On the topological classification of quasitoric manifolds

蓮井 翔　(京都大学大学院理学研究科, D3)*

概　要

Quasitoric manifoldとはn次元トーラス$T^n = (S^1)^n$のよい作用をもつ$2n$次元多様体であって, その作用による軌道空間が単純多面体と角つき多様体として同相になるようなものを指す. 本講演ではそうしたquasitoric manifoldに関する分類結果, とくに$(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型のquasitoric manifoldの分類について紹介する.

1. 序

Quasitoric manifoldは滑らかな射影的トーリック多様体の位相幾何学的拡張物であり, [DJ91]において導入された. 本稿の第2節はその定義の復習に充てられる. トーリック多様体が扇と呼ばれる組合せ的対象に対応するのと同様, quasitoric manifoldは単純多面体PとP上の特性行列λの組(P, λ)に対応づけられる. 第3節ではこの対応について述べる.

トーリックトポロジーにおける大きな問題の一つとして, 枡田幹也教授によって提唱されたquasitoric manifoldのcohomological rigidity problemがある. この問題はquasitoric manifold全体から成るクラス, あるいはそのサブクラスが, 以下に述べる意味においてcohomologically rigidであるか否かを問うものである. 現在までのところ反例は見つかっていない.

位相空間から成るクラス$\mathcal{C}$が**cohomologically rigid**であるとは, $\mathcal{C}$に属する空間たちがそれらのコホモロジーの環構造のみによって位相的に分類されることをいう. すなわち, 次の条件が成り立つとき$\mathcal{C}$はcohomologically rigidであるといわれる: $X, Y \in \mathcal{C}$に対し, $H^*(X;\mathbb{Z})$と$H^*(Y;\mathbb{Z})$が次数つき環として同型であればXとYは同相である. さらに任意の次数つき環の同型$\varphi\colon H^*(Y;\mathbb{Z}) \to H^*(X;\mathbb{Z})$に対して$\varphi = f^*$となる同相写像$f\colon X \to Y$が存在するとき, $\mathcal{C}$は**strongly cohomologically rigid**であるという.

これまでquasitoric manifoldの分類はcohomological rigidity problemを指針として行われてきた. 第5節および第6節ではそうした諸結果の紹介を行い, 最後に$(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型のquasitoric manifoldのstrong cohomological rigidityについて証明の概略を記す.

2. Quasitoric manifoldの定義

用語法や記号等は別として, 本節から第4節までの記述は[BP02]に従っている. 以下, T^nはコンパクトトーラス$(S^1)^n$とし, $\mathbb{C}^n$には$T^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\colon (t_1, \ldots, t_n) \times (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (t_1z_1, \ldots, t_nz_n)$による$T^n$-作用が入っているものとする.

定義 2.1. T^n-作用をもつ空間X, Y間の写像$f\colon X \to Y$が**弱同変**であるとは, ある自己同型$\psi\colon T^n \to T^n$が存在し, 任意の$x \in X$と$t \in T^n$に対して$f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x)$を満たすことをいう.

定義 2.2. T^nの$2n$次元微分多様体Mへの滑らかな作用が**locally standard**であるとは, Mの座標近傍系$\{(U, f, V)\}$であって, UおよびVがそれぞれMおよび$\mathbb{C}^n$のT^n-不

* e-mail: `s.hasui@math.kyoto-u.ac.jp`

変な開部分集合, f が弱同変な微分同相写像となるものが存在することをいう.

定義 2.3. $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\}$ とし, 各 $x \in \mathbb{R}^n_+$ に対して depth$\,(x)$ を x の 0 に等しい成分の個数として定める. Hausdorff 空間 X が n **次元角つき多様体**であるとは, 開被覆 $\{U_i\}$ と同相写像の族 $\{f_i \colon U_i \to V_i\}$ であって, 各 V_i は $\mathbb{R}^n_+$ の開部分集合であり, さらに座標変換が各点において depth を保つようなものが存在することをいう.

角つき多様体 M, N の間に同相写像 $f \colon M \to N$ であって各点において depth を保つものが存在するとき, M と N は**角つき多様体として同相**であるという.

定義 2.4. n 次元凸多面体 P の各頂点にちょうど n 枚の側面が集まっているとき, P は**単純多面体**であるという.

注 2.5. $\mathbb{C}^n/T^n$ は $\mathbb{R}^n_+$ と自然に同一視できるので, n 次元微分多様体 M への locally standard な T^n-作用による軌道空間 M/T^n は自然に角つき多様体とみなすことができる. 単純多面体についても同様である.

定義 2.6. Locally standard な T^n-作用をもつ微分多様体であって, その軌道空間が角つき多様体として単純多面体 P に同相であるようなものを P **上の quasitoric manifold** という.

以下, こうした quasitoric manifold の分類についての結果を紹介する. 分類の基準としてはまず弱同変同相, さらに同相, コホモロジー同値 (ここでは整数係数コホモロジー環の次数つき環としての同型を指す) を考える.

3. 弱同変同相についての分類

定義 3.1. 単純多面体 P 上の quasitoric manifold の弱同変同相類全体を $\mathcal{M}_P$ と記す.

以下, P は n 次元単純多面体で m 枚の側面をもち, かつそれらは $F_1, \ldots, F_m$ と番号づけられているものとする.

定義 3.2. P 上の**特性行列**とは, 整数係数の $n \times m$ 行列 $\lambda = (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m)$ であって次の non-singular condition と呼ばれる条件を満たすものをいう: 側面 $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$ がある頂点で交わっているとき, $\det \lambda_{(i_1,\ldots,i_n)} = \pm 1$. ここで $\lambda_{(i_1,\ldots,i_n)}$ は小行列 $(\boldsymbol{\lambda}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_{i_n})$ を表す.

以下のようにして P 上の特性行列 λ から P 上の quasitoric manifold $M(\lambda)$ を構成することができる. 各点 $q \in P$ に対して q の属する最小の面を $G(q)$ と記す. 特性写像 ℓ_λ は P の各面に T^n の部分トーラスを対応させる写像であって, 次で定義される:

$$\ell_\lambda(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}) := \operatorname{im}\,(\lambda_{(i_1,\ldots,i_k)} \colon T^k \to T^n).$$

ここで T は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と見做されており, $\lambda_{(i_1,\ldots,i_k)}$ はそれに対応する線型写像が商加群に導く準同型を表している. $T^n \times P$ に同値関係 $\sim_\lambda$ を次で定める:

$$(t_1, p) \sim_\lambda (t_2, q) \iff p = q \text{ かつ } t_1 t_2^{-1} \in \ell_\lambda(G(q)).$$

$M(\lambda) := (T^n \times P)/\sim_\lambda$ とし, T^n の第一成分への標準的な作用を考えることにより quasitoric manifold $M(\lambda)$ が得られる. 実際, $M(\lambda)$ から P への射影を π とし, 各頂点 v に対して P から v の属さない側面をすべて除いたものを U_v と記すとき, $\pi^{-1}(U_v)$ は $\mathbb{C}^n$

に弱同変同相であることが容易に分かる．これらにより微分多様体の構造を定めればよい．

逆に, M を P 上の quasitoric manifold とするとき, 以下のようにして特性行列 $\lambda(M)$ が得られる．M から $P \cong M/T^n$ への射影を π と記す．作用が locally standard であることから, $\pi^{-1}(\mathrm{rel.int}\, F_i)$ の各元は同じ等方部分群を持ち, それは 1 次元の部分トーラスである．これを $T_M(F_i)$ と記し, 対応するベクトルを $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{Z}^n$ とする．すなわち, $\boldsymbol{\lambda}_i = {}^t(\lambda_{1,i}, \ldots, \lambda_{n,i})$ は $T_M(F_i) = \{(z^{\lambda_{1,i}}, \ldots, z^{\lambda_{n,i}}) \in T^n \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ となる $\mathbb{Z}^n$ の元であって, さらに各成分の最大公約数が 1 であるようなものである．これは符号を除いて一意に定まる．$\lambda(M) := (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m)$ とすれば, これが non-singular condition を満たすことは作用が locally standard であることから分かり, 従って $\lambda(M)$ は P 上の特性行列となる．

定義 3.3. P 上の特性行列全体の集合を Λ_P, 写像 $\Lambda_P \to \mathcal{M}_P \colon \lambda \mapsto M(\lambda)$ を ϕ と記す．

補題 3.4 ([DJ91])**.** *P 上の任意の quasitoric manifold M に対して, 射影 $M \to P$ には連続な切断が存在する．*

Proof. [Dav78, p. 344] における "blow up" の議論により, 主 T^n-束 $p\colon \tilde{M} \to P$ と連続写像 $r : \tilde{M} \to M$ であって $\pi \circ r = p$ となるものが構成できる．P は可縮であるため, $p : \tilde{M} \to P$ は自明束であって切断をもつ．この切断と r を合成すればよい． □

命題 3.5 ([DJ91])**.** *P 上の任意の quasitoric manifold M に対して M と $M(\lambda(M))$ は同変同相．特に ϕ は全射である．*

Proof. 補題 3.4 より得られる連続な切断を $s\colon P \to M$ と記す．すると $T^n \times P \to M$ が $(t, q) \mapsto t \cdot s(q)$ により定まるが, これが $M(\lambda) = (T^n \times P)/\sim_\lambda$ から M への同変同相写像を導くことは容易に示される． □

Λ_P には $GL(n, \mathbb{Z})$ が左からの積によって, $(\mathbb{Z}/2)^m$ が列を -1 倍することによって作用する．

定義 3.6. $\mathcal{X}_P := GL(n, \mathbb{Z}) \backslash \Lambda_P / (\mathbb{Z}/2)^m$.

定義 3.7. $\{1, \ldots, m\}$ 上の単体複体 K_P を次のように定める:

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \in K_P \iff F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \neq \emptyset.$$

K_P の自己同型全体のなす群を $\mathrm{Aut}\,(K_P)$ と記す．

注 3.8. $\mathrm{Aut}\,(K_P)$ は列の入れ替えにより Λ_P に作用する．さらにこの作用は $\mathcal{X}_P$ への右作用を導く．

命題 3.9 ([DJ91])**.** *$\phi\colon \Lambda_P \to \mathcal{M}_P$ は全単射 $\overline{\phi} : \mathcal{X}_P/\mathrm{Aut}\,(K_P) \to \mathcal{M}_P$ を導く．*

Proof. まず ϕ が $\mathcal{X}_P/\mathrm{Aut}\,(K_P)$ から $\mathcal{M}_P$ への写像を導くことを示す．$\lambda = (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m)$, $\lambda' = (\boldsymbol{\lambda}'_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}'_m)$ を P 上の特性行列とし, $M := M(\lambda)$, $M' := M(\lambda')$ とおく．$\sigma \in \mathrm{Aut}\,(K_P)$ と $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ が存在して

$$\boldsymbol{\lambda}'_{\sigma(i)} = \pm A \boldsymbol{\lambda}_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

となるとき, M と M' が弱同変同相であることを示せばよい. K_P の重心細分が P の単体分割を与えることに注意すると, σ は角つき多様体としての同相 $\overline{f}\colon P \to P$ であって, 各側面に対し $\overline{f}(F_i) = F_{\sigma(i)}$ となるようなものを導くことが分かる. A から導かれる T^n の自己同型を ψ と記し, $\tilde{f}\colon T^n \times P \to T^n \times P\colon (t,q) \mapsto (\psi(t), \overline{f}(q))$ と定める. すると $\tilde{f}$ は $f\colon M \to M'$ を導くが, これが弱同変同相であることは明らかである.

逆に上のような M と M' が弱同変同相であるとする. すなわち, 同相写像 $f\colon M \to M'$ と T^n の自己同型 ψ が存在して任意の $x \in M$ と $t \in T^n$ に対して $f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x)$ を満たすと仮定する. ψ に対応する $GL(n,\mathbb{Z})$ の元を A とする. また, f は軌道空間 $P \cong M/T^n \cong M'/T^n$ に角つき多様体としての自己同相 $\overline{f}$ を導く. $\overline{f}$ により定まる $\mathrm{Aut}\,(K_P)$ の元を σ と記す. このとき $\boldsymbol{\lambda}'_{\sigma(i)} = \pm A\boldsymbol{\lambda}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ が成り立つことは容易に分かる. こうして $\overline{\phi}$ の単射性が示された. □

4. コホモロジー環

Quasitoric manifold のコホモロジー環について以下のことが知られている.

定義 4.1. P を n 次元単純多面体とし, その $(n-i-1)$ 次元の面の枚数を f_i と記す. P の h**-vector** $(h_0, \ldots, h_n)$ は次の式によって定義される:

$$h_0 t^n + \cdots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}.$$

次の定理は quasitoric manifold に入る標準的な CW 複体の構造 ([BP02, p. 66]) から得られる.

定理 4.2 ([DJ91])**.** P を n 次元単純多面体, $(h_0, \ldots, h_n)$ をその h-vector とする. P 上の任意の quasitoric manifold M について, そのホモロジー群は奇数次において 0 であり, また偶数次においては自由である. さらに, M の $2i$ 次の Betti 数を $b_{2i}(M)$ と記すとき, $b_{2i}(M) = h_i$ が成り立つ.

注 4.3. すなわち, 同じ単純多面体上の 2 つの quasitoric manifold を比較するとき, それらのコホモロジーは次数つき加群としては同型であって, 必ず環構造まで見る必要がある.

前節同様, P は n 次元単純多面体で m 枚の側面を持ち, それらは $F_1, \ldots, F_m$ と番号づけられているものとする. M を P 上の quasitoric manifold とし, M から P への射影を π と記す. このとき各 $\pi^{-1}(F_i)$ は $(2n-2)$ 次元の閉部分多様体であることに注意.

定理 4.4 ([DJ91])**.** $\lambda = (\lambda_{i,j})$ を P 上の特性行列とし, $M := M(\lambda)$ とおく. このとき M の整係数コホモロジー環は次で与えられる:

$$H^*(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\lambda).$$

ここで $v_i \in H^2(M;\mathbb{Z})$ は閉部分多様体 $\pi^{-1}(F_i)$ の Poincaré 双対, $\mathcal{I}_P, \mathcal{J}_\lambda$ は以下のイデアルを表す.

$$\mathcal{I}_P = (v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} = \emptyset),$$
$$\mathcal{J}_\lambda = (\lambda_{i,1} v_1 + \cdots + \lambda_{i,m} v_m \mid i = 1, \ldots, n).$$

5. 特定の単純多面体上での分類に関する諸結果

定義 5.1. 単純多面体 P に対し, その上の quasitoric manifold の同相類全体の集合を $\mathcal{M}_P^{\mathrm{homeo}}$ と記す. また, P 上の quasitoric manifold の整数係数コホモロジー環の同型類全体を $\mathcal{M}_P^{\mathrm{coh}}$ と記す. ここでコホモロジー環の同型というのは単に次数つき環としての同型を考えている (つまりコホモロジー作用素などの構造は考えない). 自然な全射 $\mathcal{M}_P \to \mathcal{M}_P^{\mathrm{homeo}}, \mathcal{M}_P^{\mathrm{homeo}} \to \mathcal{M}_P^{\mathrm{coh}}$ をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 と記す.

本節は $\mathcal{M}_P^{\mathrm{homeo}}$ の cohomological rigidity が分かっているような場合をまとめたものである. $\mathcal{M}_P^{\mathrm{homeo}}$ が cohomologically rigid であることは ϕ_2 が全単射であることと同値であることに注意.

まず, 次のことは容易に分かる.

命題 5.2 ([DJ91])**.** n 次元単体 Δ^n に対し, $\#\mathcal{M}_{\Delta^n} = \#\mathcal{M}_{\Delta^n}^{\mathrm{homeo}} = \#\mathcal{M}_{\Delta^n}^{\mathrm{coh}} = 1$ であり, $\mathcal{M}_{\Delta^n}$ に属する唯一の類は標準的な T^n-作用を備えた $\mathbb{C}P^n$ により代表される.

次は [OR70] の結果の系として得られる. $m \geq 4$ とし, P_m は凸 m 角形を表すものとする.

定理 5.3 ([DJ91])**.** $\mathcal{M}_{P_m}$ は可算無限個の元を持ち, $\mathcal{M}_{P_m}^{\mathrm{homeo}}$ に属する各類は $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}, S^2 \times S^2$ らの連結和によって代表される. とくに ϕ_2 は全単射である.

次は [CPS12] の主定理を簡略化した形で述べたものである.

定理 5.4 ([CPS12])**.** 単体 2 つの積 $\Delta^n \times \Delta^m$ $(1 \leq n < m)$ に対し, $\mathcal{M}_{\Delta^n \times \Delta^m}^{\mathrm{coh}}$ は加算無限個の元を持つ. ϕ_1 は単射ではなく, ϕ_2 は全単射である.

より多くの単体の積については, 次の立方体 I^3 上での分類結果がある.

定理 5.5 ([H2])**.** $\mathcal{M}_{I^3}^{\mathrm{homeo}}$ は strongly cohomologically rigid である.

最後に双対巡回多面体上の quasitoric manifold の分類に関する結果を述べる. 巡回多面体 $C^n(m)$ $(1 < n < m)$ は m 個の頂点を持つ n 次元凸多面体であり, その双対 $C^n(m)^*$ は m 枚の側面を持つ n 次元単純多面体となる. 詳細は [Zie95] などを参照のこと.

定理 5.6 ([H1])**.** $n \geq 4$ かつ $m - n \geq 4$, あるいは $n \geq 6$ かつ $m - n \geq 3$ であるとき, $C^n(m)^*$ 上に quasitoric manifold は存在しない.

定理 5.7 ([H1])**.** 双対巡回多面体 $C^n(n+3)^*$ $(n = 3, 4, 5)$ 上の quasitoric manifold について, 以下が成り立つ.

(1) $\phi_1 \colon \mathcal{M}_{C^3(6)^*} \to \mathcal{M}_{C^3(6)^*}^{\mathrm{homeo}}$ は全単射ではないが $\phi_2 \colon \mathcal{M}_{C^3(6)^*}^{\mathrm{homeo}} \to \mathcal{M}_{C^3(6)^*}^{\mathrm{coh}}$ は全単射であり, またこれらはすべて可算無限個の元をもつ.

(2) $\#\mathcal{M}_{C^4(7)^*} = \#\mathcal{M}_{C^4(7)^*}^{\mathrm{homeo}} = \#\mathcal{M}_{C^4(7)^*}^{\mathrm{coh}} = 4$.

(3) $\#\mathcal{M}_{C^5(8)^*} = \#\mathcal{M}_{C^5(8)^*}^{\mathrm{homeo}} = \#\mathcal{M}_{C^5(8)^*}^{\mathrm{coh}} = 46$.

6. バンドル型の quasitoric manifold に関する諸結果

定義 6.1. 下のような空間と連続写像の列を考える.

$$B_n \xrightarrow{p_{n-1}} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-2}} \cdots \xrightarrow{p_2} B_2 \xrightarrow{p_1} B_1 = \mathbb{C}P^1$$

B_i 上の複素直線束 L_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ が存在し, 各 i に対して $p_i\colon B_{i+1} \to B_i$ が $\mathbb{C}P^1$-束の射影 $P(L_i \oplus \underline{\mathbb{C}}) \to B_i$ に等しいとき, B_n は n**-stage Bott manifold** であるという. ここで $\underline{\mathbb{C}}$ は自明束を, $P(L_i \oplus \underline{\mathbb{C}})$ は射影化を表す.

Bott manifold は立方体上の quasitoric manifold になることが知られている. T^n の作用と I^n の側面の番号づけを適当に取り換えることにより, n-stage Bott manifold の特性行列は次のような形に書ける:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

そこで $(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型の quasitoric manifold を次のように定義する. $\mathbb{C}P^2$ と $\mathbb{C}P^2$ の同変連結和としての $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$ は I^2 上の quasitoric manifold であり, その特性行列は $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とできることに注意.

定義 6.2. 立方体 I^{2n} 上の quasitoric manifold M が $(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$**-束型**であるとは, 下のような形の I^{2n} 上の特性行列 λ が存在して, M と $M(\lambda)$ が弱同変同相となることをいう:

$$\lambda = \begin{pmatrix} E_2 & 0 & \cdots & 0 & \kappa & * & \cdots & * \\ 0 & E_2 & \ddots & \vdots & 0 & \kappa & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & E_2 & 0 & \cdots & 0 & \kappa \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ここで E_2 は単位行列, $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ としている.

$(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型の quasitoric manifold が $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$ 上の iterated $(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-bundle となることは第3節での $M(\lambda)$ の構成から示すことができる.

Bott manifold については以下の2つの分類結果が存在する.

定理 6.3 ([Choi]). 3-stage (resp. 4-stage) の Bott manifold 全体は strongly cohomologically rigid (resp. cohomologically rigid) である.

定理 6.4 ([CMM]). $\mathbb{Z}/2$-係数のコホモロジー環が $H^*(\mathbb{C}P^1;\mathbb{Z}/2)^{\otimes n}$ に同型であるような n-stage Bott manifold 全体は strongly cohomologocally rigid である.

最後に $(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型の quasitoric manifold に関する分類結果と, その証明の概略を述べる.

定理 6.5 ([H2]). M, M' を $(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型の quasitoric manifold とし, $\varphi\colon H^*(M';\mathbb{Z}) \to H^*(M;\mathbb{Z})$ を次数つき環としての同型写像とする. このとき弱同変同相写像 $f\colon M \to M'$ であって $\varphi = f^*$ となるものが存在する. とくに $(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2)$-束型の quasitoric manifold 全体は strongly cohomologically rigid である.

証明は以下のような手順で行われる. λ, λ' を (1) の形をもつ I^{2n} 上の特性行列とし, $M = M(\lambda)$, $M' = M(\lambda')$ と考えてよい. 定理4.4の表示において v_{2n+i} $(i = 1, \ldots, 2n)$ を

X_i と置き直すとき, M のコホモロジー環は適当なイデアル I を用いて $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{2n}]/I$ と書ける. 同様に, M' のコホモロジー環は $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{2n}]/I'$ と書ける. したがって φ は $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{2n}]$ の次数つき環としての自己同型であって I' を I に写すものと見做すことができる.

$\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{2n}]$ のフィルトレーション $\mathcal{F}$ を以下によって与える:

$$(X_{2n-1},X_{2n})\subseteq(X_{2n-3},\ldots,X_{2n})\subseteq\cdots\subseteq(X_{2n-2i+1},\ldots,X_{2n})\subseteq\cdots\subseteq(X_1,\ldots,X_{2n}).$$

次の補題が証明の鍵となる.

補題 6.6. (1) の形をもつ特性行列 μ と弱同変同相写像 $f\colon M(\mu)\to M$ が存在し, $f^*\circ\varphi$ はフィルトレーション $\mathcal{F}$ を保つ.

この補題により, $f^*\circ\varphi$ は行列で表すと次の形になる:

$$f^*\circ\varphi=\begin{pmatrix}\psi_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \psi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_n\end{pmatrix}.$$

各 ψ_i は $H^*(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ の自己同型を与える. 実は, 任意の $H^*(\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ の次数つき環としての自己同型は弱同変自己同相として実現できることが分かる. より強く, 次の補題が成立する.

補題 6.7. (1) の形をもつ特性行列 μ' と弱同変同相写像 $g\colon M'\to M(\mu')$ が存在し, g^* は行列で書くと次のようになる:

$$g^*=\begin{pmatrix}\psi_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_n^{-1}\end{pmatrix}.$$

今, $f^*\circ\varphi\circ g^*$ は次のような形をしている:

$$f^*\circ\varphi\circ g^*=\begin{pmatrix}E_2 & * & \cdots & * \\ 0 & E_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & E_2\end{pmatrix}.$$

このとき次の補題を繰り返し用いることにより, $\mu=\mu'$ かつ $f^*\circ\varphi\circ g^*=E_{2n}$ となることが分かる.

補題 6.8. μ, μ' を (1) の形をした I^4 上の特性行列, $\theta\colon H^*(M(\mu');\mathbb{Z})\to H^*(M(\mu);\mathbb{Z})$ を次数つき環としての同型写像とする. θ が行列で $\begin{pmatrix}E_2 & * \\ 0 & E_2\end{pmatrix}$ とあらわされるとき, $\theta=E_4$ であり, さらに $\mu=\mu'$ となる.

以上により, φ は弱同変同相写像 $g^{-1} \circ f^{-1}$ として実現された.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed] & M' \arrow[d, "g"] \\ M(\mu) \arrow[u, "f"] \arrow[r, equal] & M(\mu') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*(M;\mathbb{Z}) \arrow[d, "f^*"'] & H^*(M';\mathbb{Z}) \arrow[l, "\varphi"'] \\ H^*(M(\mu);\mathbb{Z}) \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, equal] & H^*(M(\mu');\mathbb{Z}) \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

参考文献

[BP02] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series, vol. **24**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Choi] S. Choi, *Classification of Bott manifolds up to dimension eight*, arXiv:math-AT/1112.2312

[CMM] S. Choi, M. Masuda and S. Murai, *Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds*, arXiv:math-AT/1401.0893v1 Proc. Steklov Inst. Math. , **275** (2011), 177–190

[CPS12] S. Choi, S. Park, and D. Y. Suh, *Topological classification of quasitoric manifolds with the second Betti number* 2, Pacific J. Math. 256(1) (2012), 19–49

[Dav78] M. W. Davis, *Smooth G-manifolds as collections of fiber bundles*, Pacific J. Math. **77** (1978), 315–363.

[DJ91] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.

[H1] S. Hasui, *On the classification of quasitoric manifolds over the dual cyclic polytopes*, arXiv:math-AT/1308.4219, to appear in Algebraic and Geometric Topology

[H2] S. Hasui, *On the cohomology equivalences between bundle-type quasitoric manifolds over a cube*, arXiv:math-AT/1309.4182

[OR70] P. Orlik and F. Raymond, *Actions of the torus on* 4*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 531–559.

[Zie95] G. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Math. **152**, Springer-Verlag, New-York, 1995.