

SLICE-RIBBON CONJECTURE AND RELATED TOPICS

安部哲哉 (大阪市立大学数学研究所)

1. イントロダクション

(滑らかな) スライス円板の理論は,

2次元円板から (標準的な微分構造を持つ) 4次元球体への滑らかな埋め込み

を調べる理論です. この理論は, 古典的な結び目理論, 2次元結び目理論, 4次元多様体論と密接な関係があり面白いです. 一方, よくわかっていない事が多く, 今後の研究が期待される分野でもあります. この予稿集では, スライス円板の理論における懸案の問題の一つである, スライス・リボン予想と周辺の話題について概説します.

予稿集における記号や約束

S^3 : 3次元球面

B^4 : 4次元球体^a ($\partial B^4 = S^3$ と思う.)

約束: S^3 内の結び目のみを扱う.

^a4次元円板 D^4 と言っても同じだが, ここでは B^4 と書きます.

2. SPC4 とスライス円板の理論

このセクションでは, (滑らかなカテゴリーにおける) 4次元ポアンカレ予想とスライス円板の理論の関係を説明します. まずは4次元ポアンカレ予想の話から始めます.

● 4次元ポアンカレ予想.

4次元ポアンカレ予想は2つのバージョンがあります. 一つは, 位相的カテゴリーにおけるもの, もう一つは滑らかなカテゴリーにおけるものです. 前者は1981年に Michael Freedman によって解決されました. 後者は未解決です.

予想 2.1 (滑らかなカテゴリーにおける4次元ポアンカレ予想). X を滑らかな4次元多様体, S^4 を (標準的な微分構造を持つ) 4次元球面とする¹. このとき

$$X \underset{\text{同相}}{\approx} S^4 \implies X \underset{\text{微分同相}}{\approx} S^4.$$

簡単のため, この予想を SPC_4^2 と呼びます. SPC_4 を解くことは, エキゾチック³な4次元球体 (略してエキゾチック4球体) を探すことと同値です.

— Cerf の定理 ($\Gamma_4 = 0$) の帰結 —

エキゾチック4球面が存在する \Leftrightarrow エキゾチック4球体が存在する

¹ $\mathbb{R}^4 \approx S^4 \setminus \{1 \text{ 点} \}$ には非可算無限個の微分構造が存在します.

²the Smooth Poincaré Conjecture in dimension 4 の略.

³同相だけど微分同相でない, の意味.

● SPC4 反証のアイデア.

結び目理論 (スライス円板の理論) を用いて, エキゾチック 4 球体の存在を証明する試みを紹介します. キーとなるのは次の補題です.

補題 2.2. W を境界が S^3 のホモトピー 4 球体とする. もし, ある結び目 K が

- (1) W 内で滑らかな 2次元円板を張る, かつ
- (2) B^4 内では滑らかな 2次元円板を張らない

ならば, W はエキゾチック 4 球体である.

念のために証明を書いておきます.

証明. まず Freedman の結果から W は B^4 と同相です. もし W が B^4 と微分同相だとすると, (1) より K は $W \approx B^4$ 内で滑らかな 2次元円板を張ります. これは (2) に矛盾します. 従って, W はエキゾチック 4 球体です. \square

● ラスムッセン不変量.

2004 年, Rasmussen は Khovanov homology を用いて, 結び目の (整数に値をとる) 不変量 $s(K)$ を定義しました⁴. $s(K)$ は, 今ではラスムッセン不変量と呼ばれており, 次の性質を持ちます.

補題 2.3. 結び目 K が B^4 内で滑らかな 2次元円板を張るならば

$$s(K) = 0$$

となる.

2010 年, Freedman, Gompf, Morrison and Walker [10] は, 以下の性質を満たす結び目 K_{CS} を構成して, そのラスムッセン不変量を (スーパーコンピューターを用いて) 計算しました.

* K_{CS} はあるホモトピー 4 球体 W_{CS} 内で滑らかな 2次元円板を張る⁵.

—— 彼らのモチベーション ——

もし $s(K_{CS}) \neq 0$ ならば,

- (1) K_{CS} が W_{CS} 内で滑らかな 2次元円板を張る (構成から従う)
- (2) K_{CS} は B^4 内で滑らかな 2次元円板を張らない (補題 2.3 の対偶から従う)

となり, 補題 2.2 より W_{CS} がエキゾチック 4 球体となる (SPC4 の反証計画成功).

● 顛末.

計算結果は $s(K_{CS}) = 0$ でした. その直後に次が示されました.

定理 2.4 (Akbulut [7]). ホモトピー 4 球体 W_{CS} は B^4 と微分同相.

⁴私は, 修士課程ではラスムッセン不変量の計算方法の研究, 博士課程ではラスムッセン不変量の (組み合わせ的な) 結び目理論への応用を研究していました.

⁵ W_{CS} , 結び目 K_{CS} , 対応する 2次元円板は, 長年エキゾチック 4 球面の候補であった (とある) Cappell-Shaneson homotopy 4-sphere Σ_{CS} から構成されました. 以下で, 構成の概略を説明します. まず, (巧みな Kirby calculus により) Σ_{CS} に 0-handle, 1-handles, 2-handles, 4-handle からなるハンドル分解を与えます. W_{CS} は Σ_{CS} から 4-handle を引っこ抜いたものとして定義されます. W_{CS} の 2-handle を (適当に) 一つ選んで, そのベルト球面と co-core 円板を考えます. それが結び目 K_{CS} と対応する 2次元円板の定義です.

その後、(さらに悪いことに) 仮にエキゾチック4球体が存在したとしても、Freedman, Gompf, Morrison and Walkerの方法では、エキゾチック性は検出できないことがわかりました。

定理 2.5 (Kronheimer and Mrowka [14]). 結び目 K があるホトピー4球体 W で滑らかな2次元円板を張るならば

$$s(K) = 0$$

となる⁶.

このようにして、Freedman, Gompf, Morrison and WalkerのSPC4反証計画は完全に頓挫しました。一方で、結び目理論の観点からは次の疑問が湧きます。

結び目 K_{CS} は何か特別な性質を持つのか？

結論から言うと、この結び目は(次のセクションで説明する)スライス・リボン予想の反例候補になります。

3. スライス・リボン予想

このセクションでは、スライス・リボン予想の説明をします。

— 大前提 —

よく知られているように、

S^3 内の結び目 K が自明 $\iff K$ が S^3 内で2次元円板を張る
 です。特に、**非自明な結び目は、 S^3 内において円板を張りません。**

S^3 内の結び目 K が**スライス**とは、 K が B^4 内でプロパーで滑らかな2次元円板 D を張るときに言います⁷。 K に対する**スライス円板**とは、上述の2次元円板 D のことを言います⁸(図1参照)。 S^3 内の結び目 K が**リボン**とは、 K が S^3 内でリボン特異点⁹のみを持つはめ込

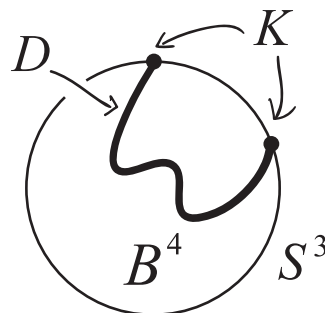


図 1. S^3 内のスライス結び目 K とスライス円板 D の模式図

まれた2次元円板を張るときに言います(図2参照)。

⁶ラスムッセン不変量 $s(K)$ を(結び目に対する)インスタントフレアホモロジーの亜種の観点から再定義することにより証明されました。

⁷「(B^4 以外の) 一般的な4次元多様体で2次元円板を張ることは、考えないのですか?」という問いに対しては、次の解答が知られています。「任意の結び目 K に対して、 $\partial X = S^3$ となる4次元多様体 X が存在して、 K は X 内でプロパーで滑らかな2次元円板を張る。」

⁸(埋め込みに条件が付いているわけではないが)歴史的な理由でスライス円板と呼ばれています。

⁹リボン2重点と呼ぶ方が適切と思われるが、慣習に従いこのように呼ぶ。

補題 3.1. リボン結び目はスライス結び目である.

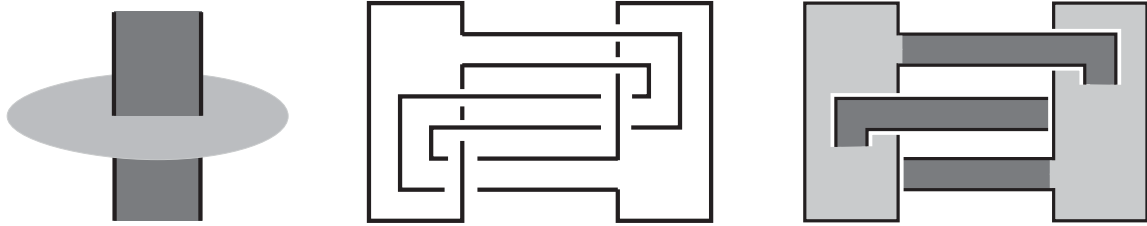


図 2. リボン特異点 (左), リボン結び目 (中央), はめ込まれた円板 (右)

証明. K をリボン結び目とします. 定義より, K は S^3 内でリボン特異点のみを持つはめ込まれた 2次元円板 D を張ります. D のリボン特異点の周りを 4次元方向に押し上げることで, K のスライス円板が得られます.

以下で, 「押し上げ」の詳細を述べます. まず N を B^4 のカラー近傍とします. N は $S^3 \times [0, 1]$ と微分同相で $S^3 \times \{0\} \approx S^3 = \partial B^4$ となります. D を図 3 のように変形すると, K のスライス円板が得られます. \square

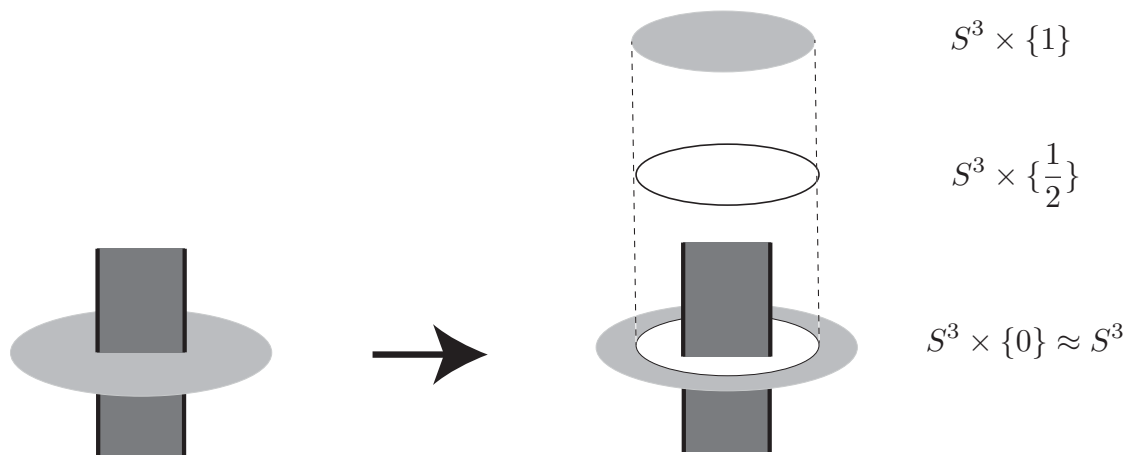


図 3. リボン特異点の周りの様子

1962年, Fox [9] は今ではスライス・リボン予想と呼ばれる問題を提起しました.

—— スライス・リボン予想 ——

任意のスライス結び目はリボン結び目である.

例えば, SPC4の反証計画で現れた結び目 K_{CS} は (構成から) スライスですが, リボン結び目である確証はありません. スライス・リボン予想の反例候補については Gompf, Scharlemann and Thompson の論文 [11] をご覧下さい. また, 同様のアイデア (+アニュラスツイスト) で Abe-Tange [5] はスライス・リボン予想の反例候補を構成しています¹⁰.

¹⁰構成の技術的な核心は, (ある条件を満たすスライス円板から誘導される) B^4 のハンドル分解から, より複雑な B^4 のハンドル分解を与えるアルゴリズムを与えたことです.

4. スライス結び目の性質

ここでは、スライス結び目の性質をいくつか紹介します。またスライス・リボン予想が、特定の結び目のクラスに対して正しいこと (定理 4.3) を紹介します。

次の定理は古典的な Fox-Milnor の結果です。

定理 4.1. K をスライス結び目とする。このとき次が成り立つ。

$$\Delta_K(t) \doteq f(t)f(t^{-1}),$$

ここで $\Delta_K(t)$ は K のアレクサンダー多項式, $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, \doteq は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の単元倍を除いて等しい, という意味です。

この定理により, 3_1 (三葉結び目) や 4_1 (八の字結び目) を初めとして, 多くの結び目は非スライスであることがわかります。次の結果はよく知られています。

事実 4.2. スライス結び目 K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドする。

自明結び目の 2 重分岐被覆は S^3 であり 4 次元球体 B^4 (特に有理 4 次元球体) をバウンドします。事実 4.2 は, その結果の拡張です。以下の定理が示すように, 時として, 事実 4.2 はスライス結び目 (リボン結び目) を特徴付けます。

定理 4.3 (Lisca [17]). K を 2 橋結び目¹¹とする。次は同値。

- (1) K がリボン結び目である。
- (2) K がスライス結び目である。
- (3) K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドする。

証明の概要. (1) \implies (2) \implies (3) は明らか。 (3) \implies (1) の証明は次のようになります。 K の 2 重分岐被覆が有理 4 次元球体をバウンドした時, 起こりうる可能性は以下の二つです。

- (a) K がリボン結び目と判明していて, かつ, K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドする。
- (b) K がリボン結び目か不明だが, K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドする。

以下の流れで, (b) が起こりえないことを証明します。つまり, K がリボン結び目か不明なものに関して, K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドしないことを証明します。

ステップ 1: K が 2 橋結び目である事を使って, 2 重分岐被覆が「いい (=定値)」4 次元多様体 X_1 をバウンドすることを証明する。

ステップ 2: その 2 重分岐被覆が有理 4 次元球体 X_2 もバウンドすると仮定する。

ステップ 3: 二つの 4 次元多様体 X_1 と X_2 を張り合わせて閉 4 次元多様体 X を作る。

ステップ 4: Donaldson の対角化定理を用いて, そのような閉 4 次元多様体 X は存在しないことを証明する。(結果として, K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドしないことことがわかる。)

¹¹ K の 2 重分岐被覆がレンズ空間となる結び目のこと。

このようにして (a) のみが起こり得ることが分かり、 K はリボン結び目であることがわかります。

□

その後の進展は [12], [15], [16] を参照して下さい。

一般には事実 4.2 の逆は成立しません。

定理 4.4 (Tange [20]). ある非スライス結び目 K が存在して、 K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドする。

5. スライス・リボン予想の帰結

§3 では、スライス・リボン予想に反例があるかもしれないことを紹介しました。一方 §4 では、特定の結び目のクラスに関しては、スライス・リボン予想が正しいことを紹介しました。このセクションでは、スライス・リボン予想が正しいければ、どのような主張が得られるのかを紹介します。まず、少し用語の準備をします。

● 結び目コンコードダンス群.

向きづけられた結び目 K_1 が向きづけられた結び目 K_0 と **コンコードラント** ($K_1 \sim K_0$ と書く) とは、あるプロパーに埋め込まれたアニュラス $A \subset S^3 \times [0, 1]$ が存在して

$$\partial(S^3 \times [0, 1], A) = (S^3, K_1) \cup (-S^3, -K_0)$$

となるときに言います。ここで $-S^3$ と $-K_0$ はそれぞれ S^3 と K_0 の向きを逆にしたものです。**結び目コンコードダンス群**とは、コンコードダンス類全体のなす集合に連結和によって誘導された演算を入れた (アーベル) 群のことで、 $\text{Conc}(S^3)$ と書きます。結び目コンコードダンス群の単位元は、自明な結び目を含むコンコードダンス類です。

—— スライス・リボン予想に関する補足 ——

(向き付けられた) 結び目は、自明結び目とコンコードラントになるときに限りスライスになります。別の言い方をすると、結び目コンコードダンス群の単位元は、スライス結び目の集合からなります。スライス・リボン予想は、

結び目コンコードダンス群の単位元は、リボン結び目の集合からなる

と言い換えることができます。つまり、**スライス・リボン予想は、結び目コンコードダンス群の自明元に関する予想とも思えます。**

● Baker の仕事.

S^3 内のファイバー結び目 K が **タイト** とは、 K が S^3 のあるオープンブック分解の binding で、かつ、それが S^3 のタイトコンタクト構造をサポートするときに言います。Baker は次を予想しました。

予想 5.1 (Baker [8]). K_0 と K_1 をタイトファイバー結び目とする。このとき次が成り立つ。

$$K_0 \underset{\text{コンコードラント}}{\sim} K_0 \implies K_0 \underset{\text{イソトピー}}{=} K_1.$$

予想 5.1 は、(適切な設定をすれば) h-cobordism theorem の類似が成立することを期待させますが、この方向の進展は未だありません。Abe-Tagami は、上の予想が次と同値であることを指摘しました。

予想 5.2 (Abe-Tagami [3], [4]). 素なタイトファイバー結び目のなす集合は、結び目コンコルダンス群の中で線形独立¹²である。

Baker は次を示しました。

定理 5.3 (Baker [8]). スライス・リボン予想が正しいならば、予想 5.1 (従って予想 5.2) は正しい。

結び目コンコルダンス群の単位元に関する予想 (スライス・リボン予想) が、単位元以外に関する主張 (予想 5.2) を導いている、と見ると興味深いです。

● **Abe-Tagami の仕事.**

1978 年, Akbulut-Kirby は次を予想しました。

予想 5.4 (Akbulut-Kirby の予想). もし二つの結び目の 0-手術が同じ 3次元多様体となるとき、二つの結び目はコンコルダントになる。

ここでは、この予想を次のように理解します¹³。

予想 5.5 ((修正された)Akbulut-Kirby の予想). もし二つの結び目の 0-手術が同じ 3次元多様体となるとき、(適切な向きに関して) 二つの結び目はコンコルダントになる。

Abe-Tagami は次を示しました。

定理 5.6 (Abe-Tagami [3]). スライス・リボン予想が正しいならば、予想 5.5 の反例が存在する。

証明の概要. まずアニュラスツイストの議論より、図 4 で定義された K_0 と K_1 の 0-手術は同相な 3次元多様体となることがわかります。一方、論文 [18] の Miyazaki の定理より、 $K_0 \# \overline{K_1}$

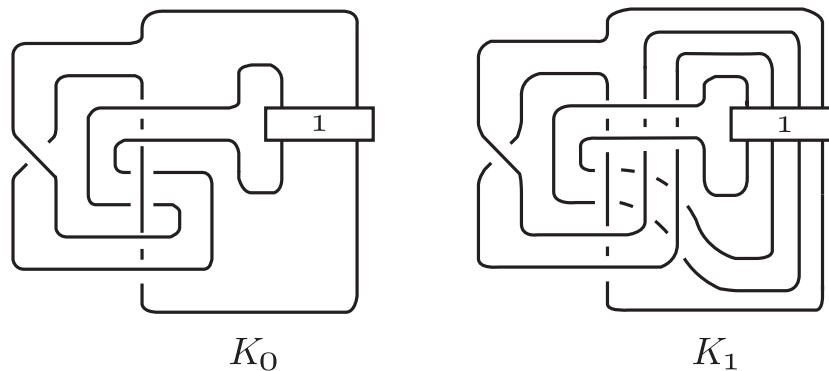


図 4. 結び目 K_0 と K_1 の定義. 箱はフルツイストを表す。

がリボン結び目でないことがわかります。ここで $K_0 \# \overline{K_1}$ は K_0 と K_1 の鏡像の連結和を表します。もしスライス・リボン予想が正しいならば、 $K_0 \# \overline{K_1}$ はスライス結び目ではありません。別の言い方をすると、 K_0 と K_1 はコンコルダントではありません。まとめると、もしスライス・リボン予想が正しいならば、 K_0 と K_1 の 0-手術は同相な 3次元多様体となりますが、 K_0 と K_1 はコンコルダントではありません。つまり K_0 と K_1 が予想 5.5 の反例となります。□

¹²結び目コンコルダンス群を \mathbb{Z} -加群と見たときの線形独立の意味。

¹³0-手術が同じ 3次元多様体となる向き付けられた結び目で、コンコルダントでないものが存在することは既に知られているから。

証明の概要から次がわかります.

- (1) もし K_0 と K_1 はコンコダントならば, $K_0 \# \overline{K_1}$ はスライス・リボン予想の反例になる.
- (2) もし K_0 と K_1 はコンコダントでないならば, K_0 と K_1 は予想 5.5 の反例となる.

詳細は論文 [3], [4] を参照して下さい. 後に, Yasui [19] によって, 予想 5.5 は否定的に解決されました. 反例を与える結び目のペアは (4次元多様体論における基本的な操作である) コルクツイストを応用して構成されました.

6. リボン円板の性質

このセクションでは, リボン円板の定義を与えて, その性質について説明します.

$r: B^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を B^4 の半径関数¹⁴とします. (あるスライス結び目に対する) スライス円板 D が **リボン円板** であるとは, D が (半径関数 r に関して B^4 の内部において) 極大値を持たないときに言います (図5参照). リボン円板という名前から連想されるように, 次が成り

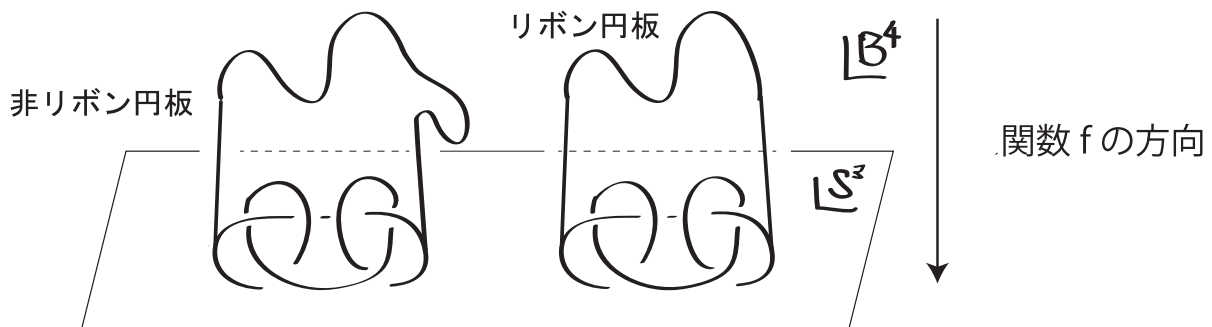


図 5. 非リボン円板 (左) とリボン円板 (右)

立ちます.

補題 6.1. スライス結び目 K に対して次は同値となる.

- (1) K がリボン結び目である.
- (2) K がリボン円板を張る.

証明の方針. (1) \implies (2) リボン結び目 K に対して, 補題 3.1 の証明で得られたスライス円板が実は, リボン円板になることを示します. (2) \implies (1) 半径関数 r が D 上のモース関数になっていることを使います. \square

以上からスライス・リボン予想は次のように言い直すことができます.

——— スライス・リボン予想 ———

結び目 K がスライス円板を張るとき, K はリボン円板も張る.

¹⁴ (B^4 を \mathbb{R}^4 内の半径 1 の球体とみなして) $x \in B^4$ に対して $r(x)$ を x と原点の距離で定義した関数のこと.

● スライス円板とリボン円板との違い.

ここでは、リボン円板に固有の性質を紹介します.

補題 6.2. スライス結び目 K がリボン円板 D を張るとき

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D)$$

は全射となる.

証明の概略. 半径関数 r に由来する $B^4 \setminus N(D)$ のハンドル分解を考察すればよい. ここで $N(D)$ は D の管状近傍. □

与えられたリボン円板に、「複雑な」2次元結び目を連結和して得られたスライス円板を D とします. もし

$$\pi_1(S^3 \setminus \partial D) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D)$$

が全射でなければ、補題6.2より D はリボン円板ではありません. 実際、このようにしてリボン円板でないスライス円板は構成できます.

● リボン円板の外部.

これ以降は、スライス・リボン予想と直接は関係がない話題を2つ紹介します.

よく知られているように、結び目の外部は非常に強い不変量です¹⁵. 一方、スライス円板(さらにはリボン円板)に関しては、そうではないことを紹介します.

定理 6.3 (Abe-Tange [6]). D_n を図6のリボン結び目 R_n に対応するリボン円板とする. このとき、 D_n の外部 (つまり $B^4 \setminus N(D_n)$) は n に依存せず、全て互いに微分同相になる¹⁶. ここで $N(D_n)$ は D_n の管状近傍を表す.

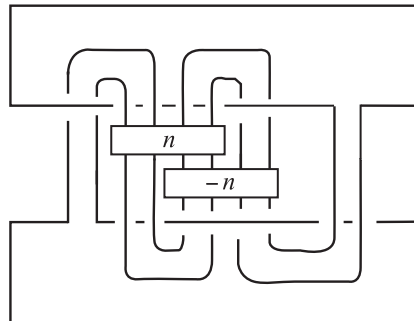


図 6. リボン結び目 R_n

補足

- (1) R_n は $4_1 \# 4_1$ からアニュラスツイストという結び目の局所変形を用いて構成されています. (cf. [1, 2])
- (2) 最近、滝岡英雄氏 (OCAMI) によって、 Γ 多項式を用いて $D_n (n \geq 0)$ は全て異なることが示されました. (D_n の系列が無限に異なるものを含むことは知られていました.)

¹⁵Gordon-Luecke の定理より、結び目の外部は結び目を (鏡像と向きを除いて) 一意的に指定します.

¹⁶ $i \neq j$ に対して、 $B^4 \setminus N(D_i)$ から $B^4 \setminus N(D_j)$ への微分同相は、 $S^3 \setminus N(\partial D_i)$ を $S^3 \setminus N(\partial D_j)$ に写すとは限らないことに注意.

• **Whitehead 予想からの帰結.**

最後にリボン円板に関する未解決問題を紹介します. 1941年, J. H. C. Whitehead は次の予想を提起しました.

予想 6.4 (Whitehead 予想). *Aspherical* な 2次元 *CW-complex* の連結 *subcomplex* は再び *aspherical* である.

もし Whitehead 予想が正しければ, 次が正しいこと¹⁷がわかります (cf. [13]).

未解決問題: リボン円板の補空間 (又は外部) は *aspherical* である.

謝辞 第62回トポロジーシンポジウムにお招き下さいました大槻 知忠氏 (京都大学数理解析研究所) 平澤 美可三氏 (名古屋工業大学) 三松 佳彦氏 (中央大学) に心から御礼申し上げます.

参考文献

- [1] T. Abe, I. Jong, Y. Omae and M. Takeuchi, *Annulus twist and diffeomorphic 4-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155** (2013), No. 2, 219–235.
- [2] T. Abe, I. Jong, J. Luecke and J. Osoinach, *Infinitely many knots admitting the same integer surgery and a 4-dimensional extension*, Int. Math. Res. Not. IMRN. doi: 10.1093/imrn/rnv008 (2015).
- [3] T. Abe and K. Tagami, *Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture*, arXiv:1502.01102 (2015).
- [4] T. Abe and K. Tagami, *Addendum to “Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture”*, the proceedings of intelligence of Low-dimensional Topology (2015), submitted.
- [5] T. Abe and M. Tange, *A construction of slice knots via annulus twists*, arXiv:1305.7492 (2013).
- [6] T. Abe and M. Tange, *Ribbon disks with the same exterior*, in preparation.
- [7] S. Akbulut, *Cappell-Shaneson homotopy spheres are standard*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 2171–2175.
- [8] K. L. Baker, *A note on the concordance of fibered knots*, to appear in J. Topol.
- [9] R. H. Fox, *Some problems in knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute), (1962), 168–176.
- [10] M. Freedman, R. Gompf, S. Morrison and K. Walker, *Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincaré conjecture*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 2, 171–208.
- [11] R. Gompf, M. Scharlemann and A. Thompson, *Fibered knots and potential counterexamples to the property 2R and slice-ribbon conjectures*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 4, 2305–2347.
- [12] J. Greene and S. Jubuka, *The slice-ribbon conjecture for 3-strand pretzel knots*, Amer. J. Math. **133** (2011), no. 3, 555–580.
- [13] J. Howie, *On the asphericity of ribbon disc complements*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 281–302.
- [14] P. Kronheimer, T. Mrowka, *Gauge theory and Rasmussen’s invariant*, J. Topol. **6** (2013), no. 3, 659–674.
- [15] A. Lecuona, *On the Slice-Ribbon Conjecture for Montesinos knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 1, 233–285.
- [16] A. Lecuona, *On the slice-ribbon conjecture for pretzel knots*, arXiv:1309.0550v1 (2013).
- [17] P. Lisca, *Lens spaces, rational balls and the ribbon conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 429–472.
- [18] K. Miyazaki, *Nonsimple, ribbon fibered knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), no. 1, 1–44.
- [19] K. Yasui, *Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance*, arXiv:1505.02551 (2015).
- [20] M. Tange, *Heegaard Floer homology of Matsumoto’s manifolds*, arXiv:1504.08202 (2015).

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本3丁目3番138号大阪市立大学数学研究所
E-mail address: tabe@sci.osaka-cu.ac.jp

¹⁷リボン円板は B^4 と $B^4 \setminus N(D)$ の (0-handle, 1-handle, 2-handle からなる) ハンドル分解を誘導することに注意.