多項式写像の無限遠点における特異性とモノドロミー

竹内　潔　(筑波大学)*

1. はじめに

多項式写像 $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ を考える．このとき有限部分集合 $B \subset \mathbb{C}$ が存在して，f の制限

$$\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus B \tag{1}$$

が C^∞-ファイバー束になることは，よく知られている．このような条件を満たす $\mathbb{C}$ の最小の部分集合 B を B_f と記す．定義より明らかに, f の臨界値集合 $f(\mathrm{Sing} f)$ は B_f に含まれる． B_f の点を f の分岐点 (bifurcation point) と呼ぶ．与えられた f に対して分岐点集合 B_f を記述することは, 基本的だが難しい未解決問題である．ここで条件 $B_f \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ を満たす十分大きな $R \gg 0$ をとり，$C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ とおく．ファイバー束 $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B_f) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus B_f$ の円周 C_R 上への制限を考える．すると円周 C_R を一周することで生ずるファイバー $f^{-1}(R)$ の自己同型 $\Phi_f^\infty\colon f^{-1}(R) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(R)$ およびそれにより誘導されるコホモロジー群の同型

$$\Phi_j^\infty\colon H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C}) \qquad (j = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

が得られる．円周 C_R は無限遠点を一周する十分小さなループとも思えるので，線形作用素 Φ_j^∞ を f の無限遠点におけるモノドロミー (monodromy at infinity) と呼ぶ．基本文献 Broughton [5]，Siersma-Tibăr [57] などの登場以降，多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーは，多くの数学者により活発に研究され，近年急速に発展した．この理論は，古典的なミルナーモノドロミーの理論を自然に大域化したものであり，得られた様々な結果も不思議なほど完全に並行している．無限遠点におけるモノドロミー Φ_j^∞ は特別な重要性を持つ．例えばDimca-Némethi [11] は，Φ_j^∞ がファイバー束 $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B_f) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus B_f$ より定まる $\mathbb{C} \setminus B_f$ の基本群の表現

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus B_f, c) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^j(f^{-1}(c);\mathbb{C})) \qquad (c \in \mathbb{C} \setminus B_f) \tag{3}$$

を完全に決定してしまうことを証明した．我々は [39] において，Denef-Loeser [8]，[9] に倣い，代数多様体のモチーフの圏における $f^{-1}(R)$ $(R \gg 0)$ の対応物 (輪廻転生) を導入した．さらにこの “無限遠点におけるモチヴィックミルナーファイバー” の同変混合Hodge 数を f のニュートン図形により記述した．これにより，f の無限遠点におけるモノドロミーのジョルダン標準型を決定することが可能になる ([15], [39], [64] などを参照)．本講演では, この結果および分岐点集合 B_f の記述に関する最近の進展 ([6], [62]) についてご報告したい.

2. 無限遠点におけるモノドロミーの固有値

多項式写像 $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ の無限遠点におけるモノドロミー $\Phi_j^\infty\colon H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C})$ $(R \gg 0,\ j = 0, 1, \ldots)$ の研究に際しては，局所ミルナーモノドロミーの

* e-mail: takemicro@nifty.com

場合の孤立特異点という条件に対応する，f の無限遠点における何らかの良い性質を仮定するのが普通である．

定義 2.1 ([33]) 写像 $\partial f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$，$x \longmapsto (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$ の原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍 $B(0;\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ 上への制限 $(\partial f)^{-1}B(0;\varepsilon) \longrightarrow B(0;\varepsilon)$ が固有写像になるとき，f は無限遠点において従順 (tame at infinity) であるという．

次の結果は，Milnor [42] によるミルナーファイバーの理論の大域的な類似である．

定理 2.2 (Broughton [5]) f は無限遠点において従順であるとする．このとき f の一般ファイバー $f^{-1}(c)$ $(c \in \mathbb{C} \setminus B_f)$ は有限個の $n-1$ 次元球面のブーケ $S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}$ とホモトピー同値である．特に $H^j(f^{-1}(c);\mathbb{C}) = 0$ $(j \neq 0,\ n-1)$ が成り立つ．

Siersma-Tibăr [57] は，さらに弱い条件下で，同様の結果を証明している．f が無限遠点において従順な場合は，(唯一の非自明な) Φ_{n-1}^{∞} の固有値を求めるためには，次の無限遠点におけるモノドロミーゼータ関数を計算すればよい：

$$\zeta_f^{\infty}(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \det(\mathrm{id} - t\Phi_j^{\infty})^{(-1)^j} \in \mathbb{C}(t). \tag{4}$$

このゼータ関数 $\zeta_f^{\infty}(t)$ については，お互いに表現の異なった複数の公式が得られている．例えば Gusein-Zade-Luengo-Melle-Hernández [25]，[26]，Libgober-Sperber [35]，García-López-Némethi [18]，Siersma-Tibăr [58] などが代表的な結果である．ここでは $\zeta_f^{\infty}(t)$ を f のある種のニュートン図形を用いて記述する Libgober-Sperber [35] の定理を紹介しよう．

定義 2.3 f のニュートン多面体を $NP(f)$ と記す．$\{0\} \cup NP(f)$ の $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ における凸包を f の無限遠点におけるニュートン図形 (Newton polyhedron at infinity) と呼び，$\Gamma_\infty(f)$ と記す．

定義 2.4 ([33]) $f(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n_+} a_v x^v$ とする．このとき条件 $0 \notin \gamma$ を満たす $\Gamma_\infty(f)$ のすべての面 γ に対し，$(\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面 $\{x \in (\mathbb{C}^*)^n \mid f_\gamma(x) = \sum_{v \in \gamma} a_v x^v = 0\}$ が滑らかかつ被約なとき，f は無限遠点において非退化 (non-degenerate at infinity) であるという．

$\Gamma_\infty(f)$ が $\mathbb{R}^n$ の各座標軸の正の部分と交わっているとき，f はコンビニエントであるという．簡単のため，以後この節では f はコンビニエントで無限遠点において非退化であると仮定する．このとき Broughton [5] の結果により，f は無限遠点において従順である．$\{1, 2, \ldots, n\}$ の各部分集合 S に対して

$$\mathbb{R}^S = \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_i = 0 \quad (i \notin S)\} \simeq \mathbb{R}^{\sharp S} \tag{5}$$

および $\Gamma_\infty^S(f) = \Gamma_\infty(f) \cap \mathbb{R}^S$ とおく．空でない各部分集合 $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，原点 $0 \in \mathbb{R}^S$ を含まない $\Gamma_\infty^S(f)$ の $\sharp S - 1$ 次元の面を $\gamma_1^S, \gamma_2^S, \ldots, \gamma_{n(S)}^S$ とする．そして γ_i^S の原点 $0 \in \mathbb{R}^S$ からの格子距離を $d_i^S > 0$ とおく．また γ_i^S の生成する $\mathbb{R}^n$ のアフィン部分空間を $\mathrm{Aff}(\gamma_i^S)$ とし，$\gamma_i^S \subset \mathrm{Aff}(\gamma_i^S)$ の格子 $\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{Aff}(\gamma_i^S) \simeq \mathbb{Z}^{\sharp S - 1}$ に関する正規化体積 (すなわち通常の体積の $(\sharp S - 1)!$ 倍) を $\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma_i^S) \in \mathbb{Z}_{>0}$ と記す．

定理 2.5 (Libgober-Sperber [35]) 空でない各部分集合 $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して

$$\zeta_{f,S}^{\infty}(t) := \prod_{i=1}^{n(S)} (1 - t^{d_i^S})^{(-1)^{\sharp S - 1} \mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma_i^S)} \tag{6}$$

とおく．このとき f の無限遠点におけるモノドロミーゼータ関数は次の式で与えられる:

$$\zeta_f^{\infty}(t) = \prod_{S \neq \emptyset} \zeta_{f,S}^{\infty}(t). \tag{7}$$

我々は [38] および [64] において定理2.5 の新しい証明（以下に概略を紹介する）を与え，f がコンビニエントという仮定を外した．まず f の仮定を用いて $\mathbb{C}^n$ の滑らかなトーリックコンパクト化 X_Σ で，因子 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m = X_\Sigma \setminus \mathbb{C}^n$ ($D_1, \ldots, D_m$ は既約成分) および $D \cup \overline{f^{-1}(0)}$ が $D \subset X_\Sigma$ の近傍で正規交叉であるものを構成する．このとき f は X_Σ 上の有理型関数を定めるが，その零点と極が横断的に交わる箇所に不確定点が生ずる．そこで X_Σ を余次元 2 の部分多様体に沿って何回かブローアップすることにより，次の正則写像の可換図式を構成した:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{X_\Sigma} \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{P}^1, \end{tikzcd} \tag{8}$$

(g は固有写像)．ここで $\mathbb{P}^1$ の無限遠点 ∞ における正則な局所座標 h で $\infty = \{h = 0\}$ を満たすものをとると，十分大きな $R \gg 0$ に対して同型

$$H_c^j(f^{-1}(R); \mathbb{C}) \simeq H^j \psi_h(j_! R f_! \mathbb{C}_{\mathbb{C}^n}) \simeq H^j \psi_h(R g_* \iota_! \mathbb{C}_{\mathbb{C}^n}) \tag{9}$$

が得られる．ここで

$$\psi_h \colon \mathbf{D}_c^b(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbf{D}_c^b(\{h = 0\}) = \mathbf{D}_c^b(\{\infty\}) \tag{10}$$

は Deligne により定義された nearby cycle 函手である．固有射 g に構成可能層にたいするモノドロミーゼータ関数の一般理論（[10] などを参照）を適用することで定理 2.5 は得られる．さらに [38, Section 5] では，この定理を $\mathbb{C}^n$ の完全交叉部分代数多様体 $\{f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0\}$ からの多項式写像 $F \colon \{f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ の無限遠点におけるモノドロミーに一般化した．結果は $f_1, f_2, \ldots, f_m$ および F のニュートン図形の面たちの混合体積などを用いて記述できる．これは局所モノドロミーの場合の岡の定理 [48]，[49] の類似である．

3. 無限遠点におけるモノドロミーのジョルダン標準型

以下 f はコンビニエントで無限遠点において非退化であると仮定する．このとき $\mathbb{C}^n$ の滑らかなトーリックコンパクト化 X_Σ を構成することにより，前節の幾何学的状況が得られる．我々は [39] において，この状況に Denef-Loeser [8]，[9] および Guibert-Loeser-Merle [24] らによるモチヴィックミルナーファイバーの理論を適用し, 代数多様体のモチーフの圏における $f^{-1}(R)$ ($R \gg 0$) の対応物を構成した．この “無限遠点におけるモチヴィックミルナーファイバー”の同変混合 Hodge 数を f のニュートン図形を用いて記述することにより, 以下の結果が得られた.

定義 3.1 $\lambda \in \mathbb{C}$ とする．原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ を含まない $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ に対してその原点からの格子距離 $d_\gamma \in \mathbb{Z}_{>0}$ が条件 $\lambda^{d_\gamma} = 1$ をみたすとき，γ は λ に適合しているという．1 次元のこのような面 $\gamma \prec \Gamma_\infty(f)$ に対して，

$$n(\gamma)_\lambda = \mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma) - \sharp\{\lambda \text{ に適合する } \gamma \text{ の } 0 \text{ 次元の面}\} \tag{11}$$

とおく． ここで $\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma) \in \mathbb{Z}_+$ は γ の格子長さである．

$\Gamma_\infty(f)$ の 0 次元の面であって $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$ に含まれるものを $q_1, \dots, q_l$ とする．また $\Gamma_\infty(f)$ の 1 次元の面であってその相対内部が $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$ に含まれるものを $\gamma_1, \dots, \gamma_{l'}$ とする．q_i，γ_i の原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ からの格子距離をそれぞれ $d_i > 0$，$e_i > 0$ とおく．モノドロミー定理により，無限遠点におけるモノドロミー Φ^∞_{n-1} の中の 1 以外の固有値に対するジョルダン細胞のサイズは n を超えないことに注意する．

定理 3.2 ([39, Theorem 5.4], [15]) 任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ に対して，次が成り立つ．

(i) Φ^∞_{n-1} の中の固有値 λ に対するジョルダン細胞で可能な最大サイズ n を持つものの個数は $\sharp\{q_i \mid \lambda^{d_i} = 1\}$ である．

(ii) Φ^∞_{n-1} の中の固有値 λ に対するジョルダン細胞でサイズ $n-1$ を持つものの個数は $\sum_{i:\, \lambda^{e_i}=1} n(\gamma_i)_\lambda$ である．

$\partial\Gamma_\infty(f) \cap \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$ の 1-骨格の上の格子点の数を Π_f と記す．また $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものに対し，γ の相対内部の上の格子点の数を $l^*(\gamma)$ と記す．固有値 1 に対しては，モノドロミー定理は Φ^∞_{n-1} の中のジョルダン細胞のサイズは $n-1$ を超えないことを主張している．

定理 3.3 ([39, Theorems 5.6 and 5.7])

(i) Φ^∞_{n-1} の中の固有値 1 に対するジョルダン細胞で可能な最大サイズ$n-1$ を持つものの個数は Π_f である．

(ii) Φ^∞_{n-1} の中の固有値 1 に対するジョルダン細胞でサイズ $n-2$ を持つものの個数は $2\sum_\gamma l^*(\gamma)$ （特に偶数！）である．ここで和 $\sum_\gamma$ は，$\Gamma_\infty(f)$ の 2 次元の面 γ でその相対内部が $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$ に含まれ条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものすべてにわたる．

原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ における局所ミルナーモノドロミーのジョルダン標準型についても, 多項式 f の原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ におけるニュートン図形 $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}^n_+$ を用いた同様の記述が得られる（[40]）．実はさらに小さなサイズのジョルダン細胞の個数まで含めて，無限遠点のまわりのモノドロミー Φ^∞_{n-1} のジョルダン標準型は，原点における局所ミルナーモノドロミーのジョルダン標準型と完全に並行した記述を持つことが，[40] において証明されている．特に Varchenko-Khovanskii [67] および斉藤盛彦 [55] により解決された Steenbrink 予想の大域的な類似が，無限遠点におけるモノドロミー Φ^∞_{n-1} についても成り立つ ([39, Theorem 5.11])．以下 $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものはすべて単純であると仮定する．

定義 3.4 $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものおよび $k \geq 1$ に対して

$$J_{\gamma,k} = \{0 \leq r \leq \dim\gamma \mid n-2+k \equiv r \mod 2\} \tag{12}$$

とおく．また各 $r \in J_{\gamma,k}$ に対して，非負整数 $d_{k,r} \in \mathbb{Z}_+$ を次で定義する：

$$d_{k,r} = \frac{n-2+k-r}{2} \in \mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

複素数 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$，$\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件$0 \notin \gamma$ を満たすものおよび $0 \leq r \leq \dim\gamma$ に対して

$$e(\gamma,\lambda)_r = (-1)^{\dim\gamma+r} \sum_{\substack{\Gamma \prec \gamma \\ \dim\Gamma = r}} \left\{ \sum_{\Gamma' \prec \Gamma} (-1)^{\dim\Gamma'} \mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma')_\lambda \right\} \tag{14}$$

とおく．ここで面 $\Gamma' \prec \Gamma_\infty(f)$ が λ に適合しているとき$\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma')_\lambda$ はΓ' の正規化体積とし，それ以外の場合は$\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma')_\lambda = 0$ とおいた．

定理 3.5 ([39, Theorem 5.9], [15]) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ および $k \geq 1$ とする．このとき Φ_{n-1}^∞ の中の固有値λ に対するジョルダン細胞でサイズが k 以上のものの個数は次で与えられる:

$$(-1)^{n-1} \sum_\gamma \left\{ \sum_{r \in J_{\gamma,k}} (-1)^{d_{k,r}} \binom{m_\gamma}{d_{k,r}} \cdot e(\gamma,\lambda)_r + \sum_{r \in J_{\gamma,k+1}} (-1)^{d_{k+1,r}} \binom{m_\gamma}{d_{k+1,r}} \cdot e(\gamma,\lambda)_r \right\}. \tag{15}$$

ここで和 $\sum_\gamma$ は，$\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものすべてにわたる．また γ を含む $\mathbb{R}^n$ 内の最小の座標平面の次元 s_γ を用いて非負整数 $m_\gamma \geq 0$ を $m_\gamma = s_\gamma - \dim\gamma - 1$ で定めた．

$\lambda \in \mathbb{C}$ を複素数とし, f の無限遠点におけるモノドロミー$\Phi_j^\infty\colon H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C})$ $(R \gg 0)$ の固有値λに対する広義固有空間を $H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C})_\lambda$ と記す. すると f がコンビニエントでない場合も,（無限遠点において非退化という仮定のもとで）ある特別な固有値以外については Broughton の消滅定理の一般化$H^j(f^{-1}(R);\mathbb{C})_\lambda = 0$ $(j \neq 0,\ n-1)$ を示すことが出来る（[64] を参照）．最近我々は [64] において, この消滅定理を用いて上記の結果をコンビニエントでない多項式に拡張した．次節でみるように, コンビニエントでない多項式による写像は, 無限遠点に特異性を持つより興味深い対象である．f が無限遠点において非退化でない場合は, Φ_j^∞ のジョルダン標準型を計算するのは現在のところ大変難しい（[41] では, そのような場合のジョルダン細胞のサイズや個数の一般的な上限を与えた)．また論文 [15] では, この節の結果を $\mathbb{C}^n$ の完全交叉部分代数多様体 $\{f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0\}$ からの多項式写像 $F\colon \{f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ の無限遠点におけるモノドロミーの場合に一般化した．ただし固有値 1 に対するジョルダン細胞の個数については, まだ技術的な困難があり, 同様の結果を得るに至っていない.

4. 多項式写像の分岐点集合の記述

多項式写像 $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ の分岐点集合 $B_f \subset \mathbb{C}$ は多くの数学者によって研究された ([27], [30], [33], [43], [51], [69] などを参照)．ここではニュートン図形$\Gamma_\infty(f)$ を用いた

B_f の記述を考えよう．以後 f は無限遠点において非退化で $\Gamma_\infty(f)$ は n 次元であると仮定する．さらに f がコンビニエントであれば, f は無限遠点において従順であり, 等式 $B_f = f(\mathrm{Sing} f)$ が成り立つ．したがってここでは f がコンビニエントでない場合を扱う．$\mathbb{R}^n$ (の双対ベクトル空間) の元 $u \in \mathbb{R}^n$ の $\Gamma_\infty(f)$ における支持面 $\gamma_u \prec \Gamma_\infty(f)$ を

$$\gamma_u = \left\{ v \in \Gamma_\infty(f) \mid \langle u, v \rangle = \min_{w \in \Gamma_\infty(f)} \langle u, w \rangle \right\} \tag{16}$$

で定める．このとき $\mathbb{R}^n$ (の双対ベクトル空間) の上の同値関係 $\sim$ が, $u \sim u' \Longleftrightarrow \gamma_u = \gamma_{u'}$ で定まる．すると各面 $\gamma \prec \Gamma_\infty(f)$ と対応する同値類の閉包として $(n - \dim\gamma)$ 次元の閉凸錐 $\sigma(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$ が得られる．こうして得られた閉凸錐の族 $\{\sigma(\gamma) \mid \gamma \prec \Gamma_\infty(f)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の分割を定め, トーリック幾何における扇の公理を満たす ([17], [47] などを参照). これを $\Gamma_\infty(f)$ の双対扇と呼ぶ.

定義 4.1 (cf. [64]) 面 $\gamma \prec \Gamma_\infty(f)$ は, 条件 $0 \in \gamma$, $\dim\gamma \geq 1$ を満たし $\Gamma_\infty(f)$ の双対扇の中で γ と対応する閉凸錐 $\sigma(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の第一象限 $\mathbb{R}^n_+$ に含まれないとき, atypical であるという.

$\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ を $\Gamma_\infty(f)$ の atypical な面としよう．$K_i \subset \mathbb{C}$ を f の γ_i-部分

$$f_{\gamma_i} : T = (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C} \tag{17}$$

の臨界値集合 $f_{\gamma_i}(\mathrm{Sing} f_{\gamma_i})$ とし,

$$K_f = f(\mathrm{Sing} f) \cup \{f(0)\} \cup (\cup_{i=1}^m K_i) \subset \mathbb{C} \tag{18}$$

と置く．このとき Némethi-Zaharia [43] は, f の分岐点集合 B_f の上からの評価 $B_f \subset K_f$ を示した．ここで $K_i \subset \mathbb{C}$ は, f のファイバーの位相が無限遠方で変化しうる点 (すなわち f の無限遠点における特異性がありうる点) の集まりである．彼らはさらに $n = 2$ の場合に等式 $B_f = K_f$ を証明し, 高次元でも同様の等式が成り立つと予想した. この予想の証明は難しく, Zaharia [69] が f に関する非常に強い仮定の下で証明した後, 今日までほとんど進展を見せていない．最近我々は [62] において, 特異点を持つトーリック多様体の上の偏屈層を扱うことにより, Zaharia の条件をかなり緩めることが出来た．この結果を以下に簡単に紹介しよう．点 $b \in K_f \setminus [f(\mathrm{Sing} f) \cup \{f(0)\}] \subset \cup_{i=1}^m K_i$ を固定する．$T_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{Aff}(\gamma_i) \cap \mathbb{Z}^n]) \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim\gamma_i}$ と置き, f_{γ_i} を T_i 上の関数とみなす.

定義 4.2 (cf. [62]) 任意の $1 \leq i \leq m$ に対して $T_i \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim \gamma_i}$ 内の複素超曲面 $f_{\gamma_i}^{-1}(b) \subset T_i$ が高々孤立特異点を持つとき, f は点 b 上で無限遠点において孤立特異点を持つという.

この条件はジェネリックな多項式 f に対して成立することに注意せよ．$n = 3$ の場合次の結果が得られた.

定理 4.3 ([62]) $n = 3$ であり f は点 $b \in K_f \setminus [f(\mathrm{Sing} f) \cup \{f(0)\}]$ 上で無限遠点において孤立特異点を持つと仮定する．このとき $b \in B_f$ が成り立つ.

この定理により, $n=3$ の場合 f に関する非常に弱い条件の下で逆向きの包含関係 $K_f \setminus \{f(0)\} \subset B_f$ が得られた．$n \geq 4$ の場合も, ニュートン図形 $\Gamma_\infty(f)$ の形状に関する何らかの仮定の下で同様の結果が示せる．詳しくは [62] を参照されたい．

次にターゲットが高次元の多項式写像 $f=(f_1, f_2, \dots, f_k): \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$ $(2 \leq k \leq n)$ を考えよう．この場合も同様に分岐点集合 $B_f \subset \mathbb{C}^k$ が定義される．まず Kurdyka-Orro-Simon [34] により B_f を上から評価する集合 $L_f \subset \mathbb{C}^k$ が点列を用いて定義された．次に我々[6] および Nguyen [45] は, Némethi-Zaharia [43] の結果を一般化することで, B_f を上から評価する別の集合 $K_f, K'_f \subset \mathbb{C}^k$ をより具体的に構成した．我々の定義した集合 K_f に関しては, 等号 $B_f = K_f$ がいつ成立するかなどはまるでわかっていないが, 以下に [6] で得られた結果を紹介しよう．ニュートン図形の Minkowski 和 $\Gamma_\infty(f) := \Gamma_\infty(f_1) + \cdots + \Gamma_\infty(f_k)$ は n 次元であると仮定する．このときその双対扇は $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$ の（閉凸とは限らない）錐への分割 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+ = \cup_{i=1}^m \sigma_i$ を定める．各錐 σ_i の相対内部にあるベクトルの支持面を考えることにより, 面 $\gamma_i \prec \Gamma_\infty(f)$ および $\gamma_{ij} \prec \Gamma_\infty(f_j)$ $(1 \leq j \leq k)$ が自然に定義され, 等式 $\gamma_i = \gamma_{i1} + \cdots + \gamma_{ik}$ が成り立つ．各 $1 \leq i \leq m$ に対して

$$P_i = \{1 \leq j \leq k \mid 0 \notin \gamma_{ij}\}, \quad Q_i = \{1 \leq j \leq k \mid \gamma_{ij} = \{0\}\} \tag{19}$$

と置く．さらに条件 $P_i^c \neq \emptyset, Q_i = \emptyset$ を満たす $1 \leq i \leq m$ に対して, 写像

$$F_i := \{(f_j)_{\gamma_{ij}}\}_{j \in P_i^c} \quad : Z_i = \{x \in T = (\mathbb{C}^*)^n \mid (f_j)_{\gamma_{ij}}(x) = 0 \ (j \in P_i)\} \longrightarrow \mathbb{C}^{\sharp P_i^c} \tag{20}$$

および自然な射影 $\pi_i : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{\sharp P_i^c}$ を用いて

$$K_i = \pi_i^{-1}\{F_i(\mathrm{Sing} F_i)\} \subset \mathbb{C}^k \tag{21}$$

と置く．また条件 $Q_i \neq \emptyset$ を満たす $1 \leq i \leq m$ に対し

$$N_i = \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid z_j = f_j(0) \ (j \in Q_i)\} \simeq \mathbb{C}^{k - \sharp Q_i} \subset \mathbb{C}^k \tag{22}$$

と置く．そしてこれらの合併をとり部分集合 $K_f \subset \mathbb{C}^k$ を

$$K_f = f(\mathrm{Sing} f) \bigcup (\cup N_i) \bigcup (\cup K_i) \subset \mathbb{C}^k \tag{23}$$

で定める．

定理 4.4 ([6]) 多項式 f_j $(1 \leq j \leq k)$ のうち少なくとも一つはコンビニエントでなく, 多項式写像 $f=(f_1, \dots, f_k): \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$ は無限遠点において非退化（すなわち上記の $Z_i \subset T = (\mathbb{C}^*)^n$ たちがすべて滑らかで完全交叉）であると仮定する．このとき $B_f \subset K_f$ が成り立つ．

5. 合流型 A-超幾何関数への応用

以上の多項式写像のモノドロミーや分岐点集合の研究で使われたトーリックコンパクト化の手法は, 多変数の超幾何関数の研究でも大いに役立つ．実際我々は [16] において合流型 A-超幾何関数の積分表示を作ることが出来た．さらにその積分路を局所系係数のねじれホモロジーに対するねじれモース理論を用いて構成し, 合流型 A-超幾何関数の無限遠点における漸近展開およびモノドロミーを求めた ([3], [16], [60])．

参考文献

[1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie, Comment. Math. Helv., **50** (1975), 233-248.

[2] A. Adolphson, Hypergeometric functions and rings generated by monomials, Duke Math. Journal, **73** (1994), 269-290.

[3] K. Ando, A. Esterov and K. Takeuchi, Monodromies at infinity of confluent A-hypergeometric functions, arXiv:math/1312.6786v3, submitted.

[4] K. Aomoto and M. Kita, *Theory of hypergeometric functions*, Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2011.

[5] S. A. Broughton, Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, Invent. Math., **92** (1988), 217-241.

[6] Y. Chen, L. R. G. Dias, K. Takeuchi and M. Tibăr, Invertible polynomial mappings via Newton non-degeneracy, to appear in Ann. Inst. Fourier.

[7] V. I. Danilov and A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers, Math. Ussr Izvestiya, **29** (1987), 279-298.

[8] J. Denef and F. Loeser, Motivic Igusa zeta functions, J. Alg. Geom., **7** (1998), 505-537.

[9] J. Denef and F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties, Progr. Math., **201** (2001), 327-348.

[10] A. Dimca, Sheaves in topology, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[11] A. Dimca and A. Némethi, On the monodromy of complex polynomials, Duke Math. J., **108** (2001), 199-209.

[12] A. Dimca and M. Saito, Monodromy at infinity and the weights of cohomology, Compositio Math., **138** (2003), 55-71.

[13] W. Ebeling and J. H. M. Steenbrink, Spectral pairs for isolated compete intersection singularities, J. Alg. Geom., **7** (1998), 55-76.

[14] D. Eisenbud and W. D. Neumann, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, Annals of Mathematics Studies, **110**, Princeton University Press, 1985.

[15] A. Esterov and K. Takeuchi, Motivic Milnor fibers over complete intersection varieties and their virtual Betti numbers, Int. Math. Res. Not., Vol. 2012, No. 15 (2012), 3567-3613.

[16] A. Esterov and K. Takeuchi, Confluent A-hypergeometric functions and rapid decay homology cycles, arXiv:1107.0402v3, submitted.

[17] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Princeton University Press, 1993.

[18] R. García López and A. Némethi, On the monodromy at infinity of a polynomial map, Compositio Math., **100** (1996), 205-231.

[19] R. García López and A. Némethi, Hodge numbers attached to a polynomial map, Ann. Inst. Fourier, **49** (1999), 1547-1579.

[20] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 573-577.

[21] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Hypergeometric functions and toral manifolds, Funct. Anal. Appl., **23** (1989), 94-106. Its correction: Funct. Anal. Appl., **27** (1993), 295.

[22] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions, Adv. in Math., **84** (1990), 255-271.

[23] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhäuser, 1994.

[24] G. Guibert, F. Loeser and M. Merle, Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic

analogue of a conjecture of Steenbrink, Duke Math. J., **132** (2006), 409-457.

[25] S. Gusein-Zade, I. Luengo and A. Melle-Hernández, Zeta functions of germs of meromorphic functions, and the Newton diagram, Funct. Anal. Appl., **32** (1998), 93-99.

[26] S. Gusein-Zade, I. Luengo and A. Melle-Hernández, On the zeta-function of a polynomial at infinity, Bull. Sci. Math., **124** (2000), 213-224.

[27] H. V. Hà, Nombres de Lojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), 429-432.

[28] H. Hamm, Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, Math. Ann., **191** (1971), 235-252.

[29] R. Hotta, K. Takeuchi and T. Tanisaki, D-modules, perverse sheaves, and representation theory, Birkhäuser Boston, 2008.

[30] M. Ishikawa, The bifurcation set of a complex polynomial function of two variables and the Newton polygons of singularities at infinity, J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 161-196.

[31] M. Kashiwara and P. Schapira, Sheaves on manifolds, Springer-Verlag, 1990.

[32] A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and toroidal varieties, Funct. Anal. Appl., **11** (1978), 289-296.

[33] A. G. Kouchnirenko, Polyédres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math., **32** (1976), 1-31.

[34] K. Kurdyka, P. Orro and S. Simon, Semilgebraic Sard theorem for generalized critical values, J. Differential Geometry, 56 (2000), 67-92.

[35] A. Libgober and S. Sperber, On the zeta function of monodromy of a polynomial map, Compositio Math., **95** (1995), 287-307.

[36] Y. Matsui and K. Takeuchi, A geometric degree formula for A-discriminants and Euler obstructions of toric varieties, Adv. in Math., **226** (2011), 2040-2064.

[37] Y. Matsui and K. Takeuchi, Milnor fibers over singular toric varieties and nearby cycle sheaves, Tohoku Math. J., **63** (2011), 113-136.

[38] Y. Matsui and K. Takeuchi, Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, Mathematische Zeitschrift, **268** (2011), 409-439.

[39] Y. Matsui and K. Takeuchi, Monodromy at infinity of polynomial maps and mixed Hodge modules, with Appendix by C. Sabbah, Int. Math. Res. Not., Vol. 2013, No. 8 (2013), 1691-1746.

[40] Y. Matsui and K. Takeuchi, Motivic Milnor fibers and Jordan normal forms of Milnor monodromies, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), 207-226.

[41] Y. Matsui and K. Takeuchi, On the sizes of the Jordan blocks of monodromies at infinity, arXiv:1202.5077v1., to appear in Hokkaido Math. Journal.

[42] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University Press, 1968.

[43] A. Némethi and A. Zaharia, On the bifurcation set of a polynomial function and newton boundary, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), 681-689.

[44] W. D. Neumann and P. Norbury, Vanishing cycles and monodromy of complex polynomials, Duke Math. J., **101** (2000), 487-497.

[45] T. T., Nguyen, Bifurcation set, M-tameness, asymptotic critical values and Newton polyhedrons, Kodai Math. J., Vol. 36, No. 1 (2013), 77-90.

[46] J. Nicaise, An introduction to p-adic and motivic zeta functions and the monodromy conjecture, arXiv:0901.4225v1.

[47] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties, Springer-Verlag, 1988.

[48] M. Oka, Principal zeta-function of nondegenerate complete intersection singularity, J.

Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 11-32.

[49] M. Oka, Non-degenerate complete intersection singularity, Hermann, Paris, 1997.

[50] T. Okada and K. Takeuchi, Meromorphic continuations of local zeta functions and their applications to oscillating integrals, Tohoku Math. J., **65** (2013), 159-178.

[51] A. Parusiński, On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity, Compositio. Math. **97** (1995), 369–384.

[52] M. Raibaut, Fibre de Milnor motivique à l'infini, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **348** (2010), 419-422.

[53] C. Sabbah, Monodromy at infinity and Fourier transform, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **33** (1997), 643-685.

[54] C. Sabbah, Hypergeometric periods for a tame polynomial, Port. Math., **63** (2006), 173-226.

[55] M. Saito, Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities, Math. Ann., **281** (1988), 411-417.

[56] M. Schulze and U. Walther, Irregularity of hypergeometric systems via slopes along coordinate subspaces, Duke Math. J., **142** (2008), 465-509.

[57] D. Siersma and M. Tibăr, Singularities at infinity and their vanishing cycles, Duke Math. J., **80** (1995), 771-783.

[58] D. Siersma and M. Tibăr, Singularities at infinity and their vanishing cycles. II. Monodromy, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **36** (2000), 659-679.

[59] K. Takeuchi, Perverse sheaves and Milnor fibers over singular varieties, Adv. Stud. Pure Math., **46** (2007), 211-222.

[60] K. Takeuchi, Monodromy at infinity of A-hypergeometric functions and toric compactifications, Math. Ann. **348** (2010), 815-831.

[61] K. Takeuchi, Monodromies at infinity of polynomial maps and A-hypergeometric functions, Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University, **43** (2010), 141–174.

[62] K. Takeuchi, Bifurcation values of polynomial functions and perverse sheaves, submitted.

[63] K. Takeuchi, On the monodromy conjecture for non-degenerate hypersurfaces, arXiv:1309.0630v2, preprint.

[64] K. Takeuchi and M. Tibăr, Monodromies at infinity of non-tame polynomials, arXiv:1208.4584v2., submitted.

[65] S. Tanabé, Combinatorial aspects of the mixed Hodge structure, RIMS Kôkyûroku **1374** (2004), 15-39.

[66] A. N. Varchenko, Zeta-function of monodromy and Newton's diagram, Invent. Math., **37** (1976), 253-262.

[67] A. N. Varchenko and A. G. Khovanskii, Asymptotic behavior of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283** (1985), 521-525.

[68] C. Voisin, Hodge theory and complex algebraic geometry, I, Cambridge University Press, 2007.

[69] A. Zaharia, On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary II, Kodai Math. J., **19** (1996), 218-233.