# 微分同相群とトポロジー
# ～ 特性類と不変量を中心として ～

森田　茂之*

2015 年 8 月 8 日

**概　　要**

微分同相群とトポロジーの関わりについて，ここ 80 年ほどの発展の一側面を特性類と不変量の観点から振り返り，将来への展望を述べる．

具体的には，まずベクトルバンドルの特性類の理論と，Pontrjagin-Thom 構成と呼ばれる，トポロジーの基本的な指導原理についてまとめる．そして，これらの理論や原理を一般化することにより，多様体をファイバーとするファイバーバンドルの特性類について，現在までに得られて来たいろいろな結果を概観する．続いて，この流れと密接に関連しつつも，それぞれ独立な展開を見せて来た三つの流れを述べる．最後に，これらの流れの延長線上に浮かんできた，いくつかの問題を挙げる．

## 1. はじめに

ちょうど 10 年前の 2005 年 8 月，高知大学で開催された第 52 回トポロジーシンポジウムで講演させていただいた．そのときのタイトルは

微分同相群とトポロジー ～ いくつかの問題と展望 ～

であった．その初めの部分で，トポロジーの懸案の難問であった Kervaire 不変量の問題を取り上げた．この難問が，予想よりずっと早く 2009 年についに Hill-Hopkins-Ravenel によって（ほとんど）解決された（[16] 参照）．それをまず述べる．

**定理 1.1 (Hill-Hopkins-Ravenel [15])** Kervaire 不変量 1 の枠付き多様体（framed manifold）が存在する次元は，$2, 6, 14, 30, 62, 126$ に限る．

上記の次元のうち，初めの 5 個についてはすでに存在が知られており．126 次元の場合だけが問題として残った．これについてはいくつかの（ときに相反する）予想あるいは期待が述べられている（Atiyah, Snaith 等）．

本題に戻って，今回の話の主テーマは，多様体および多様体の族の分類の理論の発展を振り返ることである．基本となるのは，Euler 類および Pontrjagin 類を初めとするベクトルバンドルの特性類と，Pontrjagin-Thom 構成と呼ばれる指導原理である．後者は，幾何的な問題とホモトピー論の問題を結びつける強力な手法である．

そして時間が許す範囲内で，上記と密接に関連する三つの事項：(i) 曲面バンドルの特殊性，(ii) 葉層構造の特性類の理論，(iii) Kontsevich の形式的シンプレクティック幾何，の発展についても，微分同相群と直接に関連する部分にしぼって概観したい．最後に筆者が重要と考えるいくつかの課題を述べる．

この話では，多様体 $M$ は断らない限り $C^\infty$ 級の微分可能多様体とし，その $C^\infty$ 微分同相群を $\mathrm{Diff}\, M$ と書く．$M$ が向き付け可能で向き付けられている場合には，向きを

* e-mail: morita@ms.u-tokyo.ac.jp

保つ微分同相群を $\mathrm{Diff}_+ M$ と書く．$M$ が実解析的な多様体の場合は，その実解析的微分同相群を $\mathrm{Diff}^\omega M$ と書く．これらの微分同相群には $C^\infty$ 位相を入れるが，離散位相を入れた場合には $\mathrm{Diff}^\delta M, \mathrm{Diff}^{\omega,\delta} M$ などと書く．

今回の話の詳しい内容については，筆者が中央大学でさせていただいた講義の記録 [27] を参照されたい．また，微分同相群に関するサーヴェイについては，Sakasai[32] および Hatcher [14] も見てほしい．筆者の能力・興味および時間・スペースの関係から，取り上げた事項には偏りがあるものと思う．また，引用文献も必要最小限にした．これらの点についてはご容赦いただければ幸いである．

## 2. Gauss 写像から Thom 同境理論への道

Gauss 曲面論における Gauss 写像を思い出すことから始めよう．$\mathbb{R}^3$ の中に向き付けられた曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたとする．このとき，Gauss 写像とは $\Sigma$ から単位球面 $S^2$ への写像

$$\gamma^\perp : \Sigma \to S^2$$

でつぎのように定義された．各点 $p \in \Sigma$ において接平面 $T_p(\Sigma)$ に正の向きに立てた長さ $1$ の法線ベクトルを $\mathbf{n}_p$ とし，その始点を原点に平行移動して得られるベクトルを $\mathbf{n}'_p$ とする．このとき

$$\gamma^\perp(p) = \mathbf{n}'_p \text{ の終点} \in S^2$$

とおくのである．これと等価の写像

$$\gamma : \Sigma \to S^2 \cong \{\mathbb{R}^3 \text{ の向き付けられた } 2 \text{ 次元部分空間}\}$$
$$\gamma(p) = p \text{ における接平面 } T_p(\Sigma) \text{ を原点に平行移動したもの}$$

を現代流に言えば，$S^2$ は Grassmann 多様体の一例であり，$\gamma$ は $\Sigma$ の接バンドルの分類写像ということになる．実際この考えは，すぐにつぎのように一般化できる．$M$ を $n$ 次元の向き付けられた $C^\infty$ 多様体とし，$T(M)$ をその接バンドルとする，Whitney 埋め込み定理により，十分大きな $k$ に対して $M$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ の部分多様体として実現できる．一方

$$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{\mathbb{R}^{n+k} \text{ の向き付けられた } n \text{ 次元部分空間}\}$$

とおけば，これは Grassmann 多様体と呼ばれる閉多様体であり，その上には $n$ 次元の tautological bundle と呼ばれる向き付けられた $n$ 次元ベクトルバンドル $\xi_k^n$ が定義されている．このとき

$$\gamma : M \to \tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$$
$$\gamma^\perp : M \to \tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$$

を，各点 $p \in M$ に対し

$$\gamma(p) = \text{接空間 } T_p(M) \text{ を原点に平行移動したもの}$$
$$\gamma^\perp(p) = \gamma(p) \text{ の直交補空間}$$

と定義すれば

$$\gamma^*(\xi_k^n) \cong T(M), \quad (\gamma^\perp)^*(\xi_n^k) \cong \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \text{ (法バンドル)}$$

となる．すなわち $\gamma, \gamma^{\perp}$ はそれぞれ $M$ の接バンドルおよび（$\mathbb{R}^{n+k}$ の中での）法バンドルの分類写像と呼ばれるものになる．一方，$\xi_k^n$ は $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 上の $n$ 次元ベクトルバンドルであるが，$(n+k)$ 次元の自明なベクトルバンドルの部分バンドルとして定義される．その直交補バンドルを $(\xi_k^n)^{\perp}$ と書けば，$\gamma^*((\xi_k^n)^{\perp}) \cong \nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ となるので，$\gamma$ は法バンドルの分類写像の役割も果たしている．このように，tautological バンドルの直交補バンドルを用いることにより，法バンドルの分類写像として $\gamma^{\perp}$ の替わりに $\gamma$ を使うことができるという事実は，当然のことではあるが，後に紹介する重要な仕事 Madsen-Tillmann[23], Madsen-Weiss[24] において基本的な役割を果たす．

### 2.1. ベクトルバンドルの特性類

向き付けられた $n$ 次元 $C^\infty$ 多様体 $M$ の接バンドル $T(M)$ は，$M$ 上の向き付けられた $n$ 次元実ベクトルバンドルである，すなわち

$$\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}); \det A > 0\}$$

を構造群とするファイバーバンドルである．このようなバンドルの特性類は1940年代までには完全に知られていた．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ や $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ についても同様であるが，ここでは $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ の場合だけを思い出しておこう．

群の系列

$$\mathrm{GL}_+(1, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_+(2, \mathbb{R}) \to \cdots \to \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) \to \cdots$$

は，分類空間の系列

$$\mathrm{BGL}_+(1, \mathbb{R}) \to \mathrm{BGL}_+(2, \mathbb{R}) \to \cdots \to \mathrm{BGL}_+(n, \mathbb{R}) \to \cdots$$

を誘導し，その $\mathbb{Q}$ 係数および $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジーは（Euler 類 $e$ を除き）強い意味で安定する：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} H^*(\mathrm{BGL}_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) =& H^*(\mathrm{BGL}_+(\infty, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] \\
H^*(\mathrm{BGL}_+(2n, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) &\cong \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_{n-1}, e] \quad (\text{Pontrjagin 類，Euler 類}) \\
H^*(\mathrm{BGL}_+(2n+1, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) &\cong \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n] \quad (\text{Pontrjagin 類})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} H^*(\mathrm{BGL}_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2) =& H^*(\mathrm{BGL}_+(\infty, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[w_2, w_3, \ldots] \\
H^*(\mathrm{BGL}_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2) &\cong \mathbb{Z}/2[w_2, \ldots, w_n] \quad (\text{Stiefel-Whitney 類})
\end{aligned}$$

包含写像 $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}_+(n)$ がホモトピー同値写像であることと，良く知られたファイバーバンドル

$$\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1) \to S^n$$

から，ファイブレーション

$$S^n \to \mathrm{BGL}_+(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{BGL}_+(n+1, \mathbb{R})$$

が存在することが分かる．

さらに，上記の分類空間はすべて，閉多様体であるGrassmann 多様体のある系列の和として具体的に構成することができる．すなわち

$$\mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R}) = \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{\mathbb{R}^{n+k}\text{の向き付けられた}\, n\,\text{次元線形部分空間}\}\right)$$

そして，各$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$上には$n$次元のtautological バンドル$\xi^n_k$が定義されるが，包含写像$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k+1})$において，$\xi^n_{k+1}$の$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$への制限は$\xi^n_k$となる．実際，これらは$\mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R})$上の$n$次元のtautological バンドル$\xi^n_\infty$の制限である．

そして，上記の特性類へのアプローチとしては，Grassmann 多様体のSchubert 胞体による胞体分割を用いる直接計算，上記のファイブレーションを用いた$n$に関する帰納法，微分幾何の概念である接続と曲率を用いるもの（Chern-Weil 理論），障害の理論（切断の存在への障害類）を用いるもの，等たくさんのものがある．これにより，ベクトルバンドルの１次特性類の理論は完成された理論となっている．

## 2.2. Pontrjagin-Thom 構成

「はじめに」の節ですでに述べたように，Pontrjagin-Thom 構成を一言でいえば，多様体に関する問題とホモトピーの問題を関連させる構成法のことである．場合によって，ホモトピーの問題を多様体の問題に関連させて調べることもあり，逆に多様体に関する幾何的な問題をホモトピーの問題に帰着させてそれを解く場合もある．Pontrjagin の1930年代に始まる仕事（前者に属する）と，1950年代のThom の有名な同境理論の仕事（後者に属する）から，Pontrjagin-Thom 構成と呼ばれるようになった．

基礎となる操作は，$\mathbb{R}^k$の１点コンパクト化と$k$次元球面$S^k$との同一視：

$$\mathbb{R}^k \cup \{\infty\} = S^k$$

である．実際には，これとホモトピー的に等価となるつぎのような具体的操作を考える．たとえば$\mathbb{R}^k$の中の単位円板を$D^k$とし，その境界$\partial D^k = S^{k-1}$および外側の部分を１点につぶした空間を，$S^k$と同一視するのである．すなわち

$$\mathbb{R}^k/(\mathbb{R}^k \setminus \mathrm{Int}\, D^k) = D^k/\partial D^k = S^k$$

という同一視である．簡単にいえば，Pontrjagin は上記の構成を多様体にパラメータ付けられた自明な族に対して行い，Thom はねじれた族に対して行ったのである．

### 2.2.1. Pontrjagin の仕事

多様体$M$に対し，その接バンドル$T(M)$と$k$次元自明バンドル$\varepsilon^k = M \times \mathbb{R}^k$とのWhitney 和$T(M) \oplus \varepsilon^k$ ($k$十分大)を$M$の安定接バンドルという．安定接バンドルの自明化が与えられた多様体を安定枠付き多様体（stably framed manifold）という．コンパクトな安定枠付き多様体の境界は，自然に安定枠付き多様体の構造をもつ．これにより，安定枠付き閉多様体の間に，安定枠付き同境という同値関係を入れることができる．$n$次元安定枠付き閉多様体全体の，この同値関係による商集合を$\Omega^{\mathrm{fr}}_n$と書けば，これは多様体の離散和によりアーベル群となる．Whitney 埋め込み定理により，この群は十分大きな次元の球面$S^{n+k}$（本質的に同じことであるが$\mathbb{R}^{n+k}$）の中の部分多様体の幾何学としてつぎのようにして“実現”することができる．その際，安定接バンドル

の役割は安定法バンドルが果たすことになる（両者の和には自然な自明化があることに注意）．

実際の展開は逆で，Pontrjagin は今から述べることを先に考え，球面のホモトピー群の問題を上記の枠付き多様体の同境による分類問題に帰着させたのである．この展開を Hopkins[16] に従って簡単に記す．ホモトピー群

$$\pi_{n+k} S^k = [S^{n+k}, S^k]$$

を調べるために，微分可能な写像 $f : S^{n+k} \to S^k$ を考える．このとき $f$ の正則値 $p \in S^k$ を任意に取れば，$f^{-1}(p) \subset S^{n+k}$ は余次元 $k$ の閉部分多様体であり，その法バンドルには，$p \in S^k$ の法バンドルすなわち $T_p(S^k)$ の自明化を指定することにより，自明化が与えられる．こうして $f^{-1}(p)$ は normally framed manifold となるが，正則値を替えてもその枠付き同境類はかわらないことが分かる．逆に $S^{n+k}$ の中に normally framed manifold $M$ が与えられたとすると，法バンドルの自明化を使ってその管状近傍は $M \times D^k$ と同一視できることになる．そこで写像 $p_M : S^{n+k} \to S^k$ を，管状近傍の上では第２成分への射影 $M \times D^k \to D^k$ と $D^k \to D^k/\partial D^k = S^k$ の合成写像とし，管状近傍の補集合の点はすべて $\partial D^k$ の行き先 $\infty \in S^k$ に移すことで定義することができる．これが Pontrjagin 構成である．互いに枠付き同境な枠付き閉多様体の Pontrjagin 構成はホモトピックであることが分かる．

こうして結局，同型

$$\Omega_n^{\mathrm{fr}} \cong \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k} S^k$$

が得られる．$n = 0$ のとき $\pi_k S^k \cong \mathbb{Z}$ はすでに Brouwer, Hopf により知られていた．Pontrjagin は $n = 1, 2$ のときを考えた．$n = 1$ のときは埋め込み $S^1 \subset S^{k+1}$ の法バンドルの自明化が $\pi_1 \mathrm{GL}_+(k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$ $(k > 2)$ であることを使って $\Omega_1^{\mathrm{fr}} \cong \mathbb{Z}/2$ であることを示した．つぎに $n = 2$ の場合に進み，2 次元多様体の分類から埋め込まれた種数 $g$ の閉曲面 $\Sigma_g \subset S^{k+2}$ の法バンドルの自明化を調べればよいことになる．$g = 0$ の場合は，$\pi_2 \mathrm{GL}_+(k, \mathbb{R}) = 0$ から法バンドルの自明化は $S^2$ をバウンドする $D^3$ に拡張し，この元は 0 を表すことが分かる．$g > 1$ の場合は $\Sigma_g$ 上の閉曲線上に法バンドルの自明化を制限し，そこに $n = 1$ の場合を適用することにより，写像

$$q : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$$

が定義される．初め Pontrjagin はこの写像が線形であると判断した．そして，その核を用いることにより，(今にいう）framed surgery をつぎつぎと適用することにより $g = 0$ まで到達できることから，$\Omega_2^{\mathrm{fr}} = 0$ と結論した．後にこれは誤りで，上記の $q$ は quadratic すなわち

$$q(u + v) = q(u) + q(v) + u \cdot v \ (u, v \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/2))$$

であることに気付き，$\Omega_2^{\mathrm{fr}} \cong \mathbb{Z}/2$ と修正した．Kervaire はさらにこの考えを進めて，彼の名を冠して呼ばれるようになる準同型写像

$$\text{Kervaire 不変量} : \Omega_{4n+2}^{\mathrm{fr}} \to \mathbb{Z}/2$$

を定義した．そして，この写像がどの次元 $4n + 2$ に対して全射となるか？が上記の難問となったのである．1969 年の Browder の仕事により，問題はブーメランのように再びホモトピー論の側に投げ返された．そして，40 年後に極めて深く複雑な理論を用いることにより，上述のように解決されたのである．

### 2.2.2. Thom の仕事

Thom は現在でもトポロジーの最も重要な概念といえるコボルディズム（同境）理論の創始者である．念のため，同境の定義を思い出しておく．二つの向き付けられた $n$ 次元閉多様体 $M, N$ は，あるコンパクトで向き付けられた多様体 $W$ が存在して

$$\partial W = M \coprod -N \ (-N \text{ は } N \text{ の向きを逆にしたもの})$$

となるとき，互いに向き付け同境であるという．これは，$n$ 次元閉多様体の全体に同値関係を誘導する．この同値関係による商集合 $\Omega_n$ には多様体の離散和の誘導する演算によりアーベル群の構造が入る．Thom は Pontrjagin の考えを大きく一般化した Thom 複体と Thom 構成の考えにより，つぎのようにして $\Omega_n$ の決定問題をホモトピーの問題に帰着させた．

Whitney 埋め込み定理により，$\Omega_n$ の決定問題は十分大きな $k$ について $\mathbb{R}^{n+k}$ の中の向き付けられた $n$ 次元閉部分多様体のある分類問題となる．$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ をそのような部分多様体とする．$M$ の法バンドル $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ は $k$ 次元の向き付けられたベクトルバンドルである．その分類写像を前述のように $\gamma^\perp : M \to \tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ とすれば，それはバンドル写像 $\tilde{\gamma}^\perp : \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \to \xi_n^k$ によってカバーされる．ただし，$\xi_n^k$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ 上の tautological なベクトルバンドルである．ここでもし $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ が自明ならば，自明化を与えることによりバンドルを束ねて Pontrjagin 構成を行えば $\pi_{n+k}S^k$ の元が得られる．しかし，一般に $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ はもちろん自明とは限らない．そこで $M$ 方向に束ねることはあきらめて，無限遠だけをつぶすことを考える．そこで登場するのが Thom 複体である．一般の設定で，$\xi$ を位相空間 $X$ 上のベクトルバンドルとし，(適当な計量を入れて）随伴する円板バンドルおよび球面バンドルをそれぞれ $D(\xi), S(\xi)$ とする．このとき $\xi$ の Thom 複体 $T(\xi)$ を

$$T(\xi) = \xi \text{ の全空間}/(\mathrm{Int}\, D(\xi) \text{ の補集合}) = D(\xi)/S(\xi)$$

と定義する．

前の設定に戻って，$M$ の管状近傍 $N(M)$ と $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ の円板バンドルを同一視し，バンドル写像 $\tilde{\gamma}^\perp : \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \to \xi_n^k$ が誘導する Thom 複体の間の連続写像を $T(\tilde{\gamma}^\perp) : T(\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})) \to T(\xi_n^k)$ とすれば，写像

$$\begin{aligned} S^{n+k} = & \mathbb{R}^{n+k} \text{ の１点コンパクト化} \to \\ & \mathbb{R}^{n+k}/(\mathrm{Int}\, N(M) \text{ の補集合}) = T(\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})) \to T(\xi_n^k) \end{aligned}$$

が得られる．$\xi_n^k$ は $\mathrm{BGL}(k, \mathbb{R})$ 上の tautological バンドル $\xi_\infty^k$ の $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ への制限であるから，結局写像

$$t_k : S^{n+k} \to T(\xi_n^k) \subset T(\xi_\infty^k) = \mathrm{MSO}(k) \ (\text{Thom の記号})$$

が得られる．つぎに $k \mapsto k+1$ として得られる写像 $t_{k+1} : S^{n+k+1} \to T(\xi_\infty^{k+1}) = \mathrm{MSO}(k+1)$ は，包含写像 $\mathrm{BGL}(k, \mathbb{R}) \subset \mathrm{BGL}(k+1, \mathbb{R})$ による $\xi_\infty^{k+1}$ の $\mathrm{BGL}(k, \mathbb{R})$ への制限が $\xi_\infty^k \oplus \varepsilon^1$ となることから

$$S^{n+k+1} = \Sigma S^{n+k} \xrightarrow{\Sigma t_k} \Sigma \mathrm{MSO}(k) \to \mathrm{MSO}(k+1) \ (\Sigma \text{ は懸垂を表す})$$

に一致することが分かる．$\mathrm{MSO} = \{\mathrm{MSO}(k)\}_k$ を Thom スペクトラムという．

**定理 2.1 (Thom [33])** 自然な同型

$$\Omega_n \cong \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}\mathrm{MSO}(k) = \pi_n\mathrm{MSO}$$

が存在する．さらに，つぎが成立する．

$$\Omega_* \otimes \mathbb{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \ldots]$$

この定理の証明には，Thom 複体と Thom 構成の考えに加えて，Thom 横断性定理および Thom 同型という重要な考えが使われる．そしてそれまでにすでに知られていた $\mathrm{BGL}_+(k,\mathbb{R})$ のコホモロジーと十分に発達していたホモトピー論を使って，帰着されたホモトピーの問題を解いたのである．

この定理をきっかけとして，Hirzebruch の符号数定理，Milnor の異種球面の発見，Kervaire-Milnor のホモトピー球面の理論（それは $\mathrm{Diff}_+S^n$ に関係する）を経て微分トポロジーの黄金時代を迎えた．

## 3. 多様体バンドルの特性類

### 3.1. 曲面バンドルの特性類～MMM 類～

曲面バンドルの特性類の定義を簡単に思い出しておく（[29][26][25] 参照）．種数 $g$ の向き付けられた閉曲面 $\Sigma_g$ をファイバーとする向き付けられた微分可能なファイバーバンドル $\pi : E \to X$ を，単に曲面バンドルと呼ぶことにする．構造群は $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ である．$\pi$ のファイバーに沿う接バンドルを $T\pi$ と書けば，これは $E$ 上の向き付けられた 2 次元ベクトルバンドルである．したがって，その Euler 類 $e \in H^2(E;\mathbb{Z})$ が定義される．$e$ のベキ $e^{i+1} \in H^{2i+2}(E;\mathbb{Z})$ に Gysin 準同型写像 $\pi_* : H^{2i+2}(E;\mathbb{Z}) \to H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ を施して得られるコホモロジー類

$$e_i = \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$$

を第 $i$ MMM 類と呼ぶ．これらのコホモロジー類は構成からバンドル写像に関して自然である．したがって，準同型写像

$$\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots] \to H^*(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g;\mathbb{Z})$$

が得られる．以上は位相幾何的な定義であるが，一方 Mumford[29] は代数幾何の枠組みの中でモジュライ空間 $\mathbf{M}_g$ の Chow 代数 $\mathbf{A}^*(\mathbf{M}_g)$ を定義し，その元として特性類 $\kappa_i \in \mathbf{A}^i(\mathbf{M}_g)$ を定義した．このとき，自然な全射 $\mathbf{A}^i(\mathbf{M}_g) \to H^{2i}(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g;\mathbb{Q})$ が存在して $\kappa_i \mapsto (-1)^{i+1}e_i$ となる．

### 3.2. Harer 安定性と安定コホモロジー

**定理 3.1 (Harer [13])** $\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g$ のコホモロジー群は種数 $g$ に関して安定する．すなわち，任意の $k$ に対し $k$ 次コホモロジー群 $H^k(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g;\mathbb{Z})$ は $g$ が十分大きいとき互いに同型となる．とくに，有理数係数の安定コホモロジー群

$$\lim_{g\to\infty} H^*(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g;\mathbb{Q})$$

が存在する．

上記の安定コホモロジー群は，Madsen と Weiss によって以下に述べる形で完全に決定された．

証明はMadsen-Tillmannの論文[23]で提出された予想を肯定的に証明することによりなされた．そこでは，族のPontrjagin-Thom 構成が本質的な役割を果たす．詳しくは，原論文および，広い観点からの別証を与えた[9]，そして二つの解説論文Tillmann[35], Wahl [37]とそれらの引用文献を参照されたい．ここでは，族のPontrjagin-Thom 構成についてそのアイディアを簡単に記す．曲面バンドル

$$\pi : E \to X$$

が与えられたとしよう．全空間$E$を十分大きな$k$に対して$\mathbb{R}^{2+k}$に埋め込む．このとき各点$x \in X$に対して，$x$上のファイバー$E_x = \pi^{-1}(x) \cong \Sigma_g$の$\mathbb{R}^{2+k}$への埋め込みが得られる．$E_x$の法バンドル$\nu(E_x, \mathbb{R}^{2+k})$の分類写像として，接バンドルの分類写像$\gamma : E_x \to \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k})$をとり，tautological バンドル$\xi_k^2$の直交補バンドル$(\xi_k^2)^\perp$の引き戻しとして$\nu(E_x, \mathbb{R}^{2+k})$を捉える，そのPontrjagin-Thom 構成を考えれば，写像

$$S^{2+k} \to T((\xi_k^2)^\perp)$$

が得られる．この構成は底空間$X$上の各点で行うことができる．それらを全部集めれば，写像

$$\alpha_\pi : X \to \Omega_0^{2+k} T((\xi_k^2)^\perp)$$

が得られる．この構成で，$k \mapsto k+1$として得られる写像$X \to \Omega_0^{2+k+1} T((\xi_{k+1}^2)^\perp)$は，包含写像$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k}) \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k+1})$による$(\xi_{k+1}^2)^\perp$の$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k})$への制限が$(\xi_k^2)^\perp \oplus \varepsilon^1$となることから

$$X \to \Omega^{2+k} T((\xi_k^2)^\perp) \to \Omega_0^{2+k}(\Omega T((\xi_{k+1}^2)^\perp)) = \Omega_0^{2+k+1} T((\xi_{k+1}^2)^\perp)$$

に一致することが分かる．$\mathrm{MTSO}(2) = \{T((\xi_k^2)^\perp)\}_k$をMadsen-Tillmann スペクトラムという．最後に，上記の構成を分類空間上の普遍$\Sigma_g$バンドルに対して施すことにより，つぎの写像を得る．

$$\alpha_{\Sigma_g} : \mathrm{BDiff}_+\Sigma_g \to \Omega_0^\infty \mathrm{MTSO}(2)$$

**定理 3.2 (Madsen-Weiss [24])** 族のPontrjagin-Thom 構成が誘導する写像

$$\alpha_{\Sigma_\infty} : \mathrm{BDiff}_+\Sigma_\infty \to \Omega_0^\infty \mathrm{MTSO}(2)$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する．とくに

$$\lim_{g\to\infty} H^*(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\Omega_0^\infty \mathrm{MTSO}(2); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[e_1, e_2, \ldots]$$

### 3.3. tautological algebra と非安定コホモロジー

MMM類$e_i$達で生成される$H^*(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$の部分代数を$\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$と書くことにする．一方，$\kappa_i$達で生成される$\mathbf{A}^*(\mathbf{M}_g)$の部分代数を$\mathcal{R}^*(\mathbf{M}_g)$と書き，これをモジュライ空間$\mathbf{M}_g$のtautological 代数という．自然な全射$\mathcal{R}^*(\mathbf{M}_g) \to \mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$が存在する．$\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$は多項式代数の商であるから，その次元は次数に関して

高々多項式の増大度である．ところが，$\mathbf{M}_g$ の orbifold としての Euler-Poincaré 標数の決定 (Harer-Zagier, Penner) および，通常の Euler-Poincaré 標数との差の評価（Harer-Zagier）から，$H^*(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g;\mathbb{Q})$ の次元は次数に関して指数関数以上の増大度を持つことが分かっている．したがって，MMM 類で表すことのできないコホモロジー類（非安定コホモロジー類という）が大量に存在する．しかし，現在までに知られている明示的に構成された非安定コホモロジー類は，極めて少ない（Looijenga, Tommasi）．

## 3.4. 曲面から高次元多様体へ

### 3.4.1. 特性類の定義～一般化された MMM 類～

曲面バンドルの MMM 類の定義は，つぎのようにして一般の多様体 $M$ をファイバーとするファイバーバンドルの特性類の定義に自然に一般化される（[6][7][17] 等参照 ）．

$M$ を向き付けられた $n$ 次元 $C^\infty$ 閉多様体とする．

$$\pi : E \to X$$

を向き付けられた $M$ バンドルとし，$T\pi$ をファイバーに沿う接バンドルとする．すなわち

$$T\pi = \{v \in T(E); \pi_*(v) = 0\}$$

である．このとき，$T\pi$ は $E$ 上の向き付けられた $n$ 次元の実ベクトルバンドルである．したがって，その分類写像

$$f_\pi : E \to \mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R})$$

が定義される．このとき，任意の元 $c \in H^k(\mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R});\mathbb{Q}) (k \geq n)$ に対し $f_\pi^*(c) \in H^k(E;\mathbb{Q})$ は $c$ に対応する $T\pi$ の特性類である．この特性類に Gysin 準同型写像

$$\pi_* : H^k(E;\mathbb{Q}) \to H^{k-n}(X;\mathbb{Q})$$

を施して得られる元

$$\kappa_c := \pi_*(f_\pi^*(c)) \in H^{k-n}(X;\mathbb{Q})$$

を考える．この構成は $M$ バンドルのバンドル写像に関して明らかに自然である．したがって

$$\kappa_c \in H^{k-n}(\mathrm{BDiff}_+M;\mathbb{Q})$$

と考えることができる．すなわち $\kappa_c$ は $M$ バンドルの特性類である．これを $c$ に対応する一般化された MMM 類という．

これらを全部集めれば，線形写像

$$\mathcal{R} : H^{*\geq n}(\mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R});\mathbb{Q}) \to H^{*-n}(\mathrm{BDiff}_+M;\mathbb{Q})$$

得られる．ここで $* = n$ の場合は，$M$ の特性数（Pontrjagin 数と Euler 数）の全体が得られていることに注意したい．そこで

$$\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+M;\mathbb{Q}) = \mathrm{Im}\,\mathcal{R}\ \text{が生成する}\ H^*(\mathrm{BDiff}_+M;\mathbb{Q})\ \text{の部分代数}$$

とおく．$M = \Sigma_g$ の場合は，すでに定義した $\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g;\mathbb{Q})$ と一致することがすぐに分かる．

**注意 3.3** $M = S^1$ の場合，任意の向き付けられた $S^1$ バンドルのファイバーに沿う接バンドルは自明であるから，$\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+ S^1)$ は自明となる．一方，良く知られているように $S^1 \simeq \mathrm{Diff}_+ S^1$ であるから

$$\mathrm{BDiff}_+ S^1 \simeq \mathrm{B}S^1 = \mathbb{C}P^\infty$$

となる，したがって $H^*(\mathrm{BDiff}_+ S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e]$ となる．

### 3.4.2. Harer 安定性の一般化と族の Pontrjagin-Thom 構成

$M$ を向き付けられた $n$ 次元の閉多様体とする．このとき，曲面バンドルの場合を一般化することにより，写像

$$\alpha_M : \mathrm{BDiff}_+ M \to \Omega_0^\infty \mathrm{MTSO}(n)$$

が定義される．ここで $\mathrm{MTSO}(n)$ は $n$ 次元の場合の Madsen-Tillmann スペクトラムである．

$W_g = g(S^n \times S^n)$ とし $\mathrm{Diff}(W_g, D^{2n}), \mathrm{Diff}\, W_\infty = \lim_{g\to\infty} \mathrm{Diff}(W_g, D^{2n})$ を考える．

**定理 3.4 (Berglund-Madsen [2])** 任意の $n > 2$ に対して，$\mathrm{BDiff}(W_g, D^{2n})$ の有理数係数コホモロジー群は $g$ に関して安定する．

**定理 3.5 (Galatius-Randall-Williams[10])** 任意の $n > 2$ に対して，族の Pontrjagin-Thom 構成が誘導する写像

$$\alpha_{W_\infty} : \mathrm{BDiff}\, W_\infty \to \Omega_0^\infty \mathrm{MTSO}(2n)$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する．

上記の二つの定理については，さらなる一般化・精密化が得られつつある．

## 4. 関連するいくつかの流れ

### 4.1. 曲面の特殊性

上記のように，曲面バンドルの特性類の理論は，一般の次元の多様体をファイバーとするファイバーバンドルの特性類の理論に一般化される部分も多い．しかし，曲面の場合にのみ成り立つ事項もまた多く，この場合は極めて特殊な場合とも言えるのである．いくつか代表的な事項を挙げるとつぎのようになる．

(i) $\mathrm{Diff}_0 \Sigma_g$ は可縮 $(g \geq 2)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{BDiff}_+ \Sigma_g = K(\mathcal{M}_g, 1)$ (Earle-Eells [5])
(ii) $\mathcal{M}_g \cong \mathrm{Out}_+ \pi_1 \Sigma_g$ (Dehn-Nielsen)
(iii) $\mathcal{M}_g (g \geq 2)$ は Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_g \cong \mathbb{R}^{6g-6}$ に properly discontinuous に作用する

ここで $\mathrm{Diff}_0 \Sigma_g$ は $\mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ の単位元の連結成分を表し $\mathcal{M}_g = \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g / \mathrm{Diff}_0 \Sigma_g$ は $\Sigma_g$ の写像類群と呼ばれる群である．また商空間 $\mathbf{M}_g = \mathcal{T}_g / \mathcal{M}_g$ はすでに記したが，種数 $g$ のリーマン面のモジュライ空間と呼ばれる重要な空間である．これらの結果により，つぎのような有理コホモロジーの自然な同型が存在する．

$$H^*(\mathrm{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathbf{M}_g; \mathbb{Q}) \quad (g \geq 2)$$

#### 4.1.1. Johnson に始まる流れ

曲面の写像類群 $\mathcal{M}_g$ はホモロジー群 $H := H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ に作用する．この作用は交叉数の誘導する $H$ 上の歪対称双一次形式 $\mu : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ を保ち，良く知られた行列表現 $\rho_0 : \mathcal{M}_g \to \mathrm{Aut}\,(H, \mu) \cong \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ が得られる．この表現は全射であることが古典的に知られており，したがって完全系列

$$1 \to \mathcal{I}_g \to \mathcal{M}_g \xrightarrow{\rho_0} \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \to 1$$

が得られる．こうして定義される群 $\mathcal{I}_g$ を Torelli 群という．Johnson は 1970 年代後半に Torelli 群の研究を始め，1980 年代半ばまでの比較的短い期間にいくつかの基本的な定理を得た．Torelli 群のアーベル化の決定および $g \geq 3$ のときの有限生成性等である（[18] 参照）．これと並んで彼が提出した重要な概念が Johnson filtration である．これは，Dehn-Nielsen の定理を念頭に，$\mathcal{M}_g$ の $\pi_1\Sigma_g$ の降中心列（Malcev 完備化）への作用の誘導する filtration である．Johnson の仕事は多くの研究者によって引き継がれて発展し，現在もその流れが続いている．技術的な理由で境界を一つ持つ種数 $g$ のコンパクト曲面 $\Sigma_g^1$ の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の場合を書けば，Johnson filtration $\{\mathcal{M}_{g,1}(k); k = 0, 1, \ldots\}$ に随伴する次数付き加群から，シンプレクティック微分リー代数と呼ばれるリー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$ への準同型写像

$$\tau : \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{g,1}(k)/\mathcal{M}_{g,1}(k+1) \to \mathfrak{h}_{g,1}$$

が定義されており，この研究が中心テーマの一つである．ここで $\mathfrak{h}_{g,1}$ は，曲面のホモロジー $H_\mathbb{Q} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ の生成する自由リー代数のシンプレクティック微分全体のなすリー代数として定義され，また $\tau$ は現在 Johnson 準同型と呼ばれている．$g \to \infty$ とした極限 $\mathfrak{h}_\infty$ は，後述する Kontsevich の理論にも現れ，写像類群のみならず，自由群の自己同型群の研究との深い関連が生じてきた．また写像類群を大きく拡張するホモロジーシリンダーの理論（Habiro, Goussarov, Garoufalidis, Levine, Sakasai,...）でも，重要な役割を果たすことが分かっている．さらに，ここでは詳しいことは述べられないが，数論とも深い関連があることも示されており，このリー代数の重要性はますます増大している．

この項の最後に Torelli 群と微分同相群のコホモロジーとの直接の関連に関する二つの仕事：Torelli 群のコホモロジーの無限生成性を示した Akita[1] と，$\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$ と Johnson 準同型との関係を明らかにした Kawazumi-M.[19] を挙げておきたい．

#### 4.1.2. 複素解析，代数幾何，数論との関わり

すでに述べた曲面の特殊性により，曲面バンドルの理論は数学の多くの分野と深い関わりを持っている．とくに Teichmüller 理論，代数曲線のモジュライ空間の理論，そして arithmetic 写像類群の理論等を通じて，微分幾何，複素解析，代数幾何，数論との関わりが深い．また，Witten の仕事，Witten-Kontsevich の定理以降，数理物理との関連も生まれた．しかし，これらについて詳しく述べることは筆者の能力を遥かに超えている．

ここでは，一つだけ代数幾何との関連を挙げたい．すでに定義を述べたモジュライ空間の tautological 代数 $\mathcal{R}^*(\mathbf{M}_g)$ の研究は，Faber 予想と呼ばれる予想の提出（1993 年）以降，活発な状況が続いている（Faber[8] 参照）．この研究は一般の閉多様体 $M$ に

関する $\mathcal{R}^*(\mathrm{Diff}_+M;\mathbb{Q})$ の研究の基本的なモデルとなることから，トポロジーにおいても重要と思われる．

### 4.2. 葉層構造の特性類

本稿の主テーマに密接に関連する 2 番目の流れは，平坦バンドルの特性類および葉層構造の特性類の理論である．1970 年代初頭の Godbillon-Vey 類と呼ばれる特性類の発見と，その直後の Thurston の有名な仕事（この特性類の連続変化）を契機として，葉層構造の特性類の理論が比較的短い期間に飛躍的な発展をした（Bott[3] 等参照）．この展開と前後して現れた Gelfand-Fuks 理論 [11] および Chern-Simons 理論は，葉層構造の特性類の理論と密接な関係がある．もう一つこの理論で中心的な役割を果たして来たのは，Haefliger の仕事 [12] である．

#### 4.2.1. Haefliger 分類空間

Haefliger は葉層構造の研究に代数的トポロジーの手法を持ち込んだ．$\mathbb{R}^n$ の向きを保つ局所微分同相写像の芽（germ）全体のつくる位相亜群（topological groupoid）（$\Gamma_n^+$ と記される）を考え，その分類空間 $\mathrm{B}\Gamma_n^+$ を構成した．この空間は Haefliger 分類空間と呼ばれる．そして，多様体 $M$ 上の余次元 $n$ の横断的に向き付けられた葉層構造を，$\Gamma_n^+$ に値を取る 1 コサイクルとして捉えた．とくに，その分類写像 $M \to \mathrm{B}\Gamma_n^+$ が定義される．微分する操作は，準同型 $\Gamma_n^+ \to \mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R})$ を誘導し，つぎのファイブレーションが得られる．

$$\mathrm{B}\overline{\Gamma}_n^+ \to \mathrm{B}\Gamma_n^+ \to \mathrm{BGL}_+(n,\mathbb{R})$$

#### 4.2.2. $\mathrm{BDiff}^\delta M$ のコホモロジーに関する Thurston の仕事

ここでは，$\mathrm{Diff}\,M$ に離散位相を入れた群 $\mathrm{Diff}^\delta M$ の分類空間 $\mathrm{BDiff}^\delta M$（それは $M$ をファイバーとするファイバーバンドルで，ファイバーに横断的な葉層構造の入ったものを分類する）のコホモロジーに直接関係する二つの定理を挙げたい．これらの定理の定式化と証明には，広い意味での Pontrjagin-Thom 構成の考えが使われている．

一つことばを準備する．$G$ を位相群とし $G^\delta$ は同じ群に離散位相を与えたものとする．$\mathrm{B}\overline{G}$ を連続写像 $\mathrm{B}G^\delta \to \mathrm{B}G$ のホモトピーファイバーとする．このときファイブレーション

$$\mathrm{B}\overline{G} \to \mathrm{B}G^\delta \to \mathrm{B}G$$

が存在する．さて，$\mathrm{Diff}_K\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の微分同相写像でコンパクトな台を持つもの全体とする．このとき，$\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_K\mathbb{R}^n$ 上の普遍バンドルの分類写像

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_K\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{B}\overline{\Gamma}_n^+$$

は，$\infty \in \mathbb{R}^n$ の近傍をつぶすことによりつぎの写像

$$\Sigma^n(\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_K\mathbb{R}^n) \to \mathrm{B}\overline{\Gamma}_n^+ \tag{1}$$

を誘導する．

**定理 4.1 (Mather($n=1$),Thurston[34])** 上記の写像 (1) の随伴写像

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_K\mathbb{R}^n \to \Omega^n(\mathrm{B}\overline{\Gamma}_n^+)$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する．

つぎに，$M$ を向き付けられた $n$ 次元閉多様体とするとき，$\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_+ M \times M$ 上の普遍バンドルの分類写像

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_+ M \times M \to \mathrm{B}\Gamma_n^+$$

を考える．この写像は，各点 $p \in \mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_+ M$ に対して，$M$ の接バンドルの分類写像 $M \to \mathrm{BGL}_+(n, \mathbb{R})$ の $\mathrm{B}\Gamma_n^+$ へのリフトを与える．そこで $X_M$ をそのようなリフトの全体の成す空間とする．

**定理 4.2 (Thurston[34])** 自然な写像

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{Diff}}_+ M \to X_M$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する．

このように Thurston の仕事は，葉層構造の問題を $\mathrm{B}\Gamma_n^+$ を使ってホモトピーの問題に帰着させた．しかし，ここで Thom の仕事の場合と決定的に異なるのは，$\mathrm{B}\Gamma_n^+$ のホモトピー型が（多くのことが分かったとはいえ）未知のままであるということである．

## 4.3. Kontsevich の形式的シンプレクティック幾何

3 番目の流れとして取り上げる Kontsevich のグラフホモロジーの理論は，1990 年代の初めに提出されたもので associative, commutative, lie の 3 種類（それらの variants を含めれば 6 種類以上）がある．論文 [20] の冒頭の記述によれば，そもそもの出発点は，ある良い性質をもつ d.g.a. を用いた “写像類群のコホモロジー類の奇妙な構成法” に気づいたこと（associative 版）で，続いて commutative, lie 版を創った，とある．

ごく大雑把にいえば，三つの無限次元リー代数 $\mathfrak{a}_\infty, \mathfrak{c}_\infty, \mathfrak{h}_\infty$ のコホモロジーが，それぞれ，写像類群（あるいはリーマン面のモジュライ空間），グラフホモロジー，自由群の外部自己同型群（あるいは Culler-Vogtmann [4] のグラフのモジュライ空間）の有理コホモロジーと等価となる，という驚くべき理論である．三つのリー代数の定義は原論文を見ていただくことにしてここでは省略する．ただし最後のリー代数は，Kontsevich の理論以前に Johnson 準同型のターゲットとしてすでに現れていたものである．

ここでは三つの場合の各々について，$H^*(\mathrm{BDiff}\, M)$ に直接関係する部分についてだけ簡単に記述することにする．

### 4.3.1. associative case

**定理 4.3 (Kontsevich [20, 21])** つぎの同型が存在する．

$$PH_k(\mathfrak{a}_\infty)_{2n} \cong \bigoplus_{\substack{2g-2+m=n \\ m>0}} H^{2n-k}(\mathbf{M}_g^m; \mathbb{Q})^{\mathfrak{S}_m}.$$

ここで $\mathbf{M}_g^m$ は種数 $g$ の $m$ 個の点付き代数曲線のモジュライ空間を表す．$\Sigma_g$ 上の $m$ 個の点を固定する微分同相群を $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g^m$ と書けば，同型

$$H^*(\mathbf{M}_g^m; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g^m; \mathbb{Q})$$

が存在することが知られている．したがって上記の定理は，$\mathfrak{a}_\infty$ のホモロジー群が代数曲線のすべてのモジュライ空間のコホモロジーの情報を持っていることを示している．この事実の直接の応用として，たとえば Sakasai-Suzuki-M.[28] があるが，様々な応用が期待される．

### 4.3.2. commutative case

**定理 4.4 (Kontsevich [20, 21])** つぎの同型が存在する．

$$PH_k(\mathfrak{c}_\infty)_{2n} \cong H_k(G_*^{(n+1)}).$$

ここで $G_*^{(n)}$ $(n \geq 2)$ は Kontsevich が定義したグラフ複体であり，その次元は $2n-2$ である．この定理と直接関連する仕事として Watanabe[38] や LMO 不変量 [22] がある．問題集 Ohtsuki[31] も参照されたい．

### 4.3.3. lie case

**定理 4.5 (Kontsevich [20, 21])** つぎの同型が存在する．

$$PH_k(\mathfrak{h}_\infty)_{2n} \cong H^{2n-k}(\mathrm{Out}\, F_{n+1}; \mathbb{Q}).$$

ここで $\mathrm{Out}\, F_{n+1}$ は階数 $(n+1)$ の自由群の外部自己同型群を表す．証明は，Culler-Vogtmann の Outer 空間 [4] の胞体分割の構造と，$\mathfrak{h}_\infty$ のホモロジーを計算するチェイン複体とを巧みに関連付けることにより成される．前述のように，このリー代数は写像類群の研究においてすでに表れていたものであるが，この定理はそれが写像類群だけではなく，自由群の自己同型群とも深く関わることを示したものであり，驚きの結果であった．筆者は，この定理と写像類群の研究を組み合わせて $\mathrm{Out}\, F_n$ の一連のサイクルを定義した．さらに最近の Conant-Kassabov-Vogtmann の仕事からは数論との関係も生まれ，$\mathrm{Out}\, F_n$ のホモロジーの研究は極めて大きな発展を見せている．

最後に，この定理と微分同相群の直接の関連を示す一つの例を挙げる．Laudenbach の結果 $\pi_0 \mathrm{Diff}_+(n\,(S^1 \times S^2)) \cong \mathrm{Out}\, F_n \pmod{2\text{-torsion}}$ から，準同型写像

$$PH_k(\mathfrak{h}_\infty)_{2n-2} \cong H^{2n-2-k}(\mathrm{Out}\, F_n; \mathbb{Q}) \to H^{2n-2-k}(\mathrm{BDiff}_+(n\,(S^1 \times S^2)); \mathbb{Q})$$

が得られる．しかし，これが非自明かどうかは現状で全く未知である．

## 5. 将来への課題

**課題 5.1** Euler 類を真に超える特性類は存在するだろうか？具体的問いとしては，微分可能な閉多様体 $M$ をファイバーとするファイバーバンドルの “異種特性類”（古典的な理論では説明できない特性類）をできるだけ多く構成せよ．とくに $M = \Sigma_g$ の場合に非安定コホモロジー類の系統的な構成法を与えよ．

**課題 5.2** “恒等写像” $\mathrm{Diff}^\delta M \to \mathrm{Diff}\, M$ の誘導する自然な準同型写像

$$H^*(\mathrm{BDiff}\, M) \to H^*(\mathrm{BDiff}^\delta M) \quad (\text{係数は}\ \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\ \text{等})$$

を研究せよ．とくにその核，余核を調べよ．

参考：Friedlander, Milnor 予想：任意のリー群 $G$ に対し，自然な準同型 $H^*(\mathrm{B}G; \mathbb{Z}/p) \to H^*(\mathrm{B}G^\delta; \mathbb{Z}/p)$ は同型か？　$H_*(\mathrm{BDiff}_+^\delta \Sigma_g)$ に関する最新の研究については [30] 参照．

**課題 5.3** $M$ を実解析的多様体とする．このとき，包含写像 $\mathrm{Diff}^{\omega,\delta} M \to \mathrm{Diff}^{\delta} M$ の誘導する自然な準同型写像

$$H^*(\mathrm{BDiff}^{\delta} M) \to H^*(\mathrm{BDiff}^{\omega,\delta} M) \quad (\text{係数は}\, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\, \text{等})$$

は同型か？あるいは，非自明な核をもつか？とくに，$M = S^1$ のとき上記の準同型は非自明な核をもつか？(Thurston's "lost theorem" (Ghys))

Herman の仕事 (1970's) 以後，本質的進展は Tsuboi[36] のみと思われる．

**課題 5.4** "巨大空間"（huge space, Bott の命名）のホモロジー，たとえば $H_*(\mathrm{B}\Gamma_n; \mathbb{Z})$ あるいは $H_*(\mathrm{BDiff}^{\delta}_{+} S^1; \mathbb{Z})$ の研究をせよ．

**課題 5.5** 位相的カテゴリーの（smooth カテゴリーに比較しての）"柔軟性"（Freedman の定理, Thurston の定理）を念頭にして，4次元のトポロジーにおける $C^0$ と $C^\infty$ の差を，ホモロジーシリンダーの族に関するある種の特性類で検出できないか？

## 参考文献


[1] T. Akita, *Homological infiniteness of Torelli groups*, Topology **40** (2001), 213–221.

[2] A. Berglund, Ib Madsen, *Homological stability of diffeomorphism groups*, Pure Appl. Math. Q. **9(1)** (2013), 1–48.

[3] R. Bott, *Lectures on characteristic classes and foliations*, Lecture Notes in Mathematics **279**, Springer, 1972.

[4] M. Culler, K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. **84** (1986) 91–119.

[5] C.J. Earle, J. Eells, *The diffeomorphism group of a compact Riemann surface*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 557–559.

[6] J. Ebert, *Algebraic independence of generalized MMM-classes*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), 69–105.

[7] J. Ebert, O. Randal-Williams, *Generalised Miller-Morita-Mumford classes for block bundles and topological bundles*, Algebr. Geom. Topol. **14(2)** (2014), 1181–1204.

[8] C. Faber, *Tautological algebras of moduli spaces of curves*, in the book "Moduli spaces of Riemann Surfaces", 197–219, IAS/Park City Math. Ser., 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[9] S. Galatius, I. Madsen, U. Tillmann, M. Weiss, *The homotopy type of the cobordism category*, Acta Math. **202** (2009), no. 2, 195–239.

[10] S. Galatius, O. Randal-Williams, *Stable moduli spaces of high-dimensional manifolds*, Acta Math. **221** (2014), no. 2, 257–377.

[11] I.M. Gelfand, D.B. Fuks, The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields, *Izv. Akad. Nauk. SSSR* **34** (1970), 322–337.

[12] A. Haefliger, Homotopy and integrability, in *Manifolds-Amsterdam* (Amsterdam, 1970), 133–163. Lecture Notes in Mathematics **197**, Springer Berlin, 1971.

[13] J. L. Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), no. 2, 215–249.

[14] A. Hatcher, *A 50-year view of diffeomorphism groups*, 50th Cornell Topology Festival, May 2012, Hatcher's HP: http://www.math.cornell.edu/ hatcher/

[15] M. Hill, M. Hopkins, D. Ravenel, *The non-existence of elements of Kervaire invariant one*, preprint, arXiv:0908.3724v2.

[16] M. Hopkins, *The Kervaire invariant problem*, 第 7 回高木レクチャー, 東大数理, Nov. 2009, 東大数理ビデオアーカイブス.

[17] K. Igusa, "Higher Complex torsion and the Framing Principle", Memoirs of Amer. Math. Soc., volume 177, number 835, 2005.

[18] D. Johnson, *A survey of the Torelli group*, in: Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981) , Contemp. Math. **20**, 165–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[19] N. Kawazumi, S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and stable characteristic classes*, Math. Res. Lett. **3** (1996) 629–642.

[20] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, in: "The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992", Birkhäuser, Boston (1993) 173–187.

[21] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, in: "First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)", Progr. Math. 120, Birkhäuser, Basel (1994) 97–121.

[22] T. Le, J. Murakami,T. Ohtsuki, *A universal quantum invariant of* 3*-manifolds*, Topology **3** (1998) 539–574.

[23] Ib Madsen and U. Tillmann, *The stable mapping class group and* $Q(\mathbb{C}P^\infty_+)$, Invent. Math. **145** (2001), 509–544.

[24] Ib Madsen and M. Weiss, *The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 3, 843–941.

[25] E.Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Diff. Geom. **24** (1986), 1–14.

[26] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), 551–577.

[27] S. Morita, トポロジーの課題探訪 ～ 特性類と不変量を中心として ～, 中央大学における特別講義，新シリーズ (2013.10 – 2015.1) 講義ノート（北野晃朗氏による）, http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/

[28] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, *Abelianizations of derivation Lie algebras of the free associative algebra and the free Lie algebra*, Duke Math. J. **162** (2013), 965–1002.

[29] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in "Arithmetic and geometry, Vol. II", Progr. Math. **36** (1983), 271–328.

[30] S. Nariman, *Stable homology of surface diffeomorphism groups made discrete*, preprint, arXiv:math.AT/1506.0033 (2015).

[31] T. Ohtsuki, *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, With an introduction by J. Roberts, Geom. Topol. Monogr., 4, in the book of "Invariants of Knots and 3-Manifolds" (Kyoto, 2001), 377–572, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

[32] T. Sakasai, 曲面の写像類群と自由群の外部自己同型群のコホモロジーに関するこれまでの歩みと最近の進展, 投稿中, 2015.

[33] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.

[34] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 304–307.

[35] U. Tillmann, *Mumford's conjecture - a topological outlook*, in "Handbook of Moduli, Volume III", Adv. Lect. Math. **26**, Int. Press (2013), 399–429.

[36] T. Tsuboi, *On the group of real analytic diffeomorphisms*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 4, 601–651.

[37] N. Wahl, *The Mumford conjecture, Madsen-Weiss and homological stability for mapping class groups of surfaces*, in: Moduli Spaces of Riemann Surfaces, Park City Mathematics Series Volume 20 (2013), 109–138.

[38] T. Watanabe, *On Kontsevich's characteristic classes for higher dimensional sphere bundles. I. The simplest class*, Math. Z. **262** (2009), 683–712.