

# TOPOLOGY NEWS

Series B No. 3

Trefoil knot を含む  $S^3$  の単体分割

An introduction to Cyclic Cohomology

Mandelbrot set, Julia set をパソコンで描く

1987年10月

## 目次

やさしく たのしく ためになる

Trefoil knot を含む  $S^3$  の単体分割 ----- 1  
その展開図とその応用

吉田 正章

An Introduction to Cyclic Cotorsion Theory ----- 12

夏目 利一

Mandelbrot set, Julia set をパソコンで描く ----- 32

増田 一男

i 先号の会計報告(8月末現在)

繰越分	560	
No.2印刷費(送料込)		70,400
返送料		1,100
売上(含back number)	70,960	
<hr/>		
残高	20	

ii 本号に記事を寄せて下さった方々には、この場を借りて御礼申し上げます。

次回には、修士論文・博士論文の速報を予定しております。その節には皆様の御協力をお願い致します。その他御意見、記事などありましたら御連絡下さい。尚、原稿の締切は2月中旬頃の予定です。

トポロジーニュース連絡先

〒812 福岡市東区箱崎6-10-1

九州大学理学部数学教室

矢野 公一

TEL (092) 641-1101 内線 4362

(9.9)

— やさしく たのしく ためになる —

## Trefoil knot を含む $S^3$ の単体分割

— その展開図とその応用 —

九州大学 理学部 吉田正章

### § -2 前置き

複素射影平面  $CP^2$  は, Kühnel triangulation と呼ばれる美しい単体分割  $K$  をもつ. 単体的複体  $K$  は, 9 個の頂点と 36 個の 4-simplex を持ち,  $K$  を不変に保つ orientation preserving な有限群  $G$  が 9 個の頂点に推移的に働いている. なお  $CP^2$  は 8 個以下の頂点では単体分割できないことは簡単に分るから,  $K$  は  $CP^2$  の頂点の個数最小の単体分割である.

$K$  には次の様な著しい性質がある. “任意の異なる 3 頂点は  $K$  に属する 2-simplex を定める.” この性質をもつ 4 次元単体的多様体として  $K$  は組合せ論的に 1981 年に Wolfgang KÜHNEL によって発見された. その後  $K$  を幾何学的に理解しようとする努力が, Bernard MORIN によってなされた.

MORIN と筆者は,  $K$  の 2-skeleton の一分なる 2 次元 Torus  $T$  が実は  $CP^2$  内の non-singular cubic

$$C: \xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$$

の dual curve

$$\hat{C}: x^6 + y^6 + z^6 - 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) = 0$$

と見なせることを発見した.  $C$  の 9 つの変曲点が  $\hat{C}$  の 9 つの cusp に対応し, この 9 つの cusp が  $K$  の 9 つの頂点になっているのである.

ところで,  $CP^2$  の  $\hat{C}$  で 2 位に分岐する普遍分岐被覆は複素平面  $C^2$  である. 別の言葉でいうと,  $C^2$

に (properly discontinuous に) 働く複素結晶群  $\Gamma \subset U(2) \times \mathbb{C}^2$  ( $U(2)$  は  $2 \times 2$  の unitary 群) があって,  $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}P^2$  となっており,  $\hat{C}(\mathbb{C}P^2)$  は  $\Gamma$  の singular orbit になっているという訳である。

このことを使うと,  $\mathbb{C}P^2$  の分割  $K$  は,  $\mathbb{C}^2$  の linear な分割  $\tilde{K}$  に持ち上げることが出来ることが分り, 組合せ的な対象であった  $K$  が俄然 群論的, 代数幾何的な側面を帯びてきたのである。たとえば,  $\Gamma$  を正規部分群として含む,  $\tilde{K}$  を不変にする 結晶群  $\Gamma'$  があって, 有限群  $G$  は商群  $\Gamma'/\Gamma$  として理解されるといった具合である。

以上のことは 1989 年に Advances in Math. に出ることになっている論文:

The Kühnel triangulation of the complex projective plane  
from the view point of complex crystallography  
Part I

by Bernard MORIN and Masaaki YOSHIDA

with appendices by Alexis MARIN

に詳しく書いてある。Part I となっていることからもお分りのように, 複体  $\tilde{K}$  には, 波めども尽きぬ興味があり, ひきつづき 上記の三人により研究されている。

なお, KÜHNEL 氏は, 先年  $HP^2$  ( $H$  はハミルトン数体) の美しい (頂点数最小の) 単体分割の構築に成功した。この午の話は まだまだ 続きそうである。

MORIN 氏は,  $K$  及び  $\tilde{K}$  の美しさを皆に見てもらおうと, 解説映画 を作ると公言している。

2次元球面の裏返しの映画が好評だったので, 彼は自信ありげだけど, なにしろ  $K$  は 4次元ですからねえ... いいものが出来るとすばらしいです\*. 乞御期待!

そうそう good news があります。

news, news, お知らせ

Morin氏は来年(1988年)の春に来日することが決定しました。いつまで居るかまだ(これを書いている6月には)分かりませんが、彼と会って話をしたい人は、私に御一報下さい。スケジュールを調整しますから。楽しむ位楽しい人ですよ。彼のしゃべる言語は、上キな頃に

- ≧ 仏語(母国語) ≧ 英語(準母国語, 仏なまり無し)
- >> 日本語(筆者に幸ほどきを受けた後, 大学の日本語講座で特訓中)
- ≧ 朝鮮語(片言 + α).

## §-1 序

前置きが長くなってしまったが、この稿では単体的多様体  $K$  (および  $\tilde{K}$ ) の頂点のまわりの link (即ち、頂点を中心とする小さな  $S^3$  上に  $K$  (および  $\tilde{K}$ ) から induce される単体分割) を調べる。すべての  $K$  (および  $\tilde{K}$ ) の頂点は  $K$  (および  $\tilde{K}$ ) を不変にする群で移りあうから、どの頂点でも link は同じである。

$M$  :  $K$  の頂点の廻りの link,

$\tilde{M}$  :  $\tilde{K}$  の頂点の廻りの link

とおく。Torus  $T$  は頂点で cusp を持つことを思い出せば、

$$k := M \cap T$$

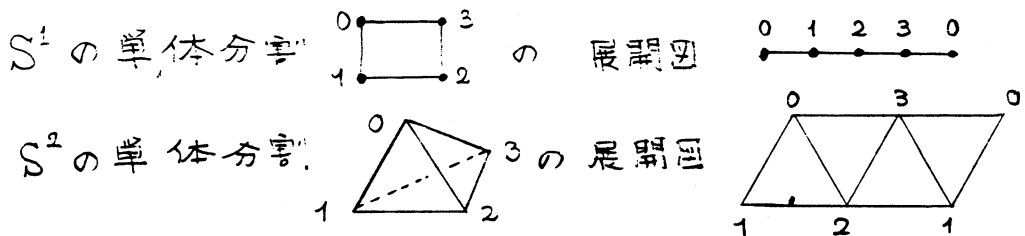
は、 $M$  の 1-skeleton の一部であり、trefoil knot のはずである。かくして、表題の一部 “Trefoil knot ( $k$ ) を含む  $S^3$  の単体分割 ( $M$ )” の意味するところは説明された。単体的多様体  $\tilde{M}$  の構成に、 $M$  の “展開図” なるものを使うのである。

肝心の  $M$  の定義がどんどん後まわしになり、

いつまでたっても本論が始まらないが、展開図とは一体何だったのだろうかということを一考してみよう。後の理解の助けになるから。

展開図:  $n$ 次元単体的多様体  $M$  の“展開図”  $M'$  とは  $\mathbb{R}^n$  の有界連結単体的領域で境界  $\partial M'$  が  $\bigcup F_i^1 \cup F_i^2$  と  $n-1$  単体の組の集りよりなり、 $F_i^1$  と  $F_i^2$  を貼り合わせると  $M$  になるものである。もちろん  $M$  に対して  $M'$  は一意には定まらない。

こういうと、いかにももっともらしいが、例をやるとなあんだというようなものである。



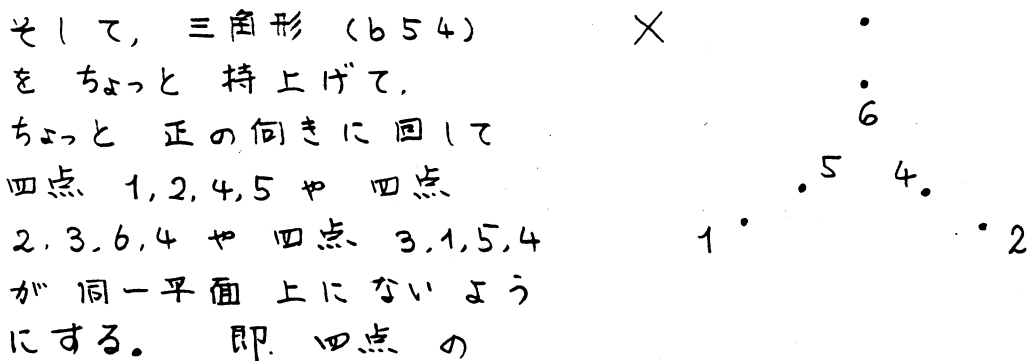
という具合だから、 $S^3$  の単体分割  $M$  の展開図  $M'$  は三次元空間の立体であるはずである。

遂に本論に入る。

## §0 $M$ の描写

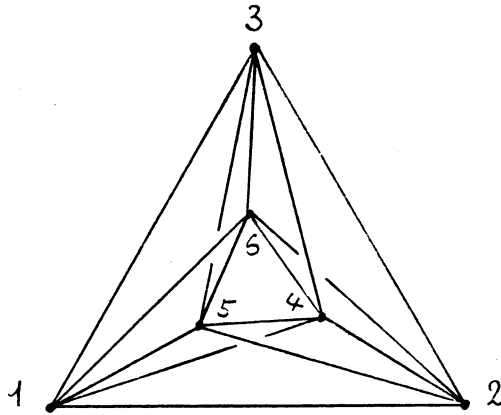
$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  と考える。今から、 $S^3$  の vertex 8ヶ, edge 28ヶ, triangle 40ヶ, tetrahedron 20ヶよりなる単体分割  $M$  を説明する。

まず、平面  $X$  ( $\subset \mathbb{R}^3$ ) 上に, vertex 1, ..., 6 を右図のように置く。



convex hull が うすっぺらな Tetrahedron になるようにする。 これら 3つの Tetrahedron のなす 図型を, quilted annulus と呼ぼう。

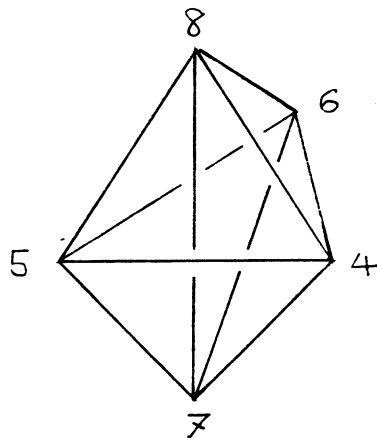
quilted annulus



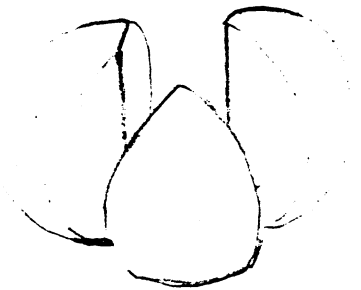
次に, 点 4, 5, 6 の重心の真下に vertex 7 を, 真上に vertex 8 を置く。 vertex はこれで全部である。

五点 4, 5, 6, 7, 8 の convex hull - central core と呼ぶ - を夏みかんを三人に分けるように分ける。

central core



夏みかんの三等分



join を使うと  $2(456) * (78)$  と書ける。

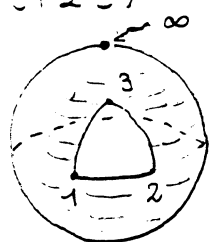
vertex 8 から quilted annulus をなしている 3つの Tetrahedron の面 (triangle) が 6つ見える。 8 と, これら 6つの triangle との convex hull で 6つの Tetrahedron が出来る。 これらの 1つ1つを 8からの



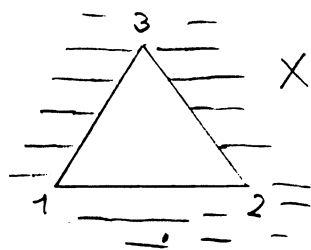
visual cone と呼ぶ。

vertex 7 から同じことをやり、又からの visual cone が 6 つ出来る。

今までに、vertex 1, ..., 8 の convex hull は、quilted annulus に 3 つ、central core に 3 つ、visual cone  $2 \times 6$  の計 18 つの Tetrahedron に分割された。この convex hull の  $S^3$  での complement を 2 つの Tetrahedron に分けよう。平面  $X$  内の三角形 (123) の complement に  $\infty \in S^3$  を付けたものを (外側の) triangle (123)



→  
立体射影



と、又と 8 から錐を作る。これら 2 つを  $\infty$ -big Tetrahedron と呼ぼう。join を使うと、 $(123) * \infty(78)$  と書ける。

これで  $S^3$  は 20 つの Tetrahedron に分けられた。

注意 1:  $M$  の 1-skeleton の一部

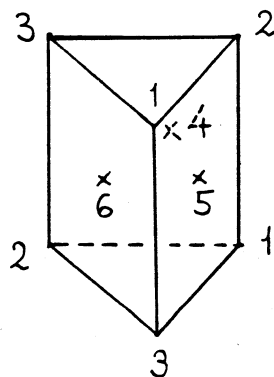
1 - 4 - 3 - 5 - 2 - 6 - 1

は、trefoil knot になっている。(quilted annulus を見よ)

注意 2:  $M$  のどんな異なる 2 つの vertex も  $M$  に属する 1-simplex を定めている。

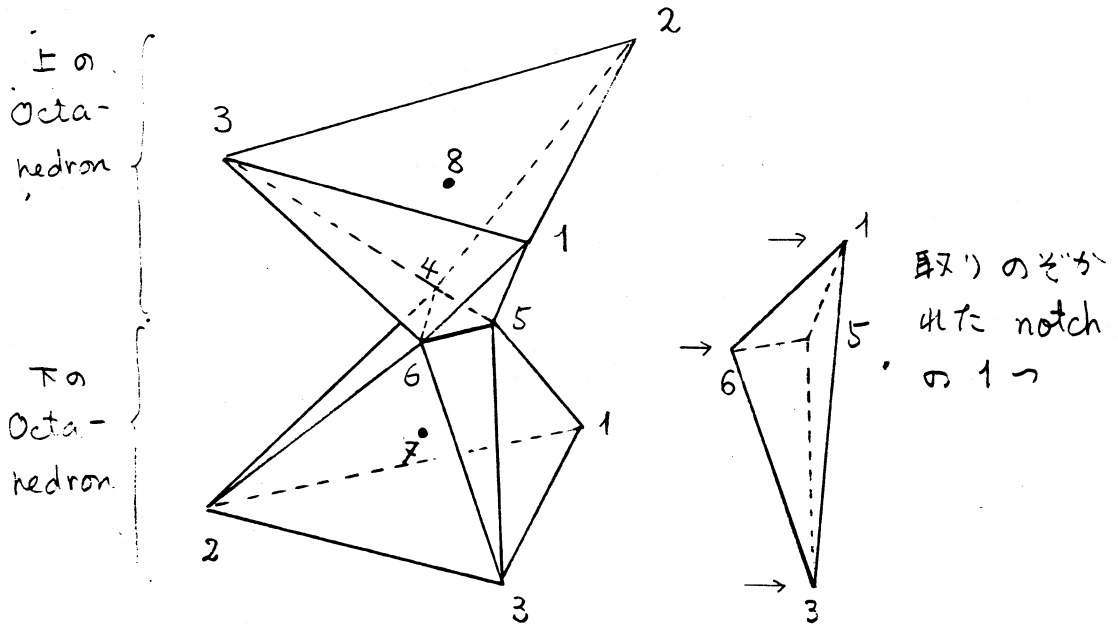
## §1 $M$ の展開図 $M'$

$M$  のどこを切り開くかは、後からやることにして、展開図  $M'$  を先に述べる。外から見たら何のことはないただの prism (三角柱) である。右の図を見よ。



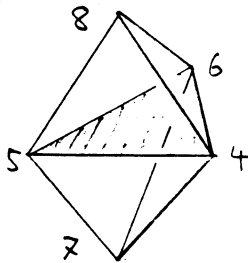
以下この prism の中身がどう分割されているかを説明する。

prism の垂直な辺を含む 3つの Tetrahedron — これらを notch と呼ぶ — 1356, 2145, 3264 を取りのぞく。残りは, Octahedron が 2つ ひとついたものである。上の Octahedron の重心に vertex 8 を, 下の Octahedron の重心に vertex 7 を置く。



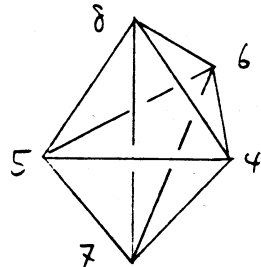
(図を書きやすくするために vertex 4, 5, 6 を少し内側に押し込みました)

次に 上(および下)の Octahedron を重心系で分割する。最後に、まん中にある 4, 5, 6, 7, 8 の convex hull (これも central core と呼んでしまおう) の分割を以下のように変える。



(456) \* 2(78)

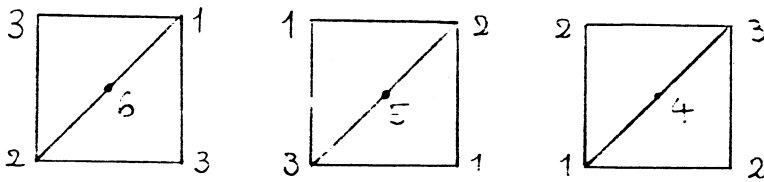
と上下2  
つに分け  
られてい  
たものを



2(456) \* (78)

と裏みが  
んの3つ  
割りにす  
る。

これで出来上りである。  $M'$  から  $M$  を作るには、prism の垂直な3つの面



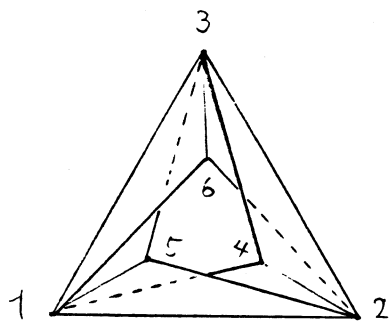
を対角線を折目にして折るように同一視し、天井と床の三角形(123)を vertex の巻き屋(にねじるようにして)同一視する。

204 の Tetrahedron の対応は、

$M'$		$M$
notch 3つ	→	quilted, annulus
天井を面とする Tetrah.	→	$\infty$ -big 上側!!
床を面とする Tetrah.	→	$\infty$ -big 下側!!
central core	→	central core
残り)	→	visual core

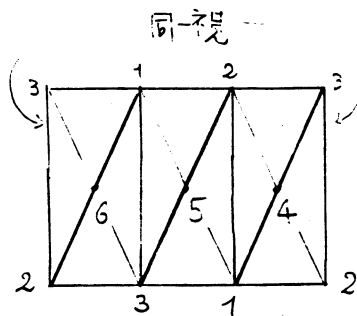
となる。

逆に、 $M$  のどこを切り開いたかを見ると、



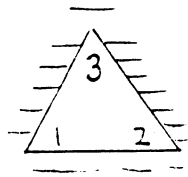
6枚の triangle の和 (実は Möbius band になる)

を3線  
1-2-3-1  
に沿って  
2枚に切  
り開いて、



prism の垂直な3枚の面、

それと、



を2枚に開いて, prism の  
天井と床

平面  $X$  の外側  
の triangle

という具合になっている部である。

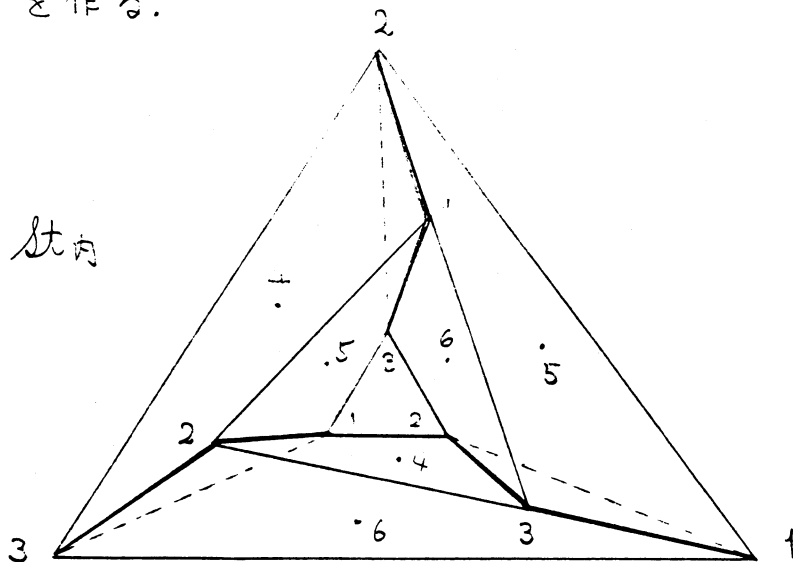
注意: trefoil knot  $k \subset M$  は上の対応で,  
prism の垂直な3つの面の3つの対角線となっ  
ている。

## §2 $M$ の $k$ で2位に分岐する被覆 $\tilde{M}$

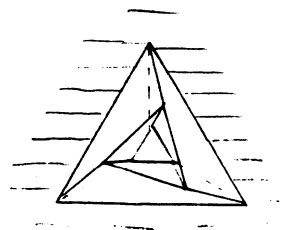
$S^3$  の分割  $M$  の 1-skeleton の一部  $k$  で2位に  
分岐する 普遍分岐被覆 はやはり  $S^3$  の分割 を与え  
る。これを  $\tilde{M}$  と記す。  $\tilde{M}$  を製作する。

材料: 分割  $M'$  をほどこされた prism 6本。

組立て: 3本の prism を平面上に寝かせて,  
三角形の面同士をくっつけて, 下記のごとく solid torus  
 $\mathcal{S}$  内 を作る。



残りの3本は縦にして  $\mathcal{A}$  内の  $S^3$  での complement をうめる。上の  $\mathcal{A}$  内の図でそのうちの1つが、縦穴に入っているのが見えるでしょう。あとの2本の prism の天井または床は  $\mathcal{A}$  内を置いた平面の  $\mathcal{A}$  内の底の外側側の三角形である。(下図をよむ。  $\mathcal{A}$  内とその complement をうめた solid torus ( $\mathcal{A}_{\text{外}}$  と書く) は、



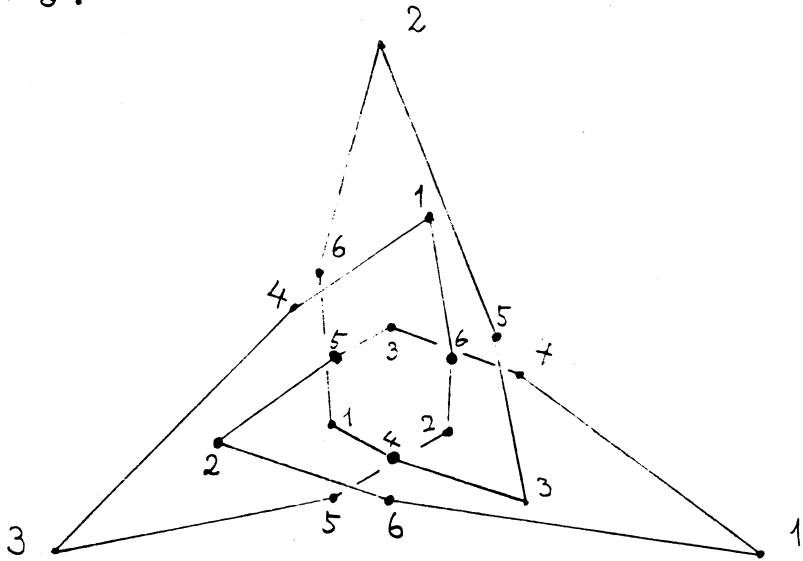
middle torus  $\partial \mathcal{A}_{\text{内}} = \partial \mathcal{A}_{\text{外}}$  を共有している言尺。

これで、 $\tilde{\mathcal{M}}$  が出来た。

3次の対称群が  $\tilde{\mathcal{M}}$  に働いている。位数2の元は、middle torus 上の unknotted circle

1-4-3-5-2-6-1

を不変にして、 $\mathcal{A}_{\text{内}}$  と  $\mathcal{A}_{\text{外}}$  をリっくり返すように働く。位数2の元は3つあり、3つの固定 circle は互に link している。



これらが、the tail knot  $k \subset \mathcal{M}$  の  $\tilde{\mathcal{M}}$  への lift である。位数3の元は、 $\mathcal{A}_{\text{内}}$ 、 $\mathcal{A}_{\text{外}}$  を保ち、ねじりながら、 $\mathcal{A}_{\text{内}}$  および  $\mathcal{A}_{\text{外}}$  を廻らす。

$\tilde{\mathcal{M}}$  のこの3次の対称群での商複体が  $\mathcal{M}$  となる。このことは、prism の1つがこの群の

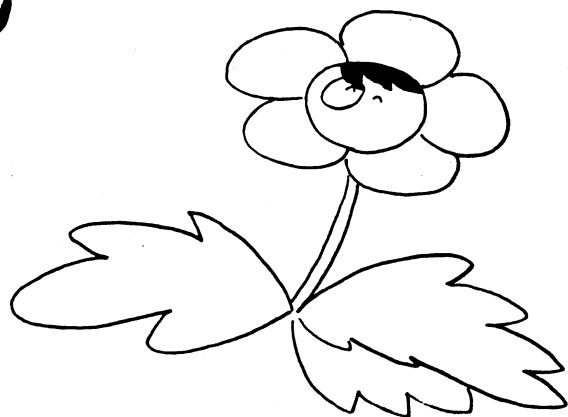
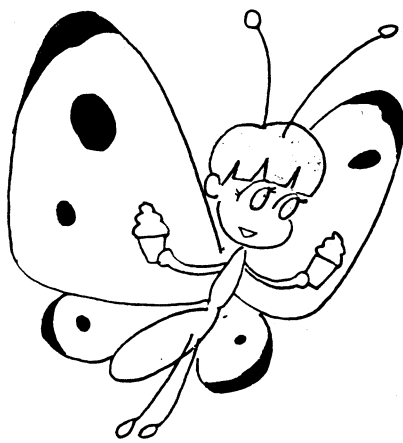
基本領域 になっていることから分る。また射影  
 $\overline{M} \rightarrow M$  は  $M$  上で、3対1, それ以外  
の点では、6対1 となっている。

締め括りの注意: 竹ひごや厚紙で  $M$  や  
 $M'$  の模型を作れば、楽しく理解することが出来る。

### References

- W. Kühnel and T. F. Barcoff. The 9-vertex complex projective plane, Math. Intelligencer 5-3 (1983)
- 3. Morin and M. Yoshida. 本文中にあり。
- U. Brehm and W. Kühnel, A 5-neighborly triangulation of the quaternionic projective plane with 15 vertices, Duisburg Univ. preprint

(R6.15)



# An Introduction to Cyclic Cohomology

Toshikazu Natsume (Saitama U.)

The purpose of this note is to outline an introduction to cyclic cohomology. Directed at topologists, it requires basic notions in homological algebra.

## 1. Prologue

1.1. Let us consider the canonical trace  $\text{Tr}$  on a matrix algebra  $M_n(\mathbb{C})$ . For each positive even integer  $k$ , a  $(k+1)$ -linear functional  $\varphi_k$  on  $M_n(\mathbb{C})$  is defined by

$$\varphi_k(X_0, X_1, \dots, X_k) = \text{Tr}(X_0 \cdots X_k).$$

The functional  $\varphi_k$  has the following properties:

- (i)  $\varphi_k(X_k, X_0, \dots, X_{k-1}) = \varphi_k(X_0, \dots, X_k)$ ,
- (ii)  $\sum_{j=0}^k (-1)^j \varphi_k(X_0, \dots, X_j X_{j+1}, \dots, X_k, X_{k+1})$   
 $+ (-1)^{k+1} \varphi_k(X_{k+1} X_0, X_1, \dots, X_k) = 0$ .

Notice that in the formula (i), if  $\sigma$  is an arbitrary permutation of  $(0, \dots, k)$ , the equality

$$\varphi_k(X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \varphi_k(X_0, \dots, X_k)$$

does not in general hold.

People working on differential geometry or differential topology tend to think that it is quite natural to expect objects to be symmetric or skewsymmetric under an action of a symmetric group. However, as the functional  $\varphi_k$  considered above, there exist familiar objects which do not behave nicely under a symmetric group action.

1.2. Motivated by the equalities (i), (ii) we introduce the following object for an associative  $\mathbb{C}$ -algebra  $A$ . For each nonnegative integer  $n$ , let  $C_\lambda^n(A)$  be the totality of all  $(n+1)$ -linear functional  $\varphi$  with the following property:

$$(*) \varphi(x_n, x_0, \dots, x_{n-1}) = (-1)^n \varphi(x_0, \dots, x_n)$$

for  $x_j \in A$ .

Define a map  $b: C_\lambda^n(A) \rightarrow C_\lambda^{n+1}(A)$  by the lefthand side of the equality (ii). It requires some computation to show that for each  $\varphi \in C_\lambda^n(A)$ , the functional  $b\varphi$  actually belongs to  $C_\lambda^{n+1}(A)$ . It is a good exercise for the reader to check this for the case  $n=2$  or  $n=3$ . Another good exercise is to show that  $b^2 = 0$ . Having done this, we obtain a cochain complex  $\{C_\lambda^*(A) = \bigoplus_n C_\lambda^n(A), b\}$ .

1.3. Definition. The cohomology of the cochain complex  $\{C_\lambda^*(A), b\}$  is denoted by  $H_\lambda^*(A) = \bigoplus_n H_\lambda^n(A)$  and is called the cyclic cohomology of a  $\mathbb{C}$ -algebra  $A$ .

1.4. Example. The most elementary  $\mathbb{C}$ -algebra is  $\mathbb{C}$  itself. In this case  $\varphi \in C_\lambda^n(A)$  is determined by the value  $\varphi(1, \dots, 1)$ . By the condition (\*),  $C_\lambda^{2n+1}(A) = 0$  ( $n \geq 0$ ). Therefore the cochain complex has the form:  $\mathbb{C} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ . Consequently  $H_\lambda^{2n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$  and  $H_\lambda^{2n+1}(A) = 0$  for  $n \geq 0$ .

1.5. Example. Let  $\delta: A \rightarrow A$  be a derivation, and let  $\tau \in A^*$ . If  $\tau(\delta(a)) = 0$  for any  $a \in A$ , then the following formula defines a cyclic 1-cocycle:

$$(a^0, a^1) \mapsto \tau(a^0 \delta(a^1)) \text{ for } a^0, a^1 \in A.$$

## 2. General properties

2.1. A reader familiar with homological algebra might have noticed, by looking at the operator  $b$ , that cyclic cohomology is closely related to Hochschild cohomology.

The dual  $A^*$  of  $A$  is an  $A$ -module in the following way:

$$(a\varphi b)(x) = \varphi(bxa) \text{ for } a, b, x \in A \text{ and } \varphi \in A^*.$$

Let  $C^n(A, A^*)$  denote the space of all  $n$ -linear functionals with



values in  $A^*$ . The coboundary map  $b: C^n(A, A^*) \rightarrow C^{n+1}(A, A^*)$  is given by

$$\begin{aligned} (b\varphi)(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1(\varphi(a_2, \dots, a_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j \varphi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} (\varphi(a_1, \dots, a_n)) a_{n+1}. \end{aligned}$$

We get a cochain complex  $\{C^*(A, A^*), b\}$ . A Hochschild 1-cocycle is nothing but a derivation  $A \rightarrow A^*$ . For  $\varphi \in C_\lambda^n(A)$ , if we consider as an element of  $C^n(A, A^*)$  by putting  $\varphi(X_1, \dots, X_n)(X_0) = \varphi(X_0, X_1, \dots, X_n)$ , we get a canonical inclusion  $C_\lambda^n(A) \hookrightarrow C^n(A, A^*)$ . A point is that  $C_\lambda^n(A)$  is a subcomplex of  $C^*(A, A^*)$ . The cohomology of  $C^*(A, A^*)$  is the Hochschild cohomology  $H^*(A, A^*)$  of  $A$  with value in  $A^*$ .

Consider the following double complex  $\mathcal{C}(A)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\ C^2(A, A^*) & \xrightarrow{1-t} & C^2(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^2(A, A^*) & \xrightarrow{1-t} & \dots \\ \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\ C^1(A, A^*) & \xrightarrow{1-t} & C^1(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^1(A, A^*) & \xrightarrow{1-t} & \dots \\ \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\ C^0(A, A^*) & \xrightarrow{1-t} & C^0(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^0(A, A^*) & \xrightarrow{1-t} & \dots \end{array}$$

where  $(b'\varphi)(a_0, \dots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \varphi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1})$ ,

$$(t\varphi)(a_0, \dots, a_n) = (-1)^n \varphi(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ for } \varphi \in C^n(A, A^*),$$

and  $N: C^n(A, A^*) \rightarrow C^n(A, A^*)$  is given by  $N = 1+t+\dots+t^n$ .

2.2. Lemma. The equalities  $(1-t)b = b'(1-t)$  and  $bN = Nb'$  hold.

2.3. Lemma. We have that  $\text{Ker } N = \text{Im}(1-t)$  and that  $\text{Ker}(1-t) = \text{Im } N$ .

These two lemmata are shown by elementary linear algebra.

2.4. Assume that  $A$  has a unit.

Define  $s: C^n(A, A^*) \rightarrow C^{n-1}(A, A^*)$  by

$$(s\varphi)(a_0, \dots, a_{n-1}) = \varphi(1, a_0, \dots, a_{n-1})$$

to get  $b's + sb' = \text{Id}$  on  $C^n(A, A^*)$  for  $n \geq 1$ , and  $sb' = \text{Id}$  on  $C^0(A, A^*)$ . Thus we see that the cochain complex  $\{C^*(A, A^*), b'\}$  is acyclic.

By definition,  $\text{Ker}(1-t) = C_{\lambda}^*(A)$ . From this it follows:

Theorem ([8]). The total cohomology of the double complex  $\mathcal{C}(A)$  is isomorphic to  $H_{\lambda}^*(A)$ .

2.5. Now we modify the complex  $\mathcal{C}(A)$  as follows: for integers

$q \geq p \geq 0$ , put  $\mathcal{B}(A)_{p,q} = C^{q-p}(A, A^*)$ . Let the coboundary map  $\mathcal{B}(A)_{p,q} \rightarrow \mathcal{B}(A)_{p,q+1}$  be the Hochschild coboundary  $b$ , and  $B: \mathcal{B}(A)_{p,q} \rightarrow \mathcal{B}(A)_{p+1,q}$  be given by the composite  $C^{q-p}(A, A^*) \xrightarrow{1-t} C^{q-p}(A, A^*) \xrightarrow{s} C^{q-p-1}(A, A^*) \xrightarrow{N} C^{q-p-1}(A, A^*)$ .

Of course, the differential  $B$  on  $\mathcal{B}(A)_{p,p}$  is defined to be zero. It is easily checked that  $B^2 = 0$  and  $bB + Bb = 0$ . Thus we get a double complex. Let  $\text{Tot } \mathcal{B}(A)$  be the associated cochain complex with coboundary map  $b+B$ .

2.6. Proposition. The cochain complexes  $\text{Tot } \mathcal{C}(A)$  and  $\text{Tot } \mathcal{B}(A)$  are quasi-isomorphic.

Proof. Define a cochain complex homomorphism from  $\text{Tot } \mathcal{C}(A)$  to  $\text{Tot } \mathcal{B}(A)$  by letting  $\mathcal{C}(A)_{2p,q} \rightarrow \mathcal{B}(A)_{p,p+q}$  be the identity and  $\mathcal{C}(A)_{2p-1,q} \rightarrow \mathcal{B}(A)_{p,p+q-1}$  be  $Ns$ . This map commutes with the coboundary maps and gives a homomorphism.

Using the decreasing filtrations of  $\mathcal{C}(A)$  and  $\mathcal{B}(A)$  by columns and applying the comparison theorem of spectral sequences, we see that the above map induces an isomorphism in cohomology.

2.7. Consider the degree 2 map of  $\text{Tot } \mathfrak{B}(A)$  into itself given by shifting the double complex  $\mathfrak{B}(A)$  in a natural way in the upper right direction; more precisely the elements  $\mathfrak{B}(A)_{p,q}$  go to  $\mathfrak{B}(A)_{p+1,q+1}$ . Denote the image of this map by  $\text{Tot}[2]$  which is a subcomplex of  $\text{Tot } \mathfrak{B}(A)$ . It is obvious that  $\text{Tot } \mathfrak{B}(A)/\text{Tot}[2] = C^*(A, A^*)$ . Thus we get a short exact sequence

$$0 \rightarrow \text{Tot}[2] \rightarrow \text{Tot } \mathfrak{B}(A) \rightarrow C^*(A, A^*) \rightarrow 0.$$

Consequently by the snake lemma we obtain a long exact sequence:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^n(\text{Tot}[2]) \rightarrow H^n(\text{Tot } \mathfrak{B}(A)) \rightarrow H^n(A, A^*) \rightarrow \\ \rightarrow H^{n+1}(\text{Tot}[2]) \rightarrow H^{n+1}(\text{Tot } \mathfrak{B}(A)) \rightarrow H^{n+1}(A, A^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

By Theorem 2.4 and Proposition 2.6,  $H^n(\text{Tot } \mathfrak{B}(A)) = H_\lambda^n(A)$ . By construction  $H^n(\text{Tot}[2]) = H^{n-2}(\text{Tot } \mathfrak{B}(A)) = H_\lambda^{n-2}(A)$ . Thus the above long sequence turns out to be

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_\lambda^0(A) \rightarrow H^0(A, A^*) \rightarrow 0 \rightarrow H_\lambda^1(A) \rightarrow H^1(A, A^*) \rightarrow H_\lambda^0(A) \rightarrow \\ \rightarrow H_\lambda^2(A) \rightarrow H^2(A, A^*) \rightarrow \dots \rightarrow \\ \rightarrow H_\lambda^{n-2}(A) \rightarrow H_\lambda^n(A) \rightarrow H^n(A, A^*) \rightarrow \\ \rightarrow H_\lambda^{n-1}(A) \rightarrow H_\lambda^{n+1}(A) \rightarrow H^{n+1}(A, A^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Denote by  $S$  the map  $H_\lambda^{n-2}(A) \rightarrow H_\lambda^n(A)$  induced from the shifting. The map  $H_\lambda^n(A) \rightarrow H^n(A, A^*)$ , which will be denoted by  $I$ , in the above long exact sequence is nothing but the one induced from the canonical inclusion  $C_\lambda^*(A) \rightarrow C^*(A, A^*)$ . Moreover the connecting map  $H^n(A, A^*) \rightarrow H_\lambda^{n-1}(A)$  combined with  $I$  is just the map  $B$  given in 2.5. We use the same letter  $B$  to denote the connecting homomorphism.

Summarizing these observations, we get;

2.8. Theorem ([3],[8]). For a unital associative algebra  $A$ , There exists a long exact sequence:

$$\dots \rightarrow H_{\lambda}^n(A) \xrightarrow{S} H_{\lambda}^{n+2}(A) \xrightarrow{I} H^{n+2}(A, A^*) \xrightarrow{B} H_{\lambda}^{n+1}(A) \rightarrow \dots$$

2.9. Corollary. If  $H^n(A, A^*) = 0$  for  $n \geq n_0$ , then

$$H_{\lambda}^{n_0-1}(A) \cong H_{\lambda}^{n_0+1}(A) \cong \dots, \text{ and } H_{\lambda}^{n_0}(A) \cong H_{\lambda}^{n_0+2}(A) \cong \dots$$

2.10. Example. We give an example to which Corollary 2.9 is applied.

Consider  $A = M_2(\mathbb{C})$ . It is known that  $H^n(A, A^*) = 0$  for  $n \geq 1$ . So, to compute cyclic cohomology it suffices to know  $H_{\lambda}^0(A)$ . By definition,  $H_{\lambda}^0(A)$  is the space of traces on  $A$ , hence in our case  $H_{\lambda}^0(A) \cong \mathbb{C}$ , and the generator is the canonical trace. Therefore

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\cong H_{\lambda}^0(A) \cong H_{\lambda}^2(A) \cong \dots, \text{ and} \\ 0 &= H_{\lambda}^1(A) \cong H_{\lambda}^3(A) \cong \dots \end{aligned}$$

In general, for  $M_n(\mathbb{C})$  the computation is similar.

2.11. As we have seen, the definition of  $H_{\lambda}^*(A)$  itself is quite natural and simple. However, explicit computation for a given algebra by using the cochain complex  $C_{\lambda}^*(\cdot)$  is another story. It is something like trying to compute the singular cohomology groups for a given topological space: it is virtually impossible, except for certain simple cases like  $\mathbb{C}$ . Thus to carry on computations, we need some tools.

Let us go back to the double complex  $\mathfrak{B}(A)$ . The decreasing filtration of  $\mathfrak{B}(A)$  by columns gives the following result.

2.12. Theorem. There exists a spectral sequence abutting to  $H_{\lambda}^n(A)$  with  $E_1^{p,q} = H^{q-p}(A, A^*)$  and where  $d_1: E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p-1,q}$  is given by  $I \cdot B$ .

2.13. Example. We consider an example to which Theorem 2.12 may be applied.

First, we review how to compute Hochschild cohomology. An algebra  $A$  is, in a canonical way, a module over the enveloping algebra  $A^e = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{C}} A^{\text{opp}}$  of  $A$ . Take a finitely generated projective resolution  $(M_n)_{n \geq 0}$  of  $A$ :

$$0 \leftarrow A \leftarrow M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \dots$$

Then the cohomology of the cochain complex

$$\text{Hom}_{A^e}(M_0, A^*) \rightarrow \text{Hom}_{A^e}(M_1, A^*) \rightarrow \dots$$

is the Hochschild cohomology of  $A$  with coefficient  $A^*$ . If we take the standard resolution where  $M_n = A^{\otimes n}$ , the associated cochain complex is nothing but  $\{C^*(A, A^*), b\}$ .

Let us consider a truncated polynomial ring  $A = \mathbb{C}[x]/(x^n)$ . Then  $A^e = \mathbb{C}[x, y]/(x^n, y^n)$ . As a projective resolution we can take the following:

$$0 \leftarrow A \leftarrow A^e \xleftarrow{b_1} A^e \xleftarrow{b_2} A^e \xleftarrow{b_3} \dots,$$

where  $b_{2n+1}$  (resp.  $b_{2n}$ ) is the map given by multiplying  $x \cdot y$  (resp.  $x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$ ). From this resolution,  $H^0(A, A^*) \cong \mathbb{C}^n$  and  $H^j(A, A^*) \cong \mathbb{C}^{n-1}$  ( $j \geq 1$ ).

The second step is to compute

$$I \circ B: H^n(A, A^*) \rightarrow H^{n-1}(A, A^*).$$

A problem arises at this point. The map is given in terms of cochain complex  $C^*(A, A^*)$  associated the standard resolution. So our task is to compare our resolution with the standard one. More precisely, we have to construct  $A^e$ -module maps  $h, k$  so that we get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & A & \leftarrow & A^e & \leftarrow & A^e & \leftarrow & A^e & \leftarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & h \downarrow \uparrow k & & h \downarrow \uparrow k & & \\ 0 & \leftarrow & A & \leftarrow & A^e & \leftarrow & M_1 & \leftarrow & M_2 & \leftarrow & \dots \end{array}$$

Since  $(M_j)_j$  and  $A^e$  are projective  $A^e$ -modules, we know that there exist those maps. However we need the explicit description of the maps. Fortunately, in our case, we can manage to get the maps  $h, k$  explicitly to see that the map  $I \circ B: H^{2m+1}(A, A^*) \rightarrow H^{2m}(A, A^*)$  ( $m \geq 1$ ) is an

isomorphism,  $H^1(A, A^*) \rightarrow H^0(A, A^*)$  is injective, and that  $H^{2m}(A, A^*) \rightarrow H^{2m-1}(A, A^*)$  is a zero map. From this together with Theorem 2.12, we get

$$H_\lambda^{2m}(A) \cong \mathbb{C}^n, \quad H_\lambda^{2m+1}(A) = 0.$$

2.14. So far we have considered only finitedimensional algebras. We turn now to infinitedimensional algebras. However, if we deal with infinitedimensional algebras in purely algebraic way it will be rather difficult to compute such groups  $H_\lambda^*(A)$ . On the other hand, if the algebra has a topology which is compatible with the algebraic operations, then  $H_\lambda^*(A)$  becomes computable.

Let  $A$  be a topological algebra. By considering continuous cochains we will obtain the notion of continuous cyclic cohomology. In order to define continuous Hochschild cohomology, we must assume that  $A$  is a unital locally convex topological algebra. The reason is the following. In the construction of standard resolutions tensor products are involved, and there is no canonical topology on the algebraic tensor product of two topological algebras  $A$  and  $B$ . If  $A$  and  $B$  are locally convex, so that their topology is given by a family of seminorms, then there exists a strongest locally convex topology on  $A \otimes B$ . With respect to this topology the completion of  $A \otimes B$  is denoted by  $\overline{A \otimes B}$  and is called the projective tensor product (see [15]). Thus for a locally convex algebra we get a welldefined standard resolution.

2.15. Example. Consider the algebra  $C(X)$  of continuous  $\mathbb{C}$ -valued functions on a compact Hausdorff space with topology given by the norm  $\|f\| = \max_x |f(x)|$ . It is known that  $H^n(C(X), C(X)^*) = 0$  for  $n \geq 1$  ([7]). From this together with the long exact sequence, which is valid also in a topological setting, we have the following result.

Proposition. We have that (1)  $H_\lambda^0(C(X)) = \{ \text{Radon measures on } X \}$ ; (2)  $H_\lambda^0(C(X)) = H_\lambda^2(C(X)) = \dots$ ; and (3)  $H_\lambda^1(C(X)) = H_\lambda^3(C(X)) = \dots = 0$ .

Thus Radon measures are the only interesting cocycles.

2.16. Let  $X$  be a possibly noncompact, paracompact  $C^\infty$ -manifold. Then the space  $C^\infty(X)$  of  $C^\infty$ -functions is a unital Frechet algebra. In this case, we have other interesting cocycles in addition to Radon measures. A closed  $p$ -current  $C$  with compact support on  $X$  gives rise to a cyclic cocycle  $\varphi_C$  by

$$\varphi_C(f^0, \dots, f^p) = \langle C, f^0 df^1 df^2 \dots df^p \rangle \quad \text{for } f^i \in C^\infty(X).$$

Actually we have the following result.

Theorem ([3],[16]). (1)  $H^n(C^\infty(X), C^\infty(X)^*) = \{ \text{n-current with compact support} \}$ , (2)  $D = I \circ B: H^n(C^\infty(X), C^\infty(X)^*) \rightarrow H^{n-1}(C^\infty(X), C^\infty(X)^*)$  is the deRham boundary map for currents, (3)  $H_\lambda^n(C^\infty(X)) = \{ \text{closed n-current} \} \oplus H_{n-2}(X, \mathbb{C}) \oplus H_{n-4}(X, \mathbb{C}) \oplus \dots$ , and consequently (4) for  $n > \dim X$ ,  $H^n(C^\infty(X)) = H_{n-2}(X, \mathbb{C}) \oplus H_{n-4}(X, \mathbb{C}) \oplus \dots$ .

The proof is based on a special projective resolution.

2.17. Motivated by this theorem we give the following definition.

Definition ([14]). For a unital algebra  $A$ , the cohomology of the cochain complex  $\{ H^*(A, A^*), I \circ B \}$  is called the de Rham cohomology of  $A$ .

2.18. We now briefly describe an important algebraic operation on cyclic cohomology. Let  $A, B$  be two algebras, not necessarily unital. Then there exists a map

$$H_\lambda^m(A) \boxtimes H_\lambda^n(B) \rightarrow H_\lambda^{m+n}(A \boxtimes B).$$

The construction and the well-definedness of this map involve an interpretation of cyclic cocycles as graded traces on a differential graded algebra. This requires quite lot of computation, and we refer to [3]. The image of  $\omega \boxtimes \eta$  in the righthand side is denoted by  $\omega \# \eta$ .

As a special case if we take  $B = \mathbb{C}$ , we get a map

$$H_\lambda^m(A) \boxtimes H_\lambda^n(\mathbb{C}) \rightarrow H_\lambda^{m+n}(A \boxtimes \mathbb{C}).$$

As we have seen in 1.4,  $H^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ . So, choosing the generator  $\sigma$  of

$H^2(\mathbb{C})$  so that  $\sigma(1,1,1) = 2\pi i$ , we get a map

$$\begin{array}{ccc} H_\lambda^m(A) & \longrightarrow & H_\lambda^{m+2}(A) \\ \downarrow \omega & \longmapsto & \downarrow \omega \# \sigma \end{array}$$

Proposition ([3]). The map  $\omega \mapsto \omega \# \sigma$  given above coincides with the operator  $S$  up to constant multiple.

From now on,  $S$  denotes the map  $\omega \mapsto \omega \# \sigma$ .

2.19. The map  $S: H_\lambda^0(A) \rightarrow H_\lambda^2(A)$  is given by  $(S\tau)(x^0, x^1, x^2) = 2\pi i \tau(x^0, x^1, x^2)$ .

2.10. If we take  $B = M_n(\mathbb{C})$  and  $\text{Tr} \in H_\lambda^0(B)$ , we get a map

$$\begin{array}{ccc} H_\lambda^k(A) & \longrightarrow & H_\lambda^k(M_n(A)) \\ \downarrow \varphi & \longmapsto & \downarrow \varphi \# \text{Tr} \end{array}$$

The explicit expression of  $\varphi \# \text{Tr}$  is as follows. For  $x^0, \dots, x^k \in M_n(A)$ , we have

$$(\varphi \# \text{Tr})(x^0, \dots, x^k) = \sum_{j_0, \dots, j_k} \varphi(x_{j_0 j_1}^0, x_{j_1 j_2}^1, \dots, x_{j_k j_0}^k),$$

where  $x_{pq}^i$  is the  $(p,q)$ -component of  $x^i \in M_n(A)$ .

### 3. Relations with K-theory

3.1. The reader may be wondering why we do want to compute this often difficult object  $H_\lambda^*(A)$ . The answer comes in part from its relation to K-theory.

Let  $A$  be a unital algebra. Its algebraic K-group is defined as follows. The isomorphic classes of finitely generated projective  $A$ -modules form a semi-group with respect to direct sum. The Grothendieck group generated by this semi-group is denoted by  $K_0^{\text{alg}}(A)$  and is called the algebraic  $K_0$ -group of  $A$ .

For Example 2.15,  $K_0^{\text{alg}}(C(X)) = K^0(X)$ .

Now let  $P$  be a finitely generated projective  $A$ -module. Then for some integer  $n$ ,  $P$  is a direct summand of  $A^n = A \oplus A \oplus \dots \oplus A$ . Therefore the projection from  $A^n$  onto  $P$  is defined. With respect to canonical



base for  $A^n$ , this projection is given by an idempotent  $e \in M_n(A)$ . Let  $e \in M_n(A)$ ,  $e' \in M_{n'}(A)$  be idempotents. We say that  $e$  and  $e'$  are equivalent if in a bigger matrix algebra  $M_m(A)$ ,  $m \geq n, n'$ , there exists an invertible element  $g$  such that

$$\begin{pmatrix} e' \\ 0 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} g^{-1}.$$

It can be easily checked that if  $e$  and  $e'$  correspond to  $P$  and  $P'$  respectively, then  $P$  and  $P'$  are isomorphic if and only if  $e$  and  $e'$  are equivalent.

Now  $K_0^{\text{alg}}(A)$  is described as follows. Denote by  $[e]$  the equivalence class of an idempotent  $e$ . Consider formal difference  $[e] - [f]$  of the equivalence classes, and regard two such formal differences  $[e] - [f]$  and  $[e'] - [f']$  are equivalent if for some  $m$ ,

$$\begin{pmatrix} e & & \\ & f' & \\ & & I_m \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} e' & & \\ & f & \\ & & I_m \end{pmatrix}$$

are equivalent. The group  $K_0^{\text{alg}}(A)$  is the set of formal differences modulo the equality given above.

The relationship between  $H_\lambda^*(A)$  and  $K_0^{\text{alg}}(A)$  is stated as follows.

3.2. Proposition ([3]). (1) The following formula defines a bilinear map  $K_0^{\text{alg}}(A) \times H_\lambda^{2m}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\langle [e], [\varphi] \rangle = (2\pi i)^{-m} m!^{-1} (\varphi \# \text{Tr})(e, e, \dots, e).$$

(2) The equality  $\langle [e], S[\varphi] \rangle = \langle [e], [\varphi] \rangle$  holds.

3.3. Remark. The reader may be worried by the above formula, for at first glance  $(\varphi \# \text{Tr})(e, \dots, e)$  does not look linear in  $e$ . However, using the definitions of the sum in  $K_0^{\text{alg}}$  and the cochain  $\varphi \# \text{Tr}$ , the value  $(\varphi \# \text{Tr})(e, \dots, e)$  is in fact linear in  $[e] \in K_0^{\text{alg}}(A)$ .

3.4. Proposition 3.2 suggests the following:

Definition. The groups  $H^{\text{ev}}(A) = \varinjlim_S H_\lambda^{2m}(A)$  and  $H^{\text{odd}}(A) = \varinjlim_S H_\lambda^{2m+1}(A)$  are called the stabilized cyclic cohomology groups of  $A$ .

3.5. In order to get  $H^{\text{ev}}(A)$ ,  $H^{\text{odd}}(A)$ , we have to compute the map  $S: H^n(A) \rightarrow H^{n+2}(A)$ . Fortunately, we have the following assistance.

First, we modify the double complex  $\mathcal{B}(A)$ . Put  $C_{p,q} = C^{q-p}(A, A^*)$  for  $q \geq p$ , not necessarily positive. As in  $\mathcal{B}(A)$ , co-boundary operators are defined.

Theorem ([3]). (1) The total cohomology of the double complex  $C = (C_{p,q})$  is given by

$$H^n(C) \cong H^{\text{ev}}(A) \quad \text{if } n \in \mathbf{Z} \text{ is even,}$$

$$H^n(C) \cong H^{\text{odd}}(A) \quad \text{if } n \in \mathbf{Z} \text{ is odd.}$$

(2) There exists a convergent spectral sequence  $\{E_r^{p,q}\}$  associated to  $C$ , where  $E_1$  term is given by  $E_1^{p,q} = H^{q-p}(A, A^*)$ , and  $d_1: E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$  is  $I \circ B$ .

3.6. Let us consider again Example 2.13. As we have seen there, the cochain complex  $\{H^*(A, A^*), I \circ B\}$  is acyclic except  $* = 0$ . Therefore by Theorem 3.5,  $H^{\text{ev}}(A) \cong \mathbb{C}$  and  $H^{\text{odd}}(A) = 0$ . We want to determine the generator of  $H^{\text{ev}}(A)$ . Let  $\tau \in Z^0(\mathbb{C}[x]/(x^n))$  be  $\tau(f) = f(0)$ . The class of the unit  $1 \in \mathbb{C}[x]/(x^n)$  represents a class in  $K_0^{\text{alg}}(A)$ . Obviously,  $\tau(1) \neq 0$ . Therefore by Proposition 3.2 we see that  $S^n \tau \neq 0$  for any  $n$ . Thus  $\tau$  is a generator of  $H^{\text{ev}}(A)$ . The fact that  $\tau(1) \neq 0$  tells us also that the class of unit in  $K_0^{\text{alg}}(A)$  is not a torsion element, in particular it is nonzero.

For an  $f \in \mathbb{C}[x]$ , the cyclic cohomologies of  $\mathbb{C}[x]/(f)$  are given as follows.

Theorem ([9]). Let  $n$  be the degree of  $f$ , let  $m$  be the number of distinct roots of  $f$ , and let  $A = \mathbb{C}[x]/(f)$ . Then,

$$(1) H^0(A, A^*) \cong \mathbb{C}^n, H^j(A, A^*) \cong \mathbb{C}^{n-m} \quad \text{for } j \geq 1,$$

$$(2) H_\lambda^{2j}(A) \cong \mathbb{C}^n, H_\lambda^{2j+1}(A) = 0, \text{ and}$$

$$(3) H^{\text{ev}}(A) \cong \mathbb{C}^m, H^{\text{odd}}(A) = 0, \text{ moreover the generators are those } 0\text{-cocycles evaluating at the roots of } f.$$

3.7. It seems interesting to get a several variable version of the

above theorem: especially to determine the behaviour of the cyclic cohomology and the Hochschild cohomology according to the shape of the singularities of the variety determined by an ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

3.8. Consider Example 2.16. In this case the operator  $S: H_\lambda^n(C^\infty(X)) \rightarrow H_\lambda^{n+2}(C^\infty(X))$  is nothing but the map sending a closed  $n$ -current into its homology class and the identity on  $H_{n-2}(X, \mathbb{C}) \oplus \dots$ . Thus

$$H^{\text{ev}}(C^\infty(X)) \cong \bigoplus_n H_{2n}(X, \mathbb{C}),$$

$$H^{\text{odd}}(C^\infty(X)) \cong \bigoplus_n H_{2n+1}(X, \mathbb{C}).$$

#### 4. Noncommutative differential topology

4.1. In the preceding section we considered a pairing between  $K_0^{\text{alg}}$  and cyclic cohomology  $H_\lambda^{2m}$ . Although a nontrivial pairing between  $K_1^{\text{alg}}$  and  $H_\lambda^{2m+1}$  also exists, this may not be meaningful in the following sense. Due to the existence of the "periodicity operator"  $S$ , the cyclic cohomology may be regarded as a cohomology theory of period 2. Thus it becomes important to consider the stabilized cyclic cohomology, which has two groups  $H^{\text{ev}}$  and  $H^{\text{odd}}$ . On the other hand, there does not seem to exist a "periodicity operator" in the algebraic  $K$ -theory. This seems to suggest that the setting for cyclic cohomology should not be purely algebraic: in particular that we should look for a pairing with topological  $K$ -theory.

4.2. For a Banach algebra  $A$ ,  $K_0^{\text{top}}(A)$  is defined to be identical with  $K_0^{\text{alg}}(A)$ . Then the topological  $K_1$  is defined as follows.

The group  $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$  is a topological group in an obvious way. Put

$$K_1^{\text{top}}(A) = GL(A)/GL_0(A),$$

where  $GL_0(A)$  is the connected component of the neutral element.

For a non unital  $A$ , the groups  $K_*^{\text{top}}(A)$  is defined to be the

kernel of the map  $\pi_*: K_*^{\text{top}}(\tilde{A}) \rightarrow K_*^{\text{top}}(\mathbb{C})$ , where  $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$  is the  $A$  with unit added, and  $\pi$  is the canonical map from  $\tilde{A}$  onto  $\tilde{A}/A = \mathbb{C}$ .

The groups  $K_0^{\text{top}}(A)$  and  $K_1^{\text{top}}(A)$  are related: namely,

$$K_0^{\text{top}}(C_0(\mathbb{R}, A)) \cong K_1^{\text{top}}(A).$$

The Bott periodicity **tells** us that if we put  $K_n^{\text{top}}(A) = K_0^{\text{top}}(C_0(\mathbb{R}, A))$ , then  $K_n^{\text{top}}(A) \cong K_{n+2}^{\text{top}}(A)$ . Thus we have two groups associated to  $A$ , i.e.,  $K_0^{\text{top}}(A)$  and  $K_1^{\text{top}}(A)$ .

At this stage the reader may consider a pairing between  $K_1^{\text{top}}$  and odd-dimensional cyclic cohomology.

In deed we have the following:

Proposition. (1) The following formula defines a bilinear pairing between  $K_1^{\text{top}}(A)$  and  $H_\lambda^{2m-1}(A)$ :

$$\langle [u], [\varphi] \rangle = 1 / ((2\pi i)^m ((m-1)/2) \cdots (1/2)) \times (\varphi \# \text{Tr})(u^{-1-1, u-1}, \dots, u^{-1-1, u-1}).$$

(2) The equality  $\langle [u], [\varphi] \rangle = \langle [u], S[\varphi] \rangle$  holds. Consequently we get a pairing between  $K_1^{\text{top}}(A)$  and  $H^{\text{odd}}(A)$ .

The proof is the same as in the case of the algebraic  $K_1$  (see [3]).

4.3. In 4.2 we obtained a pairing between the (continuous) cyclic cohomology and the topological  $K$ -theory for a Banach algebra. However, in the important example which we can compute, this pairing degenerates. Let  $A = C(X)$  for a compact Hausdorff space  $X$ . Then Swan's theorem says that  $K_*^{\text{top}}(A) \cong K^*(X)$ . On the other hand as we have seen in 2.15,  $H^{\text{odd}}(A) = 0$ . Thus in this case the pairing detects nothing. We suspect that this pairing always degenerates for  $C^*$ -algebras.

4.4. Theorem 2.16 says that the cyclic cohomology of  $C^\infty(X)$  recovers the homology of the space  $X$ , which is a topological invariant. At this point the reader may wonder what  $K_0^{\text{top}}(C^\infty(X))$  might be, for the Fréchet algebra  $C^\infty(X)$ . For a compact manifold  $X$  it is known that

$K_0^{\text{alg}}(C^\infty(X)) \cong K_0^{\text{alg}}(C(X)) \cong K^0(X)$ , and the first isomorphism is induced from the natural inclusion of  $C^\infty(X)$  into  $C(X)$ . So we can define  $K_0^{\text{top}}(C^\infty(X)) = K_0^{\text{alg}}(C^\infty(X))$ .

For a Fréchet algebra  $A$ , its topological  $K_1$  group is defined in [14]. For  $A = C^\infty(X)$ , we have

$$K_1^{\text{top}}(C^\infty(X)) \cong K_1^{\text{top}}(C(X)) \cong K^1(X).$$

The pairing given in 4.2 is generalized to the case of Fréchet algebras. In the case of  $A = C^\infty(X)$ , the pairing

$$K_*^{\text{top}}(C^\infty(X)) \times H^*(C^\infty(X)) \rightarrow \mathbb{T}$$

is nothing but the evaluation on a homology class of the image under the Chern character  $K^*(X) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$  of a class  $e \in K^*(X)$ . In particular, for a  $C^\infty$ -vector bundle  $E$  on a  $2m$ -dimensional closed oriented manifold  $X$ , we have

$$\text{Ch}([E])[X] = \langle [e], [\varphi] \rangle,$$

where  $e$  is the idempotent  $e \in M_k(C^\infty(X))$  corresponding to  $E$ , and  $[\varphi]$  is the cyclic  $2m$ -cocycle

$$\varphi(f^0, \dots, f^{2m}) = \int f^0 df^1 \dots df^{2m}$$

associated to the orientation.

4.5. We have just arrived at the heart of the noncommutative differential topology.

The underlying philosophy of the (ordinary) differential topology is that in order to get topological information about a space a  $C^\infty$ -structure is used.

In the noncommutative differential topology, the space is replaced by a  $C^*$ -algebra, that is a norm-closed  $*$ -subalgebra of the algebra of all bounded operators on a Hilbert space. The  $C^\infty$ -structure is replaced by a dense Fréchet subalgebra having a certain property: this property is referred as stability under holomorphic functional calculus (see [4]). A typical example is  $C^\infty(X)$  as a dense subalgebra of  $C(X)$ . A Lie group  $G$  acting on a  $C^*$ -algebra  $A$  is another example. The subalgebra  $A^\infty$  of all  $C$ -elements with respect to the action has

the required property (see, for instance, [2]).

When a subalgebra  $\mathfrak{A}$  of a C\*-algebra  $A$  has stability under holomorphic functional calculus, then  $K_*^{\text{top}}(\mathfrak{A}) = K_*^{\text{top}}(A)$ . Thus we can get topological information about  $A$ , by choosing a suitable "smooth structure"  $\mathfrak{A}$ , and using cyclic cohomology.

A noncommutative version of the Chern-Weil theory is presented in [1] and [3]. Consider  $S^1$  as the subset  $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  of  $\mathbb{C}$ . On a Hilbert space  $L^2(S^1)$ , for a given  $\theta \in [0,1]$  we have two canonical unitary operators  $U$  and  $V$ ;  $U$  is the multiplication by the canonical coordinate function  $S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  and  $V$  is induced from the rotation of  $S^1$  by angle  $2\pi\theta$ . The operators  $U$  and  $V$  satisfy the equality

$$VU = e^{2\pi i\theta} UV,$$

and generate a C\*-algebra  $A_\theta$  in  $B(L^2(S^1))$ . There exists an action of  $\mathbb{T}^2$  on  $A_\theta$ , and we get a  $C^\infty$ -structure  $A_\theta^\infty$ . A projective module over  $A_\theta^\infty$  is an analogue of a  $C^\infty$ -vector bundle, and noncommutative analogue of connection, curvature and so on can be defined. In [1] and [3], the pairing between  $K_0^{\text{top}}(A_\theta^\infty)$  and  $H^{\text{ev}}(A_\theta^\infty)$  is computed in terms of connections and curvature.

## 5. Recent developments

5.1. The Hochschild cohomology and the cyclic cohomology of  $A_\theta^\infty$  are completely determined in [3]. The algebras  $A_\theta^\infty$  are special cases of the so-called noncommutative tori. R. Nest determined the Hochschild cohomology and the cyclic cohomology of noncommutative tori in [13].

5.2. The existence of a Farrel-Hsiang type exact sequence for the cyclic cohomology of a twisted group ring  $A[\mathbb{Z}]$  for an action of  $\mathbb{Z}$  on an algebra  $A$  is shown by Nest in [14]. He deals also with actions on Fréchet algebras to get a similar exact sequence.

5.3. In [6], for a smooth action  $\alpha$  of  $\mathbb{R}$  on a Fréchet algebra  $\mathfrak{A}$  the smooth crossed product  $\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$  is considered, and it is shown that

there exist isomorphisms

$$H^{\text{ev}}(\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) \cong H^{\text{odd}}(\mathcal{A}),$$

$$H^{\text{odd}}(\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) \cong H^{\text{ev}}(\mathcal{A}).$$

5.4. As a special case of 5.3, the Schwartz spaces of simply connected nilpotent Lie groups are studied in [12], where the generator of the stabilized cyclic cohomology is explicitly given in terms of geometry.

5.5. For a compact Lie group  $G$ , the convolution algebra  $C^{\infty}(G)$  is a natural object to study. In [11] it is shown that  $H^{\text{ev}}(C^{\infty}(G))$  is generated by the characters, and that  $H^{\text{odd}}(C^{\infty}(G)) = 0$ .

5.6. The cyclic cohomology for the Schwartz space of a real reductive Lie group is studied in [16].

5.7. In April 1987, a workshop on K-homology and cyclic homology was held at the University of Warwick. The impression there was that the theory is at a new stage of development. Up until now, to explicitly compute the cyclic cohomology for a given algebra and to describe the generators was important in itself. Now, fundamental properties are understood fairly well, and we have many computed examples in hand. Thus it is now time to relate cyclic theory to other branches of mathematics. Many people are now working in this direction. For instance, mathematical physics may be the next battle field. As A. Connes mentioned in [5], the noncommutative differential topology might be suitable machinery to analyze noncommutative phenomena arising from physics; cyclic theory may play an important role there.

## 6. Epilogue

Consider an action  $\alpha$  of a discrete group  $G$  on the circle as orientation preserving  $C^2$ -diffeomorphisms. We wish to use cyclic cohomology to study the K-theory of the reduced crossed product  $C^*$ -algebra

$C(S^1)_{X_\alpha}G$ .

The Thurston cocycle, which is a group 2-cocycle with values in the space of differential 1-forms on  $S^1$ , gives rise to a cyclic 2-cocycle  $\tau_\alpha$  on a convolution algebra  $C_c^2(S^1 \times G)$  (see, for the details, [4]). The subalgebra  $C_c^2(S^1 \times G)$  is dense in the reduced crossed product, but it does not have stability under holomorphic functional calculus. It is important to point out that the cocycle  $\tau_\alpha$  does not have any extension to the whole  $C^*$ -algebra  $C(S^1)_{X_\alpha}G$ . Thus as a cocycle on  $C(S^1)_{X_\alpha}G$ , it is densely defined and unbounded. In [4] (see also [10]) it is shown that  $\tau_\alpha$  has an extension whose domain  $D(\tau_\alpha)$  has stability under holomorphic functional calculus. Hence  $\tau_\alpha$  gives rise to an additive map

$$GV_\alpha: K_0^{\text{top}}(C(S^1)_{X_\alpha}G) = K_0^{\text{top}}(D(\tau_\alpha)) \rightarrow \mathbb{C}$$

by Proposition 3.2.

It is shown in [10] that the map  $GV_\alpha$  is stable under  $C^1$ -conjugation. If two actions  $\alpha, \beta$  are  $C^2$ -conjugate, then a canonical isomorphism  $C(S^1)_{X_\alpha}G \cong C(S^1)_{X_\beta}G$  maps  $D(\tau_\alpha)$  isomorphically onto  $D(\tau_\beta)$ . When  $\alpha$  and  $\beta$  are only  $C^1$ -conjugate, even though the  $C^*$ -algebras are isomorphic, the domains  $D(\tau_\alpha)$  and  $D(\tau_\beta)$  may not be related to each other. Therefore in this case, in order to compare  $\tau_\alpha$  and  $\tau_\beta$  we have to restrict them to a smaller subalgebra  $D \subseteq D(\tau_\alpha) \cap D(\tau_\beta)$  with stability under holomorphic functional calculus, and then they can be shown to be cohomologous in  $H^2(D)$ . From this, we get  $GV_\alpha = GV_\beta$ .

Besides the above example, there are many examples of  $C^*$ -algebras with densely defined cyclic cocycles. Some of them come from geometry or physics. For instance, a vector field on a closed manifold  $V$  and a measure on  $V$  invariant under the associated flow gives rise to a densely defined cyclic 1-cocycle on the  $C^*$ -algebra  $C(V)$  (see 1.5).

In order to describe cyclic cohomology in a categorical way we started this note by defining it for a given algebra. However, as the above examples illustrate, quite often we are a priori given a cyclic cocycle defined only on a dense subalgebra of a  $C^*$ -algebra, and it turns out that we only have to do analysis on that or some other dense subalgebra which has stability under holomorphic functional calculus.



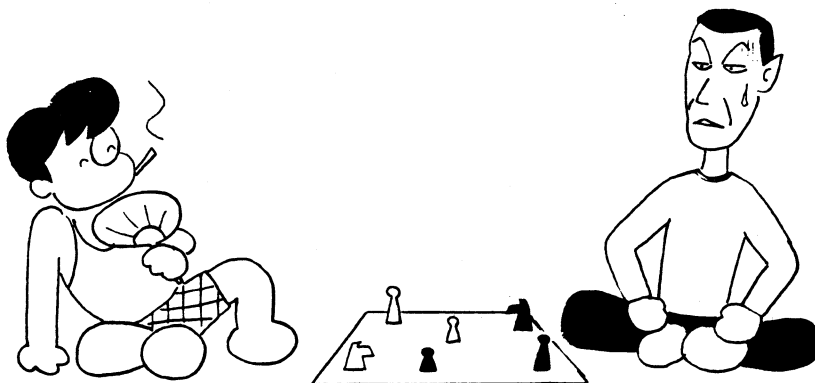
As these observations above suggest, in applying cyclic theory it may be more important to choose cyclic cocycles first rather than to choose algebras. This point of view is the underlying philosophy of [4], and will be a principle in the development of cyclic theory in the future.

### References

1. A. Connes,  $C^*$ -algebras et geometrie differentielle, C.R.Acad.Sci. Paris 290(1980).
2. \_\_\_\_\_, An analogue of the Thom isomorphism for crossed product of a  $C^*$ -algebra by an action of  $\mathbb{R}$ , Adv.Math.39(1981), 31-55.
3. \_\_\_\_\_, Non commutative differential geometry, Ch. II de Rham homology and non commutative algebra, Publ.IHES 62(1985),310-360.
4. \_\_\_\_\_, Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation, Geometric Methods in Operator Algebras (Editors H. Araki and E.G. Effros), Longman, London, 1986, 52-144.
5. \_\_\_\_\_, Cyclic cohomology and non commutative differential geometry, Lecture given at ICM 86.
6. G.A. Elliott, T. Natsume and R. Nest, Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed product, preprint, U. of Copenhagen, 1987.
7. B. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Memoirs of AMS,127(1972).
8. J.-L. Loday and D. Quillen, Cyclic homology and the Lie algebra cohomology of matrices, Comment.Math.Helv. 59(1984), 565-591.
9. T. Masuda and T. Natsume, Cyclic cohomology for certain Affine schemes, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. 21(1985), 1261-1279.
10. T. Natsume, The  $C^1$ -invariance of the Godbillon-Vey map in the analytical K-theory, to appear in Canadian J.Math.
11. \_\_\_\_\_ and R. Nest, Cyclic cohomology for compact Lie groups and direct sum formula, in preparation.

12. T. Natsume and R. Nest, Fredholm modules over nilpotent Lie groups, in preparation.
13. R. Nest, Cyclic cohomology of noncommutative tori, to appear in Canadian J.Math.
14. \_\_\_\_\_, Cyclic cohomology of crossed products with  $\mathbb{Z}$ , to appear in J.Funct.Analysis.
15. A. Pietsch, Nuclear locally convex spaces, Springer.
16. A. Wasserman, in preparation.

(R9.7)



# Mandelbrot set, Julia set をパソコンで描く

東工大・理 増田一男

Mandelbrot set と Julia set は定義が簡単で、Basic の短いプログラムできれいな絵が描けます。しかし時間がかかります。N88 BASIC のプログラムの例をつくりました。Prog 1, 3, 4 です。(3は速い。) 描いた画面を保存したり、色を変えて楽しんだり、対称な図の時は半分だけ描いて時間を節約したりするのが長い Prog 2 です。なくてもよいのですが一度つくって save しておけば便利ですよ。[U], [P-R] にきれいな写真がごまかっています。数学的なことを [B], [S] から証明抜きで引用しましたので参照して下さい。[B] は複素力学系の survey で [S] も日本語での簡潔な survey です。

## §1. Mandelbrot set

Riemann 球面  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  から  $\bar{\mathbb{C}}$  への正則写像  $f(z)$  (実は分式になる) に対し

**Stable set**  $D_f := \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍で } \{f^n(z) \mid n \geq 0\} \text{ が同等連続}\}$

**Julia set**  $J_f := \bar{\mathbb{C}} \setminus D_f$  とおく

多項式  $f$  に対しては  $J_f$ : 連結  $\Leftrightarrow$  特異点  $z \neq \infty$  ( $f'(z) = 0$ )  
 $f^n(z) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )

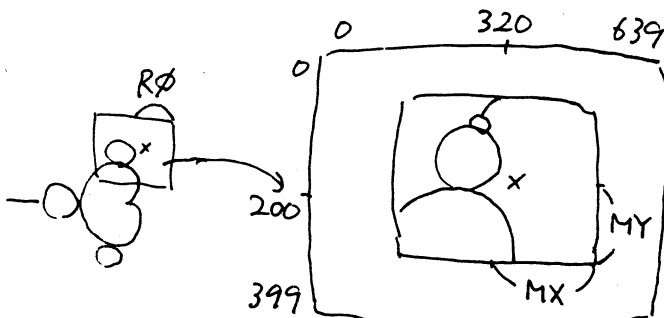
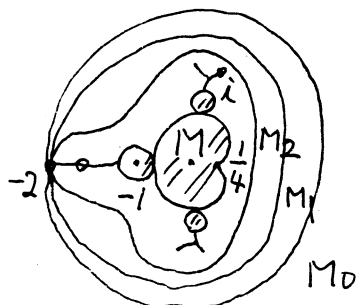
となる。( [B] Th 9.5 )  $z = z^2$  2次式  $f_c(z) = z^2 + c$  を考え

**Mandelbrot set**  $M := \{c \in \mathbb{C} \mid J_{z^2+c} \text{ が連結}\}$   
 $= \{c \in \mathbb{C} \mid f_c^n(0) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$   
 $= \{c \in \mathbb{C} \mid \{f_c^n(0) \mid n \geq 0\} \text{ 有界}\}$  とする。

$$(1) |c| > 2, |z| \geq |c| \Rightarrow f_c^n(z) \rightarrow \infty$$

$$(2) |c| \leq 2, |z| > 2 \Rightarrow f_c^n(z) \rightarrow \infty$$

∴  $M \subset \{z \mid |z| \leq 2\}$  2".  $M_k := \{c \mid |f_c^n(c)| \leq 2 \forall n < k, |f_c^k(c)| > 2\}$  とすれば  $M = M_\infty = \mathbb{C} \setminus \bigcup M_k$  2".



$M_k$  に  $k \bmod 6$  2"色をつけて描くのがプログラム41  
2".  $M = M_\infty$  は黒く2".

プログラム41

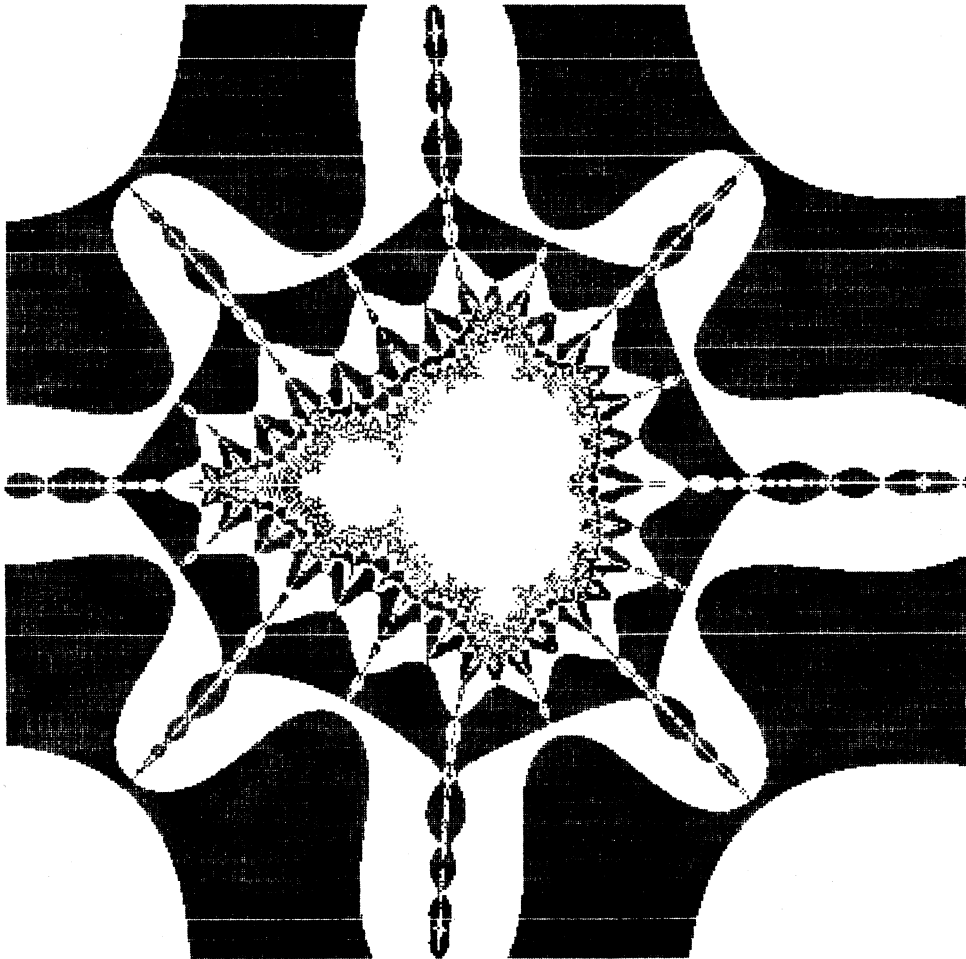
```

10 'MANDELBROT SET
20 CONSOLE 0,25,0,1:SCREEN 3,0,0,1
30 DEFDBL A,B,C,D,R,X,Y,Z
40 RR=4
50 INPUT"INPUT  A0, B0, R0 ";A0,B0,R0:CLS
60 INPUT"INPUT  N, MX, MY ( =< 319,199 ) ";N,MX,MY:CLS 3
70 R1=R0/MX:A1=-320*R1+A0:B1=200*R1+B0
80 I1=320-MX:I2=320+MX:J1=200-MY:J2=200+MY
90 FOR J=J1 TO J2
100 B=-J*R1+B1
110 FOR I=I1 TO I2
120 A=I*R1+A1
130 X=A:Y=B:XX=X*X:YY=Y*Y
140 FOR K=0 TO N
150 X1=X:X=XX-YY+A:Y=2*X1*Y+B:XX=X*X:YY=Y*Y
160 IF XX+YY>RR THEN PSET(I,J).(K MOD 6)+1:GOTO 180
170 NEXT K
180 NEXT I
190 PRINT J:NEXT J
200 END

```

解説:  $c = A + iB, z = x + iy$  とおいて  $f(z) = z' = x' + iy' = (x^2 - y^2 + A) + i(2xy + B)$  を 150 2"計算し, 160 2"  $|z'|^2 > 4$  の判定をします。RUN  2" INPUT A0, B0, R0? と表示されますから例えば 0, 0, 2

次に INPUT N, MX, MY ? に対し 40, 319, 199  $\square$  と  
 入力すれば C 内の  $Z = A\phi + iB\phi$  中心、横  $2 \cdot R\phi$ 、縦  $2 \cdot R\phi \cdot MY/MX$   
 の長方形の部分の  $M_{N+1}$  までは画面の (320, 200) 中心、横  
 $2 \cdot MX$  縦  $2 \cdot MY$  の長方形の部分に描かれます。上の例で  
 は M 全体が全画面に描かれますが、時間がかかります。  
 帰宅前に RUN しておけばよいでしょう。最初は  $MX = 32$   
 $MY = 20$  位の小さな図で様子を見るとよいです。  $R\phi$  を小さ  
 くすると拡大図が描けますが  $M = M_{\infty}$  への近似をよくす  
 る為には N を大きくしなければならぬので非常に時間が  
 かかります。出張前にかけておくともよいでしょう。30 を  
 削除すれば精度が落ちますが速くなります。M は右方  
 フラクタル的性質を持つ、こゝで、拡大を何度くり返しても  
 産産品と  $\infty$  と  $\infty$  がしつこく  $\infty$  かわれてきます。



前回は  $A\phi, B\phi, R\phi = -1.941, 0, 0.003$   $N, Mx, My = 100, 199, 199$   
 としたもので、全体像では見えなかつた塵埃のマンダラ  
 図です。カラーだときれいです。後の Prog 2 を追加する  
 と、 $M$  は  $X$  軸対称ですから時間が半分で済みますし、画面の  
 保存もできます。(Prog 2 を save しておいて CHAIN MERGE  
 を使うとよい。)

## §2. Julia set of $z^2 + c$

$f = P/Q$  (既約),  $\deg f := \max\{\deg P, \deg Q\} \geq 2$  とする。  
 $z$  を最小周期  $p$  の周期点とする。固有値  $\lambda := (f^p)'(z)$  に依  
 じて  $z$  を

$|\lambda| < 1$ : attractive  $|\lambda| = 1$ : indifferent  $|\lambda| > 1$ : repulsive

$\lambda = 0$ : super attr.  $|\lambda| = 1$   $\lambda = e^{2\pi i\theta}$   $\theta \in \mathbb{Q}$ : rationally ind.

と呼ぶ。  $\theta \notin \mathbb{Q}$ : irrationally incl.

(ただし  $\infty$  のときは  $\frac{1}{\circ}$  の座標で考える。)

### Julia set の基本的性質

- (1)  $\emptyset \neq J_f \text{ closed} \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ ,  $\#J_f = \infty$
- (2)  $\text{int } J_f \neq \emptyset \Rightarrow J_f = \bar{\mathbb{C}}$
- (3)  $J_f$ : completely invariant i.e.  $f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f)$
- (4)  $\forall z \in J_f$ ,  $J_f = \overline{\{f^{-n}(z) \mid n \geq 0\}}$  ([B] Cor 4.7)
- (5)  $J_f = \{\text{rep. 周期点}\}$
- (6)  $U$  open,  $U \cap J_f \neq \emptyset \Rightarrow \exists N > 0$   $f^N(U \cap J_f) = J_f$
- (7)  $\alpha$  が周期  $p$  の attractive periodic point のとき

**Attractive basin**  $A(\alpha) := \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid f^{np}(z) \rightarrow \alpha \ (n \rightarrow \infty)\}$  とおく

$A(\alpha) \subset D_f$ ,  $\partial A(\alpha) = J_f$  ([B] Prop 5.7)

$f$  は特異点 ( $\# \leq 2(d-1)$ ) を除けば loc diffeo 2"拡大 or 縮小  
 と考えられるので (3), (6) は  $J_f$  が fractal (自己相似的)  
 であることを示します。  $A(\alpha)$  は一般には連結とは限りま  
 せん。(なお  $\exists$  にでてくる (AB) は  $A(\alpha)$  の  $\alpha$  を含む連結成  
 分です。)

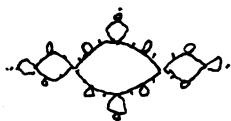
$J_f$  の例)



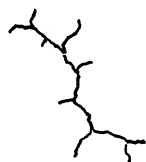
$f = z^2$



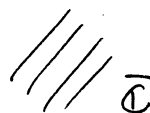
$f = z^2 - 2$



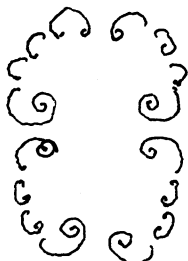
$f = z^2 - 1$



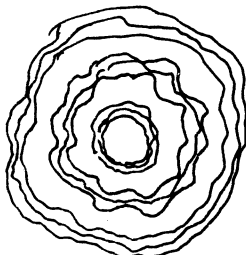
$f = z^2 + i$



$f = \left(\frac{z-2}{2}\right)^2$



$f = z^2 + 0.3$



$f = 68 \left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$

(center の 3 倍集命 X S) と homeo

かいたい

$f = z^2 - 0.74543 + 0.11301i$

さて (4), (5) より  $f$  の rep. 固定点  $z_0$  をとれば "backward orbit"  $O^-(z_0) := \{f^{-n}(z_0) \mid n \geq 0\} \cong J_f$  である。  $f = z^2 + c$  のとき  $z_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  ( $\text{Re} \geq 0$  の分岐) は  $c \neq \frac{1}{4}$  のとき rep. 固定点である。  $f^{-1}(z) = \sqrt{z-c}$  を用いて  $J_{z^2+c}$  を描くのが Prog 3 である。 [U] に 2 である Prog 4 である。 ( $c = \frac{1}{4}$  とき  $z_0 \in J_f$  である。 see §3 (4.1) )

7° □ 7" 7 4 3

```

10 'JULIA SET 1
20 CONSOLE 0,25,0,1:SCREEN 3,0,0,1
30 DEFDBL A,B,C,D,R,X,Y,Z
40 INPUT"INPUT CX, CY ";CX,CY:CLS
50 INPUT"INPUT X0, Y0, R0 ";X0,Y0,R0:CLS 3
60 XS=X0-R0:XE=X0+R0:YS=Y0-R0/1.6:YE=Y0+R0/1.6:D=319/R0
70 X=.25-CX:Y=-CY:GOSUB *SQ:X=X+.5
80 X=X-CX:Y=Y-CY:GOSUB *SQ
90 IF RND>.5 THEN X=-X:Y=-Y
100 IF (X<XS)+(X>XE)+(Y<YS)+(Y>YE) THEN GOTO 80
110 I=(X-XS)*D:J=(YE-Y)*D
120 IF INKEY$="s" THEN GOTO 40
130 IF POINT(I,J)=0 THEN PSET(I,J):GOTO 80 ELSE X=-X:Y=-Y
140 IF (X<XS)+(X>XE)+(Y<YS)+(Y>YE) THEN GOTO 80
150 I=(X-XS)*D:J=(YE-Y)*D
160 IF POINT(I,J)=0 THEN PSET(I,J):GOTO 80
170 X1=X:X=X*X-Y*Y+CX:Y=2*X1*Y+CY:GOTO 100
200 *SQ
210 R=.5*(SQR(X*X+Y*Y)-X)
220 IF Y=0 THEN Y=SQR(ABS(R)) ELSE Y=SGN(Y)*SQR(ABS(R))
230 X=SQR(ABS(R+X))
240 RETURN
    
```

解説:  $CX, CY, X\phi, Y\phi, R\phi$  を入力すると  $Jz^2 + CX + iCY$  の  $C$  内の  $X\phi + iY\phi$  中心、横  $2 \cdot R\phi$  縦  $2 \cdot R\phi / 1.6$  の長方形の部分  
を全画面に描きます。  $|C|^2 = CX^2 + CY^2 \leq 2$ .  $X\phi, Y\phi, R\phi =$   
 $0, 0, 2$  が適当です。 [P-R] に次の  $(CX, CY)$  の図がでてます。  
 $(0.31, 0.04)$   $(-0.11, 0.6557)$   $(-0.12, 0.74)$   $(0, 1)$   
 $(-0.194, 0.6557)$   $(-0.74543, 0.11301)$   $(-1.25, 0)$   
 $(-0.481762, -0.531657)$   $(-0.39054, -0.58679)$   
 $(-0.15652, -1.03225)$   $(0.11031, -0.67037)$   
 $(-0.27334, 0.00742)$  他の data は §4 参照

この Prog 3 では [P-R] のようにきれいに描けません。

$f^{-1}(z) = \sqrt{z-C}$  のどちらの分岐をとるか 90 度回転によ  
り決めていきます。  $\{f^{-n}(z)\}$  の分布にムラがあるので点があ  
み合ってきたら  $f$  で進み別の分岐へ移るようにしてあり  
ます。この Prog は時間がかからないのですが  $f^{-1}, f$  を次  
々合成する為には誤差が大きくなり、ある時から "不自然"  
な点を描きだします。  $\leftarrow S$  を押すと 40 に戻ります。

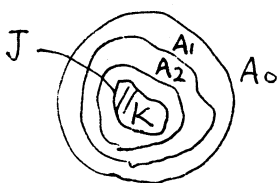
Mandelbrot set  $M$  の定義より  $M$  は  $C$  での  $Jz^2 + C$  は非連結  
であるが実は Cantor set (完全 ~~不~~ <sup>cpt</sup> 連結, 完全集合) になり、又  
 $M \supset \text{int } \textcircled{B} \ni C \neq 0$  に対し  $J$  は至る所接線をもたない  
Jordan curve になります。描くのが難しいわけですね。

次に (7) の  $J_f = \partial A(\infty)$  を用いて  $Jz^2 + C$  を描くのが Prog 4  
です。  $f_c(z) = z^2 + C$  に対し  $\alpha = \infty$  は  $\text{supp att}$  固定点で (7) より

$$A(\infty) = \{z \in \bar{C} \mid f_c^n(z) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}, J_f = \partial A(\infty) \quad \text{これが}$$

$$A_{k_i} = \{z \in \bar{C} \mid |f_c^n(z)| \leq 2 \quad \forall n \leq k, |f_c^k(z)| > 2\} \quad \text{とすると §1 (2) より}$$

$$A(\infty) = \bigcup A_{k_i} \quad (|C| \leq 2) \quad \text{です。}$$



Filled in Julia set  $K_f := \bar{C} \setminus A(\infty)$

$$= \{z \mid f_c^n(z) \rightarrow \infty\} = \{z \mid f_c^n \text{ 有界}\}$$

が黒く描かれます。  $J_f = \partial K_f = \partial A(\infty)$  だ

すが  $M$  は  $C$  のときは  $J_f = K_f$  となり



ind  $K_f = \emptyset$  です。この  $J$  は原点対称で  $c \in \mathbb{R}$  なら  $x$  軸と  $y$  軸対称ですから Prog 2 を使えば時間が  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  で済みます。

### プログラム 4

```
10 'JULIA SET 2
39 INPUT "INPUT CX, CY ";CX,CY:CLS
150 X1=X:X=XX-YY+CX:Y=2*X1*Y+CY:XX=X*X:YY=Y*Y
```

解説:  $M_k$  と  $A_k$  が似ているので Prog 1 に 39 を挿入し 150 を直せばよい。CX, CY, Aφ, Bφ, Rφ, N, MX, MY を入力すると  $Jz^2 + CX + iCY$  の  $A_{N+1}$  までが描かれます。Prog 3 と同じ  $C$  で描いて比べて下さい。まるで別物です。

### §3. Stable region

$$\varphi(z_0) = 0$$

$f$  の固定点  $z_0$  の近傍の正則座標変換  $\varphi$  で  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$  とするとき  $f \sim g$  とかく。  $\lambda = f'(z_0)$  とかくと ([B] 3章)

(1)  $\lambda = 0$ :  $\text{supp attr} \Rightarrow f \sim z^k \quad \exists k \geq 2 \quad z_0 \in D_f$

(2)  $0 < |\lambda| < 1$ :  $\text{attr} \Rightarrow f \sim \lambda z \quad z_0 \in D_f$

(3)  $|\lambda| > 1$ :  $\text{rep} \Rightarrow f \sim \lambda z \quad z_0 \in J_f$

(4)  $|\lambda| = 1$ :  $\text{ind} \Rightarrow f \sim \lambda z \Leftrightarrow z_0 \in D_f$

(4.1)  $\lambda = e^{2\pi i \theta}, \theta \in \mathbb{Q}$ :  $\text{rat ind} \Rightarrow z_0 \in J_f$  (deg  $f \geq 2$ )

$\theta = \frac{m}{n}$  既約なら  $f^n = z$  or  $f \sim \lambda z (1 + z^{kn}) \quad \exists k \geq 1$  ( $\varphi$ : homeo)

(4.2)  $\lambda = e^{2\pi i \theta}, \theta \notin \mathbb{Q}$ :  $\text{irr ind}$  のとき  $f \sim \lambda z$ ,  $\lambda z$  に応じて

$z_0$  を Siegel point, Cremer point と呼ぶ。

(5)  $\exists c, \exists a > 0 \quad | \theta - \frac{p}{q} | > \frac{c}{q^a} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Siegel pt}$

(5) を満たす  $\theta \in [0, 1]$  の測度 = 1。代数的無理数は

(5) を満たす。

(C) 無限個の  $n$  に対し  $| \lambda^n - 1 | < (\frac{1}{n})^{d^n - 1} \Rightarrow d$ -次の項式の Cremer pt

(C) を満たす  $\theta$  は dense

$f(z) = \lambda z + z^2$  の固定点  $z_0 = 0$  に対し  $f'(0) = \lambda z$ 。  $\lambda$  の微動で (5), (C) が変わるわけです。 さて  $D_f$  の連結成分  $D$  を  $f$  の stable region と呼ぶと、  $f(D)$  も又 st reg で  $f: D \rightarrow f(D)$

は branched covering になる。特異点を含まない  $D$  は *diffeo.*

Th (Sullivan)  $\forall$  stable reg  $D$  は preperiodic (ie.  $\exists N \geq 0, \exists p \geq 1$   
 $f^N(D) = D', f^p(D') = D'$ )

Th (Sullivan) periodic stable reg  $D$  (Sullivan domain と呼ぶ) は  
 次のどれかになる。(周期  $p$ ) ([B] Th 7.7)

(AB) attractive basin:  $\exists$  周期  $p$  の attr per pt  $z \in D$   
 $D$  上 広義一様に  $f^{np}(z) \rightarrow z$  ( $n \rightarrow \infty$ )

(PB) parabolic basin:  $\exists$  rat ind per pt  $z \in D, f^p(z) = z, (f^p)'(z) = 1$   
 $D$  上 " " " "

(SD) Siegel disk:  $\exists$  等角写像  $\varphi: D \rightarrow D_1 = \{z \mid |z| < 1\}$ .  $\exists \theta$  無  
 により  $f^p \sim e^{2\pi i \theta} z$  on  $D_1$  (ie.  $\varphi f^p \varphi^{-1} = e^{2\pi i \theta} z$ )  
 このとき  $\varphi^{-1}(0) \in D$  は  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$  の irr ind per pt

(HR) Herman ring:  $0 < r < 1, \exists$  等角写像  $\varphi: D \rightarrow R_r =$   
 $\{z \mid r < |z| < 1\}, \exists \theta$  無. により  $f^p \sim e^{2\pi i \theta} z$  on  $R_r$

又. (AB). (PB) の  $D$  の cycle  $D \cup f(D) \cup \dots \cup f^{p-1}(D) \Rightarrow \exists$  特異点  
 (SD). (HR) の  $D$  の  $\partial D$  &  $U^*$  Cremer pt には特異点の forward  
 orbit が集積してゐる。

これより、特異点の orbit を考察すると  $D$  の情報が得られる。  
 Sullivan domain の個数について

Th (央倉) (AB) (PB) (SD) (HR) の cycle の個数を  $n_{AB}, \dots$

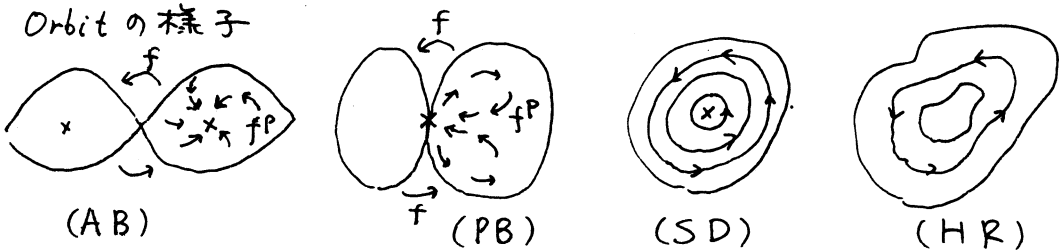
Cremer 型周期点の cycle の個数を  $n_{Cr}$ .  $d = \deg f$  とすると

$$n_{AB} + n_{PB} + n_{SD} + n_{Cr} + 2n_{HR} \leq 2(d-1)$$

$$n_{HR} \leq d-2$$

逆に上の不等式を満たす  $n_{**}, d$  は  $\exists f$  で実現される。

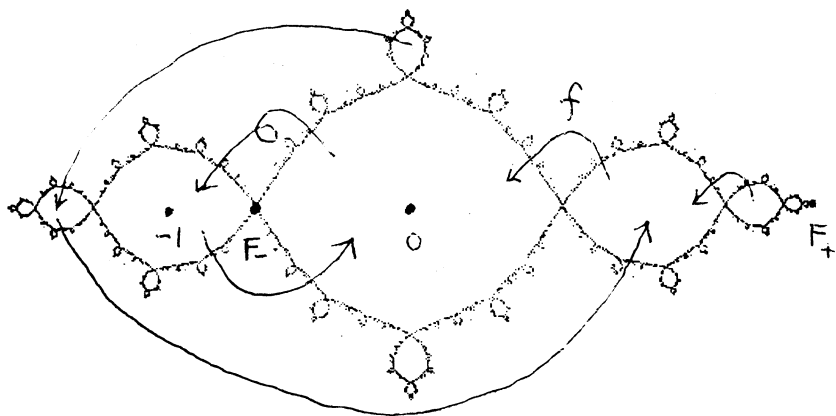
Orbit の様子



(AB) (PB) (SD) の例は §4. (HR) の例は §5 参照

・ HR は  $\deg f \leq 2$  の多項式では現われない。

Prob SD, HR の  $D$  の  $\partial D \Rightarrow \exists$  4特異点?



練習問題  $f = z^2 - 1$ , 特異点  $0, \infty$  固定点  $F_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \infty$   
 2周期点  $0, -1$ .  $A(0), A(-1)$  を求め  $J = \partial A(0) = \partial A(-1)$   
 $= \partial A(\infty)$  を求めよ。

#### §4. $M \subset Jz^2 + C$

Douady-Hubbard の理論 ([B]10, [PR]4)

$M \supset H := \{c \in M \mid f_c \text{ に } \exists \text{ attr per pt } \neq \infty\}$  : 連磨の部分

$M \supset F := \{c \in M \mid 0 \text{ が } f_c \text{ の strictly preperiodic pt}\}$  : 尖端, 分岐点

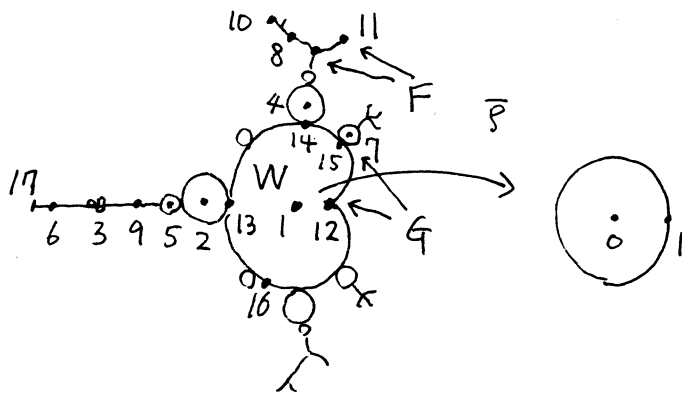
$z_0$  が str preper pt  $\Leftrightarrow \exists N > 0$   $f^N(z_0)$  per,  $z_0$  は per ではない

$M \supset G := \{c \in M \mid f_c \text{ に } \exists \text{ rat ind per pt}\}$  : 連磨の付け根

Th  $H$  の連結成分  $W$   $\bar{p}: W \rightarrow \Delta = \{z \mid |z| < 1\}$  :  $c \mapsto \lambda =$   
 $f_c$  の attr per pt の固有値 は等角写像で  $\bar{p}: W \rightarrow \Delta$   
 に homeo に拡張される。

$c = \bar{p}^{-1}(0) \in W$  を  $W$  の center と呼ぶ。  $f_c$  は supp attr per pt を含む。

$c = \bar{p}^{-1}(1) \in G$  を  $W$  の root " " " rat ind per pt "



Conj  $\text{int } M = H$  内点は連続だけ。  $\rightarrow \infty$  の近傍

さて,  $c \in \mathbb{C}$  に対して,  $\exists \varphi_c: \infty$  の近傍 : 等角,  $\varphi_c(\infty) = \infty$ ,  $\varphi_c(z)/z \rightarrow 1 (z \rightarrow \infty)$ ,  $\varphi_c(tc) = \varphi_c^2$  となる。

(1)  $M \ni C$  のとき  $\varphi_c$  は  $A(\infty)$  で定義されて  $\varphi_c \downarrow \mathbb{R} \downarrow \varphi_c$   
 $\varphi_c(A(\infty)) = \bar{C} \setminus \bar{\Delta}$  となり,  $\varphi_c^{-1}: \bar{C} \setminus \bar{\Delta} = \Delta \rightarrow A(\infty)$   $\xrightarrow{w^2}$

は Riemann の写像定理の写像に在る。一般に写像定理の  $\psi: \Delta \rightarrow N$  が  $\infty$  まで連続に拡張される  $\Leftrightarrow \partial N$  局所連結 (Caratheodory) であるが。

$H \ni C \Rightarrow \partial A(\infty) = J: \text{loc conn} \Rightarrow \partial \Delta = S^1 \xrightarrow{w^2} S^1$   
 $F \ni C \Rightarrow J: \text{樹状, loc conn} \Rightarrow \partial A = J \xrightarrow{f_c} J$

$f_c$  が Cremer pt をも  $\rightarrow (\partial W$  の dense な  $C$  で成立)  $\Rightarrow J: \text{not loc conn}$   
 なる  $M \ni C \Rightarrow J: \text{Cantor set}$  でした。

(2)  $M \ni C$  のとき  $\varphi_c$  は  $z = C$  まで定義されて  $\Psi: \bar{C} \setminus M \rightarrow \bar{C} \setminus \bar{\Delta}: C \mapsto \varphi_c(C)$  は conf. bij.  $\Psi(C)/C \rightarrow 1$   
 $(C \rightarrow \infty)$  で  $\Psi = \Psi^{-1}: \bar{C} \setminus \bar{\Delta} = \Delta \rightarrow \bar{C} \setminus M$  は写像定理の写像と在る。  $\bar{C} \setminus M \approx \Delta$  が単連結だから。

Cor  $M$  は連結 !!!

$M$  をどんどん拡大していくと恐しいつなかりおとし  
 いきます。  $[U], [P-R]$  に写真がでてきます。 Prop 1 ででき  
 ますが、ものすごく時間がかかります。

Problem  $M$  は局所連結か?

なお,  $M$  が局所連結  $\Rightarrow \text{int } M = H$  です。

$H \supset W$  の center,  $F, G$  の数値  $C$  は次の計算で求まる。

- (i)  $H \supset W \Rightarrow C: \text{center} \Leftrightarrow f_c = \supp \text{attr per pt}$  i.e.  $\exists z_0 \text{ per. } \lambda = f_c'(z_0) = 0$   
 $z_i := f_c^i(z_0) \lambda = 2^p \pi z_i \therefore \text{cycle} = \{z_0, \dots, z_{p-1}\} \ni 0 \therefore f_c^p(0) = 0$
- $p=1: f_c(0) = C = 0^1$
- $p=2: f_c^2(0) = (C^2 + C)^2 + C = 0: C = (0), -1$   $z \leftarrow$  前回の No.
- $p=3: f_c^3(0) = C^3 + C = 0: C = (0), -1.7549^3, -0.1226 \pm 0.1449i^4$
- $p=4: C = (0, -1), -1.3107^5, -1.9408^6, 0.282 \pm 0.530i^7$   
 $-0.1565 \pm 1.0323i^8$

- (ii)  $F \rightarrow C \Leftrightarrow 0$  が  $f_c$  の str preper pt (i.e.  $f_c^{n+p}(0) = f_c^n(0)$   $n, p > 0$ )  
 $n, p = 2, 1: (c^2+c)^2 + c = c^2 + c: c = (0), -2$ <sup>17</sup>  
 $n, p = 3, 1: c = (0, -2), -1.54369^9, -0.22816 \pm 1.11514i$ <sup>10</sup>  
 $n, p = 2, 2: c = (0, -1, -2), \pm i$ <sup>11</sup>

- (iii)  $G \rightarrow C \Leftrightarrow f_c$  に  $\exists$  rat ind per pt i.e.  $\exists z_0$  per  $f^p(z_0) = \lambda = e^{2\pi i \frac{s}{r}}$   
 $z_i := f^i(z_0), f^p(z_0) = z_0, 2^p \pi z_i = \lambda$   
 $p=1: z^2 - c = z, 2z = \lambda \therefore c = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{2}, \lambda = e^{2\pi i \frac{s}{r}}$  が動く  
 $\hookrightarrow c$  は main cardioid  $\textcircled{3}$  を動き、 $c$  の点で周期  $p$  の center をもつ小さな  $W$   $\textcircled{4}$  がついていきます。 $c$  は  $W$  の root です。

$\frac{s}{r} = 0: c = \frac{1}{4}$ <sup>12</sup>,  $\frac{s}{r} = \frac{1}{2}: c = -0.75$ <sup>13</sup>,  $\frac{s}{r} = \frac{1}{3}: c = -0.125 + 0.6495i$ <sup>14</sup>  
 $\frac{s}{r} = \frac{1}{4}: c = 0.25 + 0.5i$ <sup>15</sup>

- (iv) iii で  $\theta$  が §3(4.2) の (S) を満たせば Siegel disk ができます。  
 例)  $\theta = (\sqrt{5}-1)/2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$  :  $c = -0.39054 - 0.58679i$ <sup>16</sup>

### §5. その他の $M, J$

- (1) cubic Mandelbrot set  $M_3 := \{(b, c) \in \mathbb{C}^2 \mid f = z^3 + bz + c \text{ の } J_f \text{ が連結}\} = \{ \mid f \text{ の } \forall \text{ 特異点 } z \neq \infty, f^n(z) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \}$

(i)  $|z| > |b| + |c| + 1 \Rightarrow f^n(z) \rightarrow \infty$

(ii)  $\frac{4}{27}|b|^3 + |c|^2 > |b| + |c| + 1 \Rightarrow z_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{-b}{3}}, f^n(z_{\pm}) \rightarrow \infty \text{ or } f^n(z_{\pm}) \rightarrow \infty$

ii より  $M_3 \subset \{(b, c) \mid |b| \leq 3.08, |c| \leq 2.302\}$

i より  $M_k^{\pm} := \{(b, c) \mid |f^n(z_{\pm})| \leq |b| + |c| + 1 \forall n < k, f^k \text{ " } > \text{ "}\}$

とあけは  $M = \mathbb{C}^2 \setminus \cup M_k^+ \cup M_k^-$  です。 $M$  の 2次元平面による断面図を描くのが Prog 5 です。実に色々な形が出てきますが、なかなか 4次元の  $M$  がわかったような気になれません。 $M_3$  は色々な対称性があります。

- (2) 多項式でない  $f$  の  $J$

多項式では  $\infty$  が suppper fixed pt なのを  $|f^n(z)| > R$  の判定をします。一般の  $f$  では attr per pt  $\alpha$  に対し  $|f^{n+p}(z) - \alpha| < R$  の判定をします。

Newton 法: 方程式  $g(z)=0$  の解  $\alpha$  は  $f(z) := z - \frac{g(z)}{g'(z)}$  とおき  $\alpha$  の近くの  $z$  をとり  $f^n(z) \rightarrow \alpha$  で求められる。  $\forall$  解  $\alpha_i$  は  $f$  の *attr fixed pt* になり  $A(\alpha_i) \ni z$  なら  $f^n(z) \rightarrow \alpha_i$  であるが  $\partial A(\alpha_i) = J_f \ni z$  なら  $f^n(z) \rightarrow \alpha_j$ 。もし  $\alpha_i$  以外に *attr per pt*  $\beta$  があれば  $A(\beta)$  兩集合  $\ni z$  に対し  $f^n(z)$  は  $\beta$  の *cycle* に近づく。解には収束しない。  $g(z) = z^3 - 1, f(z) = \frac{z}{3} + \frac{1}{3z^2}$  では  $J = \partial A(1) = \partial A(\omega) = \partial A(\omega^2), \bar{C} = J \cup A(1) \cup A(\omega) \cup A(\omega^2)$  となり測度 0 の  $J$  以外の  $z$  から出発すると解の 1 つに収束します。  $A(1)$  を描くのが Prog 6 です。

プログラム 46

```

10 'JULIA SET NEWTON'S METHOD
40 RR=.01-1:C1=2/3
130 X=A:Y=B:XX=X*X:YY=Y*Y:RZ=XX+YY
140 FOR K=0 TO N
150 X1=X:R2=RZ*RZ:IF R2<1E-10 GOTO 180
151 X=(2*X1+(XX-YY)/R2)/3:Y=(1-X1/R2)*Y*C1
152 XX=X*X:YY=Y*Y:RZ=XX+YY
160 IF RZ-2*X<RR THEN PSET(I,J),(K MOD 6)+1:GOTO 180

```

```

160 IF RZ-2*X<RR THEN PSET(I,J),(K MOD 2)+1:GOTO 180
161 IF RZ+X-C2*Y<RR THEN PSET(I,J),(K MOD 2)+3:GOTO 180
162 IF RZ+X+C2*Y<RR THEN PSET(I,J),(K MOD 2)+5:GOTO 180

```

解説: Prog 1 の 10, 40, 150, 160 を変える。150, 151, 152 で  $f(z)$  を計算し、160 で  $|z-1| < 0.1$  を判定して います。160 を 160, 161, 162 にすれば  $A(\omega), A(\omega^2)$  も描きます。

(3) Herman ring の例

$S'$  の向きを保つ同相  $\varphi$  に対し  $\mathbb{R}$  への lift  $\tilde{\varphi}$  と  $z_0 \in \mathbb{R}$  をとり  $n$  回転  $\rho(\varphi) := \lim \tilde{\varphi}^n(z_0)/n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  は  $\varphi, z_0$  に依存しない。  
(Herman)  $\varphi: S'$  の analytic diffeo,  $\rho(\varphi)$  が (4.2) の (S) を満たす  
 $\Rightarrow \varphi \sim_{R_\rho}$  回転 (i.e.  $\exists \psi: S'$  の analytic diffeo  $\varphi\psi = \psi R_\rho$ )  
 $f(z) = e^{i\theta} z^2 \cdot \frac{1-a^2}{z-a}$  の特異点  $0, \infty, z_\pm = \frac{1}{4a} (3a^2 + 1 \pm \sqrt{9a^4 - 10a^2 + 1})$   
は  $0 < a < \frac{1}{3}$  のとき  $S'$ 。  $f|_{S'} = \varphi$  とすると  $\deg \varphi = 1$  あり  $\varphi$  は analytic diffeo。  $\theta$  を動かすと  $\rho(\varphi)$  が (S) を満たすよ

うにできて  $\exists \varphi$ .  $f\varphi = \varphi R_f$  on  $S^1$ .  $\varphi$  は  $S^1$  の近傍へ正則に拡張されるから、そこで  $f\varphi = \varphi R_f$  i.e.  $f \sim R_f$  on  $\exists$  内環 = HR.  $z = 0, \infty$  は *supp attr fixed pt* ですから  $n_{AB} = 2$ .  $n_{HR} = 1$ .  $d = 3$ .  $z_{\pm} \in \partial HR$  (49 行) ですから  $f^n(z_{\pm})$  も多数描き中の HR を白塗りしてから、 $f^k(z)$  が HR に初めては入る長によつて  $z$  に色をつけては  $f^k(HR)$  が描けます。

```

111 IF POINT(I,J)=7 GOTO 180
160 IF RZ<RI THEN PSET(I,J),1:GOTO 180
161 IF RZ>RO THEN PSET(I,J),2:GOTO 180
162 P=(X-A1)/R1:Q=(B1-Y)/R1
163 IF (P<0)+(P>639)+(Q<0)+(Q>399) GOTO 180
164 IF POINT(P,Q)=7 THEN PSET(I,J),(K MOD 4)+3:GOTO 180

```

とすれば  $A(0), A(\infty), f^{-n}(HR)$  が描けます。ただ  $L RI = ((-1 + \sqrt{1+a^2})/a)^2$ ,  $RO = ((1 + \sqrt{1+a^2})/a)^2$  で 150 は  $f(z)$  に応じて作ります。

(4) 注: 拡大率を上げる為に  $R\phi$  を小さくし、 $N$  を大きくすると  $M_k$  が薄くなるので、例えば長を 30 に色を変えようとした方がよい。Prog 1 の 160 で  $(R/30 \text{ MOD } 6) + 1$  とします。

### 参考文献

- [B] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 11 ('84) 85 - 141
- [P-R] H-O. Peitgen - P.H. Richter, The Beauty of Fractals, Springer Verlag
- [S] 中倉光広, Riemann 球面上の複素力学系について, 第 35 回トホロジ-シンポジウム講演集 (PB 62)
- [U] 宇敷重広, 複素力学系の世界, 数学セミナー, 1985年6月 ~ 1986年4月

```

10 'CUBIC MANDELBRROT' SET
20 CONSOLE 0,25,0,1:SCREEN 3,0,0,1
30 DEFDBL A,B,C,D,R,X,Y,Z
40 INPUT"INPUT 1 Rb,Ib 2 Rb,Rc 3 Rb,Ic 4 Ib,Rc 5 Ib,Ic
45 INPUT"INPUT C, D ";C,D:CC=C*C:DD=D*D:CLS
50 INPUT"INPUT A0, B0, R0 ";A0,B0,R0:CLS
60 INPUT"INPUT N, MX, MY ( =< 319,199 ) ";N,MX,MY:CLS 3
70 R1=R0/MX:A1=-320*R1+A0:B1=200*R1+B0
80 I1=320-MX:I2=320+MX:J1=200-MY:J2=200+MY
90 FOR J=J1 TO J2
100 B=-J*R1+B1:BB=B*B
110 FOR I=I1 TO I2
120 A=I*R1+A1:AA=A*A
130 ON S1 GOTO 140,150,160,170,180,190,200
140 BX=A:BY=B:CX=C:CY=D:BXX=AA:BYY=BB:CXX=CC:CYY=DD:GOTO 210
150 BX=A:BY=C:CX=B:CY=D:BXX=AA:BYY=CC:CXX=BB:CYY=DD:GOTO 210
160 BX=A:BY=C:CX=D:CY=B:BXX=AA:BYY=CC:CXX=DD:CYY=BB:GOTO 210
170 BX=C:BY=A:CX=B:CY=D:BXX=CC:BYY=AA:CXX=BB:CYY=DD:GOTO 210
180 BX=C:BY=A:CX=D:CY=B:BXX=CC:BYY=AA:CXX=DD:CYY=BB:GOTO 210
190 BX=C:BY=D:CX=A:CY=B:BXX=CC:BYY=DD:CXX=AA:CYY=BB:GOTO 210
200 BX=A:BY=B:CX=A*C-B*D:CY=A*D+B*C:BXX=AA:BYY=BB:CXX=CX*CX:
210 RB=SQR(BXX+BYY):RR=RB+SQR(CXX+CYY)+1
220 XX0=ABS((RB-BX)/6):YY0=ABS((RB+BX)/6):X0=SQR(XX0)
230 IF BY>=0 THEN Y0=-SQR(YY0) ELSE Y0=SQR(YY0)
240 X=X0:Y=Y0:XX=XX0:YY=YY0
250 FOR K=0 TO N
260 X1=X:X=X*(XX-3*YY+BX)-BY*Y+CX:Y=Y*(3*XX-YY+BX)+BY*X1+CY
270 XX=X*X:YY=Y*Y
280 IF XX+YY>RR THEN PSET(I,J),(K MOD 6)+1:GOTO 360
290 NEXT K
300 X=-X0:Y=-Y0:XX=XX0:YY=YY0
310 FOR K=0 TO N
320 X1=X:X=X*(XX-3*YY+BX)-BY*Y+CX:Y=Y*(3*XX-YY+BX)+BY*X1+CY
330 XX=X*X:YY=Y*Y
340 IF XX+YY>RR THEN PSET(I,J),(K MOD 6)+1:GOTO 360
350 NEXT K
360 NEXT I
370 PRINT J:NEXT J
380 END

```

解説:  $C^2 \Rightarrow (b, c)$  の 2次元平面を 7通り与えました。

例えば最初の?で 3 を入力すると  $Re \phi \times Im \phi$  平面を描きます。 $C, D, A\phi, B\phi, N, MX, MY$  を入力すると  $\{(x+ic, D+iy) \mid |x-A\phi| < R\phi, |y-B\phi| < R\phi \cdot MY/MX\}$  の部分を描きます。  
7 の時は  $\{(x+iy, (C+id)(x+iy)) \mid \dots\}$  です。



7°□ 7° 3 4 2

```
31 DIM G%(602),H%(602)
32 INPUT"INPUT 1 D, 2 S, 3 L, 4 C, 5 V, 6 V, 7 M, 8 R,
33 IF S<1 OR S>9 THEN GOTO 32
34 IF S=9 THEN END
35 ON S GOSUB *D,*S,*L,*C,*V1,*V2,*M,*R:GOTO 32
36 *D
81 INPUT"INPUT 1 A, 2 X, 3 Y, 4 O, 5 XY ";SH:CLS 3
82 IF SH=2 OR SH=4 OR SH=5 THEN J1=200
83 IF SH=3 OR SH=5 THEN I1=320
199 GOSUB *DR
200 RETURN
1000 *S
1010 INPUT"INPUT N ";N$:CLS
1020 DEF SEG=&HA800:BSAVE"1:da"+N$,0,&H7D00
1030 DEF SEG=&HB000:BSAVE"1:db"+N$,0,&H7D00
1040 DEF SEG=&HB800:BSAVE"1:dc"+N$,0,&H7D00
1050 RETURN
1100 *L
1110 INPUT"INPUT N ";N$:CLS
1120 DEF SEG=&HA800:BLOAD"1:da"+N$
1130 DEF SEG=&HB000:BLOAD"1:db"+N$
1140 DEF SEG=&HB800:BLOAD"1:dc"+N$
1150 RETURN
1200 *C
1210 PRINT"1 F, 2B, 3 F, 4 S, 5 R "
1220 KE=1000:SI=5:JJ=5
1230 JJ=(JJ+SI) MOD 6
1240 FOR J=1 TO 6:COLOR=(J,(J+JJ) MOD 6 +1):NEXT
1250 FOR K=1 TO KE:NEXT
1260 I$=INKEY$:IF I$="" GOTO 1230
1270 VA=VAL(I$):IF VA<1 OR VA>5 GOTO 1230
1280 ON VA GOTO 1290,1300,1310,1320,1330
1290 SI=5:GOTO 1230
1300 SI=1:GOTO 1230
1310 KE=KE/1.2:GOTO 1230
1320 KE=KE*1.2:GOTO 1230
1330 FOR I=1 TO 6:COLOR=(I,I):NEXT:CLS:RETURN
1400 *V1
1410 SCREEN 2,0,0,1:RETURN
1420 *V2
1430 SCREEN 2,0,0,4:RETURN
1440 *M
1450 SCREEN 3,0,0,1:COLOR=(0,7)
1460 FOR I=1 TO 7:COLOR=(I,0):NEXT:RETURN
```

```

1470 *R
1480 SCREEN 3,0,0,1:FOR I=0 TO 7:COLOR=(I,1):NEXT:RETURN
1500 *DR
1510 J1=400-J2
1520 IF SH=3 THEN J1=200-MY
1530 ON SH GOTO 1540,1550,1560,1570,1580
1540 RETURN
1550 GOSUB 1590:RETURN
1560 GOSUB 1610:RETURN
1570 GOSUB 1590:GOSUB 1630:RETURN
1580 GOSUB 1590:GOSUB 1610:RETURN
1590 FOR J=201 TO J2:JJ=400-J:GET(I1,J)-(I2,J),G%
1600 PUT(I1,JJ),G%,PSET:NEXT:RETURN
1610 FOR I=321 TO I2:II=640-I:GET(I,J1)-(I,J2),G%
1620 PUT(II,J1),G%,PSET:NEXT:RETURN
1630 FOR I=321 TO I2:II=640-I:GET(I,J1)-(I,200),G%
1640 GET(II,J1)-(II,200),H%:PUT(I,J1),H%,PSET
1650 PUT(II,J1),G%,PSET:NEXT:RETURN

```

解説: RUN  の次に 1~9 のどれかを入力すると次を行って 32 行に戻ります。

1: Prog 1

2: 画面保存: N を入力すると Data number N で floppy disk に保存する。96Kバイト必要ですから、5inch 2DD で 6 画面保存できます。下段の disk を使う時は "1:da" 等を "2:da" にします。(6ヶ所) MSDOS では a(上段) b(下段) にします。

3: 画面再生: N を入力すると Data N を再生

4: 色変化: 色が変わり動いて見える。1~5 を押すと前進、後進、加速、減速、32 行に戻る

5,6: 白黒 2 色模様

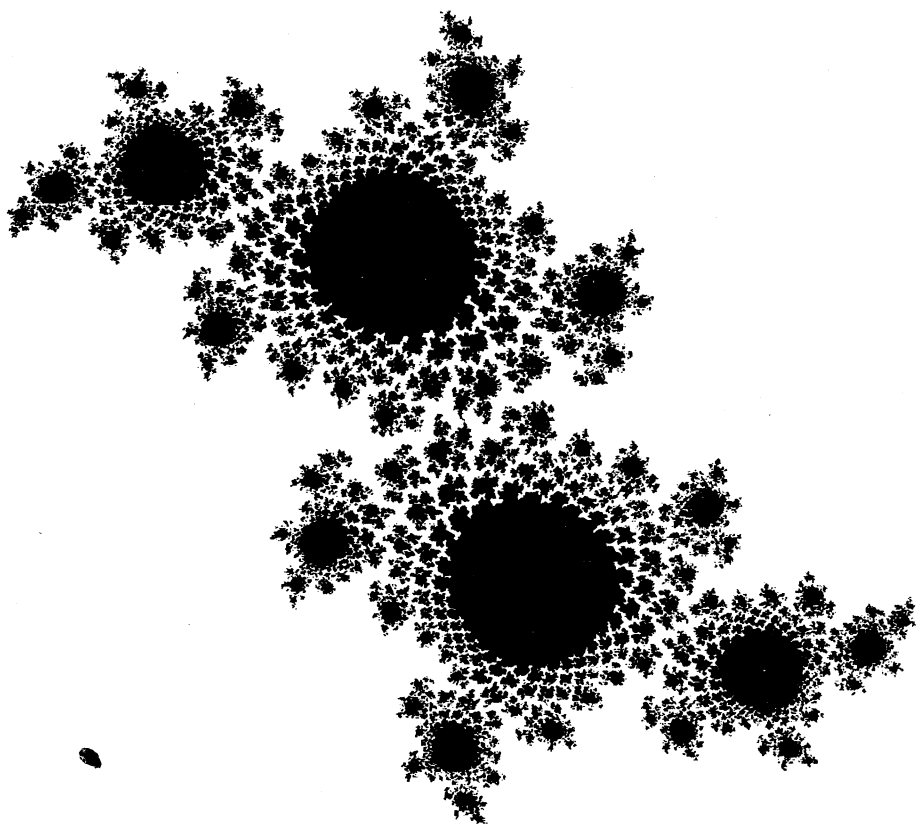
7: Mandelbrot set

8: 元の画面: 5,6,7 の後で押すと元に戻る

9: 終

又、INPUT 1A, 2X, 3Y, 4O, 5XY ? に対し例えば "2" を入力すると X 軸対称の下半分を描いてから上半分へコピーします。1~5 は 全画面, X 軸対称, Y "", 原点 "", X 軸かつ Y 軸 "" です。Prog 5 の時は 199,200 は 379,380 です。

(R9.7)



Julia set of  $z \mapsto z^2 + 0.64\sqrt{-1}$

NEC PC98XL

CPU i386相当, 10MHz

1120x750 dot

Turbo Pascal

約6時間(最高120回 iteration)