境界付き３次元多様体のフレアーホモロジー

深谷賢治 Simons Center for Geometry and Physics

境界付き３次元多様体のフレアーホモロジー（ヤンミルズ理論に基づく）については，９０年代に種々の研究がなされたが，その進展はある時点で止まっている．
筆者も幾つかの研究を９０年代にした後，しばらくは研究していなかったが，　最近９０年代に提示した幾つかの予想が解決できることに気づいたので，報告する．

この問題はいわゆるアティヤー-フレアー予想と関わるが，アティヤー-フレアー予想はハンドル体の場合で，その場合は，曲面上の自明な束の平坦接続のモジュライ空間を考察する必要が生じる．このモジュライ空間は特異点を持っている．（可約接続があるため．）特異点を持つシンプレクティック多様体への擬正則曲線の理論を，曲面上の自明な束の平坦接続のモジュライ空間の場合を含めて構築することはなされていないため，その場合は論じない．従って，元来のアティヤー-フレアー予想は論じない．

３次元多様体 M とその上の $SO(3)$ 束 E を考える．ただし，E のスティーフェルホイットニー類は M のどの連結成分上でも０でないとする．この状況でフレアー[2]はフレアーホモロジー群 $HF(M,E)$ を定義している．これは鎖複体 $CF(M,E)$ のホモロジーである．$CF(M,E)$ のベクトル空間（ここでは $\mathbb{Z}_2$ 係数で考える）としての基底は E の平坦接続である．（平坦接続のモジュライ空間の次元は，M に境界がない場合０であるが，それは仮想次元である．一般には，しかるべき摂動をおこない，平坦接続のモジュライが０次元であるようにする．）境界作用素は，$M\times\mathbb{R}$ 上のASD（反自己共役）接続で，無限遠で与えられた平坦接続になるものを数えて定義する．このフレアーホモロジーの境界がある場合への一般化が主結果である．

３次元多様体 M が境界を持つとする．さらに，その上の $SO(3)$ 束 E に対して次の条件をかす．E のスティーフェルホイットニー類 $w_2(E)$ の境界 $\Sigma=\partial M$ への制限は，基本コホモロジー類 $[\Sigma]$ に一致する．（すると，$\Sigma=\partial M$ の連結成分の数が偶数でなければならないことわかる．）

Σ への E の制限を $E|_\Sigma$ と書き，その上の平坦接続のゲージ同値類全体を $R(\Sigma)$ とかく．$R(\Sigma)$ は（特異点のない）シンプレクティック多様体で，さらに，Σ の共形構造を決めると $R(\Sigma)$ の複素構造が定まる．

E の M 上の平坦接続のゲージ同値類全体を $R(M)$ とかく．平坦という方程式 $F_M=0$ に横断正則性を仮定すると，（すなわち，その線形化方程式が全射とする

と），$R(M)$ の次元は $R(\Sigma)$ の次元の半分になる．また，制限写像は $R(M)\to R(\Sigma)$ を定めるが，これがラグランジュはめ込みになる．一般には，方程式 $F_M=0$ を境界から離れたところで摂動することで，ラグランジュはめ込み $R(M)\to R(\Sigma)$ が得られる．

赤穂とJoyce（[1]）はラグランジュ部分多様体のフレアー理論([6])をはめ込みの場合に一般化した．すなわち，$CF(R(M))=H(R(M)\times_{R(\Sigma)}R(M);\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2})$ 上にフィルター付き A_∞ 代数の構造を定めた．（$\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ はノビコフ環．$R(\Sigma)$ がモノトーンであることを使うと $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ を係数環に用いることができる．[７]）これは，$m_k:CF(R(M))^{\otimes k}\to CF(R(M))$ なる写像からなる．ただし，m_0 は一般には０ではなく，従って，m_1 を２回合成しても０とは限らない．コホモロジーを得るには，モーラーカルタン方程式 $\sum_{k=0}^{\infty}m_k(b,\ldots,b)=0$ の解 b （bounding cochainまたはモーラーカルタン元と呼ぶ）を用いて，m_k を

$$m_k^b(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{j_1,\ldots,j_k}m_{k+\sum j_i}(b^{j_0},x_1,b^{j_1},\ldots,b^{j_k},x_k,b^{j_{k+1}})$$

に取り替える必要がある．そのような b が存在するとき，フィルター付き A_∞ 代数 $(CF(R(M)),\{m_k\})$ は非障害的であるという．

定理１：上の状況で $(CF(R(M)),\{m_k\})$ は非障害的である．さらに，モーラーカルタン元 b のゲージ同値類を３次元多様体 M から標準的に定めることができる．

定理１の b を b_M とかく．シンプレクティク多様体上に２つのはめ込まれたラグランジュ部分多様体 L_1,L_2 があり，さらにモーラーカルタン元 b_1,b_2 が与えられると，ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー $HF((L_1,b_1),(L_2,b_2);\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2})$ を定義できる．（これは $L_1\cap L_2$ の点を基底とする，自由 $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ 加群上に，擬正則曲線を使って定義される境界作用素を考えた鎖複体のホモロジー群である．）

境界付き３次元多様体 M_1,M_2 がとその上の $SO(3)$ 束 E_1,E_2 が前述の仮定を満たすとする．さらに，２つの境界 $(\partial M_1,E_1|_{\partial M_1})$ と $(-\partial M_2,E_2|_{\partial M_2})$ は同型であるとする．こ

のとき，M_1,M_2，E_1,E_2 を境界で貼り合わせ閉じた３次元多様体 M とその上の $SO(3)$ 束 E が得られる．

定理２：ゲージ理論のフレアーホモロジー $HF(M,E)$ とラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー $HF((R(M_1),b_{M_1}),(R(M_2),b_{M_2});\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2})$ は同型である．

さらに次のことが示される．

定理３：定理１の状況で，さらに，$R(M)\to R(\Sigma)$ は単射であると仮定する．このとき $b_M=0$ である．

３つの定理を合わせると次のことがわかる．

定理４：定理２の状況で，さらに，$R(M_1)\to R(\Sigma)$，$R(M_2)\to R(\Sigma)$ は単射であると仮定する．このとき，ゲージ理論のフレアーホモロジー $HF(M,E)$ とラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー $HF(R(M_1),R(M_2))$ は同型である．

仮定から，$R(M_1),R(M_2)$ がモノトーンラグランジュ部分多様体になるので，$HF(R(M_1),R(M_2))$ はOhによって定義されたモノトーンラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーである．

定理１－４の証明には，筆者が１９９０年代に[4]で導入したモジュライ空間を使う．ただし，定理１－４は当時は証明されていなかった．

文献表

[1] M. Akaho and D. Joyce, Immersed Lagrangian Floer theory, J. Differential Geometry 86 (2010) 381-500.

[2] A. Floer, Instanton homology and Dehn surgery, in Floer Memorial Volume, Hofer, Zender, and Taubes, Editors. 1995, Birkha¨user. pp. 77–98.

[3] K. Fukaya, Floer homology for 3-manifolds with boundary I (1997), never to be published but is available at http://www.math.kyoto-u.ac.jp/%7Efukaya/fukaya.html.

[4] K. Fukaya, Anti-Self-Dual equation on 4-manifolds with degenerate metric, Geometric Analysis and Functional Analysis 8 (1998) 466–528.

[5] K. Fukaya, SO(3)-Floer homology of 3 manifolds with boundary. arXiv:1506.01435.

[6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory- anomaly and obstruction, AMS/IP Studies in Advaneced Math. vol. 46, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).

[7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory over integers: spherically positive symplectic manifolds, Pure and Applied Mathematics Quaterly Volume 9, Number 2 189–289 (2013), arXiv:1105.5124.

[8] Y.-G. Oh, Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I, II, Comm. Pure and Appl. Math. 46 (1993), 949–994, 995–1012; Addenda, ibid, 48 (1995), 1299 – 1302.