の上の無限次元ベクトル束  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  が (ある非線形な対象の上の関数空間として) 与えられたとする. さらにこの無限次元ベクトル束の Fredholm 切断  $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  が与えられたとする. このとき, 零点集合  $s^{-1}(0)$  を考える.

関数空間を取ることは, 非線形な対象のある種の線形化であり<sup>6</sup>, したがってステップ I は確かにステップ 1 の無限次元化である. ステップ II における零点集合  $s^{-1}(0)$  は, “無限次元ベクトル束の Poincaré 双対” を想像すれば,  $\mathcal{E}$  の Euler 類に対応する. そして “無限次元の Poincaré 双対” に相当する概念を正当化するために, Fredholm 性が用いられることになる. この哲学自体は, ゲージ理論の登場当初からあるものであるが, 通常のゲージ理論を考えている限り, この考え方を前面に押し出さなくとも多くの場合必要な議論ができてしまう. しかし, ゲージ理論を用いた特性類の定義を目標としたとき, 上のようなアナロジーは非常に自然な理論構成を与える.

以下特性類の構成の概略を説明する. まず考察する設定を述べる.  $X$  を向き付けられた 4 次元閉多様体,  $\mathfrak{s}$  をその上の  $\text{spin}^c$  構造の同型類とする.  $n$  を非負整数とし,  $b^+(X) \geq 2$  かつ  $d(\mathfrak{s}) = -n$  と仮定する.  $B$  を CW 複体とし,  $X \rightarrow E \rightarrow B$  を構造群が  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  であるようなファイバー束とする. このとき  $B$  上のコホモロジー類  $\text{SW}(E) \in H^n(B; \mathbb{Z}/2)$  を (関手的に) 構成することが目標である. 特に  $E \rightarrow B$  として普遍束  $E\text{Diff}(X, \mathfrak{s}) \rightarrow B\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  を取って,  $\text{SW}(X, \mathfrak{s}) := \text{SW}(E\text{Diff}(X, \mathfrak{s}))$  とおいたものが定理 1 である. ( $E$  の構造群が  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O})$  にまで簡約しているときは整数係数の  $\text{SW}(E) \in H^n(B; \mathbb{Z})$  を対応させることが目標となるが, 議論はほぼ同様に進むので以下  $\mathbb{Z}/2$  係数で考える.) 構成のアイデアをひとことで述べると, 障害理論の理論構成を真似することである. 障害理論では, 然るべき次元の胞体に, 胞体上のファイバーを見て得られる写像度を対応させることでコチェインを構成した. この写像度の代わりに, パラメータ付きモジュライ空間の数え上げを対応させるのである<sup>7</sup>. 具体的に述べると次のようになる.  $n$ -コチェイン  $\text{SW}(E, \sigma) \in C^n(B)$ , すなわち準同型  $\text{SW}(E, \sigma): C_n(B) \rightarrow \mathbb{Z}/2$  を定義したい. ここで  $C_n(B)$  は  $\mathbb{Z}/2$  係数の胞体チェイン群であり,  $\sigma$  は Seiberg–Witten 方程式を書き下すために必要な非トポロジカルなデータ (摂動の族) である. 基本的な (しかしこのままでは不正確な) アイデアは, 生成元  $e \in C_n(B)$  に対して

$$\text{SW}(E, \sigma)(e) := \#(\text{the parameterized moduli space on } e \text{ with respect to } \sigma) \quad (3)$$

と定義する, というものである.  $d(\mathfrak{s}) = -n$  かつ  $\dim e = n$  なことから, (3) の右辺の中身すなわち  $e$  上のパラメータ付きモジュライ空間は, ゼロ次元の多様体, すなわちいくつかの点になっていると期待される. さらに, Seiberg–Witten のモジュライのコンパクト性から, これは有限個の点であり, 数え上げることができると期待できる. 後は障害理論と同様に,  $\text{SW}(E, \sigma)$  がコサイクルになっていることを証明し, そしてコホモロジー類  $\text{SW}(E) := [\text{SW}(E, \sigma)]$  が付加データ  $\sigma$  の取り方に依らないと示せばよい.

しかし, (3) の右辺はこのままでは全く意味を持たない. 問題点は以下の二つである. 第一に, 我々の構造群  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  は  $\text{spin}^c$  4 次元多様体の自己同型群ではないというこ

<sup>6</sup> 例えば, 多様体への群作用が誘導する関数空間上への無限次元表現は, もとの非線形な作用のある種の線形化と見なされる.

<sup>7</sup> 写像度は Euler 類を用いて定義されるものであった. そしてモジュライ空間の数え上げも無限次元ベクトル束の Euler 類として定義された. この類似が障害理論の真似が上手くいく根拠である.

とである。なぜならば、 $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  はあくまで  $\text{spin}^c$  構造の同型類  $\mathfrak{s}$  を保つ微分同相全体に過ぎず、 $\text{spin}^c$  構造に対応する主  $\text{Spin}^c(4)$  束に作用していないからである。したがって、 $E$  の各ファイバーには、 $\text{spin}^c$  構造の同型類は付与されているが、 $\text{spin}^c$  構造そのものは付与されていない。そして一般には、 $\text{spin}^c$  構造の同型類から代表元を  $B$  上大域的に選ぶことは不可能である。(簡単な障害理論で分かる。) Seiberg–Witten 方程式を書き下すには  $\text{spin}^c$  構造の同型類だけでなく  $\text{spin}^c$  構造そのものが必要である。したがって、Seiberg–Witten 方程式の族を  $n$  胞体  $e$  上で考え、そこからパラメータ付きモジュライ空間を定義することはアプリアリにはできない。第二の問題点は、 $B$  は多様体とは限らない一般の CW 複体 (例えば分類空間  $B\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$ ) であったことに起因する<sup>8</sup>。  $B$  が多様体でない場合、パラメータ付きモジュライ空間が多様体の構造を持つと期待する理由は何もない。したがって数え上げをどう定義するかは不分明である<sup>9</sup>。

以上の問題点は以下のように解消される。ひとつめの問題点を解消するには、中村信裕 [20] のトリックを用いる。  $s$  を  $\mathfrak{s}$  のひとつの代表元とし、 $\text{Aut}(X, s)$  を  $(X, s)$  の自己同型群としたとき、

$$1 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(X, s) \rightarrow \text{Diff}(X, \mathfrak{s}) \rightarrow 1$$

という完全系列を得る。ここで  $\mathcal{G}$  はゲージ群である。我々の問題は、 $E$  の変換関数が  $\text{Aut}(X, s)$  でなく  $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  に値を取っていることだった。そこで、 $B$  上の十分細かい開被覆を取り、 $E$  の変換関数を  $\text{Aut}(X, s)$  にまで持ち上げる。持ち上げたものはもはやコサイクル条件を満たしていないが、満たしていない具合を表す誤差はゲージ群  $\mathcal{G}$  に値を持つ。そこで、モジュライ空間のようにゲージ群で割って得られる対象を  $B$  上で考察する限り、その誤差はゲージ群で割るときに吸収される。したがって、パラメータ付きモジュライ空間は  $B$  上で大域的に定義ができる。

ふたつめの問題を解決するには、仮想近傍 (virtual neighborhood) の理論の族版を構成し、それを用いる。所謂 virtual technique は、シンプレクティック幾何学において多くの人々が研究してきたが、ゲージ理論の文脈にそれを持ち込んだのは Ruan [22] である。まずパラメータ付きで無い場合に、仮想近傍のアイデアを説明しよう。Seiberg–Witten 方程式に対応する Fredholm 切断  $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  に対し、モジュライのコンパクト性から有限次元近似を行うことができ、自明束の切断  $\bar{s}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N$  ( $N < \infty$ ) が得られる。ここで  $\mathcal{U}$  (これが仮想近傍と呼ばれる) は有限次元多様体で、 $\bar{s}^{-1}(0)$  は  $s^{-1}(0)$  と“同型”となるようなものである。このとき、 $\bar{s}$  に関する相対 Euler 類、すなわち  $\bar{s}$  による Thom 類の引き戻し

$$e(\mathcal{U}, \bar{s}) := \bar{s}^* \tau(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{U}) \in H_c^N(\mathcal{U})$$

を考える。これは、“無限次元ベクトル束  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  の Euler 類”の有限次元近似による実現

<sup>8</sup>  $B\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  は無限次元多様体のモデルを持つので、その構造を用いて議論を行い、一般のバンドルに対する特性類は分類写像による引き戻しで定義するという筋もある得るかもしれないが、無限次元多様体にまつわる不必要にデリケートな議論が必要になると予想される。ここで述べる定式化は、 $B\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$  の特定のモデルを取る必要はなく、どの  $B$  に対しても一様に議論が行える点で自然である。

<sup>9</sup> (3) の右辺で考察しているのは  $e$  上のパラメータ付きモジュライ空間なので、 $e$  の特性写像で引き戻せば  $n$  次元円板  $D^n$  上のパラメータ付きモジュライ空間を考えていることになる。 $D^n$  は可縮な多様体なので、引き戻されたバンドルを無理矢理自明化すれば滑らかなパラメータ付きモジュライ空間を得ることができる。しかしこのような荒っぽい構成をしてしまうと、パラメータ付きモジュライ空間の数え上げが自明化の取り方に依らないことを保証することができず、さらに  $SW(E, \sigma)$  がコサイクルになっていることの証明もできない。

である.  $\bar{s}^{-1}(0) \cong s^{-1}(0)$  がコンパクトなことから,  $e(\mathcal{U}, \bar{s})$  はコンパクト台のコホモロジー類となる. 横断正則性が確保され  $\bar{s}^{-1}(0) \cong s^{-1}(0)$  が多様体のときであれば, 基本類  $[\bar{s}^{-1}(0)]$  の Poincaré 双対にあたるものがこの相対 Euler 類  $e(\mathcal{U}, \bar{s})$  であり, モジュライの数え上げ  $\#s^{-1}(0)$  に相当するものがペアリング  $\langle e(\mathcal{U}, \bar{s}), [\mathcal{U}]_{BM} \rangle \in \mathbb{Z}/2 \text{ or } \mathbb{Z}$  である. ( $\mathcal{U}$  は一般には非コンパクトなので, Borel–Moore の意味での基本類を取っている.) ここで重要なことは, 基本類  $[\bar{s}^{-1}(0)]$  を定義するためには横断正則性が必要であるが, コホモロジー類  $e(\mathcal{U}, \bar{s})$  の定義には横断正則性は何ら必要ないということである. そこで, パラメータ空間  $B$  が滑らかな構造を持っていない場合でも,  $e(\mathcal{U}, \bar{s})$  のパラメータ付き版を考えることはできる. これを用いてパラメータ付きモジュライ空間の数え上げに相当する数を取り出し, (3) の右辺をその数に置き換える. これが  $SW(E, \sigma)$  の正しい定義であり, このようにすると期待していた理論構成が全て上手く進むことが証明できる. 以上が  $SW(E)$  の構成の骨子である.

## 6. 展望

ゲージ理論の 4 次元トポロジーへの応用は, 既に 30 年以上に亘る歴史を持つ. 11/8 予想 [18] や滑らかな範疇での 4 次元 Poincaré 予想など, ゲージ理論に貢献が期待される重要な未解決問題も残っているが, 同時に, 研究の新たな対象物を必要とする時期に差し掛かっているとも思われる. 4 次元多様体の族がその候補となり得るのではないかと期待し, 本稿ではその説明を試みた.

従来のゲージ理論における様々な事柄で, 族への拡張が期待されるものはまだ多く残っている. 少なくとも, 本文中で述べたように, 族に対する Bauer–Furuta 不変量の構成と応用は興味深い問題を提供し, しかも実現可能性の高いものと思われる. しかし恐らく, 理論的にも応用上も最も重要な問いは次のものであろう:

**問 3** ゲージ理論に基づく 3+1 次元位相的場の理論を族の場合に拡張できるか? すなわち族に対する Floer 理論を建設せよ.

はじめは閉 4 次元多様体に対して展開されていたゲージ理論は, 境界付き 4 次元多様体および 3 次元多様体に, Floer 理論として拡張されることにより深化した歴史がある. この族版を期待するのは自然であろう. このような理論が建設された暁には, 3 次元多様体の族の 4 次元多様体の族への拡張への障害や, 4 次元多様体の族を 3 次元多様体の族に沿って切り分けるための障害が得られると予想される. また, 3 次元多様体上への群作用の 4 次元多様体への拡張に対する障害も期待できるであろう.

問 3 に答えるには, 無限次元の Morse ホモロジー理論をパラメータ付きで行う必要があり, 勾配流の連続変化を考察しなければならない. 解析的に多くの困難が生じると予想されるが, シンプレクティック幾何学においては, 族の Floer ホモロジーはミラー対称性の文脈で既に研究されている. (例えば [1, 9] を見よ.) これらの研究は問 3 へのヒントを与え得るかもしれない.

## 参考文献

- [1] Mohammed Abouzaid, *Family Floer cohomology and mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2014, available at arXiv:1404.2659.
- [2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. IV*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–138.



- [3] David Baraglia, *Obstructions to smooth group actions on 4-manifolds from families Seiberg-Witten theory*, arXiv:1805.07860.
- [4] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19.
- [5] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315.
- [6] S. K. Donaldson, *Yang-Mills invariants of four-manifolds*, Geometry of low-dimensional manifolds, 1, (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 150, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 5–40.
- [7] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), no. 3, 257–315.
- [8] S. K. Donaldson, *The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **33** (1996), no. 1, 45–70.
- [9] Kenji Fukaya, *Floer homology for families—a progress report*, Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000), Contemp. Math., vol. 309, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 33–68.
- [10] Mikio Furuta, *Monopole equation and the  $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291.
- [11] Hokuto Konno, *Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds*, J. Topol. **9** (2016), no. 4, 1130–1152.
- [12] Hokuto Konno, *A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality*, arXiv:1704.05859.
- [13] Hokuto Konno, *Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations*, arXiv:1707.08974.
- [14] Hokuto Konno, *Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory*, arxiv:1803.09833.
- [15] Hokuto Konno, *A family of the Seiberg-Witten equations and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds*, Proceeding to Intelligence of Low-dimensional Topology at RIMS Kôkyûroku, No. 2004, 13–22 (2016)
- [16] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808.
- [17] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu, *Family Seiberg-Witten invariants and wall crossing formulas*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no. 4, 777–823.
- [18] Yukio Matsumoto, *On the bounding genus of homology 3-spheres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. **29** (1982), 287–318.
- [19] Shigeyuki Morita, 微分同相群とトポロジー ～特性類と不変量を中心として～, 第62回トポロジーシンポジウム講演集, 2015.
- [20] Nobuhiro Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds*, Asian J. Math. **7** (2003), no. 1, 133–138.
- [21] Nobuhiro Nakamura, *Smoothability of  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -actions on 4-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 8, 2973–2978.
- [22] Yongbin Ruan, *Virtual neighborhoods and the monopole equations*, Topics in symplectic 4-manifolds (Irvine, CA, 1996), First Int. Press Lect. Ser., I, Int. Press, Cambridge, MA, 1998, pp. 101–116.
- [23] Daniel Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension 4*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 743–758.
- [24] Daniel Ruberman, *A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), Geom. Topol. Monogr., vol. 2, pp. 473–488.
- [25] Daniel Ruberman, *Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **5** (2001), 895–924.
- [26] Edward Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 769–796.

# The Language of Surfaces

J. Scott Carter (University of South Alabama)\*

## 1. Introduction

A system of fonts that describes properly embedded surfaces in 3-space will be introduced via categorical considerations. The iconography considers dots along a line as 1-morphisms, Temperley-Lieb like diagrams as 2-morphisms, and transformations between these as 3-morphisms. The transformations will be described via icons that depict a simple closed curve that is being created or annihilated, two types of saddle transformations that occur, four possible types of cusps, and exchanges of critical events. As the iconography is developed, it will be easy to describe the 4-isomorphisms that generate isotopy.

**Theorem 1.1.** *The naturally monoidal, strictly 2-pivotal, weakly 3-pivotal, rotationally commutative, strictly 3-tortile 3-category with one object that is freely generated by a weakly self-invertible non-identity 1-morphism is equivalent to the 3-category of isotopy classes of properly embedded surfaces in  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ .*

The result is known among experts. It is folklore, and this is the first printed version of which I know. The statement is one of the early cases of the cobordism hypothesis as formulated by Baez and Dolan [BD95], but there, the category is described as a 2-category. In that case, the non-trivial generating 1-morphism is considered to be a generating object, and the corresponding higher morphisms are also collapsed by one degree. An analogue is found in the difference between the classifying space for a group  $BG$  and its universal cover  $EG$ . Here  $EG$  is the analogue of the 3-category. There are two sources of inspiration: one is my desire to be more fluent in Asian languages and to develop a corresponding intuition about Hiragana and Kanji; the second is the web-based program GLOBULAR (See [BKV16] for some details). Meanwhile, much of the content here is a distillation of specific aspects that were presented in [CS98].

Here is an outline. We briefly describe categories and higher categories. Then we develop each descriptive term in the statement of the theorem. At the successive stages, we have 1-morphisms composed in a 1-dimensional manner, higher morphisms compose as rectangles, cubes, etc. that are stacked vertically. Horizontal juxtaposition is only allowed when one of the morphisms is an identity.

Two guiding principles govern this work: (1) different things may be naturally isomorphic, but they are not equal; (2) critical events occur at distinct instances. Let us proceed.

## 2. Categories and $n$ -categories ( $n \leq 4$ )

A *really small category*<sup>1</sup> has a set of objects, and given objects  $a$  and  $b$ , the collection of arrows  $b \xleftarrow{f} a$  from the *source*  $a = s(f)$  to the *target*  $b = t(f)$  is a set. If  $c \xleftarrow{g} b$

---

Supported by Simons Foundation collaborative grant: 318381, JSPS L18511

2010 Mathematics Subject Classification: 18D10, 19D23, 18A40, 57M20.

Keywords: 3-categories, embedded surfaces, TQFTs.

\* e-mail: [carter@southalabama.edu](mailto:carter@southalabama.edu)

web: [http://www.southalabama.edu/mathstat/personal\\_pages/carter/](http://www.southalabama.edu/mathstat/personal_pages/carter/)

<sup>1</sup> The standard terminology is small and locally small. Since the higher morphisms are also categories, here we want every collection of morphisms to form a set.

and  $b \xleftarrow{f} a$  are arrows so that  $s(g) = t(f)$ , then their composition is an arrow  $c \xleftarrow{g \circ f} a$  with source  $s(g \circ f) = a$  and target  $t(g \circ f) = b$ . Compositions of arrows is associative:

$$\left[ d \xleftarrow{h} c \xleftarrow{g \circ f} a \right] = \left[ d \xleftarrow{h \circ g} b \xleftarrow{f} a \right].$$

For any object  $a$  there is an arrow  $a \dashrightarrow a$  that behaves as an identity under compositions:

$$\left( b \dashrightarrow b \xleftarrow{f} a \right) = \left( b \xleftarrow{f} a \right) = \left( b \xleftarrow{f} a \dashrightarrow a \right).$$

An overly simplistic definition of a *really small  $n$ -category* is that it is a category in which the set of morphisms between  $(n - 1)$ -morphisms is a category. All  $n$ -categories that are defined here will be really small. The collection of objects is a set, and the category of  $k$ -morphisms between any pair of  $(k - 1)$ -morphisms also forms a set, for  $1 \leq k \leq 4$ . A 0-morphism is called *an object*. A 1-morphism between a pair of objects is called a (*single*) *arrow*. In general, a  $k$ -morphism will be also called a *double, triple, or quadruple* arrow, for the obvious values of  $k$ . Composition of  $n$ -morphisms should be unital and associative.

In order to put an inductively defined category structure upon the set of  $n$ -morphism (or multiple arrows) between a pair of  $(n - 1)$ -morphisms, we write

$$\begin{array}{ccc} b & \xleftarrow{g} & a \\ | & \uparrow_F & | \\ b & \xleftarrow{f} & a \end{array}$$

for an  $n$ -morphism  $F$  whose source is the  $(n - 1)$ -morphism  $f = s(F)$  and whose target is the  $(n - 1)$ -morphism  $g = t(F)$ . Note that  $s(f) = s(g) = a$  while  $t(f) = t(g) = b$ . This figure is an accurate depiction when  $F$  is a 2-morphism. The case of a 3-morphism  $\mathcal{R}$  with source  $F$  and target  $G$  is depicted in Fig. 1. A 4-morphism with source  $\mathcal{R}$  and target  $\mathcal{S}$  can be thought of as a symbol in the interior of a hypercube that connects two opposing cubical faces. The rectangular depiction, then, is a 2-dimensional projection of the double, triple, or quadruple arrow.

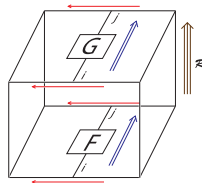


Figure 1: A 3-morphism or triple arrow

Since the sources and targets for  $f$  and  $g$  agree, it is customary to draw the 2-morphism  $F$  as on the left side of Fig. 2. The (vertical) composition of 2-morphisms is illustrated on the right of the same figure. Often authors define an ambiguous horizontal composition of 2-morphisms that resembles the central drawing in Fig. 3 and which is interpreted via either the left or right drawing. Interpreting these as equal, or allowing the 2-morphisms to occur at the same horizontal level, is to cheat our basic principles. Instead, we suppose that there is a natural 3-isomorphism connecting the two interpretations. We will return to the point later.

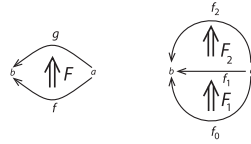


Figure 2: Composition of 2-morphims

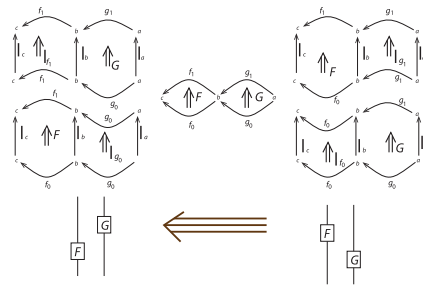


Figure 3: Horizontal composition is not well-defined

### 3. The axioms of the 3-category

Suppose there is a unique object  $x$  in a category, and there is a non-identity morphism  $x \xleftarrow{\bullet} x$ . Then define  $(-\bullet)^k$  inductively as the  $k$ -fold composition of  $-\bullet$  with itself:  $(-\bullet)^k = (-\bullet)^{k-1} \circ -\bullet$ . Of course,  $(-\bullet)^0 = \text{---} = x \text{---} x$ . The set of powers of  $-\bullet$  corresponds to the set of non-negative integers  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , given in unary notation. This is the *free monoid on a single generator*.

The identity double arrow on  $\text{---}$  is  $\overline{\square}$ . The identity 2-morphism on  $-\bullet$  is  $\overline{\text{---}}$ . We define double arrows  $\overline{\cap}$  and  $\overline{\cup}$ . The inclusion of bullets ( $\bullet$ ) will be slowly dropped from the notation.

Define  $l_1 = l$ , and more generally inductively define  $l_i = (l_{i-1}) \otimes l$  to be the identity on  $(-\bullet)^i$ . Explicitly,

$$l_i = \underbrace{\overline{\text{---}} \bullet \overline{\text{---}} \bullet \overline{\text{---}} \bullet \dots \bullet \overline{\text{---}} \bullet \overline{\text{---}} \bullet}_{i}.$$

Let  $U^{i,j} = U(i, j) = l_i \otimes U \otimes l_j$  and  $\cap_{i,j} = \cap(i, j) = l_i \otimes \cap \otimes l_j$  indicate the horizontal juxtaposition of either cup or cap with the identity on  $(-\bullet)^i$  on its left and the identity on  $(-\bullet)^j$  on its right. These are double arrows between non-negative integers with  $s(U(i, j)) = t(\cap(i, j)) = i + j$  while  $t(U(i, j)) = s(\cap(i, j)) = i + 2 + j$ . The tensor  $\otimes$  notation is dropped in favor of juxtaposition. The arrow  $-\bullet$  is *weakly self invertible* if (not necessarily invertible) double arrows  $\cap$  and  $U$  exist.

Suppose that a pair of arbitrary double arrows  $\begin{matrix} | \\ \boxed{F} \\ | \\ k \end{matrix}$  and  $\begin{matrix} | \\ \boxed{G} \\ | \\ l \end{matrix}$  are given with

$i, j, k, \ell \in \mathbb{N}$ . Then define

$$\begin{array}{c} \downarrow^i \\ \boxed{F} \\ \downarrow_k \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow^j \\ \boxed{G} \\ \downarrow_\ell \end{array} = \left( \begin{array}{c} \downarrow^i \\ \boxed{F} \\ \downarrow_k \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow_j \end{array} \right) \circ_2 \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow_i \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow^j \\ \boxed{G} \\ \downarrow_\ell \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \downarrow^i \\ \boxed{F} \\ \downarrow_k \\ \downarrow \\ \boxed{G} \\ \downarrow_\ell \end{array} \right).$$

The tensor product of any 2-morphism with the identity 2-morphism  $\mathbf{l}_k$  is obtained by juxtaposing the identity horizontally.

A natural family of 3-isomorphisms is defined as follows:

$$\left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow_i \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow^j \\ \boxed{G} \\ \downarrow_\ell \end{array} \right) \circ_2 \left( \begin{array}{c} \downarrow^i \\ \boxed{F} \\ \downarrow_k \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow_j \end{array} \right) \overset{\mathbf{X}}{\leftarrow} \left( \begin{array}{c} \downarrow^i \\ \boxed{F} \\ \downarrow_k \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow_j \end{array} \right) \circ_2 \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow_i \end{array} \otimes \begin{array}{c} \downarrow^j \\ \boxed{G} \\ \downarrow_\ell \end{array} \right)$$

Any one of these is called an *exchanger*. The notation is cumbersome when the source and target of an exchanger is specified.

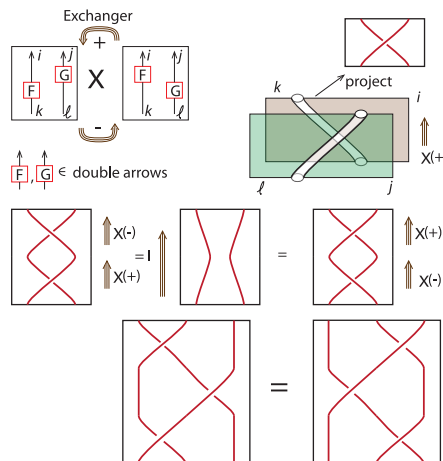


Figure 4: The invertible exchanger and naturality condition

The exchanger is indicated towards the upper left of Fig. 4, as a triple arrow that points leftward. A schematic diagram that indicates the exchanger as a kinematic process is drawn on the right. The translucent sheets that are labeled  $i, j, k$  and  $\ell$  indicate parallel disks that may be folded along the tubes. via identities on  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{\Omega}$ . The exchanger  $\mathbf{X}(+)$  is schematized as the positive crossing throughout the illustration.

The exchanger is invertible so that the equalities  $\mathbf{X}(-) \circ_3 \mathbf{X}(+) = \mathbf{l}_G \otimes \mathbf{l}_F = \mathbf{X}(+) \circ_3 \mathbf{X}(-)$  hold for any pair of double arrows  $F$  and  $G$ . The final condition for the exchanger is that it is natural with respect to any other triple arrow. This implies, in particular, that the Yang-Baxter type relation holds. The naturality condition also implies that the exchanger commutes with any other triple arrows. The 3-category is *naturally monoidal* if a natural family (Fig. 5) of exchangers  $\mathbf{X}$  exist.

Since the collection of triple arrows is also meant to be a category, the identity upon the identity double arrow  $\mathbf{l}$  and the two non-trivial double arrows  $\mathbf{U}$ , and  $\mathbf{\Omega}$  are defined as follows:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \blacksquare \\ \text{---} \end{array} \uparrow \right], \quad \left[ \begin{array}{c} \supset \\ \vdash \\ \supset \end{array} \uparrow \right], \quad \text{and} \quad \left[ \begin{array}{c} \subset \\ \vdash \\ \subset \end{array} \uparrow \right].$$

When necessary, *folds* which are the identities upon  $U^{i,j}$  and  $\cap_{i,j}$  can be adorned with double indices  $(i, j)$  to indicate the location ( $i$  sheets to to left [behind] and  $j$  sheets to the right [in front]) of them.

The following generating triple arrows are proposed.

Birth  $[\smile]$ :  $(\cap) \circ_2 (U) \leftarrow \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right),$

Death  $[\frown]$ :  $\left( \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right) \leftarrow (\cap) \circ_2 (U),$

Saddle  $[\cup]$ :  $(U) \circ_2 (\cap) \leftarrow (I \otimes I),$

Crotch<sup>2</sup>  $[\cap]$ :  $(I \otimes I) \leftarrow (U) \circ_2 (\cap),$

and 3-isomorphisms

Left cusp  $[\gamma_L]$ :  $(\cap \otimes I) \circ_2 (I \otimes U) \xleftrightarrow{\quad} (I),$

Right cusp  $[\gamma_R]$ :  $(I \otimes \cap) \circ_2 (U \otimes I) \xleftrightarrow{\quad} (I).$

The names *birth*, *death*, *saddle*, *crotch*, *left cusp*, and *right cusp* are the names of the represented triple arrows, and one should also pronounce the associated icons in the same way. On the other hand, in the cases of the cusps, the leftward pointing triple arrows are called *left cusp down*:  $\gamma_L$  and *right cusp down*:  $\gamma_R$ . We define *left cusp up*:  $\lambda^L = \gamma_L^{-1}$  and *right cusp up*:  $\lambda^R = \gamma_R^{-1}$ . To say that  $\lambda^L = \gamma_L^{-1}$  and  $\lambda^R = \gamma_R^{-1}$  is to assert that the compositions

$$\begin{aligned} I &\xleftarrow{\lambda^L} (\cap \otimes I) \circ_2 (I \otimes U) \xleftarrow{\gamma_L} I, \\ (\cap \otimes I) \circ_2 (I \otimes U) &\xleftarrow{\gamma_L} I \xleftarrow{\lambda^L} (\cap \otimes I) \circ_2 (I \otimes U), \\ I &\xleftarrow{\lambda^R} (I \otimes \cap) \circ_2 (U \otimes I) \xleftarrow{\gamma_R} I, \end{aligned}$$

and

$$(I \otimes \cap) \circ_2 (U \otimes I) \xleftarrow{\gamma_R} I \xleftarrow{\lambda^R} (I \otimes \cap) \circ_2 (U \otimes I)$$

are the identity 3-morphisms on their (coincident) sources and targets. These relations are easier to imagine when written vertically:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \lambda^L \\ \cup \\ \uparrow \gamma_L \\ \text{---} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \blacksquare \\ \text{---} \end{array} \right]; \quad \left[ \begin{array}{c} \cup \\ \uparrow \gamma_L \\ \text{---} \\ \uparrow \lambda^L \\ \cup \\ \text{---} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \cup \\ \uparrow \\ \cup \end{array} \right].$$

<sup>2</sup>This mildly naughty term is meant to be used in the same way that a seamstress or tailor would use the word: as if it were the junction of the legs in a pair of pants.

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \lambda^R \\ \text{S} \\ \uparrow \Upsilon_R \\ \text{---} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \blacksquare \\ \text{---} \end{array} \right]; \quad \left[ \begin{array}{c} \text{S} \\ \uparrow \Upsilon_R \\ \text{---} \\ \uparrow \lambda^R \\ \text{S} \\ \text{---} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{S} \\ \uparrow \mathbb{1} \\ \text{S} \end{array} \right].$$

The triple arrow  $\uparrow \mathbb{1}$  indicates the identity triple arrow on the zig-zagged compositions  $(\cap \mathbb{1}) \circ_2 (\mathbb{1} \cup)$  and  $(\mathbb{1} \cap) \circ_2 (\cup \mathbb{1})$ .

In addition, these identities can be represented as quadruple arrows that are, in turn, invertible as are all the higher order arrows derived therefrom.

A 3-category that has a weakly self-invertible arrow  $\text{---}\bullet\text{---}$  is *strictly 2-pivotal* if there are 2-isomorphism,  $\Upsilon_D$  and  $\lambda^D$ , for  $D = L, R$  in the sense that is defined above.

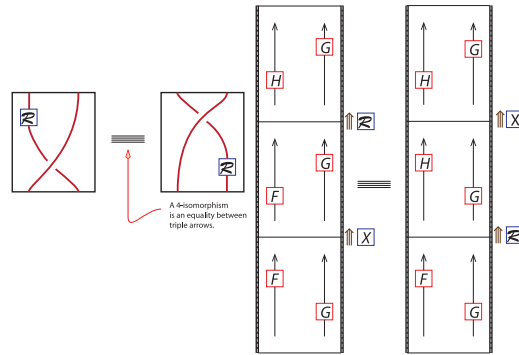


Figure 5: The naturality of the exchanger  $X$

Fig. 5, depicts the naturality of the exchanger with respect to any triple arrow  $\mathcal{R}$ . For example, when  $\mathcal{R}$  is one of  $X, \smile, \frown, \cup, \dot{\cup}, \Upsilon_D$ , or  $\lambda^D$  (for  $D = R, L$ ), then half of the naturality identities are of the form

$$\left( \mathcal{R} \otimes \mathbb{1}_F \right) \circ_3 \left( \mathbb{1} \otimes X(\pm) \right) \circ_3 \left( X(\pm) \otimes \mathbb{1} \right) = \left( \mathbb{1}_F \otimes \mathcal{R} \right),$$

the others are of the form:

$$\left( \mathbb{1} \otimes X(\pm) \right) \circ_3 \left( X(\pm) \otimes \mathbb{1} \right) \circ_3 \left( \mathbb{1}_F \otimes \mathcal{R} \right) = \left( \mathcal{R} \otimes \mathbb{1}_F \right).$$

In a *naturally monoidal category*, (1) the exchanger is invertible in the sense that  $X(+)\circ_3 X(-) = \mathbb{1}_{G\otimes F} = X(-)\circ_3 X(+)$ , and (2) the exchanger satisfies the naturality relations expressed in Fig. 5.

The adjoint relations that involve  $\smile$  and  $\dot{\smile}$  (or  $\frown$  and  $\dot{\cup}$ ) read as follows:

$$\left( \mathbb{1} \otimes \dot{\smile} \right) \circ_3 \left( \smile \otimes \mathbb{1} \right) = \mathbb{1} = \left( \mathbb{1} \otimes \frown \right) \circ \left( \dot{\cup} \otimes \mathbb{1} \right),$$

and

$$\left( \frown \otimes \mathbb{1} \right) \circ_3 \left( \mathbb{1} \otimes \dot{\cup} \right) = \mathbb{1} = \left( \mathbb{1} \otimes \dot{\smile} \right) \circ \left( \smile \otimes \mathbb{1} \right).$$

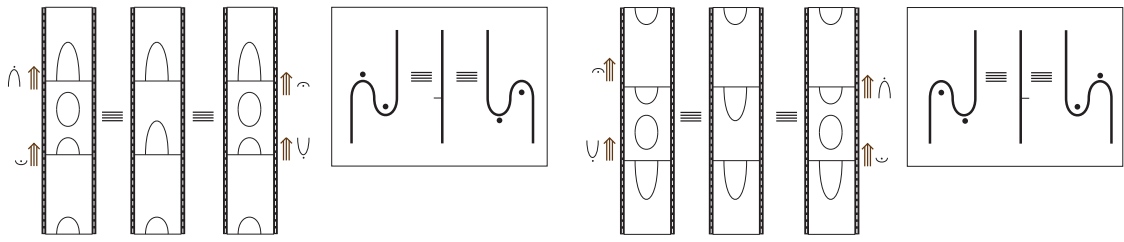


Figure 6: The adjoint relations

A 3-category which has a weakly self-invertible non-identity arrow is *weakly 3-pivotal* in case the non-invertible 3-morphisms  $\smile$ ,  $\frown$ ,  $\cup$ , and  $\cap$  satisfy these adjoint relations.

There are four commutation relations between cusps and saddles or crotches. These are expressed in the following four equations. Here, in order to demonstrate the symmetries among these relations we denote  $\lambda^R = \lambda^\bullet$ ,  $\lambda^L = \bullet\lambda$ ,  $\gamma_R = \gamma_\bullet$ ,  $\gamma_L = \bullet\gamma$ , and  $\circ_3 = \circ$ .

(i)

$$(\vdash \otimes \dot{\cap}) \circ (\gamma_\bullet \otimes \vdash) = (\bullet\lambda \otimes \vdash) \circ (\vdash \otimes \cup)$$

(ii)

$$(\lambda^\bullet \otimes \vdash) \circ (\vdash \otimes \cup) = (\vdash \otimes \dot{\cap}) \circ (\bullet\gamma \otimes \vdash)$$

(iii)

$$(\dashv \otimes \lambda^\bullet) \circ (\cup \otimes \dashv) = (\dot{\cap} \otimes \dashv) \circ (\dashv \otimes \gamma)$$

(iv)

$$(\dot{\cap} \otimes \dashv) \circ (\dashv \otimes \gamma_\bullet) = (\dashv \otimes \bullet\lambda) \circ (\cup \otimes \dashv)$$

For the sake of brevity we only illustrate two of these relations in Fig. 7. The other two can be obtained by turning the page upside down.

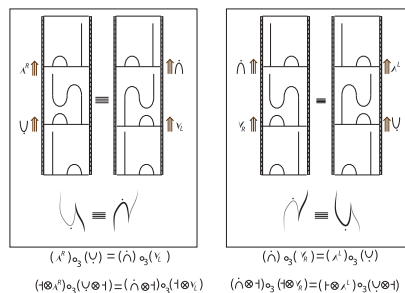


Figure 7: Commutations  $\dot{\cap}, \gamma \rightleftharpoons \cup, \lambda$  — part 1

Observe that equation (i) and (iv) are upside down versions of each other, as are (ii) and (iii). Furthermore, (ii) can be obtained from (i) by interchanging the left and



right sides while also moving the indicators of the  $\Upsilon$  and the  $\lambda$  to the other side of the front. Equations (iii) and (iv) are similarly related. In an effort to obtain a concise version, we write

$$\boxed{\cap \circ \Upsilon = \lambda \circ \cup}$$

to encapsulate all four relations. A naturally monoidal, strictly 2-pivotal 3-category that has a weakly invertible non-identity 1-morphism is *rotationally commutative* if equations (i) through (iv) hold.

If, in addition, the following identities hold, then the 3-category is *strictly 3-tortile*.

$$\left( \lambda^L \otimes \dashv \right) \circ_3 \left( \vdash \otimes X(+) \right) \circ \left( \Upsilon^L \otimes \dashv \right) = \dashv,$$

$$\dashv = \left( \lambda^R \otimes \dashv \right) \circ_3 \left( \vdash \otimes X(-) \right) \circ \left( \Upsilon^L \otimes \dashv \right),$$

$$\left( \vdash \otimes \lambda^L \right) \circ_3 \left( X(+) \otimes \dashv \right) \circ \left( \dashv \otimes \Upsilon^L \right) = \vdash,$$

and

$$\vdash = \left( \vdash \otimes \lambda^L \right) \circ_3 \left( X(-) \otimes \dashv \right) \circ \left( \dashv \otimes \Upsilon^L \right).$$

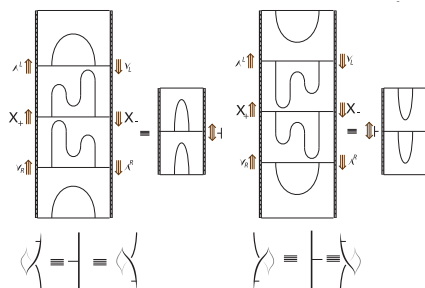


Figure 8: Swallowtail identities

As a final axiom, assert that the exchangers between 3-morphisms are also a natural family of isomorphisms.

#### 4. Sketch of proof.

From a composition of triple arrows, a properly embedded surface in a 3-dimensional box can be obtained since the composition of the icons trace the folds of the projection of the surface onto a plane. In particular, the dots in the iconography for births, deaths, saddles, and crotches indicates the portion of the plane upon which more surface is projected. Similarly, the left/right distinction for cusps indicates which folds are closer to the plane of projection. Also the short segment along a fold indicates the side of the plane upon which a surface is folded. To finish creating the surface interpolate a cusp, birth, death, saddle, or crotch where these have their traditional meaning from singularity theory.

Given a properly embedded surface  $S \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , consider the following version of the fundamental groupoid as a higher category. There is a unique object that corresponds to the complement of the surface. The identity morphism is any arc that does

not intersect the surface. An arc that intersects the surface transversely whose end-points are in the complement is a non-trivial 1-morphism. Any arc can be decomposed as a path product of arcs each of which intersects the surface  $S$  exactly once. Such 1-morphisms are composable if the initial point of one and the terminal point of the other are in the same component of the complement of  $S$ . In that case, connect the end points by an embedded arc that does not intersect  $S$ . A 2-morphism between arcs  $f$  and  $g$  is an embedded disk  $F$  whose boundary is decomposed as the union of the arcs  $f$  and  $g$ . Furthermore, the disk  $F$  should intersect the surface  $S$  transversely. A 3-morphism  $\mathcal{R}$  is an embedded 3-ball whose top and bottom hemispheres are the disks representing the 2-morphisms  $F$  and  $G$ . In particular, the properly embedded surface  $S \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  is a 3-morphism with source  $\partial S_0 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  and target  $\partial S_1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ . By setting up parametrizations and height functions in each interval, disk, or ball, one can then reconstruct the  $\cup$ s and  $\cap$ s in the disk  $F$ , and the  $\smile$ s,  $\frown$ s,  $\cup$ s,  $\cap$ s,  $\gamma$ s, and  $\lambda$ s in the 3-ball  $\mathcal{R}$ . In this way a functor between the topological 3-categories and the iconographic 3-category is constructed. Finally, isotopy moves are generated by geometric moves that correspond to the 4-isomorphisms defined above. These moves are critical cancelation (weakly 3-pivotal), lips and beak-to-beak singularities (strongly 2-pivotal), swallowtails (strictly 3-tortile), horizontal cusps (rotationally commutative), and exchanges of distant critical events (naturally monoidal)<sup>3</sup>.

## References

- [BD95] John C. Baez and James Dolan. Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory. *J. Math. Phys.*, 36(11):6073–6105, 1995.
- [BKV16] Krzysztof Bar, Aleks Kissinger, and Jamie Vicary. Globular: an online proof assistant for higher-dimensional rewriting. *ArXiv e-prints*, December 2016.
- [CS98] J. Scott Carter and Masahico Saito. *Knotted surfaces and their diagrams*, volume 55 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

---

<sup>3</sup>Natural families of exchangers exist as 3 and 4-morphisms.

# 3次元多様体と Klein 群

## Thurston の発想を今一度振り返る

大鹿健一 (大阪大学)

### 1. 序

ここ 40 年程度の間, 3次元多様体と Klein 群の研究は, 大きな流れとしては, Thurston による 1980 年代の研究の方向付け (典型的には [24] に見られる未解決問題のリスト. これについては [20, 30] を参照せよ) により動いてきたといっても過言では無かろう. Thurston の問題達が一部を除いて大方解かれた現在, Thurston 以前の 3次元多様体論, Klein 群論の状況から始めて, もう一度この流れを振り返ってみることも有意義かと思ひ, 本講演のテーマに据えた. 現時点から過去の研究を振り返る場合, 今持っている知識を通して過去を見てしまい, その時点考えられていたことを追体験できないというのがありがちな陥穽であるが, 心して現時点の見方と当時の見方を分けて考えていこうと思う.

### 2. Thurston 以前の 3次元多様体論

3次元多様体の研究は 19 世紀に Poincaré, Heegaard らにより始められた. Poincaré は有名な Poincaré ホモロジー球面を構成したこと, いわゆる Poincaré 予想を提出したことのみならず,  $S^1$  上のトーラス束の同相類を決定する仕事をしていることに注目すべきである. この時点で既に 3次元多様体の同相類を決定するという現在にまで至る問題意識が芽生えていたわけである. その後 20 世紀前半にかけて, 多様体論の完成, ホモロジー, ホモトピーなどの理論の整備が進むのであるが, 3次元多様体については, Dehn, Alexander, Kneser, Seifert らによりその後繋がる先駆的な研究が行われた.

3次元多様体の組織だった本格的な発展は 1950 年代の Papakyriakopoulos [21] による Dehn の補題, ループ定理, 球面定理の証明に始まる. これらの結果により, 3次元多様体をその中に埋め込まれた曲面を通じて研究するという方向が発展した. Kneser [12] による 3次元多様体の素分解の理論は, 戦前の研究であるが, Milnor [15] はこの分解の一意性を示した. これにより, 3次元多様体の同相類の研究という意味では, 素なもののみを考えれば良いということがわかった. 当時はまだ Poincaré 予想が解けていないので, 非自明なホモトピー球面 (あるいはホモトピー球体) が存在する可能性があると思われていたわけであるが, それを除外した問題を考えるという意味で, 3次元多様体の中で, 2次元球面がかならず球体の境界になるという場合を考え, そのようなとき 3次元多様体を既約であると呼ぶことにした.

さらに Haken, Waldhausen の仕事により, 非圧縮曲面の重要性が認識されるようになった. ここで向き付け可能な 3次元多様体  $M$  内の向き付け可能曲面  $S$  が非圧縮曲面であるとは,  $S$  が球面ではなくて (円板は許す), 包含写像から誘導される準同型  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  が単射であることとする. この概念はより一般に (球面, 円板以外の) 曲面から  $M$  への proper なはめ込みにも用いる. Haken のこの時期の仕事は, Poincaré 予想を解こうとする意図が強いのであるが, [4] で非圧縮曲面の有用性が示されている. Waldhausen [28] は, その後の 3次元多様体論で目指すものの雛形となる次の重要な定理を示した.

なお今後多様体は全て向き付け可能なもののみを考えることにする。

定理 2.1 (Waldhausen [28]).  $M, N$  を既約な 3次元閉多様体として,  $M$  は非圧縮曲面を含むとする.  $f: M \rightarrow N$  がホモトピー同値写像であるとすると,  $f$  を同相写像にホモトピックである.

この定理の証明では, 非圧縮曲面を用いて 3次元多様体を切り開いて, 順次単純な形にしていく手法, 階層構造が用いられている. この手法は後の Thurston の一意化定理でも本質的な役割を果たしている. 3次元多様体が境界を持つ場合も同様の手法が使えて, 定理 2.1 は次の形に一般化される. 境界を持つ場合は, 3次元球体以外については, 境界の中にホモトピックでない非圧縮曲面は常に存在することがわかるので, その存在に関する仮定は不要であることに注意する.

定理 2.2 (Waldhausen [28]).  $M, N$  を既約な 3次元コンパクト境界付多様体とする.  $f: M \rightarrow N$  をホモトピー同値写像で,  $\partial M$  の各連結成分  $S$  について,  $\partial N$  のある連結成分  $T$  が存在して,  $f_{\#}\pi_1(S)$  は  $\pi_1(N)$  の中で  $\pi_1(T)$  に共役であるとする. このとき,  $f$  は同相写像にホモトピックである.

Jaco [5] らに倣い, 非圧縮曲面を含む既約なコンパクト多様体を Haken 多様体と呼ぶことにする.

その後非圧縮曲面のうち, トーラスとアニュラスは特別な役割をすることが認識されてきた. 例えば Papakyriakopoulos の定理と同じように, 非圧縮的なトーラスやアニュラスのはめ込みがあるとき埋め込みでも実現できるかということは問題とされてきた. そのような問題の最終的な結実として現れたのが Jaco-Shalen-Johannson の理論であり ([6, 7]), また定理 2.2 における境界成分の基本群に関する条件を外すと何が生じるかと言うことの解明にもつながった. まず閉多様体の場合について Jaco-Shalen-Johannson の結果を述べる.

定理 2.3 (Jaco-Shalen-Johannson [6, 7]).  $M$  を既約な 3次元閉多様体とする.  $M$  の中に埋め込まれた 3次元部分多様体  $\Sigma$  で次の性質を持つものが, アイソトピーの範囲で唯一存在する.

- (i)  $\Sigma$  の各成分は Seifert ファイバー空間である.
- (ii)  $\text{Fr}\Sigma$  の各成分は非圧縮的トーラスである.
- (iii) トーラス  $T$  から  $M$  への任意の非圧縮的なはめ込みは,  $\Sigma$  の中への写像にホモトピックである.

境界があり, 非圧縮的な場合には次のように一般化される.

定理 2.4 (Jaco-Shalen-Johannson [6, 7]).  $M$  を既約なコンパクト 3次元多様体で  $\partial M$  は非圧縮的とする.  $M$  の中に埋め込まれた 3次元部分多様体  $\Sigma$  で次の性質を持つものが, アイソトピーの範囲で唯一存在する.

- (i)  $\Sigma$  の各成分  $\Xi$  は次のいずれかである. いずれの場合も  $\text{Fr}\Xi$  は非圧縮的であり,  $\partial M$  の中にホモトピックでない.
  - (a)  $\Xi \cap \partial M$  が非特異ファイバーの和集合であるアニュラスかトーラスであるような Seifert ファイバー空間である.

- (b)  $\Xi \cap \partial M$  が付随した  $\partial I$ -束であるような  $I$ -束になっている.
- (c)  $\Xi$  はソリッドトーラスで,  $\Xi \cap \partial M$  は境界上のアニュラスになっている.
- (ii) トーラス  $T$  から  $M$  への任意の非圧縮的なはめ込みは,  $\Sigma$  の連結成分で (ia) のタイプのものの中への写像にホモトピックである.
- (iii) アニュラス  $A$  から  $M$  への任意の非圧縮的で proper な (すなわち境界に写されるのは境界であるような) はめ込みは,  $\Sigma$  のある連結成分の中への写像に相対的にホモトピックである.

この定理の  $\Xi$  と  $\Xi \cap \partial M$  の対を  $M$  の特性対と呼ぶ. 特に (a) のものを Seifert 対, (b) のものを  $I$ -対, (c) のものをソリッドトーラス対と呼ぶ. この定理を用いて, 定理 2.1 は次のように精密化された.

定理 2.5.  $M, N$  をコンパクト既約で非圧縮的境界を持つ 3次元多様体とする.  $f: M \rightarrow N$  をホモトピー同値写像として,  $\Xi$  を  $M$  の特性対とする. すると,  $f$  に次のホモトピー同値写像を有限個手前から合成することにより, 同相写像にホモトピックになる.

- (i)  $I$  対について束が積束の場合にアニュラスに沿って上下を入れ替えるホモトピー同値.
- (ii) ソリッドトーラス対で  $M$  を切り開き, ソリッドトーラス対へのアニュラスに沿った貼り合わせの順番を変えるホモトピー同値写像.

### 3. Thurston 以前の Klein 群論

Klein 群という概念は, Poincaré が Klein の研究に現れる群について命名したもので, 19 世紀から存在するが, その本格的な研究は戦後 Ahlfors, Bers らにより始められた. 一般に  $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$  の離散部分群を Klein 群と呼ぶが, 当初研究対象となっていたのは  $\hat{\mathbb{C}}$  への作用として, 不連続領域をもつものであった. 例えば Ahlfors は [1] で有限生成 Klein 群について, 不連続領域を群で商を取ると, 有限型 Riemann 面になることを示している. Bers [2] は Teichmüller 理論の高次元化として, 擬 Fuchs 群の空間を考え, それが Teichmüller 空間 2 つの直積でパラメータ付けできることを示した.

より詳しく述べると次のようなことである.  $S$  を種数 2 以上の閉曲面として,  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$  を Fuchs 群表現とする.  $\rho$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  の擬等角同相写像で共役をとることにより得られる Klein 群を擬 Fuchs 群 (表現) という.  $\pi_1(S)$  の擬 Fuchs 群表現全体を  $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$  の共役で移り合うものを同一視して得られる商空間に, 表現全体の作る空間から誘導される位相を入れたものを擬 Fuchs 空間とよび,  $QF(S)$  で表す. Bers は  $S$  の Teichmüller 空間 2 つの積,  $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\bar{S})$  (2 つめの成分は自然な標識が向きを反転するので  $\bar{\phantom{x}}$  をつけてある) から  $QF(S)$  への同相写像があることを示したのである. 以降この写像を  $qf: \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\bar{S}) \rightarrow QF(S)$  と表そう.

Bers はさらに [3] において,  $qf(\{m_0\} \times \mathcal{T}(\bar{S}))$  という形の切片を考え, その指標多様体での閉包を考えると, その境界には  $\pi_1(S)$  により不変な不連続領域の連結成分をただ一つ持つような Klein 群, b-群への表現が現れることを示した. Baire の定理から, この境界のほとんど全ての群は幾何的無限, すなわち対応する双曲多様体が不連続領域の商によって塞がれない end を持っている. これは幾何的無限群の初めての構成であ

るが、のちに幾何学的無限群の幾何的構造は Thurston により詳しく調べられることになる。

1970年代になると曲面群より複雑な構造をもつ Klein 群についての研究が Maskit, Marden らによって進められた。Maskit は Klein-Maskit の組み合わせ定理と呼ばれる、Klein 群から群として融合積や HNN 拡大に同型な Klein 群を構成する方法を与えた。(理論の全体像は彼の書いた本 [14] で見られる。) この方法は Thurston の一意化定理の証明の基本をなしている。一方 Marden [13] は Bers の擬 Fuchs 群のパラメータ付けを一般化して、幾何的有限群は対応する 3次元多様体の同相類と、不連続領域の商が決める標識付き等角構造で決定されることを示した。

Klein 群の変形空間とは異なった切り口の、むしろ不連続領域がないような Klein 群を扱った仕事も 1970年代までにいくつか存在する。より一般の Lie 群への表現の仕事として、Weil, Calabi, Mostow, Margulis らの大きな仕事があるが、ここではこれらには触れず 3次元特有なものを 2つ記す。まず Riley によるいくつかの典型的な結び目、絡み目の補空間に双曲構造が入ることを示したものがある。([22] に本人の解説がある。) また Jørgensen は cone を持ったトーラスをファイバーとする  $S^1$  上のファイバー束に双曲構造を入れ、その分岐被覆として  $S^1$  上の曲面束で非特異な双曲構造が入るものを構成した。これは Thurston の曲面束上に双曲構造を入れる仕事の発想の源であるともいえる。

#### 4. Thurston の理論, 就中一意化定理

Thurston は 1970年代の終わり頃から 1980年代にかけて、3次元双曲多様体の研究に革命的な進歩をもたらした。彼が当時証明したいいわゆる一意化定理は、以下に詳しく述べるように Haken 多様体について、非圧縮的トーラスを含まなければ、幾何的有限な双曲構造を持つという、とても一般的で壮大な理論を必要とするものである。この時期の彼の講義録 [23] を見ると、彼の発想の独創性がよくわかり、現在でも学ぶことが多くあるが、行間が大きく完全に理解するにはかなりの学力を要する。一意化定理についての解説は Morgan [16], 小島 [29], Kapovich [8], Otal [19] などがあるが、いずれも大変参考になる。Thurston 自身の証明は、7部に及ぶ論文で与えられる予定であったが、実際に出版されたのは、[25]のみで、第2部、第3部についてはプレプリントが存在する [26, 27]。

Thurston の定理をまず有限体積の双曲構造を持つ場合に述べよう。

定理 4.1 (Thurston).  $M$  を Haken 多様体で、境界が無いか、トーラス達からなり、境界にホモトピックでない非圧縮トーラスを含まないとする。このとき  $M$  の内部には完備な双曲計量が入る。

この定理は閉あるいは境界がトーラス達からなる Haken 多様体について、§2で説明した Jaco-Shalen-Johannson の分解を考えれば、Seifert ファイバー空間になる部分以外には、内部に双曲計量が入ることを示している。Seifert ファイバー多様体には双曲計量以外のいわゆる幾何構造がはいるので、この定理は Haken 多様体は幾何構造の入るピースに非圧縮的トーラスで分解できると言うことを言っている。

この定理の証明は、 $M$  が  $S^1$  上の曲面束である場合を除くと、大枠としては §2に現れた Waldhausen の階層構造の理論を使って帰納法で行われた。

$M$  が曲面束の場合の証明は [26] に比較的詳しく書かれている。また完全な証明も Otal [18] に見ることができる。証明はいわゆる 2重極限定理を核としている。この定理自体

が大変興味深いもので、かつこの定理の他の Klein 群への一般化も重要な意味を持つ (Kleinedam-Souto [11], Kim-Lecuire-Ohshika [10]) が、ここでは曲面束以外の場合に焦点を当てる。

帰納法として証明するのは次の一般化された形の定理である。

定理 4.2 (Thurston).  $M$  をコンパクトで既約な 3 次元多様体で非圧縮的トーラスを含まないものとする. このとき  $\text{Int}M$  は有限体積な双曲凸多様体の内部に同相である. 別の言い方をすると, 幾何的有限な Klein 群  $G$  があり,  $\text{Int}M$  は  $\mathbb{H}^3/G$  に同相である.

このような双曲構造を幾何的有限構造と呼ぶことにしよう. さて帰納法の各段階では Maskit の組み合わせ定理を使い一段階前で存在するとした幾何的有限構造を貼り合わせていくのであるが, 一般のステップでは貼り合わせる面は一段階前の多様体の境界の一部である. 一方帰納法の最終段階では貼り合わせる面は (トーラス成分を除いた) 境界全体になる. 実は議論としてはこの最終段階の場合が本質的な部分を全て含んでおり, 一般の場合はそれにちょっとした工夫をすることでできる.

帰納法の最終段階で示すのは以下の命題である.

命題 4.2.1.  $N$  を連結成分が 1 つまたは 2 つのコンパクト既約 3 次元多様体として,  $\partial N$  は非圧縮的で互いに同相な 2 つの成分  $S_1, S_2$  からなっているとす.  $N$  には幾何的有限構造が入っていると仮定する.  $\phi: S_1 \rightarrow S_2$  を ( $M$  から与えられた向きを反転する) 同相写像とし,  $M$  を  $S_1$  と  $S_2$  を  $\phi$  で同一して得られる多様体とする.  $M$  が非圧縮的トーラスを含まないとすると,  $N$  の幾何的有限構造を  $M$  の幾何的有限構造がそこから Maskit 組み合わせで得られるように選ぶことができる.

この命題を証明する為に Thurston は次のように考えた. Marden の定理により,  $N$  の幾何的有限構造の全体は  $\mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$  でパラメータ付けができる. 一方  $N$  の  $\pi_1(S_i)$  ( $i = 1, 2$ ) に対応した被覆をとると, 擬 Fuchs 群,  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) が得られる. 擬 Fuchs 群は Bers の定理により, Teichmüller 空間 2 つの直積でパラメータ付けされるので,  $G_i$  のパラメータ付けを  $\mathcal{T}(S_i) \times \mathcal{T}(\bar{S}_i)$  と表そう. ただしここで第 1 成分は  $N$  の境界に現れている方の等角構造を表しているとする.  $i = 1, 2$  について, 第 2 成分をとることにより,  $\sigma: \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2) \rightarrow \mathcal{T}(\bar{S}_1) \times \mathcal{T}(\bar{S}_2)$  を定義する.  $\phi$  による貼付写像とこれを合成してできる  $\phi_* \circ \sigma: \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2) \rightarrow \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$  が固定点を持てば, Maskit の組み合わせが使える. Thurston は次の定理を示すことにより, 固定点の存在を導くと主張した.

定理 4.3 (Thurston). ある  $n_0 \in \mathbb{N}$  が存在して,  $(\phi_* \circ \sigma)^{n_0}$  は  $\mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$  で有界な像を持つ.

Thurston の証明方針はまず  $\phi_* \circ \sigma$  が  $N$  の双曲構造全体の変形空間  $AH(N)$  でコンパクトであることを証明し, 次に実は幾何的有限構造の外には像はないことを示すというものである. 前半の議論には [27] に出ている  $AH(N)$  のある種のコンパクト性を示す定理を使い, 後半では幾何的無限 Klein 群 (この場合擬 Fuchs 群の極限となるものに限る) の end の幾何構造の分析を使うことになっていた. これらのいずれも独創的な議論であり, その後の Klein 群論の発展に大いに役立った. 一方で完全な証明は書かれていないのみならず, その後の解説のいずれでもこの定理の証明は埋めることができていない. [8, 19] では一意化定理の証明を完成させているが, この部分ではより弱い次の形の定理を証明している.

定理 4.4 (定理 4.3 の弱い形).  $(m_1, m_2) \in \mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$  を任意にとると,  $\{(\phi_* \circ \sigma)^n(m_1, m_2)\}$  は  $\mathcal{T}(S_1) \times \mathcal{T}(S_2)$  で有界である.

定理 4.3 自体の証明は  $M$  が非圧縮的トーラスを含まないという仮定の下では, Kent [9] による証明があるが, 一般的にはまだ回復できていない.

## 5. 今振り返ると

Thurston の 3次元多様体の幾何化という問題は, Perelman により最終的に解決され, 前章で述べた一意化定理は今やその特殊な場合と見なすこともできる. Perelman の Ricci 流を用いた議論は, かつて Thurston が錐多様体の変形を用いて orbifold の幾何化予想を証明した議論の一部と類似している. もし Thurston が Haken 多様体の場合を最初に考えずに, いきなり計量を変形していく方向の議論をしていたとすると, その後の Klein 群の隆盛は無かったかもしれず, 彼が Haken 多様体の一意化をこのような形で考えてくれたのは大変有り難い話である. 一方彼の元々の証明は現時点でも不完全と思われるところがある. 実際 [27] の主定理の主張はそのままでは誤りである ([17]). また前章に触れたように定理 4.3 の証明は回復できていない. しかしながら [27] の定理については, 一意化定理の証明に必要なようには修正することができ, また定理 4.3 も現在の高度な Klein 群論を使えば証明可能と思われる. これらについては講演で時間があれば触れる.

## 参考文献

- [1] AHLFORS, L. V. Finitely generated Kleinian groups. *American Journal of Mathematics* 86 (1964), 413–429.
- [2] BERS, L. Simultaneous uniformization. *Bulletin of the American Mathematical Society* 66, 2 (1960), 94–97.
- [3] BERS, L. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups. I. *Annals of Mathematics. Second Series* 91 (1970), 570–600.
- [4] HEKEN, W. Some results on surfaces in 3-manifolds. In *Studies in Modern Topology*. Math. Assoc. Amer. (distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968, pp. 39–98.
- [5] JACO, W. *Lectures on three-manifold topology*, vol. 43 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [6] JACO, W. H., AND SHALEN, P. B. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Memoirs of the American Mathematical Society* 21, 220 (1979), viii–192.
- [7] JOHANNSON, K. *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*, vol. 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [8] KAPOVICH, M. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, Boston, 2009.
- [9] KENT, R. P. Skinning maps. *Duke Mathematical Journal* 151, 2 (Feb. 2010), 279–336.
- [10] KIM, I., LECUIRE, C., AND OHSHIKA, K. Convergence of freely decomposable Kleinian groups. *Inventiones mathematicae* 204, 1 (2015), 83–131.
- [11] KLEINEIDAM, G., AND SOUTO, J. Algebraic convergence of function groups. *Commentarii Mathematici Helvetici* 77, 2 (2002), 244–269.
- [12] KNESER, H. Geschlossen flachen in dreidimensionalen mannigfaltigkeiten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigu* 38, 248–260 (1929).
- [13] MARDEN, A. The geometry of finitely generated kleinian groups. *Annals of Mathematics. Second Series* 99, 3 (1974), 383–462.
- [14] MASKIT, B. *Kleinian Groups*, vol. 287 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.



- [15] MILNOR, J. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *American Journal of Mathematics* 84, 1 (1962), 1–7.
- [16] MORGAN, J. W. On Thurston’s uniformization theorem for three-dimensional manifolds. In *The Smith conjecture (New York, 1979)*. Academic Press, Orlando, FL, 1984, pp. 37–125.
- [17] OHSHIKA, K. Degeneration of marked hyperbolic Structures in dimensions 2 and 3. In *Handbook of group actions*, L. Ji, A. Papadopoulos, and Y. Shing-Tung, Eds., vol. III. International Press, 2018, pp. 13–35.
- [18] OTAL, J.-P. Le théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, 235 (1996), x–159.
- [19] OTAL, J.-P. Thurston’s Hyperbolization of Haken Manifolds. *Surveys in Differential Geometry* 3, 1 (1996), 77–194.
- [20] OTAL, J.-P. William P. Thurston: “Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry”. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 116, 1 (Feb. 2014), 3–20.
- [21] PAPAKYRIAKOPOULOS, C. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Annals of Mathematics* 66 (1957), 1–26.
- [22] RILEY, R. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures. In *Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)*. Springer, Berlin, 1979, pp. 99–133.
- [23] THURSTON, W. *The Geometry and Topology of Three-manifolds: Lecture Notes from Princeton University 1978-80*. Mathematical Sciences Research Institute, notes taken by Kerckhoff, S. and Floyd, W.J., 1978-1980.
- [24] THURSTON, W. P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series* 6, 3 (1982), 357–381.
- [25] THURSTON, W. P. Hyperbolic structures on 3-manifolds. I. Deformation of acylindrical manifolds. *Annals of Mathematics* 124, 2 (1986), 203–246.
- [26] THURSTON, W. P. Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *arXiv.org* (Jan. 1998).
- [27] THURSTON, W. P. Hyperbolic Structures on 3-manifolds, III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary. *arXiv.org* (Jan. 1998).
- [28] WALDHAUSEN, F. On Irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics* 87, 1 (1968), 56.
- [29] 小島定吉. サーストンの怪物定理について. *数学* 34, 4 (1982), 301–316.
- [30] 大鹿健一. Klein 群の幾何とその応用. *数学* 69, 3 (2017), 280–293.

# 曲面流について

横山 知郎 (京都教育大学 / 科学技術振興機構 さきがけ)\*

## 概要

本講演では曲面流についての話題を扱う。特に、トポロジカルな手法を用いることによって、曲面流のくわしい解析ができることを紹介する。実際、はじめに曲面流に関連するの低次元力学系の一般論を概説し、次に以下の4つの問題「曲面流がいつ稠密軌道を持つか?」「いつ曲面流が有限情報によって表現されるか?」「いつ軌道空間 (i.e. 軌道を一点に潰した商空間) から曲面流を復元できるか?」「いつ曲面流の非遊走集合が閉軌道の和集合の閉包と一致するか?」に関する主結果を解説し、Poincaré-Bendixson 定理の一般化と曲面流の分解に関する主結果を解説し、最後に流体现象への応用について議論する。

## 1. イントロダクション

### 1.1. 背景

A. Denjoy によって、Cantor 集合の形の極小集合を持つ円周上の  $C^1$  級微分同相写像が構成された [7]。一方、円周上の  $C^2$  級微分同相写像の極小集合は Cantor 集合とならないことが示された。この結果は、同相写像の懸垂という操作によって、トーラス上の  $C^1$  級な流れに対する横断的に Cantor 集合である極小集合の存在と、トーラス上の  $C^2$  級な流れに対する横断的に Cantor 集合である極小集合の非存在を導く。さらに、A. J. Schwartz によって、非存在の結果が任意のコンパクト曲面上の結果に拡張された [26]。すなわち、任意のコンパクト曲面上の  $C^2$  級な流れも横断的に Cantor 集合である極小集合を持たないことが示された。

Poincaré-Bendixson 定理と呼ばれる様々な分野に広く応用されている以下の結果<sup>1</sup>が知られている [6, 20]: 平面上の領域上の  $C^2$  級の流れに対して、空でない特異点を高々有限個含む  $\omega$ -極限集合は閉軌道かリミットサーキット (i.e. 有限頂点のグラフかつ円周の像であるもの) である。この結果は、様々な拡張がされている。幾らかの結果をまとめると、以下の主張が成り立つ [1, 3, 4, 8, 12, 29]: コンパクト曲面上の有限個の特異点を持つ流れに対して、任意の点の  $\omega$ -極限集合は、閉軌道、リミットサーキット、または、 $Q$ -集合 (i.e. 非自明な再帰的な軌道の閉包) である。

非自明な再帰的な軌道についてはさまざまな研究がなされている。例えば、 $Q$ -集合の存在については、A. G. Maier によって、向き付け可能な種数  $g$  の曲面上の流れは高々  $g$  個の  $Q$ -集合を持つことが示されている。他方、N. Markley によって、向き付け不可能な種数  $p$  の曲面上の流れは高々  $(p-1)/2$  個の  $Q$ -集合を持つことが示されている。さらに、(非自明な再帰的な) 稠密な軌道の存在については、H. Marzougui と G. Soler López によって、コンパクト曲面上の面積保存流が稠密軌道を保つための必要十分条件が以下の3条件であることが示されている: 1) 周期軌道を持たない; 2) 特異点集合が

本研究は JST PRESTO JPMJPR16ED の支援を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 37E35, 54B15

キーワード: 曲面流, 軌道 (類) 空間, Poincaré-Bendixson 定理, 表現, 分解定理

\* e-mail: tomoo@kyokyo-u.ac.jp

<sup>1</sup>ここでは、オリジナルの書き方ではなく、力学系の記述に書き換えた結果を述べている

内点を持たない; 3) 特異点とセパトリクス (i.e. 特異点を繋ぐ軌道) のなす和集合の補集合が連結である. この結果を一般の曲面流への拡張については, 主定理の一つとして次節で紹介する.

流れの微分可能性については, C. Gutierrez によって以下の事実が示されている [10]: 1) コンパクト曲面上の連続な流れは  $C^1$  級な流れと位相同値である; 2) 横断的に Cantor 集合な形の極小集合がなければ  $C^\infty$  級な流れと位相同値である.

曲面上の連続双曲力学系について, M. M. Peixoto による以下の結果が示されている [19]<sup>2</sup>: 1) 向き付け可能なコンパクト曲面上の構造安定な流れは Morse-Smale 流である; 2) Morse-Smale 流のなす部分集合は流れの空間の中で  $C^1$ -位相に関して開かつ稠密である. ここで, 曲面上の Morse-Smale 流とは以下の 2 条件をみたす流れのことである: 1) 非遊走集合が有限個の閉軌道の和集合で双曲的である; 2) 閉軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わっている. Andronov と Pontryagin によって, 曲面上の流れが Morse-Smale 流であることは, 以下の 3 条件に言い換えられることが示された [2]: 1) 閉軌道の和集合は有限個の双曲的な軌道からなる; 2) サドル繋ぐセパトリクスが存在しない; 3) 全ての  $\omega$ -極限集合 (resp.  $\alpha$ -極限集合) は閉軌道である. また, 構造安定であるとは, 小さな摂動によって流れの位相的な性質が変化しないという性質である.

流れの表現可能性については, M. M. Peixoto が, 曲面上の Morse-Smale 流の完全不変量を構成している [19]. さらに, I. Nikolaev が Peixoto の構成した Morse-Smale 流の完全不変量を簡約化して, Peixoto グラフと呼ばれる完全不変量を構成した [18]. 言い換えると, 曲面上の Morse-Smale 流の位相同値類と Peixoto グラフの間の 1 対 1 対応が構成された. そこで, 曲面上の Morse-Smale 流の表現可能性を一般の曲面流について拡張した結果を, 主定理の一つとして次節で紹介する. 他方, Morse-Smale 流は流れのなす空間で開かつ稠密であることが知られているので, 一見, 曲面流の解析において他の流れを考える必要はあまりないように思われるかもしれない. しかし, 様々な流体現象を考えると, 非圧縮流はよく現れる. 特に, 自然現象を解析する場合に, ある種の対称性や一様性があると, 3次元の流れに付随した 2次元の流れで, Morse-Smale 流でない非圧縮流に近い流れが現れる. 実際, 非圧縮曲面流の様々な研究が, 流体力学と関連して行われてきた [5, 11, 17].

## 1.2. 定義

### 1.2.1. 力学系に関する定義

本予稿において, 曲面とは 2次元多様体のこととする. 流れとは, 位相空間への  $\mathbb{R}$  の連続な作用を意味する. 言い換えると, 位相空間  $X$  に対して, 写像  $v: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  が  $X$  上の流れ (i.e. 連続力学系) とは, 以下をみたすである: 任意の点  $x \in X$ , 実数  $s, t \in \mathbb{R}$  に対して  $v(v(x, t), s) = v(x, s + t)$  かつ,  $v(\cdot, 0)$  は  $X$  の恒等写像である.

以下では,  $v$  を曲面  $S$  上の流れとする. 点  $x \in S$  について,  $O(x) := v(x, \mathbb{R})$  を軌道  $O(x)$  と呼ぶ. 点  $x \in S$  が特異点であるとは, その軌道が一点集合からなるものである (i.e.  $O(x) = \{x\}$ ). 点  $x \in S$  が周期的であるとは, 実数  $T > 0$  が存在して  $v(x, T) = x$  かつ  $x \notin v(x, (0, T))$  がなりたつことである. 点  $x \in S$  が再帰的であると

<sup>2</sup> この Peixoto の論文内に向き付け可能という条件は書かれていないが, 論文中の証明において, 向き付け可能という条件が必要なことが指摘された. そのため, 向き付け不可能な場合に対する主張は, Peixoto 予想と呼ばれている. 特に, 向き付け不可能な場合についても, Pugh's  $C^1$ -Closing Lemma によって,  $C^1$ -位相に関して稠密であることが示されている [21, 22]. また, 向きづけ不可能な種数が 4 以下である場合は, Peixoto 予想が正しいことが示されている [9, 15].

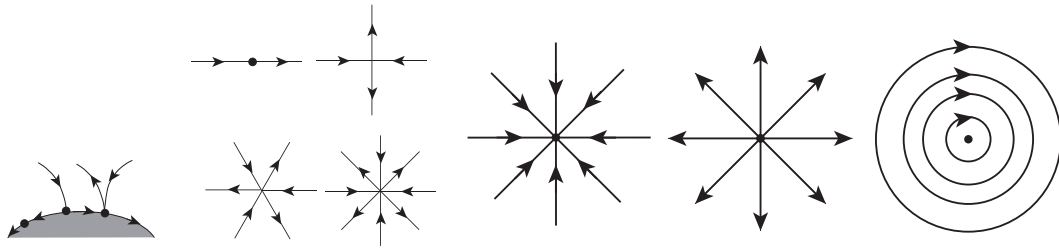


図 1: マルチサドル, シンク, ソース, センター

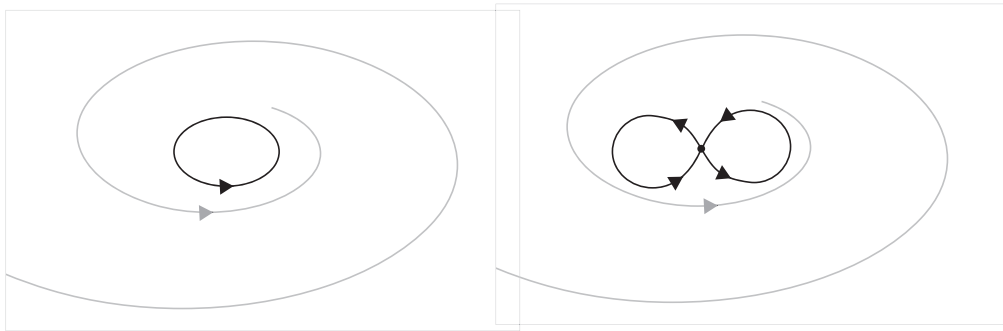


図 2: リミットサイクルとリミットサーキット

は,  $x \in \omega(x) \cup \alpha(x)$  をみたすことである. ただし,  $\omega(x) := \bigcap_{n \in \mathbb{R}} \overline{\{v(x, t) \mid t > n\}}$  は  $x$  の  $\omega$ -極限集合,  $\alpha(x) := \bigcap_{n \in \mathbb{R}} \overline{\{v(x, t) \mid t < n\}}$  は  $x$  の  $\alpha$ -極限集合である. ただし,  $\bar{A}$  は部分集合  $A$  の閉包のことである. 再帰的な点  $x \in S$  が非自明であるとは,  $x$  の軌道が閉でないことである. 点  $x \in S$  が非遊走的であるとは, 任意の  $x$  の近傍  $U$  に対して  $v(U, T) \cap U \neq \emptyset$  となる  $T > 1$  が存在することである. 周期的 (resp. 再帰的, 非遊走的) な点  $x \in S$  の軌道  $O(x)$  を周期軌道 (resp. 再帰軌道, 非遊走的) と呼ぶ. 特異点の全体の成す集合を  $\text{Sing}(v)$ , 全ての周期軌道の和集合を  $\text{Per}(v)$ , 全ての閉でない再帰的な軌道の和集合を  $P$  と書く. さらに, 軌道  $O(x)$  の  $\omega$ -極限集合 (resp.  $\alpha$ -極限集合) を  $\omega(O(x)) = \omega(x)$  (resp.  $\alpha(O(x)) := \alpha(x)$ ) と定める. 特異点を繋ぐ非特異な軌道をセパトラトリクスと呼ぶ. 流れが擬正規 (resp. 正規) であるとは, 各特異点がマルチサドル (resp. サドル), シンク, ソース, センターであることである (図 1). ただし, マルチサドル (resp. サドル) とは正の整数個 (reps. 4 本) のセパトラトリクスを持つ孤立特異点, シンクとは吸引領域を持つ孤立特異点, ソースとは反発領域を持つ孤立特異点, センターとは閉軌道からなる近傍を持つ孤立特異点のことである.

非周期軌道  $O'$  の  $\alpha$ -極限集合か  $\omega$ -極限集合である周期軌道  $O$  をリミットサイクルと呼ぶ (i.e.  $O = \alpha(O')$  または  $O = \omega(O')$ ).  $\omega$ -極限集合  $\gamma$  がリミットサーキットとは, リミットサイクルであるか, または以下をみたすことである: 1)  $\gamma$  は円周の連続写像の像である; 2)  $\gamma$  はセパトラトリクスと有限個の特異点の和集合である. 非周期的なリミットサーキットが完全とは, 十分小さいメビウスの帯と同相な近傍を持つか, 両側にそれぞれ吸引領域を持つことである (図 3 参照)<sup>3</sup>. 集合  $A$  が不変であるとは, 任意の  $t \in \mathbb{R}$  について,  $v(A, t) = A$  が成り立つことである.

特異点が有限でない場合も扱うために, リミットサーキットや  $Q$ -集合の概念を拡張

<sup>3</sup> 正確な定義は [31] を参照ください.

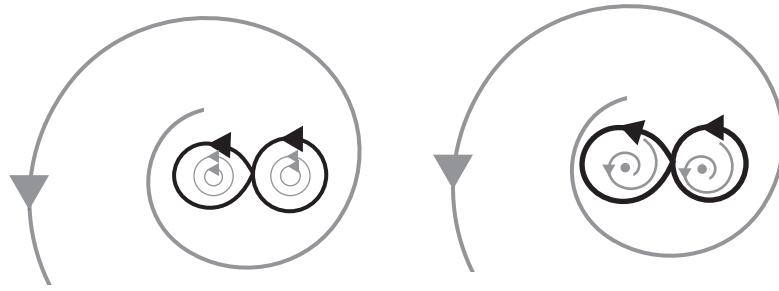


図 3: 完全でないリミットサーキットと完全リミットサーキット

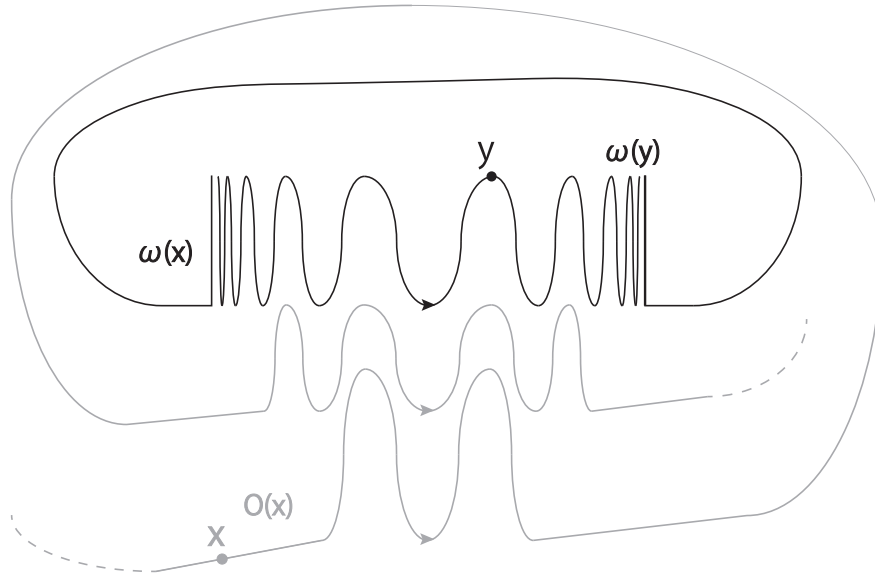


図 4: リミットサーキットでないがリミット擬サーキット  $\omega(x)$  の例. 実際, 弧状連結でないので,  $\omega(x)$  はリミットサーキットではない.

して, 以下の2つの定義を導入する. 連結不変閉集合がリミット擬サーキットとは, 開円環の境界成分であり, 非再帰的な軌道を含み, 非再帰的な軌道と特異点の和集合であり, その集合に含まれない点の  $\omega$ -極限集合または  $\alpha$ -極限集合である.  $\omega$ -極限集合 (resp.  $\alpha$ -極限集合) が擬  $Q$ -集合であるとは, 本質的な横断的な単純閉曲線と無限回交わることである. ここで, 本質的な曲線とは, 曲面上で可縮でない曲線のことである. 一般に, リミット擬サーキットはリミットサーキットと異なり, 擬  $Q$ -集合は  $Q$ -集合と異なるが, 特異点が有限個しかない場合には, リミット擬サーキットはリミットサーキットであり, 擬  $Q$ -集合は  $Q$ -集合となることが示される. 稠密な軌道を流れを位相推移的な流れと呼ぶ. 流れ  $v$  と  $w$  が位相同値とは,  $v$  の軌道を  $w$  の軌道に移し, 軌道の向きを保つ同相写像が存在することである.

### 1.2.2. トポロジーに関する定義

余次元1葉層構造の葉は真葉, 局所稠密葉, 例外葉のいずれかであることが知られている. これの類似として, 以下が定義される.  $v$  の軌道  $O$  が真であるとは, 相対位相で  $O$  が閉となるような  $O$  の近傍が存在することである. 軌道  $O$  が局所稠密であるとは, 閉包の内部が空でないことである. 軌道  $O$  が例外的であるとは, 真でも局所稠密でない

いことである。「Cantor 集合は、コンパクト、距離付け可能、完全、完全非連結な空間である」という特徴付けにより、例外的な軌道の閉包は横断的に Cantor 集合であることが知られている。疎集合とは閉包が内点を含まない集合である。全ての局所稠密な軌道の和集合を LD, 全ての例外的な軌道の和集合を E と書く。このとき、曲面  $S$  は  $S = \text{Sing}(v) \sqcup \text{Per}(v) \sqcup P \sqcup \text{LD} \sqcup E$  という分解を持つ。ここで、 $\sqcup$  は非連結和記号である。この分割により、 $P$  は全ての閉でなく真な軌道の和集合と一致している。ボーダー集合  $\text{Bd}$  を以下で定める:  $\text{Bd} := \partial \text{Sing}(v) \cup \partial \text{Per}(v) \cup \partial P \cup \partial \text{LD} \cup \partial E \cup P_{\text{sep}} \cup \partial \text{Per}$ . ただし、 $\partial A$  は集合  $A$  の境界であり、 $P_{\text{sep}}$  は内部  $\text{int}P$  に含まれるマルチサドルとつながる軌道の和集合であり、 $\partial \text{Per}$  は境界成分である周期軌道である。

位相空間が  $T_0$  分離公理をみたすとは、任意の異なる2点  $x$  と  $y$  について、 $x$  と  $y$  のどちらか片方のみを含む開集合が存在することである。

## 2. 主結果

### 2.1. 位相推移性

第1の問い「曲面流がいつ稠密軌道を持つか?」に対して、以下の位相推移性の特徴づけがある。

**定理 1** [29] コンパクト曲面上の流れが稠密軌道を持つための必要十分条件は以下の3条件である:

1. 全ての点が非遊走的である。
2.  $\text{Sing}(v) \sqcup P$  の補集合は連結である。
3. 閉軌道の和集合は内点を持たない。

この結果は、背景で説明した H. Marzougui と G. Soler López の一般化になっている。実際、全ての点が非遊走的である場合、特異点とセパトトリクスのみを和集合が  $\text{Sing}(v) \sqcup P$  と一致するためである。

### 2.2. 表現可能性

第2の問い「いつ曲面流が有限情報によって表現されるか?」に対して、ある種の有限ラベル付きグラフが、Morse-Smale 流や面積保存流 (i.e. 非圧縮流) などの重要な流れのクラスを含むクラスの完全不変量になっていることを示す。

有限表現の不可能性については、退化な特異点の種類は非加算個あり、トーラス上の極小流 (i.e. 全ての軌道が稠密) や Denjoy 流れと呼ばれる流れの位相同値類は非可算個であることが知られている。一方、このような非退化な特異点や非自明な再帰的な軌道がなく、リミットサイクルが有限個であれば、流れの数え上げるアルゴリズムが構成できる。すなわち、以下の主張が成り立つ。

**定理 2** [31] 非自明な再帰的な軌道を持たず、退化な特異点を持たず、有限個のリミットサイクルしか持たない流れの同値類の集合を数え上げるアルゴリズムが存在する。

この結果は、Morse-Smale 曲面流の表現可能性を一般の曲面流について拡張したものである。

### 2.3. 軌道空間への単射性

第3の問い「いつ軌道空間から曲面流を復元できるか?」について、向き付け可能な閉曲面上のヘテロクリニックセパトトリクス (i.e. 異なるサドル間を繋ぐ軌道) と局所稠

密な軌道を持たない正則な流れは復元可能であることを示す. 正確に述べるために, いくつか記号を導入する. 向き付け可能な閉曲面  $S$  上のヘテロクリニックセパトリクスと局所稠密な軌道を持たない正則な流れの全体のなす集合を  $\chi$  とおく. 集合  $\chi$  上の同値類  $\sim$  を以下で定義する:  $v \sim w$  とは,  $v$  の軌道を  $w$  の軌道に移す同相写像が存在することである. 位相空間の全体のなす集合を同相写像という同値類で割った商空間を  $\text{TOP}/\sim$  で表す. このとき以下の単射性が成立する.

**定理 3** [30] 流れの同値類  $[v]$  を軌道類空間の同値類  $[S/v]$  に対応させる写像  $\chi/\sim \rightarrow \text{TOP}/\sim$  は単射である.

この事実を示すために, 軌道類空間という空間を考えることが有効である. なぜなら, 一般に軌道空間は  $T_0$  空間にするならないためである. ここで, 軌道類空間とは軌道の閉包が一致する点を潰した空間のことである. 言い換えると, 軌道類空間は軌道空間を位相空間の  $T_0$  化という操作によって得られる空間である. そのため, 軌道空間を直接扱うのではなく, より性質のよい軌道類空間を考察した. 実際,  $\chi$  に属する流れに対して, マルチサドル図式 (i.e. マルチサドルとそれを繋ぐセパトリクスの和集合) の各連結成分を一点に潰すことにより, 軌道類空間をさらに潰して得られる空間はマルチグラフになる [30].

#### 2.4. 非遊走集合の同値性

第4の問い「いつ曲面流の非遊走集合が閉軌道の和集合の閉包と一致するか?」に関して, 擬正規な曲面流に対する必要十分条件を述べる. この同値性  $\overline{\text{Cl}(v)} = \Omega(v)$  は双曲性の定義に現れる性質であるので, この同値性は双曲性がいつ成り立つかに関わる問いである. この問いへの回答は, 非周期的な完全リミットサーキットの非存在と非自明な再帰的な軌道の非存在という必要条件が十分条件であるというものである. 正確に述べると以下が成り立つ.

**定理 4** [31] コンパクト曲面  $S$  上の擬正規な流れ  $v$  に対して, 以下の条件は同値である:

- 1)  $\text{LD} \sqcup \text{E} = \emptyset$  であり, 非周期的な完全リミットサーキットが存在しない
- 2)  $\overline{\text{Cl}(v)} = \Omega(v)$ .

上記の主張において擬正規性は必要である. 言い換えると, 一般に,  $\overline{\text{Cl}(v)} \subsetneq \Omega(v)$  が成り立つ. 実際, コンパクト曲面  $S$  上の流れ  $v$  で,  $\text{LD} \sqcup \text{E} = \emptyset$  and  $\overline{\text{Cl}(v)} \subsetneq \Omega(v)$  をみたすが, 非周期的な完全リミットサーキットを持たないものがある (図5参照)[31].

#### 2.5. Poincaré-Bendixson 定理の任意の特異点集合を持つ曲面流に対する一般化

Poincaré-Bendixson 定理の有限性の仮定を取り除いた以下の一般化が成り立つ.

**定理 5** [31] コンパクト連結曲面  $S$  上の流れに対して, 閉でない軌道の  $\omega$ -極限集合は, 以下のどれか一つである:

1. 特異点からなる疎集合
2. リミットサイクル
3. リミット擬サーキット.
4. 局所稠密  $Q$ -集合.
5. 局所稠密でない擬  $Q$ -集合.

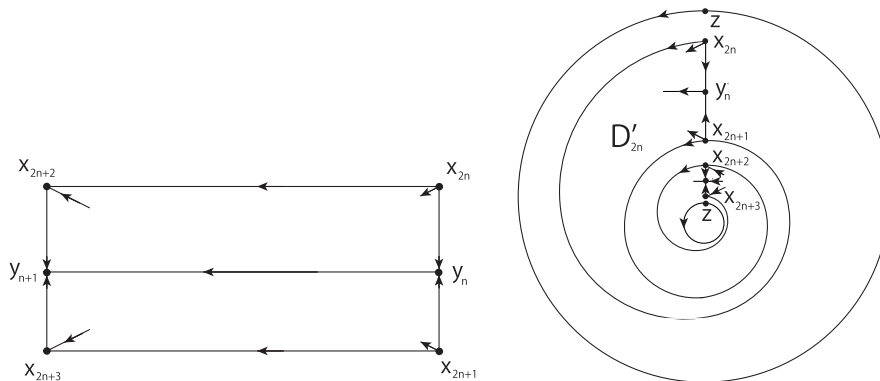


図 5: 開流れ箱  $D'_{2n}$  と, 擬正規性がないと定理の同値性が成り立たないことを示す例

講演者の知る限りでは, Poincaré-Bendixson 定理はさまざまな方向に一般化されているが, 有限個の特異点を持つという条件を取り除いた一般化はされていない. そのため, この一般化は応用上有益な一般化である. 例えば, これまでは, 滑りなし境界条件付きの微分方程式の解には, 直接 Poincaré-Bendixson 定理を適用することができなかつた. 他方, この任意の特異点集合を持つ曲面流に対する一般化によって, 境界が止まっているような流れに対しても, Poincaré-Bendixson 定理が直接適用可能になる.

### 2.6. 曲面流の分解定理

種類の異なる軌道の境目に対応するボーダー集合  $Bd = \partial \text{Sing}(v) \cup \partial \text{Per}(v) \cup \partial P \cup \partial LD \cup \partial E \cup P_{\text{sep}} \cup \partial_{\text{Per}}$  の補集合は以下のような流れに分類される.

**定理 6** [31] コンパクト曲面  $S$  上の擬正規な流れ  $v$  に対して, 補集合  $S - Bd$  の各連結成分は以下のどれか一つである:

1. 非再帰的軌道からなる開流れ箱
2. 非再帰的軌道からなる開円環
3. 周期軌道からなる開円環
4. 周期軌道からなるトーラス
5. 周期軌道からなる Klein の壺
6. 周期軌道からなる Möbius の帯
7. 局所稠密な軌道からなる本質的な開部分集合

メビウスの帯と同相になる十分小さい近傍を持つ周期軌道の和集合を  $\text{Per}_1$  と表す. このとき, 以下の結果がえられる.

**系 1** [31] コンパクト曲面  $S$  上の擬正規な流れ  $v$  に対して, 補集合  $S - (Bd \sqcup \text{Per}_1)$  の各連結成分は以下のどれか一つである:

1. 非再帰的軌道からなる開流れ箱
2. 非再帰的軌道からなる開円環
3. 周期軌道からなる開円環
4. 周期軌道からなるトーラス
5. 局所稠密な軌道からなる本質的な開部分集合



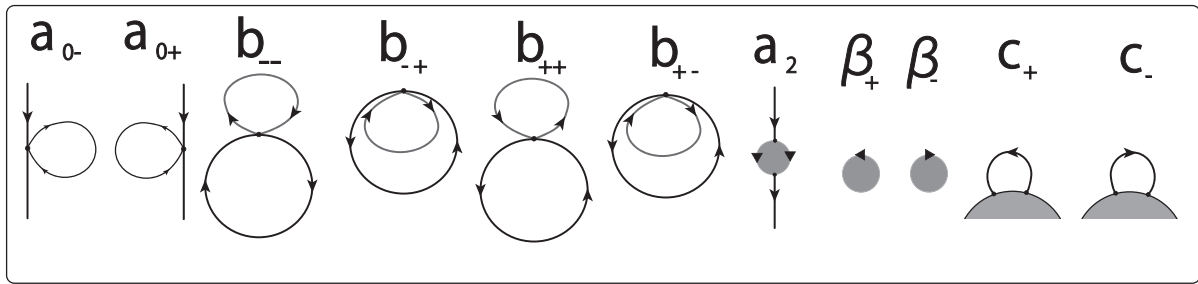


図 6: Hamilton 流に対する語表現 (resp. 木表現) のすべての局所構造

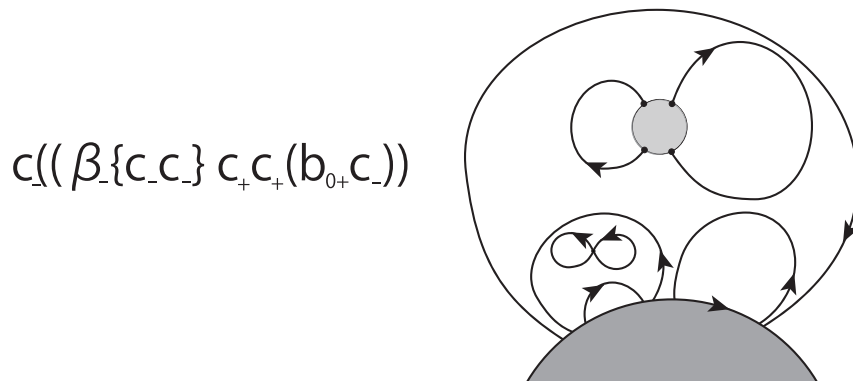


図 7: 有界な頂点における  $\beta_{\pm}, c_{\pm}$  の並べ方の局所構造の例

### 3. 力学系的手法の流体现象への応用

この節では、力学系理論の流体现象への応用を扱う<sup>4</sup>。背景で述べたように、流体力学や微分方程式において、Morse-Smale 流でない非圧縮流に近い流れも重要な研究対象である。球面に含まれるコンパクト曲面では、非圧縮流は Hamilton 流と一致することが知られている。また、曲面上の Hamilton 流については、Morse 理論の類似が成り立つ。実際、T. Ma と S. Wang によって、以下の結果が示された [13]: コンパクト向き付け可能な曲面上の Hamilton 流の集合に制限した場合、流れが構造安定であるための必要十分条件は以下の 2 条件である: 1) 全ての特異点がセンターか (境界) サドルである; 2) 全てのセパトริกスは自己連結的 (i.e. 同じサドルを繋ぐか, 同じ境界上の境界サドルを繋ぐ) である。さらに、構造安定である流れが開かつ稠密部分集合をなす。他方、川の流れのように有界でない領域上の Hamilton 流も応用上重要な研究対象である。そこで、T. Ma と S. Wan の結果を非有界な多重連結領域上の Hamilton 流に拡張した [25]。さらに、多重連結領域上の構造安定な Hamilton 流に 1 対 1 に対応する木表現 (図 6 参照) を構成し、粗く性質を分類する多対 1 に対応する語表現を構成した [25, 32]。これらの表現を用いて、特異点の数を変えない変化において、一般に起こりえる全ての流れのトポロジーの遷移を記述し、その遷移グラフを構成した [24]。実際、語表現の遷移グラフはオートマトンを用いることで生成され、木表現の遷移グラフは正規木文法に円順序を付加した文法によって生成される。特に、特異点の数を 1 つ変える変化も有限種類しかないので、一般に起こる全ての流れの遷移を表す遷移グラフの構成が可能に

<sup>4</sup> この節で述べる流体现象への応用は、坂上 貴之氏 (京都大学), 横山 哲郎氏 (南山大学), 宇田 智紀氏 (東北大学), 藤堂 英樹氏 (中央学院大学) との共同研究に基づく。

なった. この遷移グラフを用いることで, 多重連結領域上の時間変化する非圧縮流のトポロジーの変化をグラフ上のウォークとみなせる. 例えば, これらの記号解析を用いて, 翼の揚抗比の極大極小の推定や, 時間変化する流れの中間状態の推定を, 計算によって行えるようになった [23]. さらに, 支配方程式の制約によって, 時間変化する流れは遷移グラフの部分グラフ上のみを動く. そのため, 支配方程式がわかっていない流体现象のグラフ上のウォークの性質から支配方程式を推定することに利用できる.

さらに, これら遷移グラフの構成するアルゴリズムの一部が実装されている. 実際, パーシステントホモロジーを用いることにより, Hamilton 関数 (i.e. 高さ関数) を入力として, 木表現を出力とするアルゴリズムが実装されているので, これについて講演の最後に解説する. このように, 時間変化する流れを記号列に変換することにより, 微分方程式のトポロジカルな性質をグラフ理論などの離散構造によって解析することが可能になった. さらに, 流体画像からベクトル場のデータや Hamilton 関数を取り出す研究をしており, この画像解析の研究がうまく進めば, 流体の動画を入力して, 記号列に変換して流れの性質を解析することにより, 流れの状態の把握や制御するために有益な情報を出力することが可能になる.

## 参考文献

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A.G. Maier, *Qualitative theory of dynamical systems of the second order*, Izdat. Nauka, Moscow 1966 p. 568.
- [2] A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, *Systèmes grossiers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 14(1937), pp. 247–250.
- [3] D. V. Anosov, I. U. Bronshtein, S. Kh. Aranson, V. Z. Grines, *Dynamical Systems I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 1, pp. 149–233, Springer, Berlin, 1988.
- [4] S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, AMS, Math. Monogr., 1996, p. 331.
- [5] H. Aref and M. Brøns, *On stagnation points and streamline topology in vortex flows*, J. Fluid Mech. **370** (1998) pp. 1–27.
- [6] I. Bendixson, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica 24(1901) pp. 1–88.
- [7] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl., IX. Ser. 11, pp. 333–375 (1932).
- [8] C.J. Gardiner, *The structure of flows exhibiting nontrivial recurrence on two-dimensional manifolds*, Journ. Diff. Equat., 1985, 57, 1, pp. 138–158.
- [9] C. Gutierrez, *Structural stability for flows on the torus with a cross-cap* Trans. Amer. Math. Soc. 241 (1978), 311–320.
- [10] C. Gutierrez, *Smoothing continuous flows on 2-manifolds and recurrences*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. 6(1986), pp. 17–44.
- [11] R. Kidambi and P. K. Newton, *Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere*, Physica D **140** (2000) 95–125.
- [12] G. Levitt, *Fewilletages des surfaces*, These. Paris. 1983, p. 234.
- [13] T. Ma, S. Wang, *Geometric theory of incompressible vector fields with applications to fluid dynamics* Mathematical Surveys and Monographs, 119. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. x+234 pp. ISBN: 0-8218-3693-5.
- [14] A. G. Maier, *Trajectories on closed orientable surfaces* Mat. Sb. 12 (54) (1943), 71–84
- [15] N. Markley, *The Poincaré-Bendixson Theorem for the Klein Bottle*, Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969) 135, 159–165.

- [16] N. Markley, *On the number of recurrent orbit closures* Proc. AMS, 25(1970), no 2, 413–416.
- [MS] H. Marzougui, Soler López, G., *Area preserving analytic flows with dense orbits* Topology Appl. 156 (2009), no. 18, 3011–3015.
- [17] K. Moffatt, *The topology of scalar fields in 2D and 3D turbulence*. Proc. IUTAM Symposium Geometry and Statistics of Turbulence (Hayama) eds. T. Kambe et. al, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001).
- [18] I. Nikolaev, *Graphs and flows on surfaces* Ergod. Th. Dynam. Syst. 18 (1998), 207–220.
- [19] M.M Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds*, M.M. Peixoto (Ed.), Dynamical Systems, Proc. of Symp. held at Univ. of Bahia, Salvador, Brazil 1971, Academic Press (1973), pp. 389–419.
- [20] H. Poincaré. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. de Math. Pures et Appl., Série IV 2, (1886) pp. 151–217.
- [21] C. Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010–1021.
- [22] C. Pugh, C. Robinson, *The  $C^1$ -closing lemma, including Hamiltonians*, Ergodic Th. and Dynamical Systems 3 (1983), No. 2, 261–313.
- [23] T. Sakajo, Y. Sawamura and T. Yokoyama, *Unique encoding for streamline topologies of incompressible and inviscid flows in multiply connected domains*. Fluid Dynamics Research **46** (2014) 031411.
- [24] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Transitions between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domains*, Physica D, **307** (2015) pp. 22–41.
- [25] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Tree representations of streamline topologies of structurally stable 2D incompressible flows* IMA Journal of Applied Mathematic, **83** Issue 3 (2018) pp. 380–411.
- [26] A.J. Schwartz, *A Generalization to Poincaré-Bendison Theorem to Closed two-Dimensional Manifolds*, (2006) American Journal of Mathematics, 85 (1963) pp. 453–458.
- [27] K. Yano, *Asymptotic cycles on two-dimensional manifolds*, Adv. St in Pure Math. 1985, 5, pp. 359–377. (Foliations, Proc. Symp. Tokyo, 1983).
- [28] T. Yokoyama, *Recurrence, pointwise almost periodicity and orbit closure relation for flows and foliations*, Topology Appl. 160 (2013) pp. 2196–2206.
- [29] T. Yokoyama, *Topological characterisations for non-wandering surface flows*, Proc. Amer. Math. Soc. 144, (2016), pp. 315–323.
- [30] T. Yokoyama, *Graph representations of surface flows*, preprint, arXiv:1703.05495.
- [31] T. Yokoyama, *Decompositions of surface flow*, preprint, arXiv:1703.05501.
- [32] T. Yokoyama and T. Sakajo, *Word representation of streamline topology for structurally stable vortex flows in multiply connected domains*. Proc. Roy. Soc. A **469** (2013) (doi: 10.1098/rspa.2012.0558).

# 結晶点群、時間反転対称性の下での バンド構造の幾何学的分類

特異点論の観点から

寺本 央 (北海道大学/JST/PRESTO)\*

## 1. 研究背景

近年の計測技術、ナノテクノロジーの発展により物性パラメータを変化させ、それによる物性の変化を直接観測することが可能となってきた。本発表ではそのような発展の一つである Dirac-cone engineering [1] を題材として取り上げ、特異点論の立場からその理解の一助になる理論的枠組みを提案したい。

結晶の電子輸送特性、半導体、金属であるあるいは絶縁体、さらにはトポロジカル絶縁体等の特性は結晶のバンドの幾何構造が決めており、Dirac-cone engineering とは概して結晶のパラメータを変化させることにより複数のバンドを衝突させ、その衝突によりバンドの幾何構造を変化させることで結晶の輸送特性を制御することを目指す工学であるということが出来る。

そのためには複数のバンドを衝突させたときに、バンドにどのような幾何構造の変化が生じるのか？その衝突による幾何構造の変化によりどのような大域的なバンドのトポロジカルな性質が変化するのか？という問題に答える必要がある。本発表では特に二つのバンドを衝突させたときに局所的にどのような幾何学的変化が引き起こされるのかを特異点論の観点から調べるための理論的な枠組みを提案し、例として  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  の表面の  $\Gamma$  点周りの  $C_{3v}$  と時間反転対称性の下での余次元7までの二つのバンドの縮退点近傍のハミルトニアンの特異点論による分類とその普遍開折による縮退点近傍で起こる幾何学的変化を調べる。詳細に関しては[2]を参照のこと。

## 2. 設定

$k_1$  と  $k_2$  を表面におけるブロッホ波数の第1, 2成分とし、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$  と書く。ハミルトニアンをバンド交差に係る二つの状態に制限すると

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \delta(\mathbf{k}) & \beta(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) \\ \beta(\mathbf{k}) + i\gamma(\mathbf{k}) & -\delta(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

のように書くことができる。ただし、 $\beta$ 、 $\gamma$  と  $\delta$  は  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}$  への関数とし、ハミルトニアンとしてはトレースのないものを考える<sup>1</sup>。もとのハミルトニアンが良い条件を満たすと  $\beta$ 、 $\gamma$ 、および  $\delta$  は  $C^\infty$  級となることが示せるので、以下では特に断らない限り関数、写像としては  $C^\infty$  級のものを考える。この詳細な導出に関しては[3]を参照のこと。

本研究はさがり JST/PRESTO(課題番号:JPMJPR16E8)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 53Z05, 57R45

キーワード: singularity theory, band theory, invariant theory

\* 〒001-0020 北海道札幌市北区北20条西10丁目 北海道大学電子科学研究所 05-103-2

e-mail: [teramoto@es.hokudai.ac.jp](mailto:teramoto@es.hokudai.ac.jp)

web: <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/researcher/applied-math/teramoto.php>

<sup>1</sup>二つの準位の相対的なエネルギー差の問題にする限りはこれで十分である。一方、二つの準位とフェルミ準位等の絶対的な値と比べるためにはトレースの部分を検討する必要がある。

三つの Pauli 行列  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ , および  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  を使うとハミルトニアンは

$$H(\mathbf{k}) = \beta(\mathbf{k})\sigma_1 + \gamma(\mathbf{k})\sigma_2 + \delta(\mathbf{k})\sigma_3 \quad (2)$$

と書ける。以下では  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  をベクトルとして、式(2)の短縮形として

$$(\beta(\mathbf{k}), \gamma(\mathbf{k}), \delta(\mathbf{k})) \cdot \sigma \quad (3)$$

と書く。

### 3. 対称操作のハミルトニアンへの作用

この節ではスピン 1/2 の粒子の  $C_{3v}$  対称性と時間反転対称性を持つハミルトニアンを考える [4, 5] が他の結晶点群の場合にも同様に扱うことができる。点群  $C_{3v}$  は3回回転

$$C_3: k_{\pm} \mapsto e^{\pm i2\pi/3} k_{\pm}, \sigma_{\pm} \mapsto e^{\pm i2\pi/3} \sigma_{\pm}, \sigma_3 \mapsto \sigma_3 \quad (4)$$

と鏡面反射

$$M: k_{\pm} \mapsto -k_{\mp}, \sigma_{\pm} \mapsto \sigma_{\mp}, \sigma_3 \mapsto -\sigma_3 \quad (5)$$

によって生成される。ただし、 $k_{\pm} = k_1 \pm ik_2$  および  $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2$  としている。スピン 1/2 の粒子に対しては、その時間反転操作は  $K$  を複素共役をとる操作とすると  $\Theta = i\sigma_2 K$  と書くことができる。ハミルトニアンが時間反転操作に対して対称であるということ

$$\Theta H(-\mathbf{k}) \Theta^{-1} = H(\mathbf{k}) \quad (6)$$

が任意の  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して成り立つことと定義する。時間反転操作は  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbf{k}$  で張られる空間) と  $\mathbb{R}^3$  ( $\sigma$  で張られる空間) に

$$\Theta: k_{\pm} \mapsto -k_{\pm}, \sigma_{\pm} \mapsto -\sigma_{\pm}, \sigma_3 \mapsto -\sigma_3 \quad (7)$$

と作用する。

以上のようなハミルトニアンを三つの基底  $\sigma_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\sigma_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\sigma_3 = (0, 0, 1)$  で表現すると、対称操作に対するハミルトニアンの不変性は  $\Gamma$  を  $C_3, M$  と  $\Theta$  により生成される対称群、 $\rho_1$  と  $\rho_2$  を  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbf{k}$  で張られる空間) と  $\mathbb{R}^3$  ( $\sigma$  で張られる空間) への  $\Gamma$  の作用とすると、

$$\rho_2(g) H(\rho_1(g) \mathbf{k}) = H(\mathbf{k}) \quad (8)$$

が任意の  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  と  $g \in \Gamma$  で成り立つことと表現することができる。特にこの例においては

$$\rho_1(C_3) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}, \rho_1(M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_1(\Theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\rho_2(C_3) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 & 0 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2(\Theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書ける。以上のような  $C_3, M$  および  $\Theta$  によって生成される対称操作の群を  $C_{3v} + T$  と書くことにする。また、以下では与えられた対称群  $\Gamma$  に対し、その定義域  $\mathbb{R}^n$  への作用を  $\rho_1$  とし、値域  $\mathbb{R}^p$  への作用を  $\rho_2$  とする。上の例では  $n = 2$  および  $p = 3$  としている。

$$\mathcal{E}_{n=2, p=3}^\Gamma = \{H: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \mid \forall g \in \Gamma, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \rho_2(g) H(\rho_1(g) \mathbf{k}) = H(\mathbf{k})\} \quad (11)$$

を (8) を満たす写像芽全体の集合とする。この集合に属する写像芽を  $\Gamma$  同変写像芽と呼ぶ。以下では [6, 7] に従い  $\mathcal{E}_{2,3}^\Gamma$  を以下の同値関係の下分類する:  $H, H' \in \mathcal{E}_{2,3}^\Gamma$  が  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(3)]$  同値であるとは写像芽  $M: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (SO(3), M(0))$  で  $\rho_2(g) M(\rho_1(g) \mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) \rho_2(g)$  をすべての  $g \in \Gamma$  と  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して満たすものと微分同相芽  $s: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  で  $s(\rho_1(g) \mathbf{k}) = \rho_1(g) s(\mathbf{k})$  をすべての  $g \in \Gamma$  と  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して満たすものが存在し、

$$H'(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) H \circ s(\mathbf{k}) \quad (12)$$

がすべての  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して成り立つこととする。以下ではこの同値関係を  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(3)]$  同値と呼び  $H$  と  $H'$  が  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(3)]$  同値であるとき  $H \sim H'$  と書く。

この同値関係の物理的背景は以下である:

**定理 3.1.** 先の例と同じ設定の下、 $H, H' \in \mathcal{E}_{2,3}^\Gamma$  が  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(3)]$  同値であるとき、また、そのときに限り写像芽  $U: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (SU(2), U(0))$  と微分同相芽  $s: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  が存在して

$$H'(\mathbf{k}) \cdot \sigma = U(\mathbf{k}) (H \circ s(\mathbf{k}) \cdot \sigma) U^\dagger(\mathbf{k}) \quad (13)$$

がすべての  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して成り立つ。ただし、 $U^\dagger(\mathbf{k})$  は  $U(\mathbf{k})$  のエルミート共役であり、

$$s(C_3 \mathbf{k}) = C_3 s(\mathbf{k}), \quad (14)$$

$$s(M \mathbf{k}) = M s(\mathbf{k}), \quad (15)$$

$$s(-\mathbf{k}) = -s(\mathbf{k}), \quad (16)$$

と

$$U(\mathbf{k}) = C_3 (U(C_3 \mathbf{k})), \quad (17)$$

$$U(\mathbf{k}) = M (U(M \mathbf{k})), \quad (18)$$

$$U(\mathbf{k}) = \Theta U(-\mathbf{k}) \Theta^{-1}, \quad (19)$$

をすべての  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して満たすものとする。

式 (14, 15, 16) と式 (17, 18, 19) はこれらの変換の作用が写像芽の対称性を保つための十分条件である。

もし  $H$  が  $\Gamma$  同変であれば  $H'(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) H \circ s(\mathbf{k})$  で定義される  $H'$  も  $\Gamma$  同変である。なぜならば

$$\rho_2(g) H'(\rho_1(g) \mathbf{k}) = \rho_2(g) M(\rho_1(g) \mathbf{k}) H \circ s(\rho_1(g) \mathbf{k}) \quad (20)$$

$$= M(\mathbf{k}) \rho_2(g) H(\rho_1(g) s(\mathbf{k})) \quad (21)$$

$$= M(\mathbf{k}) H \circ s(\mathbf{k}) \quad (22)$$

$$= H'(\mathbf{k}) \quad (23)$$

がすべての  $g \in \Gamma$  と  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  に対して成り立つからである。故に  $M$  と  $s$  に対する条件は写像芽  $H$  が  $\Gamma$  同変であるとき写像芽  $H'$  も  $\Gamma$  同変となるための自然な十分条件となっている。以上の特異点論の設定は泉屋らの  $\mathcal{K}[\rho(G)]$  同値 [6, 7] に同変性を加えた一般化になっている。

#### 4. $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$ 同値の枠組み

**定義 4.1.**  $\Gamma$  をコンパクト Lie 群とし  $H, H' \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  を二つの  $\Gamma$  同変な写像芽であるとする。  $H$  と  $H'$  が  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値であるとは、写像芽  $M: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (SO(p), M(0))$  と微分同相芽  $s: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  が存在して

$$H'(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) H \circ s(\mathbf{k}) \quad (24)$$

がすべての  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つこととする。ただし、 $M$  と  $s$  は

$$s(\rho_1(g)\mathbf{k}) = \rho_1(g)s(\mathbf{k}) \quad (25)$$

$$\rho_2(g)M(\rho_1(g)\mathbf{k}) = M(\mathbf{k})\rho_2(g) \quad (26)$$

をすべての  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$  と  $g \in \Gamma$  に対して満たすものとする。また、この関係式が  $s$  を恒等写像芽  $s = id_n$  として成り立つとき  $H$  と  $H'$  は  $\mathcal{C}_\Gamma[SO(p)]$  同値であるという。

次に  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値に関する  $\Gamma$  同変写像芽  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  における接空間  $TK_\Gamma[SO(p)](H)$  を  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  の  $H$  への無限小作用の集合として次の節のように定義する。

##### 4.1. 接空間 $TK_\Gamma[SO(p)](H)$ の定義とその代数的構造

まず  $\rho_1(\Gamma)$  不変な環を

$$\mathcal{E}_n^\Gamma = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, f(0)) \mid f(\rho_1(g)\mathbf{k}) = f(\mathbf{k})\} \quad (27)$$

と定義し、その極大イデアル  $\mathcal{M}_n^\Gamma$  を  $\mathcal{E}_n^\Gamma$  の写像芽の中で  $\mathbb{R}^n$  の原点を 0 に写すものの集合と定義する。次に  $\rho_1(\Gamma)$  同変写像芽の集合を

$$\theta_\Gamma(n) = \{s: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, s(0)) \mid s(\rho_1(g)\mathbf{k}) = \rho_1(g)s(\mathbf{k})\} \quad (28)$$

とし  $\rho_1(\Gamma)$  同変写像芽で原点を原点に写すものの集合を  $\theta_\Gamma(n)_0$  とする。

次に  $\mathcal{C}_\Gamma[SO(p)]$  の  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  への無限小作用全体の集合を

$$TC_\Gamma[SO(p)](H) = \left\{ \mathcal{J} \cdot H \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}: p \times p \text{ matrix germ, such that} \\ \mathcal{J}^T(\mathbf{k}) = -\mathcal{J}(\mathbf{k}), \\ \rho_2(g)\mathcal{J}(\rho_1(g)\mathbf{k}) = \mathcal{J}(\mathbf{k})\rho_2(g) \end{array} \right. \right\} \quad (29)$$

とする。

$\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$ 、 $\theta_\Gamma(n)$ 、 $\theta_\Gamma(n)_0$ 、および  $TC_\Gamma[SO(p)](H)$  は有限生成  $\mathcal{E}_n^\Gamma$  加群となる。 $\theta_\Gamma(n)_0$  と  $TC_\Gamma[SO(p)](H)$  により  $TK_\Gamma[SO(p)](H)$  は

$$TK_\Gamma[SO(p)](H) = TC_\Gamma[SO(p)](H) + dH(\theta_\Gamma(n)_0) \quad (30)$$

と書くことができ、これは  $\Gamma$  同変写像芽  $\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  の部分加群となる。

$TK_\Gamma[SO(p)](H)$  と同様にして、 $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値に関する  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  における拡大接空間を

$$T_e\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)](H) = TC_\Gamma[SO(p)](H) + dH(\theta_\Gamma(n)), \quad (31)$$

と定義する。拡大接空間は  $H$  に作用する微分同相芽として、必ずしも  $\mathbb{R}^n$  の原点を  $\mathbb{R}^n$  の原点に写すとは限らないものも考えるという点が、先の接空間との違いである。この拡大接空間  $T_e\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)](H)$  も  $\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  の部分加群となり、その剰余加群  $\frac{\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma}{T_e\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)](H)}$  を定義することができる。この剰余加群を  $\mathbb{R}$  係数ベクトル空間と見たときの次元

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma}{T_e\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)](H)} \quad (32)$$

を  $H$  の  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値に関する余次元と定義する。

#### 4.1.1. 例: $TK_\Gamma[SO(p)]$ ( $n=2, p=3, \Gamma = \mathbf{C}_{3v} + \mathbf{T}$ )

$\mathcal{E}_n^\Gamma$  は  $u = k_+k_-$  と  $v = k_+^6 + k_-^6$  という二つの代数的に独立な不変量で生成される。また、 $\rho_1(\Gamma)$  同変な写像芽は  $\theta_\Gamma(n) = \theta_\Gamma(n)_0$  を満たし、以下のように書ける。

$$\theta_\Gamma(n) = \left\{ (s_1(\mathbf{k}), s_2(\mathbf{k})) \left| \begin{array}{l} s_1(\mathbf{k}) \pm is_2(\mathbf{k}) = S_1(u, v)k_\pm + S_2(u, v)k_\mp^5 \\ u = k_+k_-, v = k_+^6 + k_-^6, S_j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (j=1, 2) \end{array} \right. \right\} \quad (33)$$

$C_\Gamma[SO(p)]$  同値に関する  $H$  における接空間  $TC_\Gamma[SO(p)](H)$  と  $\Gamma$  同変写像芽の集合  $\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  はそれぞれ

$$TC_\Gamma(H) = \langle (k_+^2\mathcal{J}_+ + k_-^2\mathcal{J}_-) \cdot H, (k_+^4\mathcal{J}_+ + k_-^4\mathcal{J}_-) \cdot H, i(k_+^6 - k_-^6)\mathcal{J}_3 \cdot H \rangle_{\mathcal{E}_n^\Gamma} \quad (34)$$

と

$$\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma = \langle i(k_-\sigma_+ - k_+\sigma_-), i(k_+^5\sigma_+ - k_-^5\sigma_-), (k_+^3 + k_-^3)\sigma_3 \rangle_{\mathcal{E}_n^\Gamma} \quad (35)$$

のように書ける。ただしここで

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

と  $\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2$  としており、 $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{E}_n^\Gamma}$  は  $\cdot$  で生成される  $\mathcal{E}_n^\Gamma$  加群としている。

### 5. $\Gamma = \mathbf{C}_{3v} + \mathbf{T}$ の場合における $\Gamma$ 同変写像芽の分類

この場合には任意の  $\Gamma$  同変写像芽  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  に対して、ある  $f_j: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, f_j(0))$  ( $j=1, 2, 3$ ) が存在して

$$H(\mathbf{k}) = if_1(u, v)(k_-\sigma_+ - k_+\sigma_-) + if_2(u, v)(k_+^5\sigma_+ - k_-^5\sigma_-) + f_3(u, v)(k_+^3 + k_-^3)\sigma_3 \quad (37)$$

のように一通りに表現することができる。ただし、 $u = k_+k_-$  および  $v = k_+^6 + k_-^6$  としている。この節では式 (37) の短縮形として  $H = [f_1, f_2, f_3]$  と書くことにする。

以上の設定の下、次が成り立つ。

**定理 5.1.** 任意の余次元7以下の  $\Gamma$  同変写像芽  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  は表1の写像芽のいずれか一つと  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値となる。



Representative	range	codim
$[1, 0, 0]$		0
$[u, 0, c_2 + c_4u]$	$c_2 \neq 0$	3
$[u, c_4 + c_5u, 0]$	$c_4 \neq 0$	4
$[0, u^\ell + c_{\ell+4}u^{\ell+1}, c_2]$	$c_2 \neq 0, \ell = 0, 1, 2, 3$	$\ell + 4$
$[u, c_5u + c_7v + c_8v^2, c_6v]$	$c_5c_6 \neq 0, -9c_6^2 + 4c_5c_7 \neq 0,$ $16c_5^3c_6^2 + 27c_6^4 - 72c_5c_6^2c_7 - 16c_5^2c_7^2 + 64c_7^3 \neq 0$	7
$[u, c_5u + c_7v, c_6v + c_8v^2]$	$c_5c_6 \neq 0, -9c_6^2 + 4c_5c_7 = 0, -c_5^2 + 3c_7 \neq 0$	7
$[u, c_7v + c_8v^2, c_6v]$	$c_6 \neq 0, 64c_7^3 + 27c_6^4 \neq 0$	7
$[u, c_7v + c_8uv, 0]$	$c_7 \neq 0$	7
$[u, c_5u + c_7v + c_8v^2, 0]$	$c_5c_7 \neq 0, -c_5^2 + 4c_7 \neq 0$	7

表 1: 余次元7までの  $\Gamma = C_{3v+\Gamma}$  の場合の  $\Gamma$  同変写像芽の  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値での分類表。一番左の列が各同値類の代表元、中央の列が (モジュライ) パラメータの取りうる範囲 (指定のないものは任意の  $\mathbb{R}$  を取りうる。)、右の列が各類の余次元。

## 6. 同変普遍開折定理

この節では同変普遍開折定理 [8] を我々の設定での  $\Gamma$  同変な場合に適用する。まず、同変普遍開折定理を述べるための用語を説明する。まず  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$  を  $k$  個のパラメータとし  $\mathcal{E}_{n+k,p}^\Gamma$  を  $k$  個のパラメータを持つ  $\Gamma$  同変な写像芽の集合

$$\mathcal{E}_{n+k,p}^\Gamma = \left\{ \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}: (\mathbb{R}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0), \\ \forall g \in \Gamma, (\mathbf{k}, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+k}, \rho_2(g) \mathcal{H}(\rho_1(g) \mathbf{k}, \alpha) = \mathcal{H}(\mathbf{k}, \alpha) \end{array} \right. \right\} \quad (38)$$

であるとする。  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  を任意の  $\Gamma$  同変写像芽であるとしたとき、その  $k$  パラメータ  $\Gamma$  開折を写像芽  $\mathcal{H} \in \mathcal{E}_{n+k,p}^\Gamma$  であり  $\mathcal{H}(\mathbf{k}, 0) = H(\mathbf{k})$  を任意の  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$  に対して満たすものとする。次に、 $\Gamma$  同変横断開折 (versal unfolding) を定義する。概していうと  $H$  の  $\Gamma$  同変横断開折とは写像芽  $H$  の任意の  $\Gamma$  同変開折の情報を含んでいるものである。まず  $\mathcal{H}' \in \mathcal{E}_{n+k',p}^\Gamma$  が  $\mathcal{H} \in \mathcal{E}_{n+k,p}^\Gamma$  の因子に含まれる (factors through) ということ、ある写像芽

$$s: (\mathbb{R}^{n+k'}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (39)$$

$$M: (\mathbb{R}^{n+k'}, 0) \rightarrow (SO(p), 0), \quad (40)$$

$$A: (\mathbb{R}^{k'}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0), \quad (41)$$

が存在して

$$\mathcal{H}'(\mathbf{k}, \beta) = M(\mathbf{k}, \beta) \mathcal{H}(s(\mathbf{k}, \beta), A(\beta)) \quad (42)$$

がすべての  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  と  $\beta \in \mathbb{R}^{k'}$  に対して満たされることをいう。ただし、それらの写像芽は

$$M(\mathbf{k}, 0) = I_p, \quad s(\mathbf{k}, 0) = \mathbf{k}, \quad (43)$$

および

$$\rho_2(g) M(\rho_1(g) \mathbf{k}, \alpha) = M(\mathbf{k}, \alpha) \rho_2(g), \quad (44)$$

$$s(\rho_1(g) \mathbf{k}, \alpha) = \rho_1(g) s(\mathbf{k}, \alpha), \quad (45)$$

をすべての  $g \in \Gamma$  と  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$  に対して満たすものとする。もし以上のことが成り立つとすると任意の  $\beta \in \mathbb{R}^{k'}$  に対し  $\Gamma$  同変写像芽  $\mathcal{H}'(\cdot, \beta)$  は  $\mathcal{H}(\cdot, A(\beta))$  と  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値となる。 $\mathcal{H} \in \mathcal{E}_{n+k,p}^\Gamma$  が  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  の  $\Gamma$  横断同変開折であるとは  $H$  の任意の  $\Gamma$  同変開折が  $\mathcal{H}$  の因子に含まれることと定義する。 $\Gamma$  同変横断開折が普遍開折であるとは  $\mathcal{H}$  が必要最小限の数のパラメータに依存していることを指す。

**定理 6.1** ( $\Gamma$  同変普遍開折定理).  $\Gamma$  を  $\mathbb{R}^n$  と  $\mathbb{R}^p$  に表現  $\rho_1$  と  $\rho_2$  を通して作用するコンパクト Lie 群であるとする。 $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  を  $\Gamma$  同変写像芽とし  $\mathcal{H} \in \mathcal{E}_{n+k,p}^\Gamma$  を  $H$  の  $k$  パラメータ開折とする。ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  とする。すると  $\mathcal{H}$  は

$$\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma = T_e \mathcal{K}_\Gamma[SO(p)] + \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{k}, 0)}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{k}, 0)}{\partial \alpha_k} \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad (46)$$

が成り立つとき、またそのときに限り  $\Gamma$  同変横断開折となる。特に  $k$  が  $H$  の余次元に等しいときそれは  $\Gamma$  同変普遍開折となる。

**系 6.1.**  $H \in \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  とし  $W \subset \mathcal{E}_{n,p}^\Gamma$  を  $\mathbb{R}$  係数ベクトル空間であり

$$\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma = T_e \mathcal{K}_\Gamma[SO(p)] \oplus W \quad (47)$$

を満たすものとする。 $P_1(\mathbf{k}), \dots, P_k(\mathbf{k})$  をベクトル空間  $W$  の基底とすると、

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}, \alpha) = H(\mathbf{k}) + \sum_{j=1}^k \alpha_j P_j(\mathbf{k}) \quad (48)$$

は  $H$  の  $\Gamma$  同変普遍開折となる。

### 6.1. 例: $n = 2, p = 3, \Gamma = \mathbf{C}_{3v} + \mathbf{T}$ の設定における普遍開折の構成

ここでは表 1 のリストの二番目の類の代表元  $H(\mathbf{k}) = [u, 0, c_2 + c_4 u]$  ( $c_2 \neq 0, c_4 \in \mathbb{R}$ ) の  $\Gamma$  同変普遍開折を構成する。この場合には

$$\mathcal{E}_{n,p}^\Gamma = T\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)](H) + \langle [1, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 0, u] \rangle_{\mathbb{R}} \quad (49)$$

が成立し、系 6.1 を用いると  $\mathcal{H}(\mathbf{k}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [u + \alpha_1, 0, (c_2 + \alpha_2) + (c_4 + \alpha_3)u]$  が  $H$  の  $\Gamma$  同変普遍開折となることがわかる。今の場合には  $\alpha_2$  と  $\alpha_3$  はモジュライパラメータを変化させる方向に対応しており、これらのパラメータ方向に沿って  $H$  を変形しても、それはモジュライファミリー内の変化となるが、 $\alpha_1$  に沿った変形ではより大きな定性的な変化を伴う。それを見るために、 $\mathcal{H}(\mathbf{k}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  の二つの固有値の  $\mathbf{k}$  に関するグラフの形状が  $\alpha_1$  の値とともにどのように変化するかを図 1 に示す。この図を見ると  $\alpha = 0$  では二つの固有値のグラフが原点において接触しているが、 $\alpha = \pm 1$  ではグラフは原点において円錐状に交差している。これは Dirac cone と呼ばれている。実際、adjacency diagram を書くことにより  $\alpha \neq 0$  では写像芽は  $[1, 0, 0]$  と  $\mathcal{K}_\Gamma[SO(p)]$  同値になることがわかり、グラフは原点で円錐状に交差する。

## 7. 結論と将来展望

我々はバンド交差近傍のハミルトニアンを分類するための一般的な枠組みを提案し例として結晶表面の  $\mathbf{C}_{3v}$  と時間反転対称性の下での余次元 7 までのハミルトニアンの分類を行った。また、その普遍開折を調べることによりバンド衝突近傍でどのようなバン

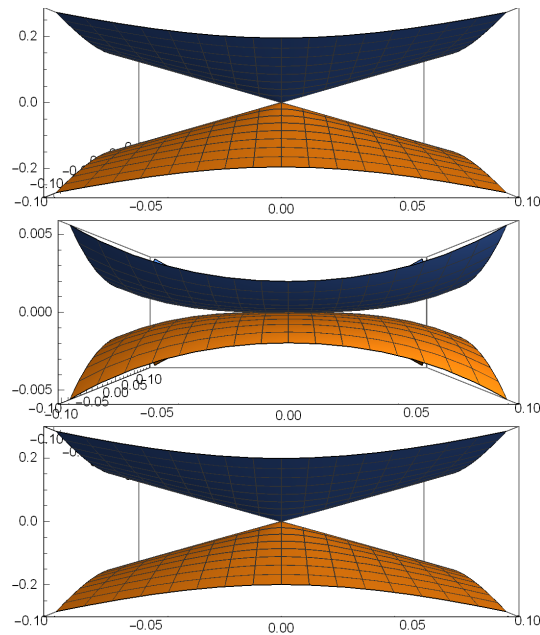


図 1:  $\mathcal{H}(\mathbf{k}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  の固有値の  $\mathbf{k}$  に対するグラフが  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ,  $c_2 = 1, c_4 = 0$  と固定し  $\alpha_1$  を  $-1$  (上),  $0$  (中),  $1$  (下) と変化させたときにどのように変化するかを示す。

ドの幾何学的変化が引き起こされるのかを議論した。これはより大域的なバンドの幾何学的構造の理解とそのトポロジカルな構造 [9] の変化を調べるための第一歩である。

ここでは  $C_{3v}$  と時間反転対称性の下での分類を示すにとどまったが、どのような磁気 (点) 群の対称性の下で考えるのか、どの既約 (複) 表現に属するバンド間の衝突を考えるのかで様々なバリエーションが考えられる。それらを包括的に扱うため計算代数を用いた特異点の自動分類アルゴリズムも開発中であり [2] で報告する予定である。

## 参考文献

- [1] K. Honma, T. Sato, S. Souma, K. Sugawara, Y. Tanaka, and T. Takahashi. Switching of Dirac-Fermion Mass at the Interface of Ultrathin Ferromagnet and Rashba Metal. *Phys. Rev. Lett.*, 115:266401, 2015.
- [2] H. Teramoto, A. Tsuchida, Y. Kabata, K. Kondo, S. Izumiya, K. Nabeshima, and T. Komatsuzaki. Classification of Hamiltonians under time-reversal symmetry and crystallographic point group symmetries on a surface in neighborhoods of band crossings in terms of singularity theory. *J. Math. Phys.*, in preparation.
- [3] H. Teramoto, A. Tsuchida, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda, and T. Komatsuzaki. Application of Singularity Theory to Bifurcation of Band Structures in Crystals. *the Journal of Singularities*, submitted.
- [4] L. Fu. Hexagonal Warping Effects in the Surface States of the Topological Insulator  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . *Phys. Rev. Lett.*, 103:266801, 2009.
- [5] C. X. Liu and X. L. Qi and H. Zang and X. Dai and Z. Fang and S. C. Zhang. Model Hamiltonian for topological insulators. *Phys. Rev. B*, 82:045122, 2010.
- [6] H. Teramoto, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda, and T. Komatsuzaki. Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities. *J. Math. Phys.*, 58:073502, 2017.
- [7] S. Izumiya, M. Takahashi, and H. Teramoto. Geometric equivalence among smooth

section-germs of vector bundles with respect to structure groups. *in preparation*.

- [8] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, volume II of *Applied Mathematical Science*. Springer, 1985.
- [9] K. Shiozaki, M. Sato, and K. Gomi. Topology of nonsymmorphic crystalline insulators and superconductors. *Phys. Rev. B*, 93:195413, 2016.

# コントロール距離空間の擬対称不変性質

伊敷 喜斗 (筑波大学)\*

## 概要

距離空間の二倍性質, 一様不連結性, そして一様完全性は擬対称不変であることが知られている. David-Semmes の一意化定理は, コンパクト距離空間がこれら三つの性質を満たすならば, 三進コントロール集合に擬対称同型であることを述べている. コントロール距離空間がこれら三つの性質すべて持つときにスタンダード, そうでないときにエキゾチックと呼ぶことにする. 筆者 [3] は, エキゾチックな各々の型に対して, 共形ゲージ全体のクラスがちょうど連続体濃度であることを証明した. ここでは, 筆者の研究 [3] の概略を解説する.

## 1. はじめに

距離空間の擬対称性の概念は, 測度距離空間上の幾何解析 (例えば [2, 5] を参照) や共形次元論 (例えば [4] を参照) など様々な分野において, 重要な応用を提供している. 同相写像  $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  に対して, 距離空間の間の同相写像  $f: X \rightarrow Y$  が  $\eta$ -擬対称であるとは, 任意の  $t \in [0, \infty)$  と任意の  $x, y, z \in X$  に対して  $d_X(x, y) \leq td_X(x, z)$  であるならば  $d_Y(f(x), f(y)) \leq \eta(t)d_Y(f(x), f(z))$  を満たすときに言う. ここで,  $d_X$  は  $X$  の距離を表し,  $d_Y$  は  $Y$  の距離を表す. 距離空間の間の同相写像が, ある  $\eta$  について  $\eta$ -擬対称であるとき, 単に擬対称であると言う. 二つの距離空間の間に擬対称写像が存在するときにそれらの距離空間は擬対称同値であると言う. 擬対称写像の逆写像も擬対称であり, 二つの擬対称写像の合成は擬対称である. よって擬対称同値性は距離空間の間の同値関係になっている.

本稿では次の三つの擬対称不変性質に注目する. すなわち, 二倍性質, 一様不連結性, そして一様完全性である. David と Semmes は [1] において, コンパクト距離空間  $(X, d)$  が二倍性質, 一様不連続性, 一様完全性の三つすべてを満たすならば,  $(X, d)$  は三進コントロール集合と擬対称同値であるという一意化定理を示した. 一般に, 三進コントロール集合と同相な距離空間をコントロール距離空間という. 筆者は [3] において, 三進コントロール集合と擬対称同値ではないコントロール距離空間は存在するのか, また存在するのであれば, どの程度に豊富に存在するのか, という一意化定理を補完する研究成果を得た.

研究成果を述べる前に記号の準備をする. 距離空間  $(X, d)$  が性質  $P$  を満たすときに  $T_P(X, d) = 1$  と表し, そうでない場合  $T_P(X, d) = 0$  とする. つまり  $T_P(X, d)$  は  $(X, d)$  が性質  $P$  を満たすかどうかの真理値を表している. 三つ組  $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$  に対して, 距離空間  $(X, d)$  が  $(u, v, w)$  型であるとは,

$$T_D(X, d) = u, \quad T_{UD}(X, d) = v, \quad T_{UP}(X, d) = w$$

を満たすときに言う. ここで,  $D$  は二倍性質,  $UD$  は一様不連続性,  $UP$  は一様完全性を表す. コントロール距離空間がスタンダードであるとは, それが  $(1, 1, 1)$  型を持つときに言い, そうでないときエキゾチックと言う. 例えば, 三進コントロール集合はスタンダードである.

日本学術振興会特別研究員 (DC1)

\* e-mail: ishiki@math.tsukuba.ac.jp

距離空間  $(X, d)$  の擬対称同値類を  $\mathcal{G}(X, d)$  で表し, 距離空間  $(X, d)$  の共形ゲージと呼ぶ. 距離空間に対する共形ゲージは, 共形次元論における基本概念である. 三つ組  $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$  に対して, 共形ゲージからなるクラス  $\mathcal{M}(u, v, w)$  を

$$\mathcal{M}(u, v, w) = \{ \mathcal{G}(X, d) \mid (X, d) \text{ は } (u, v, w) \text{ 型のカントール距離空間である} \}$$

で定める. 先に述べた David-Semmes の一意化定理 ([1]) によれば,  $\mathcal{M}(1, 1, 1)$  は一元集合である. このこととは対照的に, 主な研究成果として, 次の定理を証明した.

**定理 1.1** ([3]).  $(1, 1, 1)$  ではないすべての  $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$  に対して,

$$\text{card}(\mathcal{M}(u, v, w)) = 2^{\aleph_0}$$

が成り立つ. ここで  $\text{card}$  は濃度を表す.

定理 1.1 は, David-Semmes の一意化定理 ([1]) を補完しており, スタンダードなカントール空間が特別であることを主張する. すなわち,  $(1, 1, 1)$  型以外の各型については, スタンダードな場合と違い, 各型について擬対称同値でないカントール距離空間が連続体濃度個存在する.

距離空間に関する性質  $P$  と距離空間  $(X, d)$  に対して, その任意の近傍が性質  $P$  を満たさないような  $X$  の点全体を  $S_P(X, d)$  で表す. 一般に, 距離空間の性質  $P$  が擬対称不変であるとは, 二つの距離空間  $(X, d)$  と  $(Y, e)$  が擬対称同値で,  $(X, d)$  が性質  $P$  を満たすならば  $(Y, e)$  も性質  $P$  を満たすときに言う. もしも  $P$  が擬対称不変性質であるならば,  $S_P$  は擬対称不変になっている. つまり,  $(X, d)$  と  $(Y, e)$  が擬対称同値ならば  $S_P(X, d)$  と  $S_P(Y, e)$  もそうである. すなわち, この  $S_P(X, d)$  は距離空間に値をとる不変量である. 定理 1.1 の証明の要点の一つは, この不変量が連続体濃度個の異なる値をとるように空間の族を構成することである.

二つ目の研究成果を紹介する. エキゾチックな型  $(u, v, w)$  に対して, 距離空間  $(X, d)$  が全エキゾチックな  $(u, v, w)$  型を持つとは,  $(X, d)$  が  $(u, v, w)$  型を持ち,  $T_P(X, d) = 0$  を満たす  $P \in \{D, UD, UP\}$  に対して  $S_P(X, d) = X$  であるときに言う. つまり, 各点の任意の近傍が性質  $P$  を満たさないということである. 全エキゾチック性に関して以下の定理を得た.

**定理 1.2** ([3]). 任意のエキゾチックな型  $(u, v, w)$  に対して, 全エキゾチックな  $(u, v, w)$  型を持つカントール距離空間が存在する.

定理 1.2 は定理 1.1 とは異なる形でエキゾチックなカントール距離空間の豊富さを主張している. 定理 1.2 を証明するために列距離付けカントール距離空間 (4 節参照) と万華鏡空間 (5 節参照) という二つの概念を導入した.

距離空間  $(X, d)$  に対して, そのハウスドルフ次元を  $\dim_H(X, d)$  で表し, アソー次元を  $\dim_A(X, d)$  で表す (アソー次元の定義については 6 節参照). 一般に, アソー次元  $\dim_A$  はハウスドルフ次元  $\dim_H$  以上であることに注意する.

今回の研究で導入した概念を組み合わせることにより, 与えられた 2 つの非負拡張実数をそれぞれハウスドルフ次元, アソー次元として持つ距離空間の構成に成功した.

**定理 1.3** ([3]). 任意の組  $(a, b) \in [0, \infty]^2$  が  $a \leq b$  を満たすとする. このときカントール距離空間  $(X, d)$  が存在して  $\dim_H(X, d) = a$  および  $\dim_A(X, d) = b$  が成り立つ.

## 2. 二倍性質, 一様不連結性, 一様完全性

この節では, 二倍性質, 一様不連結性, 一様完全性を定義し, 基本的な性質を紹介する.

まずは二倍性質を定義しよう. 自然数  $N \in \mathbb{N}$  について, 距離空間  $(X, d)$  が  $N$  二倍であるとは任意の  $r > 0$  と任意の  $a \in X$  について有限点列  $a_1, a_2, \dots, a_N$  が存在し,

$$B(a, r) \subset \bigcup_{i=1}^N B(a_i, r/2)$$

を満たすときに言う. ここで  $B(a, r)$  で点  $a$  を中心とする半径  $r$  の閉球を表し, 点列  $a_1, a_2, \dots, a_N$  には重複を許す. ある  $N \in \mathbb{N}$  について, 距離空間  $(X, d)$  が  $N$  二倍であるときに  $(X, d)$  を単に二倍である, または二倍性質を持つという.

次に一様不連結性を定義する. 実数  $\delta \in (0, 1)$  に対して距離空間  $(X, d)$  内の有限点列  $\{z_i\}_{i=0}^n$  が  $\delta$  鎖であるとは,  $d(z_i, z_{i+1}) \leq \delta d(z_0, z_n)$  を満たすときに言う. また, 距離空間  $(X, d)$  が  $\delta$  一様不連結であるとは,  $X$  内の任意の  $\delta$  鎖が自明になるときに言う. すなわち,  $X$  内の  $\delta$  鎖は常に一点のみからなるということである. ある  $\delta$  が存在して,  $(X, d)$  が  $\delta$  一様不連結になるときに  $(X, d)$  を単に一様不連結という.

三番目に一様完全性を定義する. 実数  $c \in (0, 1]$  に対して, 距離空間  $(X, d)$  が  $c$  一様完全であるとは, 任意の  $x \in X$  と任意の  $r \in (0, \text{diam}(X))$  に対して, 集合  $B(x, r) \setminus U(x, cr)$  が空でないときに言う. ここで  $U(a, r)$  で点  $a$  を中心とする半径  $r$  の開球を表し,  $\text{diam}(X)$  で  $X$  の直径を表す. ある  $c$  について  $(X, d)$  が  $c$  一様完全のとき  $(X, d)$  を単に一様完全という.

二つの数  $u, v \in \{0, 1\}$  について  $u \wedge v = \min\{u, v\}$  とする. 距離空間の直和によって型がどう変化するかについて次のことがわかる.

**命題 2.1.** 有界距離空間  $(X, d)$  と  $(Y, e)$  がそれぞれ  $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)$  型を持つならば, その直和距離空間  $(X \sqcup Y, d \sqcup e)$  は  $(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2)$  型を持つ. ここで直和距離  $d \sqcup e$  は  $X$  と  $Y$  の上ではそれぞれ  $d$  と  $e$  に一致するように定め,  $x \in X$  と  $y \in Y$  については  $(d \sqcup e)(x, y) = \max\{\text{diam}(X), \text{diam}(Y)\}$  と定めた距離関数とする.

直積についてはまず, 二倍性質と一様不連結性について次のことがわかる.

**命題 2.2.** 記号  $P$  は二倍性質  $D$  かもしくは一様不連結性  $UD$  を表すとす. このとき二つの距離空間  $(X, d)$  と  $(Y, e)$  について  $T_P(X \times Y, d \times e) = T_P(X, d) \wedge T_P(Y, e)$  である.

一様完全性については次のことがわかる.

**命題 2.3.** 二つの距離空間  $(X, d)$  と  $(Y, e)$  が一様完全ならば, その直積空間  $(X \times Y, d \times e)$  も一様完全である.

二倍性質や一様不連結性のように一様完全性について,  $T_{UP}(X \times Y, d \times e)$  を  $T_{UP}(X, d)$  と  $T_{UP}(Y, e)$  で書き表すことはできない. 実際, 一様完全ではない二つの距離空間の直積は, 一様完全になる場合もあるし, ならない場合もある.

## 3. 望遠鏡空間

この節では, 望遠鏡空間の概念を導入し, 定理 1.1 の証明の概略を証明する. その準備として以下の概念を導入する.

**定義 3.1.** 距離空間の性質  $P$  に対して, 距離空間  $(X, d)$  が  $P$ -尖的であるとは  $S_P(X, d)$  が一点になるときに言う.

記号  $P$  が  $D, UD, UP$  を表しているときに,  $P$ -尖的空間の存在を示すために, 望遠鏡空間という新しい空間構成法を用いた. この望遠鏡空間は可算個の空間をだんだん小さくなるようにスケールリングして, 可算直和をとることによって得られる.

**定義 3.2** (望遠鏡空間). 三つ組  $\mathcal{B} = (B, d_B, b)$  が望遠鏡底であるとは,  $(B, d_B)$  が可算離散空間の一点コンパクト化と同相な距離空間で, さらに  $b: \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow B$  が全単射写像で,  $b_\infty$  が  $B$  のただ一つの集積点になっているときに言う. また,

$$R_n(\mathcal{B}) = \sup\{r \in (0, \infty) \mid U(b_n, r) = \{b_n\}\}$$

と置く. そして  $\mathcal{X} = \{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  を距離空間の可算族とし,  $\mathcal{B} = (B, d_B, b)$  を望遠鏡底とする. このとき  $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$  が両立対であるとは, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $\text{diam}(X_n) \leq R_n(\mathcal{B})$  が成り立つこととする. 両立対  $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$  に対して

$$T(\mathcal{P}) = \left( \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \right) \sqcup \{\infty\}$$

と定義し,  $T(\mathcal{P})$  上の距離  $d_{\mathcal{P}}$  を

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{ある } i \text{ について } x, y \in X_i \text{ のとき,} \\ d_B(b_i, b_j) & \text{ある } i \neq j \text{ について } x \in X_i, y \in X_j \text{ のとき,} \\ d_B(b_\infty, b_i) & \text{ある } i \text{ について } x = \infty, y \in X_i \text{ のとき,} \\ d_B(b_i, b_\infty) & \text{ある } i \text{ について } x \in X_i, y = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する. このとき距離空間  $(T(\mathcal{P}), d_{\mathcal{P}})$  を  $\mathcal{P}$  の望遠鏡空間という.

両立対  $\mathcal{P}$  をうまくとることによって尖的空間の存在を証明することができる. 次の二つの望遠鏡底が鍵を握る. まず,  $R = \{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  と定め,  $d_R$  で  $\mathbb{R}$  から誘導される  $R$  の距離を表す. そして  $r: \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow R$  を  $r(\infty) = 0, r_n = 2^{-n}$  と定義すると,  $\mathcal{R} = (R, d_R, r)$  は望遠鏡底になっている. また,  $V = \{0\} \cup \{1/n! \mid n \in \mathbb{N}\}$  と定め,  $d_V$  で  $\mathbb{R}$  から誘導される  $V$  の距離を表す. そして  $v: \{\infty\} \cup \mathbb{N} \rightarrow V$  を  $v(\infty) = 0, v(n) = 1/n!$  と定義すると,  $\mathcal{V} = (V, d_V, v)$  は望遠鏡底になっている.

まずは二倍性質  $D$  について考えよう. 三進カントール集合  $(\Gamma, d_\Gamma)$  と任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $Z_n$  を  $Z_n = \coprod_{i=1}^n \Gamma$  と定義する. つまり  $\Gamma$  の  $n$  個の直和である. また,  $Z_n$  上の距離  $z_n$  を各直和成分の上では  $d_\Gamma$  に一致するように定め, 違う成分に属する元同士の距離は 1 と定める. そして  $\mathcal{Z} = \{(Z_i, 2^{-i-1}z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  と定義すると  $\mathcal{A} = (\mathcal{Z}, \mathcal{R})$  は両立対になっており, 次のことが成り立つ.

**補題 3.1.**  $(T(\mathcal{A}), d_{\mathcal{A}})$  は  $D$ -尖的で  $(0, 1, 1)$  型を持つカントール距離空間である.

次に一様不連結性  $UD$  について考える.  $F_n \subset \mathbb{R}$  を

$$F_n = \frac{2^{-n-1}}{2n-1} \left( \bigcup_{i=0}^n (2i + \Gamma) \right)$$

と定義し,  $f_n$  を  $\mathbb{R}$  から誘導される  $F_n$  の距離とし,  $\mathcal{F} = \{(F_i, f_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  とする. このとき  $\mathcal{B} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$  は両立対である. そして次のことが成り立つ.



**補題 3.2.**  $(T(\mathcal{B}), d_{\mathcal{B}})$  は  $UD$ -尖的で  $(1, 0, 1)$  型を持つコントロール距離空間である.

続いて, 一様完全性  $UP$  について考える. 集合  $G_n \subset \mathbb{R}$  を  $G_n = (1/(n+1)!) \Gamma$  と定義し,  $g_n$  を  $\mathbb{R}$  から誘導される  $G_n$  の距離とする. このとき  $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, \mathcal{V})$  は両立対であり, 次が成り立つ.

**補題 3.3.**  $(T(\mathcal{C}), d_{\mathcal{C}})$  は  $UP$ -尖的で  $(1, 1, 0)$  型を持つコントロール距離空間である.

以上をまとめて次の補題を得る.

**補題 3.4.** (1)  $(0, 1, 1)$  型を持つ  $D$ -尖的なコントロール距離空間が存在する.

(2)  $(1, 0, 1)$  型を持つ  $UD$ -尖的なコントロール距離空間が存在する.

(3)  $(1, 1, 0)$  型を持つ  $UP$ -尖的なコントロール距離空間が存在する.

また, この補題と命題 2.1 から次のことがわかる.

**命題 3.1.** 任意の  $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$  について,  $(u, v, w)$  型を持つコントロール距離空間が存在する.

次の一般位相空間論的な補題も定理の証明の要になっている.

**命題 3.2.** 三進コントロール集合の閉部分集合族  $\{\Xi(x)\}_{x \in I}$  が存在して以下を満たす.

(1)  $\text{card}(I) = 2^{\aleph_0}$

(2)  $x \neq y$  ならば  $\Xi(x)$  と  $\Xi(y)$  は同相ではない.

(3) 各  $\Xi(x)$  の孤立点全体は  $\Xi(x)$  の中で稠密である.

定理 1.1 の証明の概略. 簡単のため  $\text{card}(\mathcal{M}(0, 0, 0)) = 2^{\aleph_0}$  のみ示す. ほかの場合も同様に証明できる. まず  $(F, d_F)$  を  $D$ -尖的な  $(0, 1, 1)$  型を持つコントロール距離空間とする. そして  $(X, d_X)$  を  $(1, 0, 0)$  型をもつコントロール距離空間とする. このような空間の存在は命題 3.1 によって保証される. また, 各  $x \in I$  に対して,  $\Gamma$  の距離を  $\Xi(x)$  に制限した距離を  $d_x$  と書くことにする. このとき写像  $f: I \rightarrow \mathcal{M}(0, 0, 0)$  を

$$f(x) = \mathcal{G}((F \times \Xi(x)) \sqcup X, (d_F \times d_x) \sqcup d_X)$$

と定義する. 各  $x \in I$  に対して,  $S_D(f(x)) = \Xi(x)$  が成り立つので,  $f(x) = f(y)$  ならば  $x = y$  となり,

$$2^{\aleph_0} \leq \text{card}(\mathcal{M}(0, 0, 0))$$

がわかる. 逆向きの不等式はコントロール空間の第二可算性から直ちに従う.  $\square$

#### 4. 列距離付けコントロール距離空間

今から 4 節と 5 節で列距離付けコントロール距離空間と万華鏡空間を導入しつつ, 定理 1.2 で述べられた空間を構成して行こう. まず列距離付けコントロール距離空間を導入する. 記号  $2^{\mathbb{N}}$  で  $\mathbb{N}$  から  $\{0, 1\}$  への写像全体を表す. 各  $u \in (0, 1)$  に対して  $2^{\mathbb{N}}$  は

$$d(x, y) = u^{\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}}$$

で定義される超距離  $d$  を持ち、この距離空間はカントール距離空間になる. David-Semmes [1] の研究などの先行する研究において、 $(2^{\mathbb{N}}, d)$  という距離空間は抽象的なカントール空間として、三進カントール集合よりも使用されることが多い. 先行研究 [1] などでは上記のように等比数列  $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を用いて  $d$  を定義しているが、より一般の数列を用いることによってこの構成を拡張した. 全エキゾチックな  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  な型をもつカントール距離空間は列距離付けカントール空間として構成できる.

**定義 4.1.** 写像  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$  が収縮列であるとは、 $\alpha$  が単調非増加であり、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\alpha(n)$  が 0 に収束するときを言う. 収縮列  $\alpha$  に対して  $2^{\mathbb{N}}$  上の超距離を

$$d_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \alpha(\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}) & x \neq y \text{ のとき,} \\ 0 & x = y \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する. このとき  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha})$  はカントール空間である. この  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha})$  を  $\alpha$  によって距離付けされた列距離付けカントール距離空間と呼ぶ.

列距離付けカントール距離空間は超距離空間なので常に一様不連結であるが、その二重性質、一様完全性は距離付けに使われる収縮列  $\alpha$  の 0 へ収束するときの振る舞いによって判別できる. 実際、次の二つの命題が成り立つ.

**命題 4.1.**  $\alpha$  を収縮列とする. このとき距離空間  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha})$  が二倍性質を持つための必要十分条件は、ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在し、任意の  $k \in \mathbb{N}$  について

$$\text{card}(\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(k)/2 \leq \alpha(n) \leq \alpha(k)\}) \leq N$$

が成り立つことである.

**命題 4.2.**  $\alpha$  を収縮列とする. このとき距離空間  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha})$  が一様完全であるための必要十分条件は、ある  $\rho \in (0, 1)$  が存在し任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $k > n$  が存在して

$$\rho\alpha(n) \leq \alpha(k)$$

が成り立つことである.

また、列距離付けカントール距離空間は、次に述べるように、ある種の自己相似性を持っている.

**命題 4.3.** 収縮列  $\alpha$  と  $m \in \mathbb{N}$  について、 $\alpha^{\{m\}}$  を  $\alpha^{\{m\}}(n) = \alpha(n + m - 1)$  と定められた収縮列とする. このとき  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha})$  の閉球  $B(x, \alpha(m))$  は  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha^{\{m\}}})$  と等長である.

これらの命題を使って全エキゾチックな  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  型を持つカントール距離空間を構成することができる. 具体的には次のように行う. 収縮列  $\alpha$  を  $\alpha(n) = 1/n$  で定め、収縮列  $\beta$  を  $\beta(n) = 1/n!$  で定める. そして  $\mathbb{R}$  の部分集合  $(\beta(2n-1)/2, \beta(2n-1))$  に属する互いに異なる  $n$  個の数  $r_{1,n}, r_{2,n}, \dots, r_{n,n}$  を選び、集合

$$\beta(\mathbb{N}) \cup \{r_{i,n} \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

を大きい順に番号付けして得られる収縮列を  $\gamma$  とする. このとき次が成り立つ.

**命題 4.4.**  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha})$ ,  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\beta})$ ,  $(2^{\mathbb{N}}, d_{\gamma})$  はそれぞれ全エキゾチックな  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  な型を持つカントール距離空間である.

## 5. 万華鏡空間

次に万華鏡空間を導入する. 万華鏡空間とは  $[0, 1]$  の等分点の集合の可算直積で, 単調関数で修正された上限距離を持つものである. 定理 1.2 の証明において  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$  型の全エキゾチックコントロール距離空間は万華鏡空間として構成される.

**定義 5.1** (万華鏡空間). 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $\mathbb{R}$  の部分集合  $K_n$  を

$$K_n = \{k/n \mid k \in \{0, \dots, n\}\}$$

で定義し,  $d_n$  を  $\mathbb{R}$  から誘導される  $K_n$  の距離とする. 列  $a: \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$  は任意の  $n$  について  $2na_n < a_{n+1}$  および,  $k < n$  となる  $n$  について  $ka_k < a_n$  を満たすとする. そして  $K(a) = \prod_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , とし,  $K(a)$  上の距離  $d_{K(a)}$  を

$$d_{K(a)}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n} d_n(x_n, y_n)$$

と定義する. ここで  $x = (x_n)$ ,  $y = (y_n)$  である. このとき距離空間  $(K(a), d_{K(a)})$  を  $a$  の万華鏡空間と呼ぶ.

万華鏡空間について次のことが成り立つ.

**命題 5.1.** 単調増加列  $a$  を  $a_n = 2^n \cdot n!$  と定義し, 単調増加列  $b$  を  $b_n = (2n)!$  と定義する. このとき距離空間  $(K(a), d_{K(a)})$  と  $(K(b), d_{K(b)})$  はそれぞれ全エキゾチックな  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$  型をもつコントロール距離空間である.

全エキゾチックな  $(0, 0, 0)$  型のコントロール距離空間は, 万華鏡空間の構成に現れる直積因子を少し修正し, 二倍性質を壊すことで得られる. 自然数  $n \in \mathbb{N}$  について  $(A_n, e_n)$  を  $n$  点からなる離散距離空間で異なる二点間の距離が  $1/2n$  になるものとする. そして  $(L_n, D_n) = (A_n \times K_n, e_n \times d_n)$  とし,  $L = \prod_{i \in \mathbb{N}} L_i$  とする. そして  $L$  上の距離  $d_L$  を  $x, y \in L$  に対して

$$d_L(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n)!} D_n(x_n, y_n)$$

と定義する. ここで  $x = (x_n)$ ,  $y = (y_n)$  である. このとき

**命題 5.2.**  $(L, d_L)$  は全エキゾチックな  $(0, 0, 0)$  型を持つコントロール距離空間である.

以上で述べたことにより定理 1.2 で述べられた全エキゾチックなコントロール距離空間は  $(0, 0, 1)$  型のを除いてすべて構成されたことになる. 残っている全エキゾチックな  $(0, 0, 1)$  型を持つコントロール距離空間は  $(0, 1, 1)$  型と  $(1, 0, 1)$  型の全エキゾチックコントロール距離空間の直積空間として得られる. これで定理 1.2 に述べられた空間がすべて構成された.

## 6. 指定次元問題

以上のコントロール距離空間の研究の応用として, アソー次元とハウスドルフ次元の両方に関する指定次元問題に解を与える定理 1.3 について述べる.

距離空間  $(X, d)$  に対して, 写像  $\mathcal{N}: (0, 2) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  を  $\epsilon \in (0, 2)$  に対して, 次の条件を満たす  $N \in \mathbb{N}$  の下限で定義する. すなわち,  $(X, d)$  の半径  $r$  の閉距離球は高々  $N$  個の半径  $\epsilon r$  の閉距離球で覆うことができるという条件である. アソー次元  $\dim_A(X, d)$  は次の条件を満たす  $s \in (0, \infty)$  の下限として定まる. すなわち, ある  $K \in (0, \infty)$  が存在

してすべての  $\epsilon \in (0, 2)$  に対して  $\mathcal{N}(\epsilon) \leq K\epsilon^{-s}$  を満たすという条件である. アソー次元が有限なことと, 空間が二倍性質を満たすことは同値である. 一般に, アソー次元  $\dim_A$  はハウスドルフ次元  $\dim_H$  以上である.

集合  $X$  上の距離  $d$  と実数  $\epsilon > 0$  に対して  $d^\epsilon$  が距離になるとき, 距離空間  $(X, d^\epsilon)$  を  $(X, d)$  の雪片距離空間という. 雪片距離空間について  $\dim_H(X, d^\epsilon) = \epsilon^{-1} \dim_H(X, d)$  および,  $\dim_A(X, d^\epsilon) = \epsilon^{-1} \dim_A(X, d)$  が成り立つ. 超距離空間  $(X, d)$  については, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $d^\epsilon$  が超距離になることが確かめられる. また, 二つの距離空間  $(X, d)$  と  $(Y, e)$  に対して, 次元の有限安定性と呼ばれる次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \dim_H((X, d) \sqcup (Y, e)) &= \max\{\dim_H(X, d), \dim_H(Y, e)\}, \\ \dim_A((X, d) \sqcup (Y, e)) &= \max\{\dim_A(X, d), \dim_A(Y, e)\}. \end{aligned}$$

次の補題は, ある意味で標準的な列距離付けカントール距離空間に対して, 二つの次元が一致することを述べている.

**補題 6.1.**  $u \in (0, 1)$  とする. そして収縮列  $[u]$  を  $[u](n) = u^{-n}$  と定義する. このとき  $\dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = \dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = \log 2 / \log u$  である.

定理 1.3 の証明の概略. 証明の鍵は, まず  $(a, b) = (0, 1)$  の場合の問題を解くことにある. 収縮列  $\alpha$  を  $\alpha(n) = 2^{-n^3}$  と定義し, 収縮列  $\theta$  を集合

$$\alpha(\mathbb{N}) \cup \{2^{-k}\alpha(n) \mid n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$$

を大きい順に番号付けした列とする. このとき, 収縮列  $\theta$  によって距離付けされた列距離付けカントール距離空間  $(2^{\mathbb{N}}, d_\theta)$  は,  $\dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_\theta) = 0$  および  $\dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_\theta) = 1$  を満たす. この  $(a, b) = (0, 1)$  の場合を足掛かりに一般の場合を証明する. 簡単のために  $(a, b) \in (0, \infty)^2$  の場合のみ証明する. ほかの場合は万華鏡空間を使って証明できる. まず,  $\dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_\theta^{1/b}) = 0$  で  $\dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_\theta^{1/b}) = b$  に注意しよう. そして  $u = 2^{-1/a}$  とすると, 補題 6.1 より,  $\dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = \dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = a$  である. よって次元の有限安定性を用いて,  $(2^{\mathbb{N}} \sqcup 2^{\mathbb{N}}, d_\theta^{1/b} \sqcup d_{[u]})$  のアソー次元, ハウスドルフ次元がそれぞれ  $a, b$  であることがわかる. このようにして定理 1.3 が得られる.  $\square$

## 参考文献

- [1] G. David and S. Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self Similar Geometry through Metric and Measure*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 7, Oxford Univ. Press, 1997.
- [2] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] Y. Ishiki, *Quasi-symmetric invariant properties of Cantor metric spaces*, preprint, arXiv:1710.08190v3.
- [4] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal Dimension: Theory and Application*, Univ. Lecture Ser. 54, Amer. Math. Soc., 2010.
- [5] S. Semmes, *Metric Spaces and Mapping Seen at Many Scales*, in M. Gromov, with Appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, (J. LaFontaine and P. Pansu, eds), Progress in Math. 152, Birkhauser, 1999, pp. 401–518.

# Smooth quandleの局所構造とその変形

石川 勝巳 (京都大学数理解析研究所)\*

カンドルとは群の共役演算を公理化・一般化して定義される代数である。カンドルは1980年代に [7], [9] など導入されて以来、(曲面) 結び目や Lefschetz fibration など様々な方向に応用されてきたが、これまでのカンドルの扱いというのは概して離散的なものであった。群に対して Lie 群が考えられ、その局所構造の変形として量子群が定義されて一連の量子不変量の研究へと繋がっていったことを思い出してみると、カンドルに対して同じようなことができないだろうかというのは自然な問題であろう。

そこで本稿では、多様体にカンドル演算を入れた smooth quandle というものを考え、特にその局所構造を調べるとともに、その変形を試みる。まず第1節ではカンドルの離散的な扱いについて復習する。次に第2節では smooth quandle を定義し、その構成や分類について得られた結果を紹介する。特に smooth quandle の中でも重要なクラスのものについては、その局所構造が Lie 環、部分 Lie 環、自己同型という3つ組を用いて記述されるということを紹介する。最後に第3節ではこの3つ組の情報を変形することを試みる。ここではわかっている結果というよりも、どういうことがわかれば面白そうかという「夢」や、これから考えていくべき問題を提示し、今後の研究の指針としたい。なお、第2節と第3節は動機や背景こそ繋がっているが、その論理的・数学的な内容は独立したものとなっているので、それぞれ別々に読むことが可能である。

## 1. カンドルの基礎

集合  $X$  とその上の二項演算  $*$  の組で次の条件を満たすもののことをカンドルという：

(Q1) 任意の  $x \in X$  に対し、 $x * x = x$ .

(Q2) 任意の  $y \in X$  に対し、写像  $s_y = \bullet * y : X \ni x \mapsto x * y \in X$  は全単射。

(Q3) 任意の  $x, y, z \in X$  に対し、 $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ .

**例 1.1 (共役カンドル)** 群もしくはその共役類を  $X$  とし、二項演算  $*$  を  $x * y = y^{-1}xy$  と定めるとこれはカンドルとなる。これを共役カンドルという。

**例 1.2 (Alexander カンドル)** Abel 群  $X$  とその上の自己同型  $T$  に対し、二項演算  $*$  を  $x * y = Tx + (1 - T)y$  と定めるとこれはカンドルになる。このようなカンドルを Alexander カンドルという。例えば  $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  とし、 $x * y = 2y - x$  と定めたものは二面体カンドルと呼ばれる Alexander カンドルである。

カンドル  $X$  に対し、その自己同型群を  $\text{Aut}(X)$  と書く。カンドルの定義に出てきた条件 (Q2), (Q3) より、写像  $s_y$  ( $y \in X$ ) は  $X$  の自己同型であることがわかる。そこでこれらによって生成される  $\text{Aut}(X)$  の部分群を内部自己同型群といい、 $\text{Inn}(X)$  と書く：

$$\text{Inn}(X) := \langle s_y (y \in X) \rangle \subset \text{Aut}(X).$$

また、 $X$  の associated group  $\text{As}(X)$  を次のように定める：

$$\text{As}(X) := \langle x \in X \mid y^{-1}xy = x * y (x, y \in X) \rangle.$$

本研究は科研費 (課題番号: 16J01183) の助成を受けたものである。

\* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

e-mail: katsumi@kurims.kyoto-u.ac.jp

### 1.1. カンドルと結び目の不変量

ここではカンドルから得られる結び目の不変量について、簡単に復習したい。

$K \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  を向きの付いた結び目、 $N(K)$  をその (閉) 管状近傍とし、 $E(K) = \overline{S^3 \setminus N(K)}$  とおく。  $E(K)$  内の path  $\gamma$  であって、 $\partial N(K)$  の点を始点、 $\infty \in S^3$  を終点とするものと、 $\gamma$  の始点を基点とし、 $N(K)$  の正のメリディアンディスクの境界となっているような  $\partial N(K)$  内の単純閉曲線  $C$  との組  $(\gamma, C)$  を **noose** と呼ぶ。Noose のイソトピー類の集合を  $Q(K)$  とし、その上に二項演算  $*$  を

$$(\gamma, C) * (\gamma', C') = (\gamma \cdot \gamma'^{-1} \cdot C' \cdot \gamma', C)$$

と定めたものは  $K$  の基本カンドルと呼ばれるカンドルである。基本カンドルは (弱い意味で) 結び目の完全不変量である ([7], [9]) など非常に強力な不変量であるが、実用上はそこから何らかの形で情報を引き出してくる必要がある。  $Q(K)$  から有限カンドル  $X$  への準同型 ( $X$ -彩色と呼ばれる) の数は彩色数と呼ばれる有用な不変量であり、例えば位数  $n$  の二面体カンドルによる彩色は Fox の  $n$ -coloring に対応している。他にも彩色数の精密化としてカンドルコサイクル不変量 ([3]) などが知られているが、ここでは省略させていただく。

一般にカンドル  $X$  について、その内部自己同型群  $\text{Inn}(X)$  が  $X$  に推移的に作用<sup>1</sup> しているとき、 $X$  は推移的<sup>2</sup> であるという。任意のカンドル  $X$  は推移的部分カンドルの中で極大なものたちの非交和として表される (例えば [1], [4] 等を参照のこと) が、結び目の基本カンドルは推移的であるため、結び目の  $X$ -彩色は結局のところその極大推移的部分カンドルどれか 1 つによる彩色になってしまう。すなわち、結び目の不変量を考える上では推移的なカンドルが本質的な対象となるのである。

### 1.2. 推移的なカンドルの構成

ここでは推移的なカンドルの重要な構成法を紹介する。

$G$  を群、 $H$  をその部分群とし、群  $G$  の自己同型  $\rho$  であって  $\rho|_H = \text{id}_H$  なるものが与えられたとする。このときコセット  $H \setminus G$  上に二項演算  $*$  を

$$Hx * Hy = H\rho(xy^{-1})y \quad (x, y \in G)$$

と定めると、この演算は well-defined で、 $(H \setminus G, *)$  がカンドルとなることが確かめられる。本稿ではこれを 3 つ組  $(G, H, \rho)$  のカンドルと呼び、 $Q(G, H, \rho)$  と表すことにする。

この構成法は次の意味で普遍的なものである：

**定理 1.3** ([7]) 任意の推移的なカンドルはある 3 つ組のカンドルと同型である。

簡単に証明を復習しておく。推移的なカンドル  $X$  について、任意に  $x_0 \in X$  を取って固定しておく。  $G = \text{Inn}(X)$  とし、 $H$  を  $G$  の  $x_0$  に関する固定化群とする。  $\rho = \text{ad } s_{x_0} \in \text{Aut}_{\text{grp}}(G)$  とすると、 $H \setminus G \ni Hg \mapsto x_0 \cdot g$  によって  $Q(G, H, \rho) \cong X$  となる。

**註 1.4** ここでは  $G = \text{Inn}(X)$  とおいて証明したが、 $X$  に推移的に作用している群  $G$  で、適切な意味で  $\text{ad } s_{x_0}$  が定まっているようなものであれば同様の証明が成り立つ。

<sup>1</sup> 慣例として  $\text{Inn}(X)$  や  $\text{As}(X)$  の  $X$  への作用は右からのものを考える。

<sup>2</sup> 通常は (代数的に) 連結ということの方が多い。

### 1.3. 推移的なカンドルの最小表示<sup>3</sup>

前節では推移的なカンドルが3つ組のカンドルとして表されることを見たが、この表示は一意でない。そこで、それらの中で最も簡単なものでカンドルを表示することを考えよう。

カンドル  $X$  の associated group  $\text{As}(X)$  の生成元  $x$  ( $x \in X$ ) に対し  $s_x$  を対応させることによって全射準同型  $p: \text{As}(X) \rightarrow \text{Inn}(X)$  が定まる。一方、同様の生成元  $x$  に対し  $1$  を対応させることで別の全射準同型  $\epsilon: \text{As}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  を定める。このとき像  $p(\text{Ker } \epsilon) \subset \text{Inn}(X)$  を  $\text{Inn}_0(X)$  と書くことにする。これは次のように定めても同じことである：

$$\text{Inn}_0(X) := \langle s_x^{-1} s_y \mid x, y \in X \rangle \subset \text{Inn}(X)$$

$\text{Inn}_0(X)$  は  $\text{Inn}(X)$  の部分群であるからやはり  $X$  に作用するが、この作用が推移的かどうかは  $\text{Inn}(X)$  の作用が推移的かどうかと同値である。従って註1.4でも述べたように、 $X$  を表示する3つ組  $(G, H, \rho)$  として  $G = \text{Inn}_0(X)$  であるものが取れるが、この表示は次の意味で最小のものであるといえることができる：

**命題 1.5**  $X$  を推移的なカンドル、 $x_0$  をその1点とする。 $G = \text{Inn}_0(X)$ 、 $H$  を  $G$  の  $x_0$  に関する固定化群とし、 $\rho = \text{ad } s_{x_0}$  とおく。このとき  $(G, H, \rho)$  は  $X$  を表示する3つ組で

- (1)  $G$  の  $X$  への作用は忠実であり、
- (2) 真部分群  $G' \subsetneq G$  であって  $X$  に推移的に作用しており、 $\rho$  で保存されるようなものは存在しない

という条件を満たすものとして（同型を除いて）一意に特徴づけられる。

このようにして  $X$  を3つ組のカンドルとして表すことをここでは  $X$  の最小表示と呼ぶことにする。

推移的なカンドルの間の準同型は、次のように群の情報を用いて記述される：

**命題 1.6**  $X = Q(G, H, \rho)$ 、 $X' = Q(G', H', \rho')$  をそれぞれ推移的なカンドルの最小表示とし、 $x_0 = H \in X$ 、 $x'_0 = H' \in X'$  とおく。このとき函手  $\text{Inn}_0$  は基点を保つカンドル準同型の集合

$$\{f \in \text{Hom}_{\text{qdle}}(X, X') \mid f(x_0) = x'_0\}$$

と、3つ組の情報と compatible な群準同型の集合

$$\{\tilde{f} \in \text{Hom}_{\text{grp}}(G, G') \mid \tilde{f}(H) \subset H', \tilde{f} \circ \rho = \rho' \circ \tilde{f}\}$$

との間の1対1対応を定める。

ここでは基点を保つカンドル準同型を考えたが、 $G'$ （推移的であった）の元を後から合成すれば全ての準同型が得られるため、本質的な条件ではないことに注意されたい。

**例 1.7** Abel 群  $A$  上の Alexander カンドル（例1.2）は  $Q(A, \{0\}, T)$  と表示される。このカンドルが推移的であるための必要十分条件は  $\text{id}_A - T \in \text{End}(A)$  が自己同型であることとして与えられるが、このときこの表示は最小である。

<sup>3</sup> この節の内容はよく知られているものだと思うのだが、明示的にどこかに書かれているかというところよくわからない、いわゆる folklore なのではないかと思う。

例 1.8 結び目  $K$  の基本カンドル  $Q(K)$  について、 $\text{As}(Q(K))$  は結び目 (補空間の基本) 群  $\pi_K$  と同型であるから、 $Q(K)$  は peripheral subgroup  $P$  とメリディアン  $m \in P$  を用いて  $Q(\pi_K, P, \text{ad } m)$  と表示されるが、これは最小ではない。実際、 $P$  の部分群  $P'$  を

$$P' = P \cap [\pi_K, \pi_K] = \{l \in P \mid [l] = 0 \in H_1(E(K))\}$$

と定めると  $Q([\pi_K, \pi_K], P', \text{ad } m)$  も  $Q(K)$  と同型<sup>4</sup>であり、特に  $K$  が 1 次元結び目のとき、 $P'$  はロンジチュードが生成する部分群であり、こちらが  $Q(K)$  の最小表示であることが確かめられる。

命題 1.6、例 1.7 と併せると、推移的な Alexander カンドルによる彩色の集合は

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}(H_1(\widetilde{E(K)}), A) \times A$$

と表せることがわかる (cf. [5])。ここで  $\widetilde{E(K)}$  は無限巡回被覆、 $A$  は  $t \cdot x = Tx$  ( $x \in A$ ) によって  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -加群とみなしている。

## 2. Smooth quandle とその局所構造

$X$  を微分多様体<sup>5</sup>とし、 $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  をその上の可微分写像とする。この組  $(X, *)$  がカンドルの公理 (Q1), (Q3) を満たし、さらに

(Q2') 任意の  $y \in X$  に対し、写像  $s_y = \bullet * y: X \ni x \mapsto x * y \in X$  は微分同相

であるとき、これを **smooth quandle** と呼ぶことにする。

Lie 群を用いた共役カンドルや Alexander カンドル ( $T$  は Lie 群としての自己同型とする)、対称空間やその一般化である generalized symmetric space などは smooth quandle の例となっている。次の例に示すように、任意の (1 次元以上の) 微分多様体上には非自明な smooth quandle の演算を入れることができる。

例 2.1  $X$  を微分多様体、 $A$  をその部分集合とする。 $\varphi_t$  を  $X$  の 1 パラメーター変換群で  $\varphi_t|_A = \text{id}_A$  ( $\forall t$ ) なるものとし、また、 $A$  上に台をもつ滑らかな関数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  をとる。このとき  $x, y \in X$  に対し  $x * y = \varphi_{f(y)}(x)$  と定めると  $(X, *)$  は smooth quandle となる。

Smooth quandle の間の準同型を考える際には、それが滑らかであることを仮定する。同様に、自己同型に対しても微分同相であることを仮定し、この意味での自己同型群を単に  $\text{Aut}(X)$  と書くことにする。 $\text{Inn}(X)$  や  $\text{Inn}_0(X)$ 、推移性は離散的な場合と全く同様に定義され、 $X$  が位相空間として連結であるとき単に  $X$  が連結であると言うことにする (脚注 2 も参照のこと)。

Smooth quandle を構成・分類せよというのは自然な問題であるが、例 2.1 で見たようにあらゆる多様体上にとってもたくさんの smooth quandle の構造が入るため、これら全てを分類せよというのはあまり良い問題とは言えない。その応用を考えてみても、このような「面白くない」例がたくさん見つかって嬉しくないわけで、何らかの理にかなった仮定をおくことが望ましい。そこで本稿ではまず考える対象に推移性を仮定しよう。1.1 節で見たように結び目の不変量を考える際にこの仮定は本質的であるし、幾

<sup>4</sup> これ自体は  $K$  が高次元結び目や曲面結び目の場合にも全く同様に成り立つ。

<sup>5</sup> 本稿では全ての多様体に対し、第二可算公理を仮定する。特に、非可算無限個の連結成分を持つようなものは多様体とは呼ばないことにする。



何的に見てもこの仮定は多様体全体の対称性を要請する自然なものである。また、さらに連結性も仮定することにする。1つには記述などの簡略化のためであり（実際ある程度この仮定を弱めても以下の結果は成り立つ）、smooth quandle  $X$  に対し  $\pi_0(X)$  が離散的なカンドルになるというのも理由の1つである。従って以下では推移的で連結な smooth quandle<sup>6</sup> を主に考え、その構成・分類を試みる。

**例 2.2**  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  の放物的な元全体の成す共役カンドルは、generalized symmetric space でない s.t.c.q. の 1 例である。

## 2.1. Smooth quandle の構成

1.2 節では離散的な場合に全ての推移的なカンドルが 3 つ組を用いて構成されることを見た。ここではそれを smooth category で再現してみよう。

$G$  を Lie 群とし、 $H$  をその閉部分群とする。 $G$  の (Lie 群としての) 自己同型  $\rho$  であって  $\rho|_H = \mathrm{id}_H$  なるものが与えられると、1.2 節で見たように 3 つ組のカンドル  $Q(G, H, \rho)$  が定まるが、このとき  $H \backslash G$  は等質空間であり、この演算によって  $Q(G, H, \rho)$  は smooth quandle となっていることがわかる。

では、これで全ての s.t.c.q.  $X$  が得られるのだろうか？ すなわち、定理 1.3 は成り立つのだろうか？ 単純に位相空間の範疇で考えるのならばこれはもちろん正しい。  $\mathrm{Aut}(X)$  にコンパクト開位相を入れ、これを  $G$  とすれば、定理 1.3 が証明まで含め全く同様に成り立つ。しかし、上記の構成を適用するためには  $\mathrm{Aut}(X)$  またはその部分群である  $\mathrm{Inn}(X)$  などが Lie 群であることが必要であり、これは全く非自明なことである。

それについて結果を述べるため、少し準備をする。  $\mu = * : X \times X \rightarrow X$  とし、

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X) = \{V \in \mathfrak{X}(X) \mid \mu_*(V(x), V(y)) = V(x * y) \ (\forall x, y \in X)\}$$

とおく。すなわち、 $X$  上のベクトル場であり、局所的に  $X$  の自己同型を生成するようなものの全体を  $\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X)$  とおいたのである。また、 $x_0 \in X, v \in T_{x_0}X$  に対し、

$$V_v(x) = (\mu_*)_{(x * x_0, x_0)}(0, v)$$

としてベクトル場  $V_v$  を定め、

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{inn}}(X) = \mathrm{span}\{V_v \mid v \in TX\}$$

とおく。 $v$  は 1 点の接空間だけから取ってきているわけではないことに注意されたい。 $V_v$  は informal には  $s_{x_0+v} \circ s_{x_0}^{-1}$  と書くことができる。すなわち  $x_0 \in X$  を少し動かしたとき、自己同型  $s_{x_0}$  がどう変化するかというのを表したものである。 $\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X)$  は Lie 環になっており、 $\mathfrak{X}_{\mathrm{inn}}(X)$  はその部分 Lie 環であることがわかる。

得られた結果について述べる。

**定理 2.3**  $X$  を s.t.c.q. とする。このときその自己同型群  $\mathrm{Aut}(X)$  にコンパクト開位相を入れたものは  $\mathfrak{X}_{\mathrm{aut}}(X)$  を Lie 環とする Lie 群であり、Lie 変換群として  $X$  に作用している。さらに内部自己同型群  $\mathrm{Inn}(X)$  は  $\mathrm{Aut}(X)$  の (閉とは限らない) 部分 Lie 群であり、その Lie 環は  $\mathfrak{X}_{\mathrm{inn}}(X)$ 、単位成分は  $\mathrm{Inn}_0(X)$  である。

<sup>6</sup>s.t.c.q. = smooth transitive connected quandle と略すことにする。

従って、定理 1.3 の smooth category 版が成り立つ：

**系 2.4** 任意の s.t.c.q. は (Lie 群を用いた) 3 つ組のカンドルと同型である。

$G = \text{Inn}_0(X)$  を取ってくることで、s.t.c.q. を表示するとき  $G$  が連結なものを取れることも保証される。定理 2.3 の後半から、カンドルの最小表示に関する命題 1.5 は smooth category でも全く同様に成り立つことがわかる。命題 1.6 についても同様である。

## 2.2. Smooth quandle の分類と局所構造

定理 2.3 及び系 2.4 により、理論上は s.t.c.q. の分類が可能である。すなわち、最小表示を与えているような 3 つ組を分類すればよいということになるのだが、これをそのまま実行に移すのはかなり難しい。ここでは Lie 群の場合に倣い、まず代数的な局所構造の分類から単連結なものの分類を得た上でその商を考えるという方法を試みよう。

まず、単連結なものの商を考えるということを正当化しておこう。

**命題 2.5**  $X$  を連結な smooth quandle とし、 $x_0$  をその 1 点とする。 $\tilde{X}$  を  $X$  の連結な被覆空間、 $p: \tilde{X} \rightarrow X$  をその被覆写像とし、 $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  を 1 つ取る。 $\pi_1(X, x_0)$  の部分群  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  が  $s_{x_0*}$  で保たれるならば、すなわち

$$s_{x_0*}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

ならば、 $\tilde{X}$  上の smooth quandle の演算  $\tilde{*}$  であって  $p$  が  $(\tilde{X}, \tilde{*})$  から  $(X, *)$  への smooth quandle の準同型となるようなものが唯 1 つ存在する。

特に smooth quandle の普遍被覆は smooth quandle である。 $X$  が推移的なら  $\tilde{X}$  も推移的となることがわかるので、単連結 s.t.c.q. の分類ができればその商として全ての s.t.c.q. が得られるということになる。

次に 3 つ組の情報を局所的な言葉で書き直そう。Lie 環  $\mathfrak{g}$  とその部分 Lie 環  $\mathfrak{h}$ 、 $\rho|_{\mathfrak{h}} = \text{id}_{\mathfrak{h}}$  なる Lie 環  $\mathfrak{g}$  の自己同型  $\rho$  という 3 つ組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \rho)$  のことを無限小カンドルと呼ぶことにする。Smooth quandle の 3 つ組による表示が与えられたとき、その Lie 環を取ると無限小カンドルが得られる。逆に無限小カンドル  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \rho)$  が与えられたとき、 $\mathfrak{g}$  を Lie 環とする単連結な Lie 群  $G$  を考え、 $H$  を  $\mathfrak{h}$  に対応する  $G$  の連結な Lie 部分群とする。もし  $H$  が閉部分群であれば、単連結な smooth quandle  $Q(G, H, \rho)$  が得られることになる。

s.t.c.q. の 3 つ組による表示は一意ではないが、1.3 節、2.1 節で見たようにその中で最小なものは一意に定まるのであった。推移性や最小表示の特徴づけを対応する無限小カンドルの言葉で書き下すと、次のようになる：

- (E) 忠実性： $\mathfrak{h}$  は非自明な  $\mathfrak{g}$  のイデアルを含まない。
- (T) 推移性： $\mathfrak{g}_0$  を  $(1 - \rho)(\mathfrak{g})$  で生成される  $\mathfrak{g}$  のイデアルとすると、 $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ .
- (M) 最小性： $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 環  $\mathfrak{g}'$  が  $\rho$  で保たれ  $\mathfrak{g}' + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  を満たすならば、 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ .

すなわち、上記の  $H$  が閉であるという条件の下で、単連結 s.t.c.q. と条件 (E), (T), (M) を満たす無限小カンドルは 1 対 1 に対応する。なお、条件 (T), (M) を共に満たすことは、次の条件 (TM) と同値である：

- (TM)  $\mathfrak{g}_0$  を  $(1 - \rho)(\mathfrak{g})$  で生成される  $\mathfrak{g}$  のイデアルとすると、 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ .

纏めると、s.t.c.q. を分類するためには、まず (E), (T), (M) (もしくは (E) と (TM)) を満たす無限小カンドルを分類し、次に対応する単連結 s.t.c.q. を構成し (このとき  $H$  が閉とならないものは除外する)、最後にそれらのどのような商が取れるかを考えればよい。それでも一般の次元でこれらを実行するのは難しいが、1、2次元の場合やコンパクト3次元の場合については[6]で分類を行った。このときにはコンパクト s.t.c.q. についての次の結果を示し、用いた：

**命題 2.6**  $X$  をコンパクトな s.t.c.q. とするとき、 $\text{Inn}_0(X)$  はコンパクト。

なお、一般にはコンパクト s.t.c.q.  $X$  に対して  $\text{Aut}(X)$  がコンパクトとは限らず、さらに  $\text{Aut}(X)$  がコンパクトであっても  $\text{Inn}(X)$  がコンパクトとは限らない。

### 3. カンドルの量子化へ向けて

この節では、smooth quandle の局所構造を変形して結び目不変量を構成する試みを紹介する。

$\mathbb{C}$ -代数  $H$  と、余積と呼ばれる準同型  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ , 対合と呼ばれる反準同型  $S : H \rightarrow H$ , 余単位射と呼ばれる準同型  $\varepsilon : H \rightarrow \mathbb{C}$  の組であって、幾つかの条件を満たすものものを **Hopf代数** と呼ぶのであった<sup>7</sup>。典型例としては以下に挙げるようなものがあり、ここではこれらを考えれば十分である：

**例 3.1 (群環)**  $G$  を群とし、その群環  $\mathbb{C}[G]$  を考える。各  $g \in G \subset \mathbb{C}[G]$  に対し  $\Delta(g) = g \otimes g$ ,  $S(g) = g^{-1}$ ,  $\varepsilon(g) = 1$  と定めると、通常の積と併せて  $\mathbb{C}[G]$  は Hopf代数となる。これは積は一般には非可換であるが、余積は余可換な Hopf代数の例である。

**例 3.2 (有限群の関数環)** 有限群  $G$  から  $\mathbb{C}$  への写像全体の成す環 (関数環) を  $H$  とする。 $H \otimes H$  を  $G \times G$  の関数環と同一視した上で、 $f \in H, g, g' \in G$  に対し  $\Delta(f)(g, g') = f(gg')$ ,  $S(f)(g) = f(g^{-1})$ ,  $\varepsilon(f) = f(e)$  ( $e \in G$  は単位元) と定めると  $H$  は Hopf代数となる。これは積は可換だが、余積は一般には非余可換な Hopf代数の例である。

**例 3.3 (普遍包絡環)** Lie 環  $\mathfrak{g}$  の普遍包絡環を  $U(\mathfrak{g})$  と書く。 $X \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$  に対し  $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ ,  $S(X) = -X$ ,  $\varepsilon(X) = 0$  と定めると  $U(\mathfrak{g})$  は Hopf代数となる。これは一般には非可換かつ余可換な Hopf代数の例である。

**例 3.4 (量子群)** Drinfeld-神保によって非可換かつ非可換な Hopf代数の例が、単純な  $\mathfrak{g}$  に対する  $U(\mathfrak{g})$  の変形として与えられた。例えば  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$  のときには、 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$  に対し  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  を、 $E, F, K^{\pm 1}$  で生成される非可換代数を次の関係式で割ったものとして定義する：

$$KE = q^2EK, \quad KF = q^{-2}FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

さらに

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= E \otimes K + 1 \otimes E, & S(E) &= -EK^{-1}, & \varepsilon(E) &= 0, \\ \Delta(F) &= F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, & S(F) &= -KF, & \varepsilon(F) &= 0, \\ \Delta(K) &= K \otimes K, & S(K) &= K^{-1}, & \varepsilon(K) &= 1 \end{aligned}$$

<sup>7</sup> 定義については [8], [10], [11] 等を参照のこと。大槻先生のこの定義は直接的でわかりやすいが、 $S$  が余積に対しても反準同型であるという条件が (少なくとも明示的には) 書かれていないことに注意。

とすると  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  は Hopf 代数となる。  $K$  を (形式的に)  $q^H$  とおき、  $q \rightarrow 1$  としてみれば  $U(\mathfrak{sl}(2))$  が復元されることが確かめられる。

一般に Lie 群  $G$  に対して群環  $\mathbb{C}[G]$  をそのまま考えると、それは Hopf 代数ではあるがとてつもなく大きく、取り留めのないものになってしまう。一方でその Lie 環  $\mathfrak{g}$  に対して  $U(\mathfrak{g})$  を考えると、これは  $G$  の局所構造を反映した Hopf 代数であるばかりでなく、ある意味で  $G$  の「群環」だと思えることができる。すなわち、仮想的に  $X \in \mathfrak{g}$  に対する  $e^X \in G$  を  $U(\mathfrak{g})$  の元とも思ってみる (もちろん実際にはそのような元は  $U(\mathfrak{g})$  に含まれていない) と、このようなものに対する  $U(\mathfrak{g})$ ,  $\mathbb{C}[G]$  それぞれの中での積や余積などの Hopf 代数の演算は一致していることがわかる。このような観点で見れば、量子群とは Lie 群の「群環」を変形したものといえることができる。

さて、カンドル  $X = (X, *)$  に対してその元を基底とするベクトル空間  $H = \mathbb{C}[X]$  を考え、そこに  $*$  を線型に拡張して演算を入れると、これは self-distributive な代数となる (言わば  $X$  に対するカンドル環である)。すなわち、群環の場合と同様に  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  を  $\Delta(x) = x \otimes x$  ( $x \in X$ ) で定義すると、カンドルの公理 (Q3) に対応する式

$$(QD) \quad * \circ (* \otimes \text{id}_H) = * \circ (* \otimes *) \circ P_{2,3} \circ (\text{id}_H \otimes \Delta)$$

を満たす ( $P_{2,3} : H^{\otimes 4} \rightarrow H^{\otimes 4}$  は 2, 3 番目の成分の入れ替えを表す)。特に  $R : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  を  $R = P \circ (* \otimes \text{id}_H) \circ (\text{id}_H \otimes \Delta)$  と定義すると、 $R$  は Yang-Baxter 方程式

$$(YB) \quad (R \otimes \text{id}_H) \circ (\text{id}_H \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}_H) = (\text{id}_H \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}_H) \circ (\text{id}_H \otimes R)$$

を満たし、braid 群の表現を得ることができる<sup>8</sup>。有限カンドルを考えている場合には、結び目を braid 表示しておいてこの表現に関してトレースを取れば、カンドルの彩色数が得られるのであった。

Lie 群の群環に対応する普遍包絡環と類似の構成を、smooth quandle のカンドル環に対して行ってみよう。2.2 節で見たように、s.t.c.q. の局所構造は無限小カンドル  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \rho)$  によって記述されるのであった。ここでは簡単のため、 $\mathfrak{h} = 0$  の場合を考えてみる。この場合、考える代数自体は  $H = U(\mathfrak{g})$  を持ってくるのが自然であろう。3 つ組のカンドルの構成を思い出すと、ここに次のような演算を入れることに思い至る：

$$x * y = \sum_i \rho(xS(y_{i,1}))y_{i,2}. \quad (1)$$

但し  $\Delta(y) = \sum_i y_{i,1} \otimes y_{i,2}$  とした。実際、このように定義した  $* : H \otimes H \rightarrow H$  が条件 (QD) を満たすこと、従って (YB) が成り立つことがわかる。

「量子カンドル」は存在するかというのは本稿の「夢」とでも言うべき課題であるが、この「カンドル環」を適切に変形することができれば、それはこの「夢」に答えを与えたと言ってよいであろう。ここで  $\mathfrak{g}$  を単純 Lie 環とし、 $U(\mathfrak{g})$  の変形として  $U_q(\mathfrak{g})$  が定義されたことを思い出すと、量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  もしくはより一般の Hopf 代数  $H$  とその上の自己同型  $\rho$  に対して (1) によって演算  $*$  を定義すればよいのではないかと、というのは至極当然なのだが、実はこれはうまくいかない。すなわち、一般にこの定義による  $*$  は条件 (QD) を満たさないし、そこから得られる  $R$  についても (YB) を満たさないのである。以下、これに対する 2 つの打開案を与える。

<sup>8</sup>一般に、 $H$  が余可換であれば (QD) から (YB) が従う ([2])。

### 3.1. 第1の方針

$H$  を Hopf 代数、 $\rho$  をその自己同型とする。上では演算  $*$ :  $H \otimes H \rightarrow H$  を定義した上で  $R: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  を定義するという方針を取っていたが、ここでは  $*$  や条件 (QD) 自体は諦め、(YB) を満たすような  $R$  であって上記の  $U(\mathfrak{g})$  に対する  $R$  の一般化になっているようなものを構成してみる。

$R: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  を次のように定義する:

$$R(x \otimes y) = \sum_i y_{i,2} \otimes \rho(xS(y_{i,1}))y_{i,3}.$$

言い換えると、

$$R = (\text{id}_H \otimes \mu) \circ (\text{id}_H \otimes (\rho \circ \mu) \otimes \text{id}_H) \circ (\text{id}_{H \otimes H} \otimes S \otimes \text{id}_H) \circ P_{1,2} \circ P_{2,3} \circ (\text{id}_H \otimes \Delta^{(2)})$$

とする。但し  $\Delta^{(2)} = (\text{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta$  である。このとき、次が成り立つ。

**命題 3.5**  $R: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  は右  $H$  加群の同型であり、 $R$  は (YB) を満たす。

従って特に braid 群の表現  $B_n \rightarrow \text{Aut}_H(H^{\otimes n})$  が得られる。なお、 $R$  が右  $H$  加群の同型になっていることは群 (環) がカンドル (環) に作用していることに対応している。

(YB) というのは (Q3) もしくは Reidemeister 変形 RIII に対応するものであったし、 $R^{-1}$  の存在は (Q2) や RII に対応するものであるから、必要なら少し修正を加えてやれば結び目不変量が得られるのではないかという期待が持てるが、残念ながらこれはうまくいかない。例えば  $H$  は有限次元と仮定し、(右  $H$  加群の準同型を得るため) quantum trace を取ったとしても、正負の full twist に対応する  $H$  の元が互いの逆元になっているとは限らないのである。Quantum trace の取り方を工夫すればこの問題は解決されるのかもしれないが、既存の方法ではうまくいきそうにないというのが現状である。

さらにこれ以外にも色々問題点がある。まず第1に、無限次元の量子群についてはそれ自体の quantum trace を取ることができず、無限次元表現から情報をうまく取り出す方法が必要となる。例えば  $q$  が1の冪根である場合には  $U_q(\mathfrak{g})$  の商で有限次元のものを取り出すことができ ([8] の  $\overline{U}_q$ )、 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  であれば

$$\rho(E) = \lambda E, \quad \rho(F) = \lambda^{-1} F, \quad \rho(K) = K$$

と定義すると Hopf 代数の自己同型  $\rho$  も得られるのでこれを考えるのは1つの手であるが、できれば一般の量子群について考えたいところである。また、こうして得られた表現や不変量が何なのか、という問題が挙げられる。上記の例で  $q$  が原始3乗根の場合ですら  $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$  は27次元であり、 $\overline{U}_q$  の表現に関して完全可約性が成り立たないという難しさも相まって、現時点 (本稿執筆時点) ではこの表現がどういうものなのか、全くわかっていない。量子群を用いているという意味では何か非自明な情報を含んでほしいと期待するところではあるが、一方で普遍 R-行列のようなものが構成に現れていない以上、特別変わった情報は含まれていないのではないかとも思われる。

### 3.2. 第2の方針

もう1つの案は (1) をもう少し変形することで (YB) を満たすようにしようというものである。より具体的には、 $\mathcal{R} = \sum_j \alpha_j \otimes \beta_j \in H \otimes H$  であって、 $R: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  を

$$R(x \otimes y) = \sum_{i,j} y_{i,3} \alpha_j \otimes \rho(xS(y_{i,1})) y_{i,2} \beta_j$$

と定めたときこれが (YB) を満たすようなものを見つけようという方針である。そのような  $\mathcal{R}$  が存在するのかわからないが、 $H = U_q(\mathfrak{g})$  の場合にはこれを  $U(\mathfrak{g})[[h]]$  ( $q = e^h$  と置き換えた) の中で考えておき<sup>9</sup>、 $\mathcal{R} = 1 \pmod{h}$  から始めて順に  $\mathcal{R}$  を定めていくというのは (理論的には) 1 つの方法である。

この書き方から察してもらえるかもしれないが、この方針は全く進んでいないし、うまくいくのかどうかもわからない。仮にうまくいったとしても、第 1 の方針でも挙げた無限次元のものからどのように情報を引き出すか、といった問題は依然残っている。それにもかかわらずここでこの方針を紹介したのは、 $\rho$  が自明な場合、すなわち  $\rho = \text{id}_H$  の場合にはこれがリボン Hopf 代数から結び目の不変量を得る方法そのものであったからである。言い換えると、もしこの方針がうまくいけば、従来の量子不変量はその最も簡単な場合に過ぎなかったということが言えるのである。

.....

思い返してみれば、量子不変量で  $q = 1$  の場合、結び目の交点では元をただ交換するということが行われるが、これは  $U(\mathfrak{g})$  に自明カンドルの構造を入れているようなものであり、群の共役の概念とは少し遠いものなのであった。量子不変量と古典的な不変量の間隔に隔たりが感じられる理由がこの辺りにあるのだとすれば、ここで考えたような方法によって得られた「量子カンドル」がそこを結び付けてくれるのではないかという期待が持てるのである。

## 参考文献

- [1] Andruskiewitsch, N., Graña, M., *From racks to pointed Hopf algebras*. Adv. Math. **178** (2003), 177–243.
- [2] Carter, J. S., Crans, A. S., Elhamdadi, M., Saito, M., *Cohomology of categorical self-distributivity*. J. Homotopy Relat. Struct. **3** (2008), 13–63.
- [3] Carter, J. S., Jelsovsky, D., Kamada, S., Langford, L., Saito, M., *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989.
- [4] Iijima, Y., Murao, T., *On connected component decompositions of quandles*, to appear in Tokyo J. Math.
- [5] Inoue, A., *Quandle homomorphisms of knot quandles to Alexander quandles*. J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), 813–821.
- [6] Ishikawa, K., *On the classification of smooth quandles*, preprint.
- [7] Joyce, D., *A classifying invariant of knots, the knot quandle*. J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.
- [8] Kassel, C., *Quantum groups*. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] Matveev, S. V., *Distributive groupoids in knot theory*. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), 78–88.
- [10] Ohtsuki, T., *Quantum invariants*. A study of knots, 3-manifolds, and their sets. Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [11] 大槻 知忠, 結び目の不変量、共立出版、2015.

<sup>9</sup> これは適切な言い方ではないが、よくご存じの方にはこれで何が言いたいのかわかってもらえると思う。詳しくは [8] を参照のこと。

# メビウス変換群の離散性判定問題について

山下 靖 (奈良女子大学)\*

## 1. はじめに

4つの複素数  $a, b, c, d$  で  $ad - bc = 1$  をみたすものに対し、

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

をメビウス変換という。これはリーマン球面  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の全単射で、幾何学的には円に関する反転を何回か合成したものとみなすことができ、特に  $\widehat{\mathbb{C}}$  の円は円にうつされる。 $\widehat{\mathbb{C}}$  を3次元双曲空間

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

の無限遠境界  $\partial\mathbb{H}^3 = \{(z, 0) \mid z \in \widehat{\mathbb{C}}\}$  と同一視し、円に関する反転を  $\mathbb{R}^3$  内の球に関する反転に取り替えることで、メビウス変換は  $\mathbb{H}^3$  の上の全単射を与える。これは  $\mathbb{H}^3$  上の向きを保つ合同変換になっていて、逆にそのようなものはメビウス変換から来ることも知られている。すなわち、メビウス変換全体による群は  $\mathbb{H}^3$  上の向きを保つ合同変換全体による群  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  と一致している。

$\Gamma$  を  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  の離散部分群とすると、 $\mathbb{H}^3/\Gamma$  は3次元双曲オービフォールドになるので、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  の離散部分群は低次元トポロジーにとって重要である。このような離散群はクライン群ともよばれている。いくつかのメビウス変換が与えられたとき、これらが生成する  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  の部分群が離散的かどうかを判定する問題およびそれらに関連する話題を本稿では考える。

## 2. 離散群の例と、メビウス変換群の変形

離散性判定問題を考える前に、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  の離散部分群すなわちクライン群の例を紹介する。以下では、メビウス変換に  $2 \times 2$  行列を対応させる：

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ただし、上の左側で  $a, b, c, d$  を  $-a, -b, -c, -d$  に取り替えても同じ写像になるので、右側で対応するものは

$$\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\} / \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の要素であるが、簡単のため  $2 \times 2$  行列のように書くことにする。そして、行列は常に  $\mathbb{H}^3$  にメビウス変換として作用しているとみなす。

本研究は科研費(課題番号:17K05250)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M50

キーワード: クライン群

\* 〒630-8506 奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部

e-mail: yamasita@ics.nara-wu.ac.jp

web: <http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamasita/>

$\theta \in (0, \pi/4)$  に対し、 $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の要素  $A_\theta, B_\theta$  を以下で定義する。

$$A_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & i \cos \theta \\ -i \cos \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}$$

複素平面内の閉円板で、単位円に直交し、その2つの交点の偏角がそれぞれ  $\alpha, \beta$  となっているものを  $C_{\alpha, \beta}$  と書くことにすると、 $A_\theta$  に対応するメビウス変換は  $C_{-\pi/2-\theta, -\pi/2+\theta}$  の外部を  $C_{\pi/2-\theta, \pi/2+\theta}$  の内部にうつし、 $B_\theta$  に対応するメビウス変換は  $C_{\pi-\theta, \pi+\theta}$  の外部を  $C_{-\theta, \theta}$  の内部にうつすことがわかる。 $A_\theta^{-1}, B_\theta^{-1}$  はそれらの逆になっているだけなので、 $\theta \in (0, \pi/4)$  なら4つの円が互いに交わらないことに注意すると、 $A_\theta$  と  $B_\theta$  で生成されるメビウス変換群  $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$  のリーマン球面における基本領域としてこれら4つの円の外部を選ぶことができる。 $(\mathbb{H}^3)$  では、それらを赤道に持つような4つの半球たちの外側である、)そして、 $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$  は離散的であり階数2の自由群と同型であることがわかる。

一般に  $D_1, D_{-1}, D_2, D_{-2}, \dots, D_n, D_{-n}$  を互いに交わらない複素平面内の閉円板とし、メビウス変換  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が  $D_i$  の外部を  $D_{-i}$  の内部に写しているとする。このような生成系を持つメビウス変換群  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$  を古典的ショットキー群とよぶ。上と同様に、古典的ショットキー群は離散的かつ階数  $n$  の自由群と同型である。

上の  $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$  の例に戻ろう。離散的なメビウス変換群が得られるのは  $0 < \theta < \pi/4$  の場合に限らない。 $\theta = \pi/4$  のときは円板が接するもの、 $\langle A_\theta, B_\theta \rangle$  は離散的であり階数2の自由群と同型である。さらに  $\theta$  を少し大きくしても、4つの円について隣どうしの交わりの角度が  $\pi/n$  (ただし  $n \geq 3$ ) などになっているときは、離散群がえられることがポアンカレの多面体定理よりわかる。ただし今度は自由群と同型にはなっていない。例えば  $A_\theta B_\theta A_\theta^{-1} B_\theta^{-1}$  の位数が有限となっている。また、円の交わりの角度が  $2\pi$  の無理数倍のときは、離散群にはならないこともわかる。

本稿では主に2元生成のメビウス変換群たちを考えることにする。素朴にはパラメータ空間は生成元の行列の成分から複素8次元空間となる。(後で次元がもっと下げられることを見る。) このパラメータ空間の中で、離散群に対応する部分とそうでない部分がどのように位置しているのかを調べたい。

### 3. 基本的な判定条件

まず、離散性の判定に用いられる基本的な方法について復習をしておく。

$G$  をメビウス変換群とする。 $\mathbb{H}^3$  の中に  $G$  の基本多面体を構成することができたら、 $G$  は離散群である。基本多面体を構成するには、 $\mathbb{H}^3$  の中の1点  $p$  を任意に固定し、 $G$  の任意の非自明な元による  $p$  の像より  $p$  の方に近い点の集合

$$\{x \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, p) < d(x, g(p)) \forall g \in G \setminus \{id\}\}$$

すなわちディリクレ領域を考えるのが基本的な方法である。ディリクレ領域の定義には無限個の不等式が現れるためこのままでは扱いが難しいが、ポアンカレの多面体定理を使うことにより、有限個の  $G$  の元を考えるだけで離散性を保証できる場合がある。2節の例がそのようなものであった。ただし、定理を用いるためにどのような有限個の元を選べばよいのかは分からないことも多い。

一方、与えられたメビウス変換群が離散的でないことを示すために用いられる代表例が、以下に述べるヨルゲンセンの不等式である。



**定理 3.1**  $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  が生成するメビウス変換群が非初等的かつ離散的ならば、以下が成立する：

$$|\mathrm{tr}^2 A - 4| + |\mathrm{tr} ABA^{-1}B^{-1} - 2| \geq 1$$

「非初等的」の定義は省略するが、自明な反例 ( $A = id$  の場合など) を排除するための条件と思っておけばよい。上の定理は離散性のための必要条件の形をしているが、対偶をとることで非離散性のための十分条件となる。

ヨルゲンセンの不等式による非離散性の判定は計算機での実装に向いていることを注意しておく。2元生成メビウス変換群  $G = \langle A, B \rangle$  が非離散的であることを示したいとして、 $A, B$  が上の逆向きの不等式をみたしていなくても、 $G$  の他の要素による組  $C, D$  で上の逆向きの不等式をみたしているものを1つでも見つけられればよい。もちろん  $\langle C, D \rangle$  は非初等的である必要があるが、 $G$  全体を生成している必要はない。

#### 4. 指標多様体

ここから先では、生成元を見やすくするため、2元生成メビウス変換群を  $F_2$  から  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  への表現として考えることにする。ただし  $F_2$  は階数2の自由群で、生成系  $F_2 = \langle X, Y \rangle$  を固定する。また、この表現全体の空間を  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$  と書く。

表現空間  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$  から  $\mathbb{C}^3$  への写像  $\iota$  を以下で定める：

$$\iota(\rho) = (\mathrm{tr} \rho(X), \mathrm{tr} \rho(Y), \mathrm{tr} \rho(XY))$$

$\rho' \in \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$  をもう一つの表現とする。ある  $M \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  が存在して

$$\rho(X) = M\rho'(X)M^{-1}, \quad \rho(Y) = M\rho'(Y)M^{-1}$$

となっているとき  $\rho$  と  $\rho'$  は共役といったが、このとき明らかに  $\iota(\rho) = \iota(\rho')$  である。逆に、2つの表現  $\rho, \rho' \in \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$  が  $\iota(\rho) = \iota(\rho')$  をみたすなら、ほとんどの場合 (より正確には像が irreducible の場合) には2つは共役になっている。そして、 $\rho(F_2)$  が離散的かどうかは共役類で決まるので、これからは、点  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  が離散的なものに対応しているかどうかを考えることにする。ちなみに、写像  $\iota$  は全射であることや、reducible な表現に対応する点は

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4\}$$

であることも知られている。

#### 5. 基本的な用語

この節では、後で使用する基本的な用語について簡単に説明しておく。

$A$  を  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  (または対応するメビウス変換) とする。このとき

- $\mathrm{tr} A \in \mathbb{R}$  で  $-2 < \mathrm{tr} A < 2$  のとき、 $A$  を楕円型という。
- $\mathrm{tr} A = \pm 2$  のとき、 $A$  を放物型という。
- 上記以外するとき、 $A$  を斜航型という。

$A$  は  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元なので  $\mathrm{tr} A$  は符号を除いてしか決まらない。しかし、上の分類は符号に依存していない。

$G$  をメビウス変換群とする。 $\mathbb{H}^3$  内の任意の点  $p$  に対して、 $p$  の  $G$  による軌道  $\{g(p) \mid g \in G\}$  の集積点全体の集合を  $G$  の極限集合とよび、 $\Lambda(G)$  と書く。 $\Lambda(G)$  は  $\widehat{\mathbb{C}}$  の閉部分集合である。 $\widehat{\mathbb{C}}$  における  $\Lambda(G)$  の補集合を不連続領域とよび、 $\Omega(G)$  と書く。また、 $\mathbb{H}^3$  における  $\Lambda(G)$  の凸包を  $\mathrm{Hull}(\Lambda(G))$  と書くことにする。そして、 $\mathrm{Hull}(\Lambda(G))/G$  を、 $G$  の凸核とよぶ。

## 6. Riley slice

2つの放物型のメビウス変換で生成されるメビウス変換群を考える。これら共役により以下の標準的な形に表すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \quad w \in \mathbb{C}$$

そして、 $G_w = \langle A, B_w \rangle$  が離散的かつ階数2の自由群と同型となるような  $w$  を求めたい。 $G_w$  の不連続領域  $\Omega$  を  $G_w$  の作用で割った商空間は1つの4点穴あき球面になるか2つの3点穴あき球面になる。 $w$  を連続的に動かせるのは前者で、

$$\mathcal{R} = \{w \in \mathbb{C} \mid G_w \text{ が離散的で } \Omega/G_w \text{ が4点穴あき球面}\}$$

を Riley slice とよぶ。そして、Keen と Series は  $G_w$  の凸核から pleating ray というものを導入して、Riley slice の記述を行った。



図 1: Riley slice

図1が得られた Riley slice である。複素パラメータ  $w$  による複素平面で、実部の範囲は  $\pm 6$ 、虚部の範囲は  $\pm 4$  である。外側の黒い部分が  $\mathcal{R}$  に対応する。境界が複雑な（フラクタル的な）形をしていることが観察される。次節では、Keen と Series による方法をべつのパラメータでも実行しようとした我々の試みを紹介する。

## 7. Diagonal slice

上で見たように2元生成メビウス変換群の指標多様体の座標は  $\mathrm{tr} A, \mathrm{tr} B, \mathrm{tr} AB$  で与えられる。筆者は Caroline Series 氏、Ser Peow Tan 氏と  $\mathrm{tr} A = \mathrm{tr} B = \mathrm{tr} AB$  となってい

る部分集合について、これを diagonal slice と名付けて、いつ対応する 2 元生成メビウス変換群  $G = \langle A, B \rangle$  が離散的かつ自由群となっているかを考えた。[7]

$$D = \{x \in \mathbb{C} \mid (x, x, x) \in \mathbb{C}^3 \text{ が離散的かつ自由に対応}\}$$

一般に  $G$  が離散かつ自由だと、商空間  $\mathbb{H}^3/G$  は種数 2 のハンドル体になる。ここで、仮定 ( $\text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } AB$ ) よりこの商空間は位数 3 の対称性をもつので、これですらに割ると、球体で内部に位数 3 の cone axis が 2 つあるようなオービフォールドが得られる。その表面は、位数 3 の錐特異点を 4 つ持つ球面である。これは Riley slice で放物型だったところが位数 3 の楕円型に変わったと思え、Riley slice と似た形の議論を進めることができた。

$\rho_x : F_2 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  を  $(x, x, x)$  に対応する表現とする。議論の流れは以下のとおりである。

1. 4 点穴あき球面上の本質的単純閉曲線のホモトピー類は有理数 (を適当な同値関係で割ったもの) で数え上げられることを示す。
2.  $\gamma \in F_2$  が 4 点穴あき球面上の本質的単純閉曲線に対応するとき、 $\text{tr } \rho_x(\gamma)$  は  $x$  の多項式であり、 $\gamma$  が対応する有理数の連分数展開から再帰的に計算されることを示す。以下この多項式を  $\psi_{p/q}(x)$  と書く。
3. 上の再帰計算の出発点となる有理数  $(0/1, 1/1)$  に対応する曲線で「折れ曲がり」が起きている凸包の具体的記述する。
4.  $G_x$  の凸包の境界が有理数  $p/q$  に対応する閉曲線で折れ曲がることと、 $x$  が  $\psi_{p/q}(x) \in \mathbb{R}$  のある非特異な枝  $\mathcal{P}_{p/q}$  に入ることが同値であることを示す。
5. 上の枝をうまく選べるように、 $x$  の絶対値が大きくなったときの  $\psi_{p/q}(x)$  の振る舞い (多項式の最高次の形) を記述する。
6.  $\mathcal{P}_{p/q}$  たちが稠密になっていることを示す。

その結果、以下の図の理論的正当化を行った。

定理 7.1 ([7])  $\Delta$  およびその中の  $\mathcal{P}_{p/q}$  たちは、図 2 のようになっている。

以下では、この結果の応用について簡単に紹介する。

## 8. ヨルゲンセン数の実現問題

この節は山崎亮介氏 (学習院高等部) との共同研究 [8] である。

非離散性の十分条件として、ヨルゲンセンの不等式があった。この左辺を用いて、 $A, B \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  に対して

$$J(A, B) = |\text{tr}^2 A - 4| + |\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} - 2|$$

とおく。さらに  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の 2 元生成部分群  $G$  に対し

$$J(G) = \inf\{J(A, B) \mid G = \langle A, B \rangle\}$$

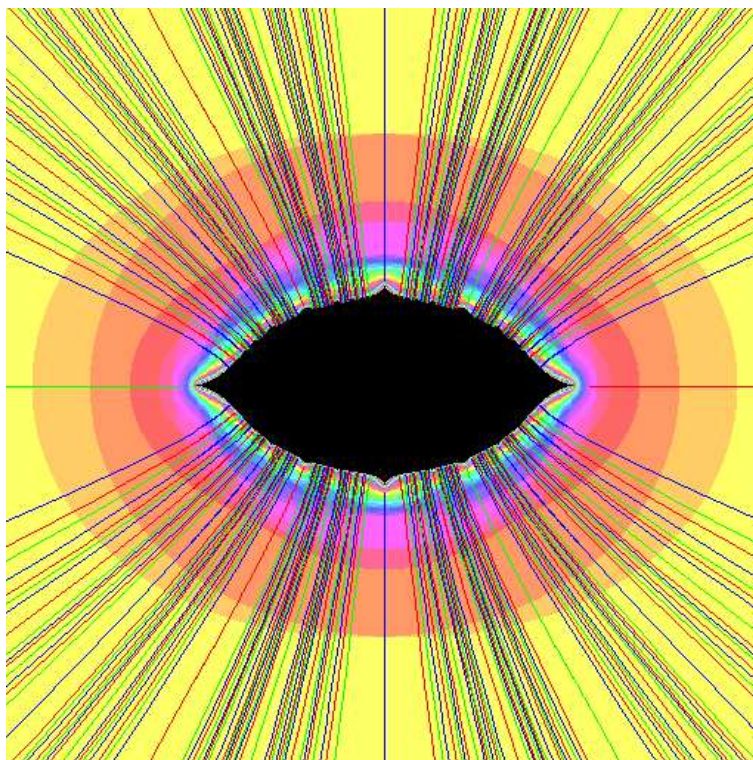


図 2: Diagonal slice : パラメータは複素数  $x = \text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } AB \in \mathbb{C}$ 、中心の黒い「目」の部分の補集合が diagonal slice で、目に向かう曲線たちが  $\mathcal{P}_{p/q}$  などと書かれていたもの (pleating ray) である。

とおきヨルゲンセン数とよぶ。ヨルゲンセンの定理より、 $G$  が非初等的かつ離散的ならば  $J(G) \geq 1$  である。等号が成立するような群はヨルゲンセン群と呼ばれ、分類の試みがなされている。ここでは大市および佐藤によって提起された以下の問題 [6] を考える。

**問題 8.1**  $r$  を 1 以上の実数とする。どのような  $r$  に対して、 $J(G) = r$  をみたす非初等的かつ離散的メビウス変換が存在するか。

大市と佐藤 [6] は、1 以上の任意の整数と 4 以上の任意の実数について、その値を実現する群の存在を主張したが、証明は出版されていない。

これに対して、山崎氏はまず以下の部分的回答を得た [9]。

**定理 8.2**  $w$  を Riley slice の要素とすると、対応する群  $G_w$  のヨルゲンセン数は  $|w^2|$  である。特に、約 2.467 以上の任意の実数  $r$  に対して、 $J(G) = r$  をみたす非初等的かつ離散的メビウス変換が存在する。

しかし、Riley slice ではこれ以下の値を実現することが不可能である。そこで diagonal slice を用いることにした。特に diagonal slice 内の群と通約可能なものから以下のものを選ぶ：

$$A_a = \begin{pmatrix} -3a/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

ただし  $a$  は 1 以上の実数とする。すると直接計算により次がわかる：

$$J(A_a, B) = \frac{(3a^2 - 1)^2}{4a^2}, \quad J(B, A_A) = 5$$

そして、 $a$  を 1 から適切な範囲まで動かすことにより  $J(A_a, B)$  が 1 から 4 までの値を連続にとることがわかる。さらに、このとき  $J(G_a) = J(A_a, B)$  が成立することを示すことで、以下を得た。

**定理 8.3 ([8])** 1 以上の任意の実数  $r$  に対して、 $J(G) = r$  をみたす非初等的かつ離散的メビウス変換が存在する。

パラメータ  $a$  を複素数の範囲で動かすことにより、もとの diagonal slice 全体で計算機実験も行った。すると、例えば 1 以上 4 以下のヨルゲンセン数を持つ群が diagonal slice により多く存在することが示唆された。

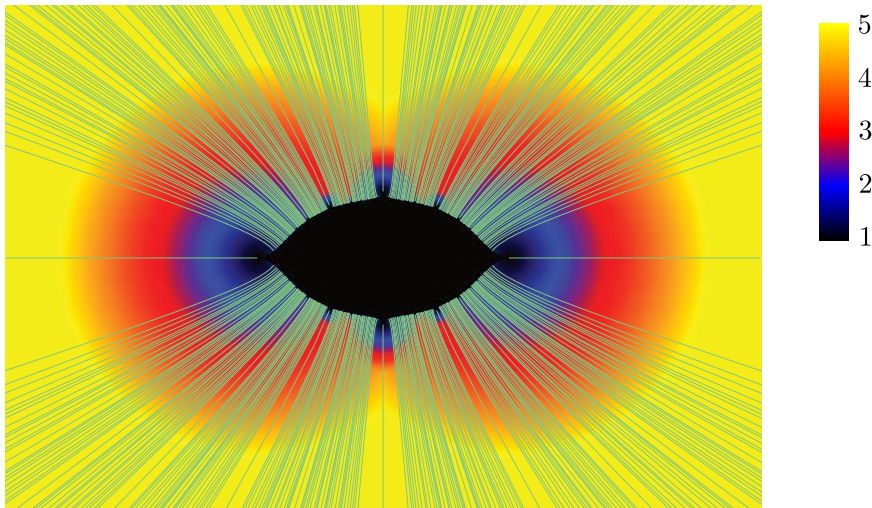


図 3: diagonal slice におけるヨルゲンセン数の評価実験： $x = \text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } AB \in \mathbb{C}$ ,  $-7 \leq \Re x \leq 8$ ,  $-5 \leq \Im x \leq 5$ 、色はヨルゲンセン数の評価、曲線は pleating ray、中心の黒い「目」の補集合が離散的で位数 2 の巡回群と位数 3 の巡回群の自由積と同型な部分

## 9. 算術的クライン群

本節は Gaven Martin 氏との共同研究である。

Martin らはこれまで 2 つの楕円型のメビウス変換によって生成された「算術的」クライン群の分類を目指して一連の研究を行ってきた。 (クライン群の算術性については [3] を参照。) 生成元の位数が大きい場合の分類はある程度進んでいるが、位数が小さい場合についてはあまり進んでいなかった。本節では、位数が 2 の元と位数が 3 の元とで生成されるメビウス変換群についての計算を紹介する。

ここでは彼らの方法に従って以下のパラメータを使う。

$$\beta_1 = \text{tr}^2 A - 4, \quad \beta_2 = \text{tr}^2 B - 4, \quad \gamma = \text{tr } ABA^{-1}B^{-1} - 2$$

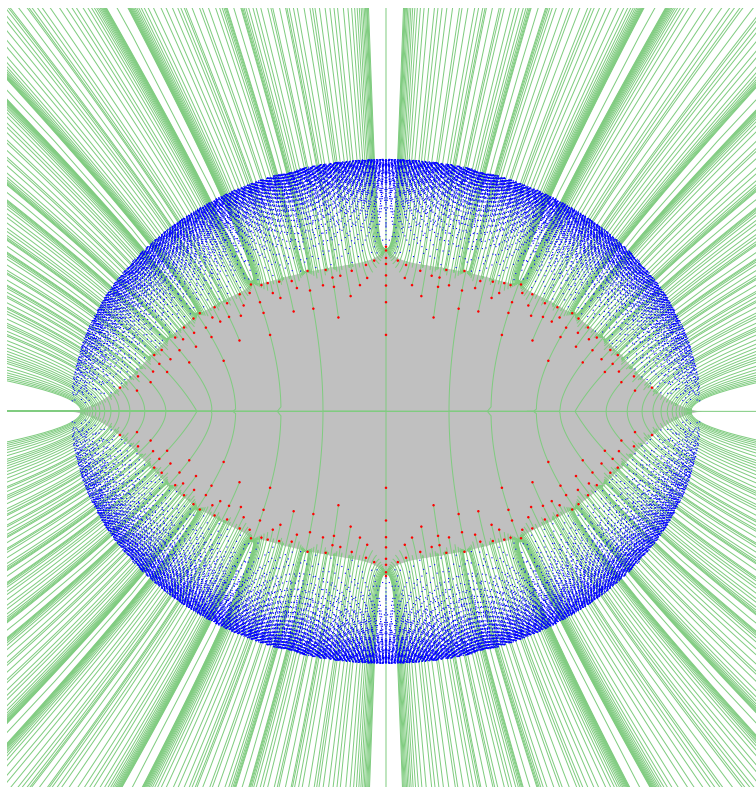


図 4: 位数 2 の楕円的元と位数 3 の楕円的元で生成される算術的クライン群: 点は Flammang-Rhin による候補の点で、中心の「目」の中に入っていて、延長された pleating ray に乗っているものが実際の算術的クライン群と思われる。

今は  $A, B$  の位数を固定しているので、 $\beta_1, \beta_2$  は定数である。そこでここでのメビウス変換群は  $\gamma$  の値だけできまる。この  $\gamma$  平面の中にある算術的クライン群をすべてリストアップするのが目標である。

まず、候補となる  $\gamma$  平面の点は以下の条件をみたすべきであることがわかってきた。

- 代数的整数で、その最小多項式の次数は 2 以上で、すべてのガロア共役は楕円

$$\left\{ x + yi \mid \left( \frac{x - 1/2}{5/2} \right)^2 + \left( \frac{y}{2} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

内に位置し、ちょうど 2 つが実数ではなく、残りは全て実数で  $[-1, 2]$  内にある。

このような条件をみたす最小多項式はちょうど 15909 個存在していることが、そのリストと共に Flammang-Rhin [2] によって与えられていた。そして、離散的で位数 2 の巡回群と位数 3 の巡回群の自由積になっているパラメータ ( $\gamma$ ) をここから排除したいが、そのための方法がこれまでなかった。

しかし、この Martin 氏らの  $\gamma$  平面と、筆者が Series 氏・Tan 氏と研究した diagonal slice は本質的に同じものであることを、簡単な計算で確かめることができた。そこで、pleating ray と Flammang-Rhin の点を両方プロットしてみたところ、どの点が算術的であるかとかなり強く示唆する実験結果を得た。(図 4) この画像は、AMS の Notices の 2016 年 11 号の表紙にもなった [1, 5]。短期間で Notices の担当者の方と表紙を作成していくプロセスは楽しく、得難い経験となった。

その後Martin氏とは、2つの放物型の元を「ランダム」に発生させた場合に、いつ離散的になるか (Riley slice に入るか) 等についての計算機実験も共同で行っている [4]。計算機を使ったアプローチはまだまだ様々なものが可能であると感じている。

## 参考文献

- [1] Bill Casselman. About the december cover. *Notices Amer. Math. Soc.*, 63(11):1248, 2016.
- [2] Valérie Flammang and Georges Rhin. Algebraic integers whose conjugates all lie in an ellipse. *Math. Comp.*, 74(252):2007–2015, 2005.
- [3] Colin Maclachlan and Alan W. Reid. *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, volume 219 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [4] Gaven Martin, Graeme O’Brien, and Yasushi Yamashita. Random kleinian groups, II : Two parabolic generators. *Experimental Mathematics*, (to appear).
- [5] Gaven J. Martin. Siegel’s problem in three dimensions. *Notices Amer. Math. Soc.*, 63(11):1244–1247, 2016.
- [6] Makito Oichi and Hiroki Sato. Jørgensen numbers of discrete groups. *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, 1519:105–118, 2006.
- [7] Caroline Series, Ser Peow Tan, and Yasushi Yamashita. The diagonal slice of Schottky space. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(4):2239–2282, 2017.
- [8] Yasushi Yamashita and Ryosuke Yamazaki. The realization problem for jrgensen numbers, 2017. [arXiv:1703.07732](https://arxiv.org/abs/1703.07732).
- [9] Ryosuke Yamazaki. Some extensions of Oichi-Sato’s theorem for the Jørgensen numbers of the Kleinian groups, 2016. Master thesis, University of Tokyo.

# 曲面の写像類群の仮想埋め込みについて

片山 拓弥 (広島大学, 日本学術振興会特別研究員 DC2)\*

群の仮想埋め込みとは, その群の有限指数部分群から別の群への単射準同型のことである. 写像類群の仮想埋め込みを誘導する(こともある)方法としては, 曲面の有限被覆をとる方法と境界に沿って曲面を貼り合わせる方法がよく知られている. 一方, 写像類群の仮想埋め込みに対する障害を与える研究として, 仮想コホモロジー次元の計算や自由アーベル部分群の最高階数の計算が行われてきた. そして近年, 直角アルティン群の理論が発展してきており, 直角アルティン群に関する結果の色々な応用が考えられるようになった. その一つとして写像類群に含まれる直角アルティン群の有り様を調べ, その有り様を比較することで仮想埋め込みの非存在性を主張する, というものがある. 本稿では, まず写像類群の仮想埋め込みに限らない準同型の位相的構成方法を簡単に紹介する. そして, 曲面の Birman–Hilden 分岐被覆と直角アルティン群を使って, ある種の写像類群の間に仮想埋め込みが存在するか否かを完全に決定できる, という久野恵理香氏と筆者の共同研究を紹介する.

## 1. 曲面の写像類群と準同型

本稿では種数  $g$  で,  $p$  個のマーク点をもち,  $b$  個の境界成分をもつ連結な有向曲面を  $S_{g,p}^b$  と記す. 本稿で曲面と言えば, この  $S_{g,p}^b$  を指すことにする. 曲面  $S_{g,p}^b$  の同相群  $\text{Homeo}_+(S_{g,p}^b)$  とは, 曲面  $S_{g,p}^b$  の向き付けを保ち, マーク点の集合を保ち, 境界上では恒等写像となる同相写像全体が, 写像の合成によってなす群のことである. 曲面  $S_{g,p}^b$  の写像類群  $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$  とは, 同相群  $\text{Homeo}_+(S_{g,p}^b)$  を, 恒等写像にイソトピックな同相写像全体がなす正規部分群により割って得られる商群のことである.  $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$  は  $p$  次対称群へ自然な準同型をもつが, この準同型の核を  $\text{PMod}(S_{g,p}^b)$  と書き純写像類群という. 写像類群  $\text{Mod}(S_{0,p}^1)$  を特に  $p$  次のブレイド群と呼び,  $B_p$  と記す.

写像類群の間の準同型の良く知られた構成法を紹介しよう. 詳細については写像類群の標準的教科書 [7] を適宜参照してほしい. 以下の節 1.1, 1.2, 1.3 では  $S, S'$  を曲面,  $P, P'$  をそれぞれ  $S, S'$  のマーク点集合とする.

### 1.1. マーク点の忘却

点  $*$  を曲面  $S$  のマーク点とする. 恒等写像  $\text{id}: S \rightarrow S'$  に対して,  $(\text{id})^{-1}(P') = P' \setminus \{*\}$  が成り立つとき, 次の短完全列が得られる:

**定理 1.1** (Birman).  $1 \rightarrow \pi_1(S', *) \rightarrow \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(S') \rightarrow 1$ .

### 1.2. 境界の消去

包含写像  $\iota: S \rightarrow S'$  に対して,  $\iota(P) \subset P'$  かつ  $S' \setminus \text{Int}N(\iota(S))$  が  $S_{0,1}^1$  に同相のとき, 次の短完全列が得られる.

**命題 1.2.**  $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(S') \rightarrow 1$ .

本研究は科研費 (課題番号:18J13327) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 20F36, 20F38, 57M12

キーワード: 写像類群, 仮想埋め込み, 直角アルティン群

\* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山1丁目3番1号 広島大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: tkatayama@hiroshima-u.ac.jp

web: <https://takuyakatayama.web.fc2.com/index.html>



ここで  $\text{Int}N(\iota(S))$  は曲面  $S'$  の部分曲面  $\iota(S)$  の “十分小さい近傍” の内部である。

### 1.3. 非円環的埋め込み

与えられた包含写像  $\iota: S \rightarrow S'$  に対して,  $\iota(P) \subset P'$  かつ  $S' \setminus \text{Int}N(\iota(S))$  のどの連結成分も  $S_{0,0}^1$  と  $S_{0,0}^2$  と  $S_{0,1}^1$  のいずれとも同相にはならないとき,  $\iota$  を **非円環的埋め込み** という。

**定理 1.3** ([23, Theorem 4.1]). 非円環的埋め込みが誘導する自然な準同型  $\iota_{\#}: \text{Mod}(S) \hookrightarrow \text{Mod}(S')$  は単射。

**定理 1.4** ([2, Theorem 1.1]). 曲面  $S$  の種数  $g$  を 6 以上,  $S'$  の種数を  $2g - 1$  以下とする.  $S'$  の種数が  $2g - 1$  のときには,  $S'$  は境界またはマーク点を 1 つ以上持つとする. このとき,  $\text{PMod}(S)$  から  $\text{PMod}(S')$  への任意の非自明な準同型はマーク点の忘却, 境界の消去, 非円環的埋め込みから誘導される準同型の合成である。

曲面の非分岐有限被覆も写像類群の間の埋め込みを誘導することがあり, 重要な手法であるが紙数の都合で本稿では立ち入らないので, [1] を見て頂きたい. 例えば次の定理が曲面の非分岐有限被覆を使って得られる:

**定理 1.5** ([1, Theorem 1], [11, Section 2]). 任意の  $g \geq 2$  に対して,  $g' > g$  が存在して  $\text{Mod}(S_{g,0}^0) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g',0}^0)$ .

ターゲットの写像類群の方が種数が低いときの準同型については, 次の結果が知られている。

**定理 1.6** ([10, Theorem 7]). もし  $g > g'$  ならば,  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  から  $\text{Mod}(S_{g',0}^0)$  への任意の準同型の像は自明 ( $g \neq 2$  のとき) または像の位数が高々 2 ( $g = 2$  のとき) である。

### 1.4. 境界に沿った円筒の貼り合わせ

2 つの曲面を境界に沿って貼り合わせることで, 曲面の埋め込みが得られる. 本稿では次の例を使う。

**例 1.7.** 曲面  $S_{g-1,0}^2$  に円筒  $S_{0,0}^2$  を境界に沿って貼り合わせると, 閉曲面  $S_{g,0}^0$  が得られる. この貼り合わせは自然な準同型  $\phi: \text{Mod}(S_{g-1,0}^2) \rightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$  を誘導する. 曲面  $S_{g-1,0}^2$  の境界に平行な単純閉曲線をそれぞれ  $\beta_1, \beta_2$  とする (図 1) と,  $T_{\beta_1} T_{\beta_2}^{-1} \in \text{Ker} \phi$  がただちに分かる. ここで,  $T_{\beta_i}$  は単純閉曲線  $\beta_i$  に関する Dehn twist.

本稿では本質的ではない単純閉曲線を考えないので, 本質的という言葉は省略することにする. ここで曲面上の単純閉曲線  $\alpha$  が **本質的である** とは,  $\alpha$  が高々 1 つのマーク点をもつディスクを張らないときをいう。

**定理 1.8** ([23, Theorem 4.1]). 上の例の  $\phi$  について  $\text{Ker} \phi = \langle T_{\beta_1} T_{\beta_2}^{-1} \rangle$  が成り立つ。

### 1.5. Birman–Hilden 分岐被覆

曲面の分岐被覆は写像類群の間の (仮想) 埋め込みを誘導することがある. この小節では, 次の定理の証明の概要を述べる。

**定理 1.9.**  $g \geq 1$  のとき, 次が成り立つ。

- (1) もし  $n \leq 2g$  ならば,  $B_n$  は  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に埋め込まれる。
- (2) もし  $p \leq 2g + 2$  ならば,  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  は  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に仮想的に埋め込まれる。

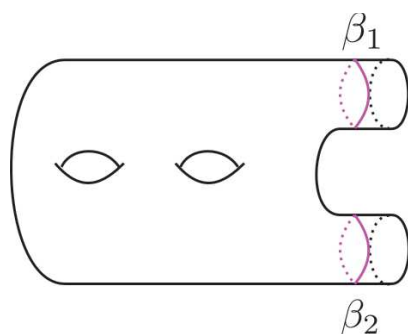


図 1: 境界に沿った単純閉曲線  $\beta_1, \beta_2$ .

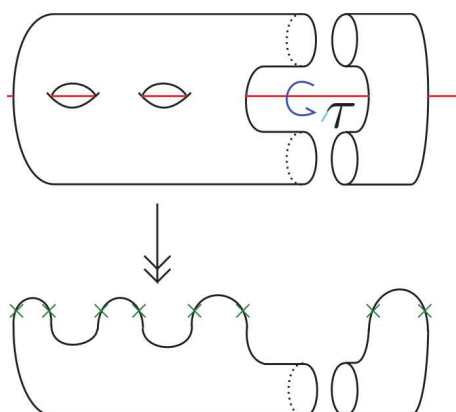


図 2: 図の  $\tau$  は曲面の  $\pi$ -回転で、シンボル  $\times$  はマーク点.  $S_{0,6}^1$  の Birman–Hilden 分岐被覆  $S_{2,0}^2$  と、図の曲面を境界に沿って貼り合わせることで得られる  $S_{0,8}^0$  の Birman–Hilden 分岐被覆  $S_{3,0}^0$  が描かれている.

図 2 にこれから紹介される Birman–Hilden 分岐被覆を書いておいた.

定理 1.9 (1) の証明の概要. 自然数  $n$  が  $n \leq 2g$  を満たすとする.  $S_{g-1,0}^2$  の中心軸をとり、この軸に関する  $\pi$ -回転  $\tau$  を考える. この  $\tau$  の固定点は  $2g$  個あり、分岐被覆  $p: S_{g-1,0}^2 \rightarrow S_{0,2g}^1$  が得られる. ファイバーと向き付けを保つ同相写像たちがなす、 $\text{Homeo}_+(S_{g-1,0}^2)$  の部分群を  $\text{SHomeo}_+(S_{g-1,0}^2)$  と記す. ここで同相写像  $f: S_{g-1,0}^2 \cong S_{g-1,0}^2$  がファイバーを保つとは、 $p(x) = p(x')$  が成り立つ全ての  $x, x' \in S_{g-1,0}^2$  に対して  $p(f(x)) = p(f(x'))$  が成り立つときをいう. ファイバーと向き付けを保つ  $S_{g-1,0}^2$  の同相写像は、商  $S_{0,2g}^1$  の向き付けを保つ同相写像を誘導する. 逆に、商  $S_{0,2g}^1$  の向き付けを保つ同相写像は、分岐被覆  $S_{g-1,0}^2$  のファイバーと向き付けを保つ同相写像にリフトする. 従って全射準同型  $\text{SHomeo}_+(S_{g-1,0}^2) \twoheadrightarrow \text{Homeo}_+(S_{0,2g}^1)$  を得る. Birman–Hilden 理論により、 $S_{g-1,0}^2$  の恒等写像にイソトピックなファイバーを保つ同相写像がかってに与えられたとき、その恒等写像へのイソトピーはファイバーを保つ同相写像の連続族によって実現できるので、上の全射準同型は自然な全射準同型

$$d: \text{SMod}(S_{g-1,0}^2) \twoheadrightarrow \text{Mod}(S_{0,2g}^1) = B_{2g}$$

を誘導する. ここで**対称部分群**  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$  は、 $\text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$  の写像類のうち、代表元としてファイバーを保つ同相写像をとれるような写像類がなす部分群である. 上で述べたリフトをとる操作を考えると、この  $d$  が同型であることがわかる. 以上により埋

め込み

$$d^{-1}: B_{2g} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$$

が得られる.

さらに, 定理1.8の準同型を部分群  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2) \cong B_{2g}$  に制限すると,  $B_{2g}$  が  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に埋め込まれる. これを示すためには  $T_{\beta_1} T_{\beta_2}^{-1}$  の冪  $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$  が  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$  に属したと仮定して  $m = 1$  を導けばよい. では, ある冪  $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$  が  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$  に属したとしよう.  $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$  は写像類群  $\text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$  の中心の元であるから, 対称部分群  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$  の中心の元でもある.  $B_{2g}$  の中心は巡回的で,  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$  では  $\langle T_{\beta_1} T_{\beta_2} \rangle$  に等しい. この部分群  $\langle T_{\beta_1} T_{\beta_2} \rangle$  に  $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$  が属するためには  $m = 1$  でなければならない. 以上により,  $B_{2g}$  は  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に埋め込まれる.  $B_n \hookrightarrow B_{2g}$  であるから, 主張が従う.  $\square$

この例では被覆のデッキ変換群  $\langle \tau \rangle$  が写像類群  $\text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$  の部分群ではないために, 対称部分群  $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$  の商をとる必要はないが, 一般的には対称部分群をデッキ変換群で割らなければならない. さらに言えば, 任意の同相写像に対してリフトが存在するというのもこの例の特殊なところである.

定理 1.9 (2) の証明の概要.  $p = 2g + 2$  のとき.  $S_{g,0}^0$  の中心軸をとり, この軸に関する  $\pi$ -回転  $\tau$  を考える. この  $\tau$  の固定点は  $2g + 2$  個あり, 分岐被覆  $p: S_{g,0}^0 \rightarrow S_{0,2g+2}^0$  が得られる. この場合  $\tau$  は  $\text{SMod}(S_{g,0}^0)$  の元であり, 商  $S_{0,2g+2}^0$  の恒等写像を誘導する. 従って, 前例と同様の議論 (cf. [7, Section 9.4]) を参照してほしい) をすると,

$$\text{SMod}(S_{g,0}^0) / \langle \tau \rangle \cong \text{Mod}(S_{0,2g+2}^0)$$

が得られる.  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  は良く知られているように剰余有限であるから,  $\tau$  を含まない有限指数部分群  $H$  をもつ.  $H \cap \text{SMod}(S_{g,0}^0)$  は  $\text{SMod}(S_{g,0}^0)$  の有限指数部分群であり, 上の同型を経由して  $\text{Mod}(S_{0,2g+2}^0)$  の有限指数部分群として埋め込まれる. 故に,  $\text{Mod}(S_{0,2g+2}^0)$  の有限指数部分群で  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に埋め込まれるものが存在する.

次に,  $p \leq 2g + 1$  のときを考える. 純ブレイド群  $PB_{p-1}$  ( $B_{p-1}$  から  $(p-1)$ -次対称群への自然な準同型の核) が直積分解  $PB_{p-1} \cong \text{PMod}(S_{0,p}^0) \times \mathbb{Z}$  をもつことに注意する. 定理 1.9 (1) より  $B_{p-1} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$  だから,  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  は  $\text{PMod}(S_{0,p}^0)$  を部分群に持つ.  $\text{PMod}(S_{0,p}^0)$  は  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  の有限指数部分群だから,  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  の  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  への仮想埋め込みが得られた.  $\square$

**注意 1.10.**  $p \geq 2$  のとき,  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  はねじれ元をもち,  $B_{p-1}$  にはねじれ元がないので,  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  そのものは  $B_{p-1}$  には埋め込まれない. しかし有限指数部分群  $\text{PMod}(S_{0,p}^0)$  をとれば,  $B_{p-1}$  に埋め込まれる.

Birman–Hilden 理論については, [22] にまとめられており, Birman–Hilden による原論文の他 [7] にも証明の細部が書かれている.

ブレイド群から写像類群への準同型については詳しく調べられており, Castel [6] は, ブレイド群からマーク点なしの曲面の写像類群への準同型を特徴づけている.

**定理 1.11** (Castel).  $g \geq 1$  とする. このとき,  $B_n$  が  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に埋め込まれるための必要十分条件は  $n \leq 2g$  である.

## 2. 仮想埋め込みの障害

仮想埋め込みの非存在をいうには、写像類群の指数有限部分群の間で不変な “something” を使えばよい. その “something” としては、まず写像類群の**仮想コホモロジー次元**がある. 群  $G$  のコホモロジー次元  $\text{cd}(G)$  とは、群コホモロジー  $H^n(G, M)$  が非自明になるように  $G$ -加群  $M$  をとることができる次元  $n$  の最大値のことである. 群にねじれ元があるとその群のコホモロジー次元が  $\infty$  になることが知られているが、群にねじれ元がなければそのコホモロジー次元が有限になることもある. Serre の定理 [25, Theorem 9.2] によれば、ねじれのない群のコホモロジー次元とその有限指数部分群のコホモロジー次元は一致する. 群論においては、有限指数部分群をとればねじれが解消されることもあり、写像類群はねじれのない有限指数部分群を持つ. そこで、写像類群の仮想コホモロジー次元  $\text{vcd}(\text{Mod}(S))$  を、ねじれのない有限指数部分群のコホモロジー次元として定義すれば、Serre の定理により well-defined である. 写像類群の仮想コホモロジー次元は Harer によって計算されている:

**定理 2.1** ([9, Theorem 4.1]).  $2g + p + b > 2$  ならば、

$$\text{vcd}(\text{Mod}(S_{g,p}^b)) = \begin{cases} 4g - 5 & (p + b = 0) \\ 4g + p + 2b - 4 & (p + b > 0) \\ p + 2b - 3 & (g = 0) \end{cases}$$

群  $H$  が群  $G$  に仮想的に埋め込まれるとき、 $\text{vcd}(H) \leq \text{vcd}(G)$  が成り立つ. 従って、仮想コホモロジー次元は仮想埋め込みの障害として使うことができる.

他にも自由アーベル部分群の最高階数は同様に仮想埋め込みの障害として使うことができる.

**定理 2.2** ([5, Theorem A]). 曲面  $S_{g,p}^b$  の Euler 標数が負であるとする. このとき、 $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$  に埋め込まれる自由アーベル群の最高階数は  $3g - 3 + p + 2b$ .

Ivanov–McCarthy [11, Theorem 1] は写像類群の自己への埋め込みが実際には曲面の微分同相から誘導されることを示し、写像類群が co-Hopfian であることを示した. すなわち、写像類群の自己埋め込みは自己同型しかない. さらに、Shackleton [24, Theorem 2] によって、自由アーベル部分群の最高階数が等しく、最高階数が十分大きい2つの写像類群の間には、仮想埋め込みが存在しないことが証明された. この結果により、十分複雑な写像類群の任意の有限指数部分群は co-Hopfian という事実が導かれる.

## 3. 直角アルティン群

与えられた単純グラフ  $\Gamma$  に対して、 $\Gamma$  に付随する**直角アルティン群**とは次の表示により与えられる群である:

$$A(\Gamma) = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \mid \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \text{ ならば } v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} = 1 \rangle.$$

ここで  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  と  $E(\Gamma)$  はそれぞれ  $\Gamma$  の頂点集合、辺集合である. 以降、グラフ  $\Gamma$  の頂点集合を  $V(\Gamma)$ 、辺集合を  $E(\Gamma)$  により記す. 自由アーベル群と自由群はそれぞれ完全グラフ、無辺グラフに付随する直角アルティン群であり、一般の直角アルティン群は自由アーベル群と自由群の間に位置する群ともできる. 直角アルティン群は [4] により定義され、最初は純代数的に研究されたが、当時大きく発展していた組

み合わせ群論の影響もあって、幾何学との関連が徐々に研究され始めた。特に大きな成果は、Agol, Wiseによる有限体積完備3次元双曲多様体に関する仮想ファイバー予想の肯定的解決だと思われる。特に、Agolは3次元閉双曲多様体の基本群が直角アルティン群への仮想埋め込みをもつことを示すことで、3次元閉双曲多様体の有限被覆で  $S^1$  上の曲面束となるものが存在することを示した。これについては蒲谷氏による解説 [12] があるのでそちらを参照していただきたい。本稿ではむしろ直角アルティン群から別の複雑な群 (曲面の写像類群) への埋め込みに興味がある。次の補題は直角アルティン群の一つの代数的良さである。

**補題 3.1.**  $A$  を直角アルティン群,  $G$  を群,  $H$  を  $G$  の有限指数部分群とする。もし  $A$  が  $G$  に埋め込まれるならば,  $A$  は  $H$  に埋め込まれる。

## 4. 写像類群の部分群としての直角アルティン群

### 4.1. 埋め込み定理

この節では次の問題について考える。

**問題 4.1.** 与えられたグラフと曲面  $S_{g,p}^0$  に対して,  $A(\Gamma)$  は  $\text{Mod}(S_{g,p}^0)$  に埋め込まれるか否かを決定せよ。

有限生成自由アーベル群が Dehn twist を使って実現できるように, 自由群が曲面の写像類群の部分群として実現できることが古くから知られていた。実際, 次の定理により自由群を写像類群の部分群として簡単に実現できる。

**定理 4.2** ([7, Section 3.5]). 曲面  $S$  は  $S_{1,1}^0$  に同相ではなく,  $\chi(S) < 0$  を満たすとする。そして,  $\alpha$  と  $\beta$  を  $S$  上の単純閉曲線とする。このとき,

$$\text{Mod}(S) \geq \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (i(\alpha, \beta) = 0) \\ B_3 & (i(\alpha, \beta) = 1) \\ F_2 & (i(\alpha, \beta) \geq 2). \end{cases}$$

ここで  $i(\alpha, \beta)$  は  $\alpha$  と  $\beta$  の幾何学的交点数。

上の定理において  $i(\alpha, \beta) = 1$  であっても,  $T_\alpha$  と  $T_\beta$  の2乗をとれば階数2の自由群  $F_2$  と同型になる。その一般化である「写像類群において Dehn twist の十分大きな冪をとれば直角アルティン群を部分群として実現できる」という定理が, Koberda によって証明された。この Koberda の定理を述べる前に, 用語を復習しよう。曲面  $S$  の **曲線グラフ**  $\mathcal{C}(S)$  とは, 頂点集合を  $S$  上の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体のなす集合とし, 2つのイソトピー類  $[\alpha], [\beta]$  が辺を張るのは代表元  $\alpha$  と  $\beta$  の最小交点数が0のときと定めて得られるグラフである。グラフの頂点間の写像  $\phi: V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$  が **準同型** であるとは,  $\Gamma$  において辺を張る任意の頂点のペア  $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$  に対して  $\phi(v_1)$  と  $\phi(v_2)$  が  $\Gamma'$  において辺を張るときをいい, 記号を簡略にするため  $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  と書く。また, グラフの準同型  $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  が **フル埋め込み** であるとは,  $\phi$  が単射で, かつ  $\phi(v_1)$  と  $\phi(v_2)$  が  $\Gamma'$  において辺を張るような任意の頂点のペア  $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$  に対して,  $v_1$  と  $v_2$  が  $\Gamma$  において辺を張るときをいい,  $\Gamma$  を  $\Gamma'$  の **フル部分グラフ** という。

**定理 4.3** ([21, Theorem 1.1]).  $\Gamma$  を曲線グラフ  $\mathcal{C}(S_{g,p}^0)$  のフル部分グラフとし,  $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_m\}$  とする。このとき, 十分大きな自然数  $n$  に対して,  $T_{v_1}^n, \dots, T_{v_m}^n$  は  $\text{Mod}(S_{g,p}^0)$

内で直角アルティン群  $A(\Gamma)$  を生成する. ここで,  $T_{v_i}$  は本質的単純閉曲線  $v_i$  に関する Dehn twist.

残念ながら, 全ての直角アルティン群がこの定理からただちに得られるわけではない.

**定理 4.4** ([20, Theorem 3]).  $3g - 3 + p \geq 4$  のとき, あるグラフ  $\Gamma$  に対して  $\Gamma \not\leq \mathcal{C}(S_{g,p}^0)$  であるが  $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^0)$ .

このような直角アルティン群の存在が問題 4.1 の解決を難しくしている. 「定義グラフは曲線グラフのフル部分グラフではないが, 直角アルティン群は写像類群に埋め込まれる」という例については, 現状ではまだ少しの一般化程度にとどまっており, 今後の研究が望まれる.

## 5. 直角アルティン群の埋め込みの標準形とその組み合わせ論的解釈

直角アルティン群から写像類群への埋め込みは, 曲線グラフを使って組み合わせ論的に解釈することができる. 直角アルティン群の埋め込み  $\psi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$  が **(KK) 条件を満たす** とは,  $\Gamma$  の各頂点  $v$  に対して,  $\psi(v)$  が互いに可換な Dehn twist の積として表示されるときをいう. Kim–Koberda は (KK) 条件を満たす埋め込みが “標準的” であることを示した.

**定理 5.1** ([18, Lemma 2.3]). 与えられた直角アルティン群の埋め込み  $\phi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$  に対して, (KK) 条件を満たす埋め込み  $\psi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$  が存在する.

Kim–Koberda は, この定理を使って曲線グラフの彩色数が直角アルティン群から写像類群への埋め込みに対する障害になることを示した [18, Theorem 2.1]. また, 定理 5.1 は, 定義グラフと曲線グラフの補グラフをとることで, グラフ理論的 “多価準同型” を与えているものと思える.

**Definition 5.2.** グラフ  $\Gamma'$  から  $\Gamma$  への頂点の間の対応  $\phi: V(\Gamma') \leftrightarrow V(\Gamma)$  が **グラフの多価準同型** であるとは,  $\phi$  が次の条件を満たすときをいう:  $\Gamma'$  において辺を張る任意の頂点のペア  $v_1 \in V(\Gamma')$  と  $v_2 \in V(\Gamma')$  に対して,  $u_1 \in \phi(v_1)$  かつ  $u_2 \in \phi(v_2)$  ならば,  $u_1$  と  $u_2$  は  $\Gamma$  において辺を張る.

グラフの多価準同型は, もし写像であるならば通常の意味のグラフの準同型である. 写像でないグラフの多価準同型の例は, [17, Figure 6] に書いてあるので, そちらを見てほしい.

**例 5.3** (道グラフ  $P_8$  の巡回グラフ  $C_5$  への沈め込み). 8 頂点の道グラフ  $P_8$  の頂点を  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  とし,  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(P_8)$  とする. また, 5 頂点の巡回グラフ  $C_5$  の頂点を  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  とし,  $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(C_5)$  とする.  $\phi(v_j) = u_j$  ( $1 \leq j \leq 5$ ),  $\phi(v_6) = u_1$ ,  $\phi(v_7) = u_2$ ,  $\phi(v_8) = u_3$  と定めることでグラフの準同型  $\phi: P_8 \rightarrow C_5$  を得る (図 3 を参照). もちろん,  $\phi$  は多価準同型である. このグラフの準同型は, 埋め込み  $\psi: A(C_5^c) \hookrightarrow A(P_8^c)$  が誘導するグラフの準同型でもある (Casals–Ruiz–Duncan–Kazachkov). ここで,  $P_8^c$  は適当な曲面の曲線グラフのフル誘導部分グラフとして実現されていると思ってよく, そうすると  $P_8^c$  の頂点は Dehn twist だと思える.

グラフ  $\Gamma$  の **補グラフ**  $\Gamma^c$  とは, 頂点集合  $V(\Gamma^c)$  を  $V(\Gamma)$  とし, 辺集合を  $E(\Gamma^c) = \{\{v_1, v_2\} \mid \{v_1, v_2\} \notin E(\Gamma)\}$  とするグラフのことである. 次の命題は, (KK) 条件を満たす埋め込みを組み合わせ論的に解釈しようというものである.

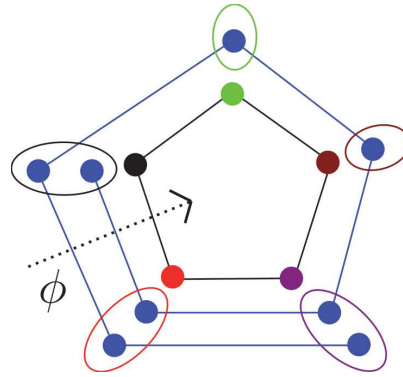


図 3: 道グラフ  $P_8$  の巡回グラフ  $C_5$  への沈め込み.

**命題 5.4.**  $\Gamma$  を有限グラフとする. (KK) 条件を満たす埋め込み  $\psi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$  は, 曲線グラフの  $\mathcal{C}(S)$  のあるフル部分グラフ  $\Gamma'$  に対して, 補グラフの間の多価準同型  $\phi: (\Gamma')^c \looparrowright (\Gamma)^c$  を誘導する.

証明. 埋め込み  $\psi$  が (KK) 条件を満たすとす. 直角アルティン群の定義グラフ  $\Gamma$  の任意の頂点  $u$  に対して,  $\psi(u)$  は Dehn twist の積である. そこで,  $\psi(u)$  ( $u \in V(\Gamma)$ ) の表示に現れる Dehn twist を実現する本質的単純閉曲線の集合

$$V' := \{v \in V(\mathcal{C}(S)) \mid T_v \text{ はある } u \text{ に対して } \psi(u) \text{ の表示に現れる} \}$$

を考え,  $\Gamma'$  を  $V'$  が  $\mathcal{C}(S)$  において誘導する有限フル部分グラフとする. 補グラフ  $(\Gamma')^c$  の頂点  $v \in V'$  に対して  $T_v$  が  $\psi(u_i)$  の表示に現れるような  $\Gamma$  の全ての頂点  $u_i$  を対応させ, この対応を  $\phi$  と書く. 対応  $\phi$  はもちろん一般的には写像としては定義されないがそれでも構わない. では  $\phi$  がグラフの多価準同型であることを示そう.  $(\Gamma')^c$  において辺を張る任意の頂点のペア  $v_1 \in V((\Gamma')^c)$  と  $v_2 \in V((\Gamma')^c)$  をとり. そして, 任意に  $w_1 \in \phi(v_1)$  と  $w_2 \in \phi(v_2)$  をとり,  $w_1$  と  $w_2$  が  $\Gamma^c$  において辺を張ることを示す. 仮定より, 頂点  $v_1$  と  $v_2$  は  $(\Gamma')^c$  において辺を張るから,  $\Gamma'$  では辺を張らず, 従って  $v_1$  と  $v_2$  は本質的単純閉曲線としては交わらないように実現できない. それゆえ  $v_1$  と  $v_2$  は非可換な Dehn twist に対応する. この事実と  $\psi$  の (KK) 条件を使うと,  $\psi(w_1)$  と  $\psi(w_2)$  は  $\text{Mod}(S)$  において非可換であることを示すことができる (詳細については [17, Proposition 3.4] の証明を参照してほしい). いま,  $\psi$  は準同型であるから,  $w_1$  と  $w_2$  は直角アルティン群  $A(\Gamma)$  において非可換でなければならない. すなわち,  $\Gamma$  において  $w_1$  と  $w_2$  は辺を張らず, 補グラフ  $\Gamma^c$  において辺を張る. 以上により  $\phi$  は多価準同型.  $\square$

この多価準同型を用いることで, 直角アルティン群からの埋め込みの障害をすっきりと述べることができる. 次は, 被覆理論における道の持ち上げ定理の類似である.

**命題 5.5** ([17, Proposition 3.9]).  $\Gamma$  を有限グラフ,  $P_n$  を頂点数  $n$  の道グラフとする. グラフ多価準同型  $\phi: (\Gamma')^c \looparrowright (\Gamma)^c$  が (KK) 条件を満たす埋め込み  $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$  から誘導されたとする. ここで,  $\Gamma'$  は曲線グラフ  $\mathcal{C}(S)$  の有限フル部分グラフである. このとき, 任意のフル埋め込み  $\iota: P_n \rightarrow \Gamma^c$  に対してフル埋め込み  $\tilde{\iota}: P_n \rightarrow (\Gamma')^c$  が存在して,  $\phi \circ \tilde{\iota} = \iota$ .

直角アルティン群の埋め込みと, グラフの被覆の理論との関係は他にも例えば [19] で調べられている.

**系 5.6.**  $\Gamma$  を道グラフの補グラフとする. このとき,  $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^0)$  ならば  $\Gamma \leq \mathcal{C}(S_{g,p}^0)$ .

従って, Koberda の埋め込み定理と合わせると,  $\Gamma$  が道グラフの補グラフのとき,  $A(\Gamma)$  から写像類群への埋め込みが存在するか否かは, 曲線グラフ内に  $\Gamma$  がフル部分グラフが存在するか否か, という問題へ帰着される.  $\Gamma$  が道グラフの補グラフのときには, 帰納的議論によって比較的簡単に後者の問題を解決することができ, 次の定理を得る.

**定理 5.7** ([17, Theorem 1.3]).  $A(P_m^c) \leq \text{Mod}(S_{g,p}^0)$  なるためには, 自然数  $m$  が次の不等式を満たすことが必要十分である.

$$m \leq \begin{cases} 0 & ((g, p) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}) \\ 2 & ((g, p) \in \{(0, 4), (1, 0), (1, 1)\}) \\ p - 1 & (g = 0, p \geq 5) \\ p + 2 & (g = 1, p \geq 2) \\ 2g + p + 1 & (g \geq 2). \end{cases}$$

道グラフの補グラフ以外にも, "巡回グラフと1点グラフの非交和の補グラフ" のときは, 比較的容易に問題 4.1 を解くことができる. 次の定理は [17, Theorem 1.4 (2)] に少し議論を加えると証明できる.

**定理 5.8.**  $A(C_m^c) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow B_n$  なるためには  $m \leq n + 1$  なることが必要十分である.

閉曲面の写像類群については次が成り立つ.

**定理 5.9** ([16]).  $A(C_m^c) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$  なるためには,  $m \leq 2g + 1$  なることが必要十分である.

## 6. 主定理

曲面の Birman–Hilden 分岐被覆を用いると定理 1.9 が得られるのであった. この節では次の定理を証明する.

**定理 6.1** (Katayama–Kuno).  $g \geq 1$  のとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1) もし  $B_n$  が  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に仮想的に埋め込まれるならば,  $n \leq 2g$  が成り立つ.
- (2) もし  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  が  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に仮想的に埋め込まれるならば,  $p \leq 2g + 2$  が成り立つ.

証明. (1)  $B_n$  が  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に仮想的に埋め込まれたとする. すなわち,  $B_n$  のある有限指数部分群  $H$  が  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  に埋め込まれたとする.  $g = 1$  のとき,  $\text{Mod}(S_{1,0}^0) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  は仮想的には自由群であり (有限指数部分群で自由群になるものがある),  $B_3$  は階数 2 の自由アーベル群を含むから,  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  に仮想埋め込みをもつことはない. 定理 5.8 より  $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z}$  が  $B_n$  に埋め込まれるから, 補題 3.1 により  $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z}$  が  $H$  にも埋め込まれる. 従って仮定より,  $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z}$  は  $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$  にも埋め込まれる. よって定理 5.9 より,  $n + 1 \leq 2g + 1$ , すなわち  $n \leq 2g$  を得る.

(2) 証明の構造は (1) と同様である.  $g = 1$  のとき,  $\text{Mod}(S_{1,0}^0) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  は仮想的には自由群であり,  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  は  $p \geq 5$  のとき階数 2 の自由アーベル群を含むため,  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$



は  $p \geq 5$  のとき  $SL(2, \mathbb{Z})$  に仮想埋め込みをもつことはない.  $g \geq 2$  のときには以下のように議論すればよい.  $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$  に  $A(P_{p-1}^c)$  が埋め込まれることと  $A(P_m^c) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$  なる最大の  $m$  が  $2g+1$  であることから  $p-1 \leq 2g+1$ , すなわち  $p \leq 2g+2$  が従う.  $\square$

## 7. 今後の課題

### 7.1. 1 節について

**問 7.1.** 曲面  $S'$  は曲面  $S$  からマーク点を忘却して得られるとする. このとき,  $\text{Mod}(S')$  から  $\text{Mod}(S)$  に仮想埋め込みは存在するか?

もし仮想埋め込みがないなら, Birman の短完全列は仮想的にさえ分裂しない. もし仮想埋め込みがあるなら, 仮想埋め込みの新しい構成法と言えるので面白い.

### 7.2. 4 節について

問題 4.1 を解決する前に, そもそもアルゴリズムが存在するか否かを問うのは自然だろう. 曲線グラフ  $\mathcal{C}(S)$  と有限グラフ  $\Gamma$  が与えられたときに,  $\Gamma$  が  $\mathcal{C}(S)$  のフル部分グラフになるかどうかを判定するアルゴリズムが存在する.

**問 7.2.** 問題 4.1 を解くアルゴリズムは存在するか?

曲面が簡単な場合にはこの問への解答は肯定的である [20, Theorem 2]. 一般の曲面の場合には現時点ではアルゴリズムが存在するか否か筆者には予想もつかない.

また, 定理 4.3 は, Dehn twist を使っているが, 擬 Anosov 写像類を用いても同様の結果が得られる. どちらも十分大きな冪をとれば直角アルティン群を生成することが分かるが, その具体的な冪をどれだけ大きくとれば良いかは分かっていないように思われる. Dehn twist が 2 つのときは 2 乗をとれば十分である. Dehn twist が 3 つのときには, どれほど大きな冪をとれば直角アルティン群を生成するか? 2 つの擬 Anosov 写像類のときには藤原氏 [8] の研究がある.

### 7.3. 5 節について

**問 7.3.** 定理 5.1 (及び命題 5.4) からどのような埋め込みの障害が抽出できるだろうか?

### 7.4. 6 節について

現時点では次のように予想することが自然であるように思われる.

**予想 7.4.**  $n$  次ブレイド群  $B_n$  が写像類群  $\text{Mod}(S_{g,p}^0)$  に仮想的に埋め込まれるならば,  $S_{0,n}^1$  そのものまたは  $S_{0,n}^1$  の Birman–Hilden 分岐被覆が曲面  $S_{g,p}^0$  に非円環的または “円筒的に” 埋め込まれる.

筆者は直角アルティン群の研究にかなり偏っており, 従って本稿にもその色が強く出てしまった. しかしこの分野には素晴らしいサーベイとして Aramayona–Souto [3] があり, これにも問題が書かれている. 他に [15] にも少し問題が書かれている.

## 参考文献

- [1] J. Aramayona, C. Leiniger and J. Souto, *Injections of mapping class groups* *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 5, 2523–2541.
- [2] J. Aramayona and J. Souto, *Homomorphisms between mapping class groups*, *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 4, 2285–2341.

- [3] J. Aramayona and J. Souto, *Rigidity phenomena in the mapping class group*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. VI, 131165, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 27, Eur. Math. Soc., Zrich, 2016.
- [4] A. Baudisch, *Subgroups of semifree groups*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **38** (1981), no. 1–4, 19–28.
- [5] J. S. Birman, A. Lubotzky, and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1107–1120.
- [6] F. Castel, *Geometric representations of the braid groups*, Asterisque, No. 378 (2016), vi+175 pp. ISBN: 978-2-85629-835-0.
- [7] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [8] K. Fujiwara, *Subgroups generated by two pseudo-Anosov elements in a mapping class group. II. Uniform bound on exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 6, 4377–4405.
- [9] L. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 157–176.
- [10] W. Harvey and M. Korkmaz, *Homomorphisms from mapping class groups*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 2, 275–284.
- [11] N. V. Ivanov and J. D. McCarthy, *On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups I*, Invent. Math. **135** (1999), 425–486.
- [12] 蒲谷祐一, Agol による Virtual Fiberings Conjecture の解決について, available at [http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kabaya/nichidai\\_benkyo\\_kai/nichidai\\_benkyo\\_kai.pdf](http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kabaya/nichidai_benkyo_kai/nichidai_benkyo_kai.pdf).
- [13] T. Katayama, *Virtual embeddings between mapping class groups of surfaces*, Problems on Low-dimensional Topology, 2018, available at <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ildt/prob18.pdf>.
- [14] T. Katayama, *On virtual embeddings of the braid groups into the surface mapping class groups*, in preparation.
- [15] T. Katayama and E. Kuno, *The RAAGs on the complement graphs of path graphs in mapping class groups*, preprint, available at arXiv:1804.03470v2.
- [16] S. Kim and T. Koberda, *An obstruction to embedding right-angled Artin groups in mapping class groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), 3912–3918.
- [17] S. Kim and T. Koberda, *Anti-trees and right-angled Artin subgroups of braid groups*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 6, 3289–3306.
- [18] S. Kim and T. Koberda, *Right-angled Artin groups and finite subgraphs of curve graphs*, Osaka J. Math. **53** (2016), no. 3, 705–716.
- [19] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1541–1590.
- [20] D. Margalit and R. R. Winarski, *The Birman-Hilden theory*, available at arXiv:1703.03448.
- [21] L. Paris and D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **521** (2000), 47–83.
- [22] K. Shackleton, *Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups*, Pacific J. Math. **230** (2007), no. 1, 217–232.
- [23] R. Swan, *Groups of cohomological dimension one*, J. Algebra **12** 1969 585–610.

# Quillen rational homotopy theory revisited

Aniceto Murillo

## Abstract

This paper surveys the main properties of the model and realization functors,

$$\mathbf{sset} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle} \end{array} \mathbf{dgl}$$

which are based in the cosimplicial complete differential graded Lie algebra  $\mathcal{L}_{\Delta\bullet}$ . This let us extend the Quillen approach to rational homotopy theory to non simply connected spaces and to any complete differential graded Lie algebra.

## Introduction

In his celebrated and seminal paper [21], D. Quillen developed the “Lie” approach to rational homotopy theory. It is based in the construction of a couple of functors,

$$\mathbf{sset}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle_Q} \end{array} \mathbf{dgl}_1$$

between the categories of reduced or simply connected simplicial sets, those with only one simplex in dimensions 0 and 1, and that of reduced dgl’s, that is, differential graded Lie algebras positively graded. These functors are defined as the composition of several pairs of adjoint functors (the upper arrow denotes left adjoint), in fact Quillen pairs, with respect to the corresponding model category structures,

$$\lambda: \mathbf{sset}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{W} \end{array} \mathbf{sgp}_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{Q}} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \mathbf{sch}_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\hat{U}} \\ \xrightarrow{p} \end{array} \mathbf{sla}_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{N^*} \\ \xrightarrow{N} \end{array} \mathbf{dgl}_1: \langle - \rangle_Q.$$

Here,  $\mathbf{sgp}_0$ ,  $\mathbf{sch}_0$  and  $\mathbf{sla}_1$  denote respectively the categories of connected simplicial groups, connected complete Hopf algebras, and reduced simplicial Lie algebras. Each of these pairs induces Quillen equivalences on the corresponding homotopy categories when localizing on the family of rational homotopy equivalences in  $\mathbf{sset}_1$ ,  $\mathbf{sgp}_0$ , and on the family of quasi-isomorphisms in  $\mathbf{sch}_0$ ,  $\mathbf{sla}_1$ ,  $\mathbf{dgl}_1$  [21, Thm. I].

The complexity of the functors  $\lambda$  and Quillen realization  $\langle - \rangle_Q$  strongly contrasts with the conceptual simplicity of the pair of adjoint functors in which the Sullivan “commutative” approach to rational homotopy theory is based [3, 22]. These are defined

by the PL-forms  $\mathcal{A}(-)$  on simplicial sets and the Sullivan realization functor  $\langle - \rangle_S$  on commutative differential graded algebras (cdga's henceforth):

$$\mathbf{sset} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{A}(-)} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle_S} \end{array} \mathbf{cdga}.$$

Explicitely, given a cdga  $A$ , its realization is

$$\langle A \rangle_S = \mathrm{Hom}_{\mathbf{cdga}}(A, \mathcal{A}_\bullet)$$

where  $\mathcal{A}_\bullet = \mathcal{A}(\Delta^\bullet)$  is the simplicial set of PL-forms on the standard simplices. In other words,  $\langle A \rangle_S$  is “corepresentable” by  $\mathcal{A}_\bullet$ .

In fact, the lack of an Eckmann-Hilton dual of the simplicial  $\mathcal{A}_\bullet$  has puzzled rational homotopy theorists since the birth of the theory. On the other hand, there are many situations in a wide range of mathematics, from algebraic geometry to mathematical physics, where a suitable extension of the Quillen functor to non necessarily reduced dgl's would be most welcome.

These problems are attacked in the work reviewed by this survey, whose departure point is the following observation and subsequent general question raised by R. Lawrence and D. Sullivan in [17]:

The rational singular chains on a cellular complex are naturally endowed with a structure of cocommutative, coassociative infinity coalgebra and hence, taking the commutators of a “generalized bar construction” it should give rise to a complete dgl (in fact, all our dgl's would be of this kind, see next section for a precise definition). What is the topological and geometrical meaning of this dgl? Allowing 1-cells, what is the relation of this dgl with the fundamental group of the given complex?

In the same reference they carefully construct such a dgl for the interval. It consists of a free dgl,

$$\mathfrak{L}_{\Delta^1} = (\widehat{\mathbb{L}}(a, b, x), \partial),$$

in which  $a$  and  $b$  are Maurer-Cartan elements representing the endpoints of the interval,  $x$  is a degree 0 element representing the 1-cell, and

$$\partial x = \mathrm{ad}_x b + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \mathrm{ad}_x^n (b - a)$$

where the  $B_n$ 's are the Bernoulli numbers.

We begin by extending this to any simplex and construct, for each  $n \geq 1$ , a free dgl  $\mathfrak{L}_{\Delta^n} = (\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^n), \partial)$  in which  $s^{-1}\Delta^n$  together with the linear part of the differential  $\partial$  is the (desuspension) of the rational simplicial chain complex of the standard  $n$ -simplex  $\Delta^n$ , and the vertices correspond to Maurer-Cartan elements. We then show that the family

$$\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet} = \{\mathfrak{L}_{\Delta^n}\}_{n \geq 0}$$

is a cosimplicial dgl and therefore, we may geometrically realize any dgl  $L$  as the simplicial set

$$\langle L \rangle = \mathrm{Hom}_{\mathbf{dgl}}(\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet}, L).$$

On the other hand, The  $\mathfrak{L}$  construction can be extended to any simplicial set  $X$  by defining its dgl model as

$$\mathfrak{L}_X = \underset{\longrightarrow}{\operatorname{colim}}_{\sigma \in X} \mathfrak{L}_{\Delta^{|\sigma|}}.$$

It turns out that the model and realization functors

$$\mathbf{sset} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle} \end{array} \mathbf{dgl}$$

are adjoint and they extend the original Quillen functors in different directions, all of them carefully covered by section §3. Here, we mention two:

On the one hand,  $\langle L \rangle \simeq \langle L \rangle_Q$  for any reduced finite type dgl  $L$ . This shows that the Quillen realization functor is representable by the cosimplicial dgl  $\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet}$  which becomes the Eckmann-Hilton dual of  $\mathcal{A}_\bullet$ . Moreover, under no restriction, our realization coincide, up to homotopy type, with any other known realization functor for dgl's including the Deligne-Getzler-Hinich simplicial functor [1, 13, 14].

On the other hand, unlike the Quillen  $\lambda$  functor, our model functor reflects geometrical properties of non nilpotent spaces. Indeed, the non trivial component  $\langle \mathfrak{L}_X^a \rangle$  of the realization of the model of a connected finite simplicial set  $X$  has the homotopy type of the Bousfield-Kan  $\mathbb{Q}$ -completion of  $X$  [2]. In particular,  $H_0(\mathfrak{L}_X^a)$ , with the group structure given by the Baker-Campbell-Hausdorff product, recovers the Malcev completion of the fundamental group  $\pi_1(X)$ .

After that, we embed the model and realization functors in a suitable homotopy theoretical framework. Indeed, we endow the category of dgl's with a model category structure for which a dgl morphism  $f: A \rightarrow B$  is a fibration if it is surjective in non negative degrees;  $f$  is a weak equivalence if  $\widetilde{\operatorname{MC}}(f): \widetilde{\operatorname{MC}}(A) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\operatorname{MC}}(B)$  is a bijection and  $f^a: A^a \xrightarrow{\cong} B^{f(a)}$  is a quasi-isomorphism for every  $a \in \widetilde{\operatorname{MC}}(A)$ ; finally  $f$  is a cofibration if it has the left lifting property with respect to trivial fibrations. As an immediate consequence we deduce that the model and realization functor form a Quillen pair. In particular, they induce adjoint functors in the homotopy categories,

$$\mathbf{Ho sset} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle} \end{array} \mathbf{Ho dgl},$$

and both preserve weak equivalences and homotopies.

This survey is extracted from [19] and it contains the main results of a project which begun some years ago in collaboration with U. Buijs, Y. Félix and D. Tanré to all of whom I am deeply grateful. All of these results can be found in [4, 5, 6, 7, 8].

## 1 Differential graded Lie algebras

Throughout this paper we assume that  $\mathbb{Q}$  is the base field. Direct and inverse limits are denoted by  $\underset{\longrightarrow}{\operatorname{colim}}$  and  $\underset{\longrightarrow}{\operatorname{lim}}$  respectively.

A *graded Lie algebra* consists of a  $\mathbb{Z}$ -graded vector space  $L = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} L_p$  together with a bilinear product

$$[\cdot, \cdot]: L_p \otimes L_q \longrightarrow L_{p+q}, \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

called the *Lie bracket*, satisfying *antisymmetry*,

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x],$$

and *Jacobi identity*,

$$(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0.$$

Here,  $|x|$  denotes the degree of  $x$ . The commutator operator  $[a, b] = a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a$  is a Lie bracket on  $T(V)$ , the tensor algebra on the graded vector space  $V$ . The *free Lie algebra*  $\mathbb{L}(V)$  generated by  $V$  is the sub Lie algebra of  $T(V)$  generated by  $V$ .

A *differential graded Lie algebra* is a graded Lie algebra  $L$  endowed with a *differential*, that is, a linear derivation  $\partial$  of degree  $-1$  such that  $\partial^2 = 0$ . By abusing of notation we say that a differential graded Lie algebra is *free* if it is so as graded Lie algebra.

Given a differential graded Lie algebra  $L$ , a *Maurer-Cartan element* is an element  $a \in L_{-1}$  satisfying the *Maurer-Cartan equation*

$$\partial a + \frac{1}{2}[a, a] = 0.$$

We denote by  $\text{MC}(L)$  the set of Maurer-Cartan elements which is clearly preserved by morphisms. Given  $a \in \text{MC}(L)$  the derivation  $\partial_a = \partial + \text{ad}_a$  is again a differential on  $L$ . Here  $\text{ad}_a$  denotes the usual adjoint operator,  $\text{ad}_a b = [a, b]$ . The *component* of  $L$  at  $a \in \text{MC}(L)$  is the truncation of the perturbed  $(L, \partial_a)$  at non negative degrees,

$$L^a = (L, \partial_a)/(L_{<0} \oplus J) \cong L_{>0} \oplus (L_0 \cap \ker \partial_a),$$

in which  $J$  is a complement of  $\ker \partial_a$  in  $L_0$ .

The *completion*  $\widehat{L}$  of a differential graded Lie algebra  $L$  is

$$\widehat{L} = \varinjlim_n L/L^n$$

where  $L^1 = L$ ,  $L^n = [L, L^{n-1}]$  for  $n \geq 2$ , and the limit is taken on the topology arising from this filtration. An element  $\bar{a}$  of  $\widehat{L}$  is then a sequence  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots)$  with  $a_i \in L/L^i$  and  $a_i = a_{i-1}$  in  $L/L^{i-1}$ . We write  $\widehat{\mathbb{L}}(V) = \widehat{\mathbb{L}}(\widehat{V})$ . Each element of  $\widehat{\mathbb{L}}(V)$  can be seen as a series  $\sum_n x_n$  with  $x_n \in \mathbb{L}^n(V)$  for all  $n$ .

A differential graded Lie algebra  $L$  is *complete* if the natural morphism  $L \xrightarrow{\cong} \widehat{L}$  is an isomorphism. Observe that, reduced differential graded Lie algebras, which are concentrated in positive degrees, are always complete.

We denote by **dgl** the category of *complete differential graded Lie algebras*, **dgl**'s henceforth.

Given  $L = \widehat{\mathbb{L}}(V)$  a free dgl and  $v \in V$ , we will often write  $\partial v = \sum_{n \geq 1} \partial_n v$  where  $\partial_n v \in \mathbb{L}^n(V)$ . Observe that, if  $\theta$  is a derivation of  $L$  satisfying  $\theta(V) \subset \widehat{\mathbb{L}}^{\geq 2}(V)$  and  $[\theta, \partial] = 0$ , then  $e^\theta = \sum_{n \geq 0} \frac{\theta^n}{n!}$  is an automorphism of  $L$  and in particular, it induces a bijection on the Maurer-Cartan set.

Recall that given a dgl  $L$ , the Baker-Campbell-Hausdorff product  $*$  equips the vector space  $L_0$  with a group structure. Since  $a * (-a) = 0$  we often use the notation  $-a = a^{-1}$ .

The *gauge action*, see for instance [18, §4], of  $(L_0, *)$  on  $\text{MC}(L)$  is defined by

$$x\mathcal{G}a = e^{\text{ad}_x}(a) - \frac{e^{\text{ad}_x} - 1}{\text{ad}_x}(\partial x) = \sum_{i \geq 0} \frac{\text{ad}_x^i(a)}{i!} - \sum_{i \geq 0} \frac{\text{ad}_x^i(\partial x)}{(i+1)!}.$$

Here and from now on,  $1$  inside an operator will denote the identity. We denote by  $\widehat{\text{MC}}(L) = \text{MC}(L)/\mathcal{G}$  the orbit set, that is, the set of equivalence classes of Maurer-Cartan elements modulo the gauge action.

Geometrically [15, 17], interpreting Maurer-Cartan elements as points in a space, one thinks of  $x$  as a flow taking  $x\mathcal{G}a$  to  $a$  in unit time. For the more topological oriented reader [10], the points  $a$  and  $x\mathcal{G}a$  are in the same path component.

The *Deligne groupoid* of  $L$  has  $\text{MC}(L)$  as objects, and elements  $x \in L_0$  as arrows from  $x\mathcal{G}z$  to  $z$ .

A fundamental object, which illustrates all of the above concepts and facts, turns out to be the starting point of our work:

**Definition 1.1.** [17] *The Lawrence-Sullivan model for the interval*, LS-interval henceforth, is the dgl

$$\mathfrak{L}_{\Delta^1} = (\widehat{\mathbb{L}}(a, b, x), \partial),$$

in which  $a$  and  $b$  are Maurer-Cartan elements,  $x$  is of degree 0 and

$$\partial x = \text{ad}_x b + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \text{ad}_x^n(b-a) = \text{ad}_x b + \frac{\text{ad}_x}{e^{\text{ad}_x} - 1}(b-a),$$

where the  $B_n$ 's are the Bernoulli numbers.

Let  $(\widehat{\mathbb{L}}(a_0, a_1, a_2, x_1, x_2), \partial)$  be two glued LS-models of the interval. That is,  $a_0, a_1$  and  $a_2$  are Maurer-Cartan elements,  $\partial x_1 = \text{ad}_{x_1}(a_1) + \frac{\text{ad}_{x_1}}{e^{\text{ad}_{x_1}} - 1}(a_1 - a_0)$  and  $\partial x_2 = \text{ad}_{x_2}(a_2) + \frac{\text{ad}_{x_2}}{e^{\text{ad}_{x_2}} - 1}(a_2 - a_1)$ . Then, the ‘‘subdivision of the interval’’ is given by:

In [5, Thm. 2.3] the reader may find a complete description of the Deligne groupoid of the LS-interval as two disjoint rational lines.

## 2 The cosimplicial dgl $\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet}$

Given  $n \geq 0$ , let  $\Delta^n$  be the standard  $n$ -simplex ,

$$\Delta_p^n = \{(i_0, \dots, i_p) \mid 0 \leq i_0 < \dots < i_p \leq n\}, \quad \text{if } p \leq n,$$

and denote by  $s^{-1}\Delta^n$  the graded vector space of desuspended rational simplicial chains on  $\Delta^n$  with the usual boundary operator,

$$da_{i_0\dots i_p} = \sum_{j=0}^p (-1)^j a_{i_0\dots \widehat{i}_j\dots i_p}.$$

Here,  $a_{i_0\dots i_p}$  denotes the generator of degree  $p-1$  represented by the  $p$ -simplex  $(i_0, \dots, i_p) \in \Delta^n$ . Consider  $(\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^n), d)$  the free dgl generated by  $s^{-1}\Delta^n$  with the differential induced by  $d$ .

For each  $0 \leq i \leq n$  consider the  $i$ -th coface map  $\delta_j: \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  and the  $i$ -th codegeneracy map  $\sigma_i: \{0, \dots, n+1\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  defined by:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j, & \text{if } j < i, \\ j+1, & \text{if } j \geq i, \end{cases} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{if } j \leq i, \\ j-1 & \text{if } j > i, \end{cases}$$

and use the same notation for the induced dgl morphisms,

$$\delta_i: (\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^{n-1}), d) \longrightarrow (\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^n), d), \quad \sigma_i: (\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^{n+1}), d) \longrightarrow (\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^n), d),$$

defined by

$$\delta_i(a_{j_0\dots j_p}) = a_{\ell_0\dots \ell_p} \quad \text{with} \quad \ell_k = \begin{cases} j_k, & \text{if } j_k < i, \\ j_k + 1, & \text{if } j_k \geq i. \end{cases}$$

$$\sigma_i(a_{\ell_0\dots \ell_q}) = \begin{cases} a_{\sigma_i(\ell_0)\dots\sigma_i(\ell_q)} & \text{if } \sigma_i(\ell_0) < \dots < \sigma_i(\ell_q), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

The following is the core result on which our dgl realization is based.

**Theorem 2.1.** [4, thms. 2.3 and 2.8] *There is a cosimplicial dgl, unique up to dgl isomorphism,*

$$\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet} = \{\mathfrak{L}_{\Delta^n}\}_{n \geq 0} = \{(\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}\Delta^n), \partial)\}_{n \geq 0},$$

such that,

- (1) For each  $n \geq 0$  and each  $i = 0, \dots, n$ , the generator  $a_i \in s^{-1}\Delta_0^n$  is a Maurer-Cartan element,  $\partial a_i = -\frac{1}{2}[a_i, a_i]$ .
- (2) The linear part  $\partial_1$  of  $\partial$  is precisely the desuspension  $s^{-1}d$  of  $d$ .
- (3) The cofaces and codegeneracies are the morphisms  $\delta_i$ 's and  $\sigma_i$ 's defined above.

### 3 The model and realization functors

Given a simplicial set  $X$ , identify as usual any simplex  $\sigma \in X_n$  with a simplicial map  $\sigma: \underline{\Delta}^n \rightarrow X$ . Here,  $\underline{\Delta}^n$  denote the simplicial set whose  $p$ -simplices are integer sequences  $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_p \leq n$ . Then,  $X$  can be recovered from its simplices as the colimit

$$X = \underset{\rightarrow}{\text{colim}}_{\sigma \in X} \underline{\Delta}^{|\sigma|}.$$



**Definition 3.1.** The *model* of any simplicial set  $X$  is defined as the dgl

$$\mathfrak{L}_X = \underset{\rightarrow}{\operatorname{colim}}_{\sigma \in X} \mathfrak{L}_{\Delta^{|\sigma|}}.$$

In fact, Theorem 2.1 is a special case of the following: It can be proven that the model of  $X$  is the free complete Lie algebra

$$\mathfrak{L}_X = (\widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}X), \partial)$$

where, abusing of notation,  $s^{-1}X$  denotes the desuspension of the normalized chains on  $X$ . Recall that these are the simplicial chains on  $X$  modulo degeneracies. In other words,  $s^{-1}X$  is generated by the non degenerate simplices of  $X$ . The differential  $\partial$  is completely determined by the following:

- (1) The non degenerate 0-simplices are Maurer-Cartan elements.
- (2) The linear part  $\partial_1$  of  $\partial$  is precisely the desuspension of the differential in the normalized chains on  $X$ .
- (3) If  $j: Y \subset X$  is a subsimplicial set, then  $\mathfrak{L}(j) = \widehat{\mathbb{L}}(s^{-1}j)$ .

On the other hand the cosimplicial structure on  $\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet}$  gives rise to the following.

**Definition 3.2.** The *realization* of a dgl  $L$  is defined as the simplicial set

$$\langle L \rangle = \operatorname{Hom}_{\mathbf{dgl}}(\mathfrak{L}_{\Delta^\bullet}, L).$$

**Theorem 3.3.** *the model and realization functors are adjoint,*

$$\mathbf{sset} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle} \end{array} \mathbf{dgl}.$$

The first results describing the homotopy type of the realization of a given dgl are the following.

**Theorem 3.4.** [4, Thm. 4.6] *For any dgl,  $\langle L \rangle \simeq \dot{\cup}_{z \in \widetilde{\operatorname{MC}}(L)} \langle L^z \rangle$ . In particular,  $\pi_0 \langle L \rangle \cong \widetilde{\operatorname{MC}}(L)$ .*

**Theorem 3.5.** [4, Prop. 4.5] *Let  $L$  be a non negatively graded dgl and  $z \in \operatorname{MC}(L)$ . Then,  $\langle L^z \rangle$  is a connected simplicial set and there are natural group isomorphisms*

$$\pi_n \langle L^z \rangle \cong H_{n-1}(L^z), \quad n \geq 1,$$

*in which  $H_0(L, d)$  is considered with the group structure given by the Baker-Campbell-Hausdorff product.*

Finally, concerning the realization functor, we state that, under the usual bounding and finite type assumptions, it extends the original Quillen realization functor  $\langle - \rangle_Q$  [21], and the realization  $\langle \mathcal{C}^*(-) \rangle_S$  of the cdga given by the Chevalley-Eilenberg cochain functor  $\mathcal{C}^*$  on  $L$  [3]. This is the composite of the functors,

$$\mathcal{C}^* = (-)^\sharp \circ \mathcal{C}: \mathbf{dgl}_f \rightarrow \mathbf{cdga} \quad \text{and} \quad \langle - \rangle_S: \mathbf{cdga} \rightarrow \mathbf{sset},$$

where  $\mathbf{dgl}_f$  is the full subcategory of  $\mathbf{dgl}$  of finite type dgl's. The second one is the Sullivan realization functor defined by  $\langle A \rangle_S = \operatorname{Hom}_{\mathbf{cdga}}(A, \mathcal{A}^\bullet)$ .

**Theorem 3.6.** [4, Thm. 8.1] *Let  $L$  be a finite type dgl with  $H_q(L) = 0$  for  $q < 0$ . Then,*

$$\langle L \rangle \simeq \langle \mathcal{C}^*(L) \rangle_S. \text{ If in addition } L \text{ is reduced, } \langle L \rangle \simeq \langle L \rangle_Q.$$

*This exhibits the Quillen realization as a functor representable by  $\mathfrak{L}_\Delta$ .*

We also show in [7, Thm.4.8] that, with full generality, our realization is homotopy equivalent to the Deligne-Getzler-Hinich simplicial functor on  $L$  [13, 14].

We now analyze the main properties of the model functor:

**Theorem 3.7.** [6] *For any finite simplicial set  $X$ ,*

$$\widetilde{\text{MC}}(\mathfrak{L}_X) \cong \pi_0(X^+).$$

Here,  $X^+$  denotes the disjoint union of  $X$  with a point. This, together with Theorem 3.4, gives,

$$\pi_0 \langle \mathfrak{L}_X \rangle = \pi_0(X^+).$$

Moreover, we are able to determine the homotopy type of each of these components.

**Theorem 3.8.** [8, Thm. 2.7] *Given  $X$  a finite simplicial set,  $\langle \mathfrak{L}_X^0 \rangle$  is contractible.*

For the non trivial components we have:

**Theorem 3.9.** [8, Thm. 2.9] *Let  $X$  be a connected finite simplicial set and let  $z \in \mathfrak{L}_X$  be a non trivial Maurer-Cartan element. Then,  $\langle \mathfrak{L}_X^z \rangle \simeq \mathbb{Q}_\infty X$ , the  $\mathbb{Q}$ -completion of  $X$  [2].*

In particular, by [12, Cor. 7.4], and taking into account Theorem 3.5 for  $n = 1$ , we deduce:

**Corollary 3.10.**  $H_0(\mathfrak{L}_X^z)$  is the Malcev Lie completion of the fundamental group  $\pi_1(X)$ .

## 4 A model category structure on $\mathbf{dgl}$

Henceforth, by *model category* we mean the original closed model category definition of Quillen [20]. In the category  $\mathbf{sset}$  of simplicial sets we consider the classical model category structure, see for instance [2, Chap. VII], in which fibrations are Kan fibrations, cofibrations are injective simplicial maps, and weak equivalences are homotopy weak equivalences. Then, we have:

**Theorem 4.1.** [8, Thm. 3.1] *There is a model category structure on  $\mathbf{dgl}$  for which:*

- *A morphism  $f: A \rightarrow B$  is a fibration if it is surjective in non negative degrees.*
- *A morphism  $f: A \rightarrow B$  is a weak equivalence if  $\widetilde{\text{MC}}(f): \widetilde{\text{MC}}(A) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\text{MC}}(B)$  is a bijection and  $f^a: A^a \xrightarrow{\cong} B^{f(a)}$  is a quasi-isomorphism for every  $a \in \widetilde{\text{MC}}(A)$ .*

- A morphism is a cofibration if it has the left lifting property with respect to trivial fibrations.

**Corollary 4.2.** *the realization and model functors, form a Quillen pair. In particular, they preserve weak equivalences and induce adjoint functors in the homotopy categories,*

$$\mathbf{Ho\ sset} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xleftarrow{\langle - \rangle} \end{array} \mathbf{Ho\ dgl}.$$

We end this section with the following important observation which compare our model structure in  $\mathbf{dgl}$  with other known model structures:

*Remark 4.3.* (1) One may consider in the category  $\mathbf{dgl}$  the classical model structure given on categories of unbounded chain complexes enriched with some algebraic structure, see for instance [14, §2]. Fibrations are surjective morphisms, weak equivalences are quasi-isomorphisms and cofibrations are morphisms satisfying the left lifting property with respect to trivial fibrations.

Then, the zero map  $0 \rightarrow \mathbb{L}(a)$ , in which  $a$  is a Maurer-Cartan element, is not surjective but it is a fibration in our model structure. The same example is a quasi-isomorphism but it is not a weak equivalence in our structure. Contrarily, consider the abelian  $\mathbf{dgl}$   $L$  generated by a single cycle of negative degree. Then, the zero map  $0 \rightarrow L$  is a weak equivalence in our structure but it is not a quasi-isomorphism.

(2) On the other hand, in [16, Thm. 9.16], A. Lazarev and M. Markl define a model category structure on the full subcategory of  $\mathbf{dgl}$  formed by the *profinite complete dgl's* where:

$f$  is a *fibration* if it is a surjection.

$f$  is a *weak equivalence* if  $\mathcal{C}^*(f)$  is a quasi-isomorphism.

$f$  is a *cofibration* if it has the left lifting property with respect to all trivial fibrations.

Here  $\mathcal{C}^*$  is a generalization of the usual cochain functor [16, §7]. In [8, Thm. 6.12] we show that if  $f$  is a *weak equivalence* in this structure, it is so in our model structure. However, this inclusion is strict: let  $L$  be the abelian Lie algebra generated by a single cycle of degree  $-1$ . As observed in (1) the zero map  $f: 0 \rightarrow L$  is a weak equivalence in our model structure but  $\mathcal{C}^*(f)$  is not a quasi-isomorphism. Also, it is obvious that the class of fibrations in the above structure is also properly contained in our class of fibrations.

## A final word

Needless to say what would be the natural continuation of the work presented in this survey: the literature is plenty of deep results describing the non torsion behaviour of the homotopy type of simply connected complexes, all of them using the Quillen approach

to rational homotopy theory. Is it possible to extend these results to general complexes by means of the new framework reviewed in this paper?

On the other hand, there are deep results concerning rational invariants of “highly non simply connected” spaces. Illustrative examples include the Mumford conjecture on the rational cohomology ring of the moduli space of Riemann surfaces, and the rational homological stability problem in general, and that of configuration spaces in particular. Would it be possible to use our new machinery to attack related problems?

We finish with another general question which may attract experts in various mathematical subjects to this new approach to rational homotopy theory:

Let  $R$  be a local commutative algebra with maximal ideal  $\mathfrak{M}$  and let  $k = R/\mathfrak{M}$ . Let  $A$  be an  $k$ -vector space endowed with some additional structure. An  $R$ -deformation of  $A$  is another such structure in  $A \otimes_k R$  such that, modulo  $\mathfrak{M}$ , it reduces to the original one in  $A$ . The *Deligne principle* asserts that, whenever  $k$  is of characteristic zero, every deformation functor is governed by a dgl. That is, denoting by  $\text{Def}(A; R)$  = the set of equivalence classes of  $R$ -deformations of  $A$ , there exists a dgl  $L$  such that

$$\text{Def}(A; R) \cong \widetilde{\text{MC}}(L).$$

In words of Kontsevich, finding the appropriate  $L$  for a given deformation functor is an art. Nevertheless, we may consider its realization  $\langle L \rangle$  and think of it as the “homotopy moduli space” of  $\text{Def}(A; R)$ . Is it then possible to translate homotopy invariants of  $\langle L \rangle$  into properties related with deformation phenomena?

## References

- [1] A. Berglund, *Rational homotopy theory of mapping spaces via Lie theory for  $L_\infty$ -algebras*, Homology Homotopy Appl. **17**(2) (2015), 343–369.
- [2] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math. **304**, Springer, 1972.
- [3] A. K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim, *On PL De Rham Theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc., **179** (1976).
- [4] U. Buijs, Y. Félix, A. Murillo and D. Tanré, *Lie models of simplicial sets and representability of the Quillen functor*, arXiv:1508.01442.
- [5] ———, *The Deligne groupoid of the Lawrence-Sullivan interval*, Top. and its Appl. **204** (2016), 1–7.
- [6] ———, *Maurer-Cartan elements in the Lie models of finite simplicial complexes*, Canad. Math. Bull., **60** (2017), 470–477.
- [7] ———, *The infinity Quillen functor, Maurer-Cartan elements and DGL realizations*, arXiv:1702.04397.

- [8] ———, *Homotopy theory of complete Lie algebras and Lie models of simplicial sets*, arXiv:1601.05331v4.
- [9] U. Buijs and A. Murillo, *The Lawrence-Sullivan construction is the right model for  $I^+$* , *Algebr. Geom. Topol.* **13** (2013), 577–588.
- [10] ———, *Algebraic models of non connected spaces and homotopy theory of  $L_\infty$  algebras*, *Adv. Math.* **236** (2013), 60–91.
- [11] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics **205**, Springer, 2001.
- [12] ———, *Rational Homotopy Theory II*, World Scientific, 2015.
- [13] E. Getzler, *Lie theory for nilpotent  $L_\infty$  algebras*, *Ann. of Math.* **170** (2009), 271–301.
- [14] V. Hinich, *Descent of Deligne groupoids*, *Int. Math. Res. Not.* **5** (1997), 223–239.
- [15] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, *Lett. Math. Phys.* **66**(3) (2003), 157–216.
- [16] A. Lazarev and M. Markl, *Disconnected rational homotopy theory*, *Adv. Math.* **283** (2015), 303–361.
- [17] R. Lawrence and D. Sullivan, *A formula for topology/deformations and its significance*, *Fund. Math.* **225** (2014), 229–242.
- [18] M. Manetti, *Lectures on deformations of complex manifolds*, *Rend. Mat. Appl.* **7**(24) (2004), 1–183.
- [19] A. Murillo, *Quillen rational homotopy theory revisited*, to appear in *Revista de la Academia Canaria de Ciencias*.
- [20] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math. **43**, Springer, 1967.
- [21] ———, *Rational Homotopy Theory*, *Ann. of Math.* **90** (1969), 205–295.
- [22] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, *Publ. IHES* **47** (1977), 269–331.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE MÁLAGA, AP. 59, 29080-MÁLAGA, ESPAÑA