# 目　次

i 先号の会計報告(2月末現在)

| | | |
|---|---|---|
| 繰越分 | 7.110 | |
| 印刷費 | | 65.600 |
| 送料 | | 3.300 |
| 売上 | 62.350 | |
| 残高 | 560 | |

ii 今回も多くの方々の御協力によって発行することができました。
次号も学会の折に発行の予定です。御意見また記事などありましたら御連絡下さい。尚、原稿の締切は8月末となります。

トポロジーニュース連絡先

〒812 福岡市東区箱崎6-10-1
九州大学理学部数学教室
矢野 公一

TEL (092) 641-1101 内線4362

(3.3 Kg)

# Casson Handles, Exotic $\mathbb{R}^4$'s, $\#^{\infty}(S^2\times S^2)$ などについて

久我健一

ここでは、非コンパクト4次元多様体(の微分構造)に関係する話題を書きたいと思いますが、これに関する系統だった研究といったものがあるわけではなく、最近注目を集めたExotic $\mathbb{R}^4$の存在のように、他の次元では見られないような、通常と異なる微分構造をもつものがみつかってきた、という段階です。

Exotic $\mathbb{R}^4$の存在を示すためには、全く異った2つの議論が必要で 1つは、それが$\mathbb{R}^4$と位相同型であることを示すためのFreedmanによる議論と、もう1つは、それが、$\mathbb{R}^4$と微分同相でないことを示すための、適当なバンドル上の(Anti-) Self-dual connectionのmoduli空間を用いたDonaldsonによる議論です。

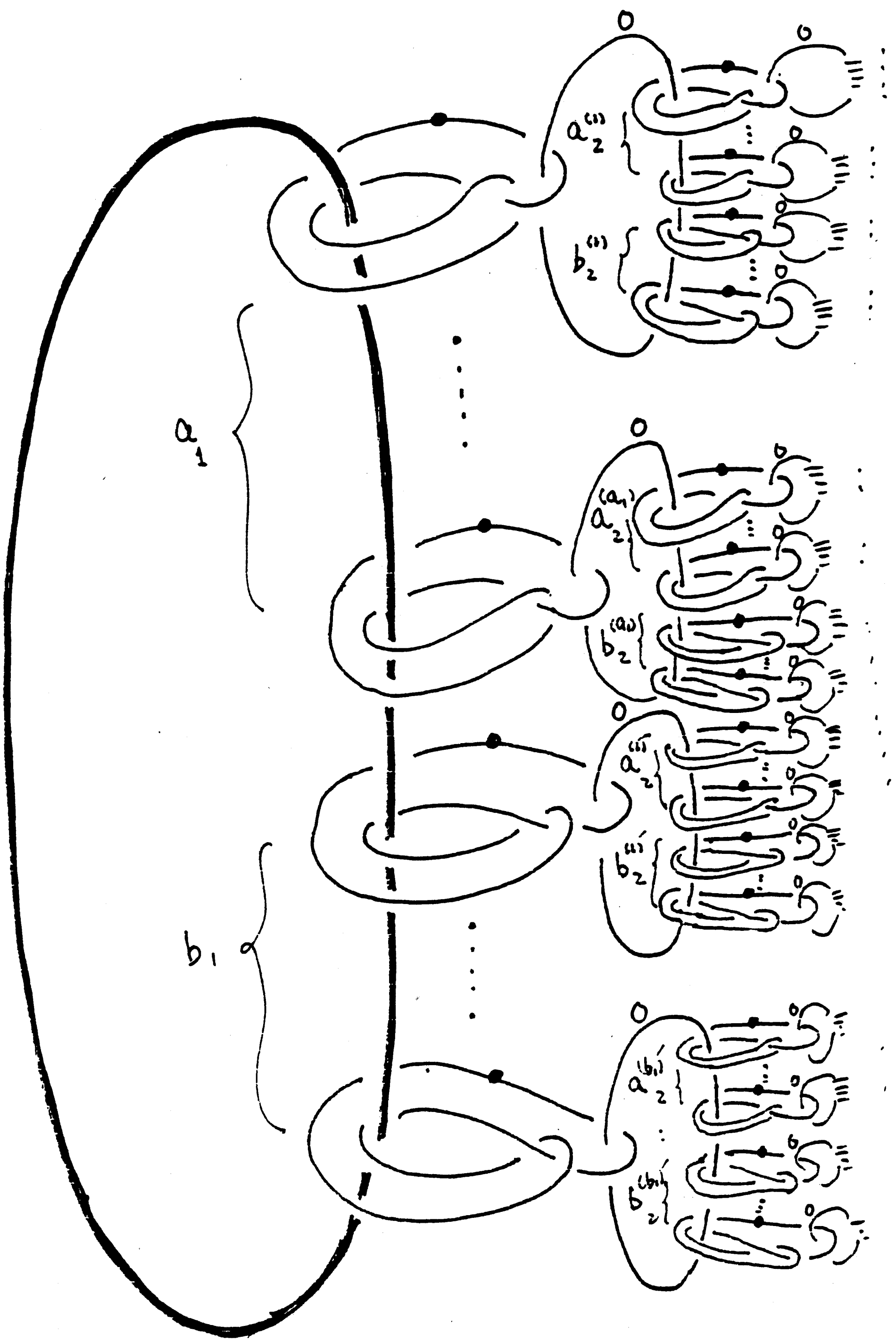
Donaldsonの議論がきわめて強力であることは言うまでもありませんが、それによって(例えば$\mathbb{R}^4$上の微分構造の)全てが判別できる、というものではないように思われますし、また例えばExotic$(\mathbb{R}^4\setminus\{pt\})$の存在であれば、4-多様体中の曲面のsurgeryの考察によっても証明可能なRochlinの定理によって示すこともできます。

また、2つの4次元多様体が微分同相になるという肯定的結論を得るための(微分同相を構成する)理論が全く欠けているので、例えば、可算無限個の微分構造が発見されている(almost definiteな)コンパクト4-多様体がありますが、それが全ての微分構造を尽くしているかわかりませんし、あるいは、全てのExotic $\mathbb{R}^4$を含む(Universal $\mathbb{R}^4$の存在も言えますが、そのどの(部分) Exotic $\mathbb{R}^4$が同じか、ということもわかりません。

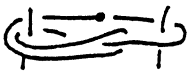
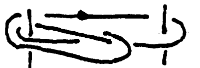
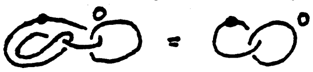
そのように考えてみると、実際に4次元多様体で何が起きているのか、というようなことを、その構成の仕方からさかのぼって見なおしてみることは、意味のあることだと思います。

そこで、標題に書いたように、3種類の非コンパクト4次元多様体について、そのような観点から順に書きたいと思うのですが、とはいっても、書ける内容も限られているし、同時にあまり大事でないかもしれない事にも触れるかもしれないので、要領を得ず、かつまた、上に述べた状況で、全く洗練されていないことなど、申し訳ありません。

1. Casson Handles: (Interior = standard $\mathbb{R}^4$, boundary = $S^1 \times \mathbb{R}^2$). Casson Handles の名は聞かれたことがあると思いますが、これはある種の非コンパクト可微分4次元多様体の総称で、位相的には $D^2 \times \mathbb{R}^2$ である、というのが Freedman による定理でありました。この Casson Handle を、最も直接的に定義する方法はその Link 表示を与えることです。次ページが、それです。ここで一番左の大きな円周は4次元球 $D^4$ の表面 $S^3$ 上の unknotted $S^1 \times \mathbb{R}^2$ で、これが Casson handle のバウンダリーとなります。その他の circles は、その各々は全て $S^3$ 中の unknotted circle ですが $\overset{0}{\bigcirc}$ と $\dot{\bigcirc}$ の2種類があります。はじめの $\overset{0}{\bigcirc}$ は、その circle に沿って $D^4$ に4次元2-handle を framing 0 で attach することを意味します。また $\dot{\bigcirc}$ は、(注  = $\dot{\bigcirc}$ unknotted) 4次元1-handle を意味しますが、それはどういうことか、というと、$S^3 = \partial D^4$ 中の unknot を境界とするような標準的な2次元円板を $D^4$内に考え、その開正則近傍を $D^4$ から取り除くと、$S^1 \times D^3$ が得られますが、これは $D^4$ に1-handle を付けたことと同じです。つまり $\dot{\bigcirc}$ は、それに沿って $D^4$ の内側から attach した2-handle を除くものとみなし、それと dual な core をもつ1-handle を表わすわけです。図の中の数



$a_1$
$b_1$
$a_2^{(1)}$
$b_2^{(1)}$
$a_2^{(a_1)}$
$b_2^{(a_1)}$
$a_2^{(1)}$
$b_2^{(1)}$
$a_2^{(b_1)}$
$b_2^{(b_1)}$
0

$a_1, b_1, a_2^{(i)}, b_2^{(i)}, \cdots$ 等は0以上の任意の整数を表わします。(ここで $a_i$ に対応する link  と $b_i$ に対応する link  の違いに注意して下さい)。この表示は右方へ無限に続いているわけですが、これによって表わされている Casson handle は何かというと、無限個の 1-handle を付け(あるいは $D^4$ の内側から付けられた dual な 2-handle を取り除き)、無限個の 2-handles を全て表示に従って framing 0 で attach した後、バウンダリーとなる左端の $S^1\times\mathbb{R}^3$ を除いて残りの boundary を取ったものです。可微分構造はもちろん、はじめの通常の $D^4$ と、付けられる通常の handle 体から来ているわけです。数字 $a_i, b_i, a_2^{(i)}, b_2^{(i)} \cdots$ 等のとり方によって異る Casson handle ができます。例えば全て $=0$ とすれば Link 表示は、左端の circle だけとなり、これは standard $(D^2\times\mathbb{R}^2, S^1\times\mathbb{R}^2)$ になります。図の中の  が 1-handle と 2-handle の cancelling pair であることに注意すれば、もし $a_i, b_i, a_2^{(i)}, b_2^{(i)}, \cdots$ が有限個を除いて0なら、(つまり Link 表示が有限なら)、右方から左にむかって次々に cancelling が進み、左端の circle だけが残って、standard $(D^2\times\mathbb{R}^2, S^1\times\mathbb{R}^2)$ になります。このように考えると、この Link 表示が無限に続いているということが本質的であることがわかると思います。次の2つの命題も、Link 表示から直ちに従います。

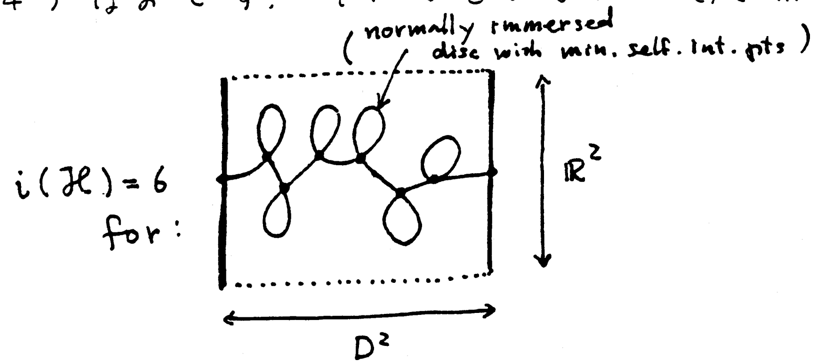
1.1 Proposition　Casson handle の interior は常に standard $\mathbb{R}^4$ と diffeomorphic. i.e. $\mathrm{Int}(CH) \cong \mathbb{R}^4_{stand.}$

1.2 Proposition　Casson handle は(バウンダリーも含めて) standard $\mathbb{R}^4$ に diffeomorphic に埋め込める。

Casson Handle はもちろん、位相多様体の分類で重要な役割を果しますが、可微分多様体としても興味深い対象です。非コンパクト位相多様体としては非常に簡単な $D^2\times\mathbb{R}^2$ であり、かつまた上の Propositions から、Interior の微分構造は standard $\mathbb{R}^4$ であるのに、実は無限に異なる diffeomorphism types をもつのです。すなわち、

1.3 <u>Theorem</u> (Gompf [G], [K]) $D^2\times\mathbb{R}^2$ 上の可微分構造で、interior への制限は standard $\mathbb{R}^4$ となるが、互いに微分同相でないものが(少なくとも可算)無限個存在する。

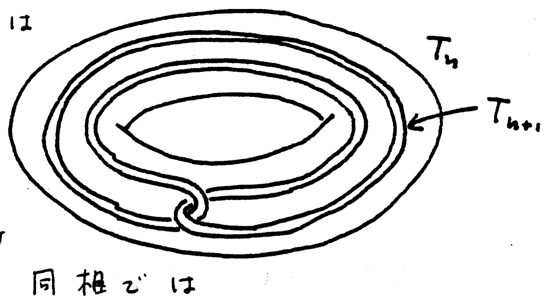
これは、ホモロジーが有限生成の位相多様体で無限個の異なる可微分構造が確認された最初の多様体です。この証明は次のようにしてなされます。まず $(p,q)\in H^2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})$ を $S^2\times S^2$ の、標準的生成元に関する2次元ホモロジー類 $(p,q\in\mathbb{Z})$ とします。もし $p$ と $q$ とが互いに素ならば、このホモロジー類は、$S^2\times S^2$ の中で、4次元球体 $D^4$ に1つの Casson Handle ($\mathcal{H}_{pq}$) を attach したもの $D^4\cup\mathcal{H}_{pq}$ で表現されます。(そもそも Casson Handle はこのようなことをするために考案されました。これは、上の定義からすぐ従うというよりも、そのようにして考案された Casson Handle が、多様体として上の定義にのべた Link 表示をもつということです。[C] [F]) さて、$D^2\times\mathbb{R}^2$ 上の各可微分構造 $\mathcal{H}$ に対して $i(\mathcal{H})=\min\{\#$ of self-intersections of normally immersed 2-disk $D$ in $\mathcal{H}$ with $\partial D=S^1\times *\subset S^1\times\mathbb{R}^2=\partial(D^2\times\mathbb{R}^2)\}$ とおけば、($\partial D$ は $\partial(D^2\times\mathbb{R}^2)$ の中で up to diffeomorphism で一意なので)、これは $\mathcal{H}$ の invariant $\in\{0,1,2,\cdots\}$ になります。従って上の定理を示すためには $i(\mathcal{H})$ がいくらでも大きいものが存在すること、を示せば十分ですが、実際 $i(\mathcal{H}_{pq})\geq[(|pq|+2)/2]$ (for $|p|,|q|\geq 4$) なのです。それはどのようにして示すのか、とい



うと．$S^2\times S^2$ の中の immersed 2-sphere（= $\mathcal{H}_{pq}$ 中の immersed 2-disc と．4-球体 $D^4$ 中の standard な 2-disc を合せたもの）の self-intersections は $S^2\times S^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$'s の中で適当に解消され．（適当なホモロジー類の追加をした後）それを blow down することによって definite 4-manifold を作ることができますが．ここで．はじめの self-intersection が少いと．出来る definite 4-manifold の交叉型式が non-standard となって．それが standard であることを主張する Donaldson の定理に反するのです．（1.3 の証明の outline おわり）

1.4．簡単な decomposition argument の例（Andrews-Rubin decomposition）．それでは．$D^2\times\mathbb{R}^2$ 上の可微分構造の状況がよくわかったか．というと．そうでもありません．ちょっと考えてみれば．Link 表示で定義した Casson Handles が．無限個の diffeo types をもつということ．それは例えば 1.3 の証明のように．$(p,q)\in H_2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})$ を表わす immersed 2-sphere の self-intersection pts の数が．$(p,q)$ を大きくすれば．いくらでも多くなる．という事から従ったわけですが．その証明は困難であっても，直観的には認めやすいものと思われます．けれども．Casson Handle が $D^2\times\mathbb{R}^2$ と homeomorphic という事実は直観からは．かなりかけ離れているように思います．逆に言えば，そのような事がおこってしまうので．定理 1.3 の証明にしても．Donaldson の定理のような大がかりな道具立てを必要とする程．微妙な問題となってしまうと言えると思います．ですから Casson handle $\approx (D^2\times\mathbb{R}^2,\partial)$ の位相同型がどうなっているのか．を見ることは．大切なことだと思います．もちろんそれを見るためには Freedman の 4 次元 Poincaré 予想の証明をすることに他ならないので．ここではできませんが．そこで用いられた位相同型を作る方法：decomposition 理論の最も簡単な例をやることは意味があると思います．実際次の例は Freedman の証明の1つの動機づけを与えたものです

W ⊂ $\mathbb{R}^3$ を Whitehead continuum とします。これは unknotted solid tori $\mathbb{R}^3 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset T_{n+1} \supset \cdots \supset W = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ による定義列をもち、各 $T_{n+1}$ は $T_n$ の中に右図のように入っています。W はいわゆる cell-like set で、$\mathbb{R}^3$ において W を1点につぶした空間 $\mathbb{R}^3/W$ は $\mathbb{R}^3$ と homotopy 同値ですが、同相ではありません（多様体でないからです）ところが、

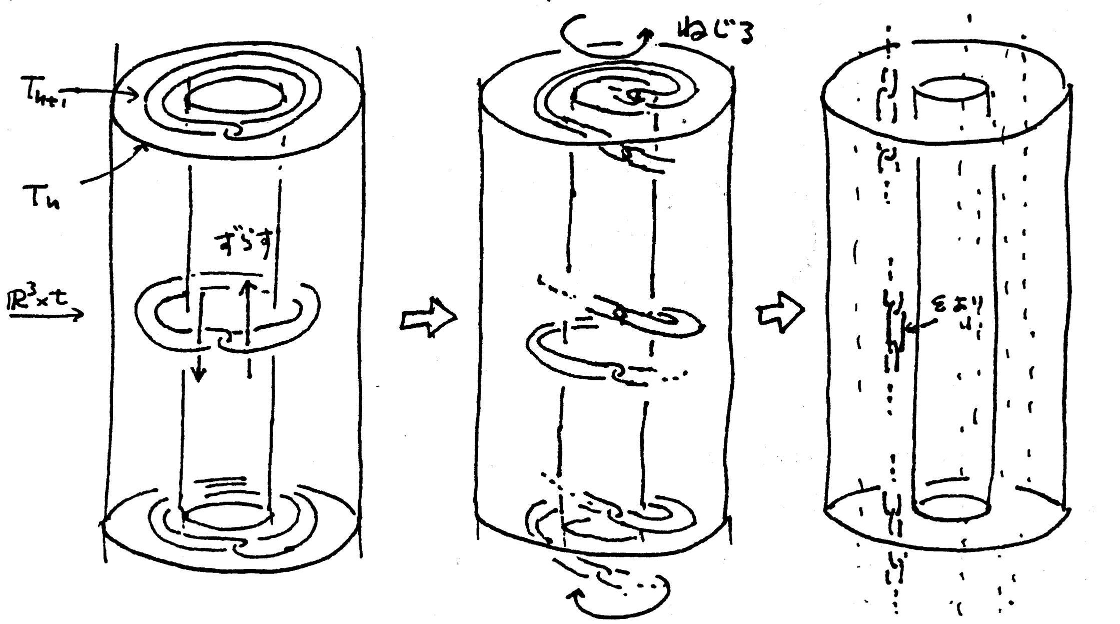



Proposition (Andrews-Rubin) $(\mathbb{R}^3/W) \times \mathbb{R}^1 \underset{\text{位相同型}}{\approx} \mathbb{R}^4$.

証明には Bing shrinking criterion を使うのですが、この場合それは大まかに言えば、いくらでも小さい $\varepsilon > 0$ と、いくらでも大きい番号 $n$ に対し、自己同相 $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ で、

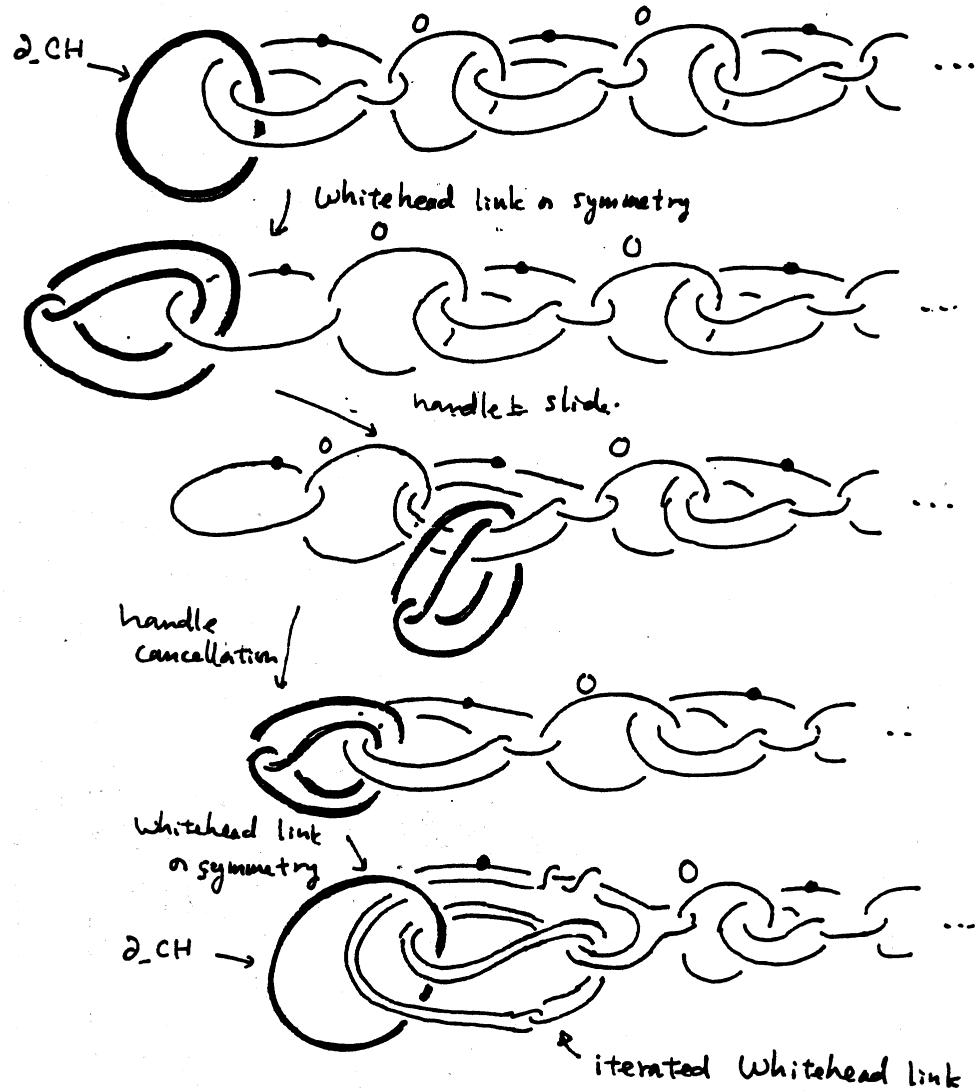
$\mathrm{Support}(h) \subset T_n \times \mathbb{R}^1$,　$h(W \times \{t\}) \subset T_n \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$,

$\mathrm{diam}\, h(W \times t) < \varepsilon$ （各 $t \in \mathbb{R}^1$）となるものが存在すれば、つまり、あまり周囲を動かすことなく一斉に $W \times \{t\}$ を小さくできれば、つぶしてしまっても、homeo type は変わらないという、もっともなものです。ここで自己同相 $h$ は、第4の方向（$\times \mathbb{R}^1$）を用いて巧妙に構成されます。その状況は下図を見れば一目瞭然でしょう。



1.5 Casson handle で iterated Whitehead links が出る状況:

それでは、どのようにして、Casson handle と、上に書かれたような Whitehead continuum とが関連するのか、ということを最も simple な Casson handle のときに示す図を書いて、このセクションを終えます。




2. Exotic $\mathbb{R}^4$'s

2.1 (Uni-)versal $\mathbb{R}^4$. 4次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ の Exotic smoothing の存在は Freedman の位相的な議論と、Donaldson の定理を仮定すれば比較的容易に導くことができます。$\mathbb{CP}^2$ から適当な (4-ball) ∪ (Casson handle) (の位相的スパイン $\approx S^2$)

をぬきとると、残り (complement) は Exotic $\mathbb{R}^4$ となります。この場合の Exotic $\mathbb{R}^4$ はコンパクト多様体 $\mathbb{C}P^2$ に smooth にうめこまれています。さらに $S^4$ に smooth にうめこまれた Exotic $\mathbb{R}^4$ も存在します。しかし、ここでは、多くの Casson Handles を有効に使って"最も Exotic な" Exotic $\mathbb{R}^4$ を作ってみます。これは Freedman と Taylor による構成です

<u>Theorem</u> (Freedman–Taylor [F-T]) $\mathbb{R}^4$ と位相同型な smooth 4-manifold $\mathcal{U}$ が構成できて、$\mathbb{R}^4$ と位相同型な任意の smooth 4-manifold は $\mathcal{U}$ の中に smooth に埋め込める。

この $\mathcal{U}$ は、どんなコンパクト(4-)多様体にも smooth に埋め込めないのではないかと予想されています。どんなコンパクト 4-多様体の中にも、埋め込みの像の closure が、位相的 locally flat 4-ball になるように埋め込むことはできない、ことまではわかっています。また一意性：同様の性質をもつ $\mathcal{U}'$ があれば $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}'$ か？は、証明されていません (一意性が成立する根拠はないと思います)。

この $\mathcal{U}$ を構成するためには下の Proposition を示せば十分です。

<u>Proposition</u> (F-T). $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ の universal smoothing $H$ が一意に存在する。すなわち、$\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ と位相同型な smooth 4-多様体は必ず $H$ の中に smooth に埋め込める。また、このような性質をもつ $H'$ は常に $H$ と微分同相。

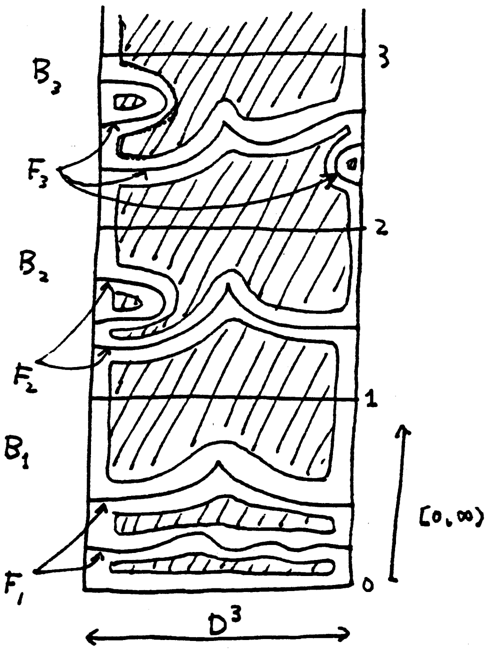
上の Proposition が言えれば $\mathcal{U} = \mathrm{Interior}(H)$ とすればよいのです。実際、任意の Exotic $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{R}$ に対し、$\mathcal{R}$ の end に向っていく smooth arc をとり、その管状近傍を用いれば $\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^4 \cup$ (open 3-disk のバウンダリー) の smoothing に拡張でき、これは $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ の smoothing だと思えるからです。

Proposition の $H$ を構成するために、$\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ を $D^3 \times [0,\infty)$ と書きなおします (角は適当にとります)。次に

$i(n)$　$n=1,2,\cdots$ を、例えば $1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,\cdots$ というように、どの自然数も無限回現われるような数列とします。次に Casson Handle の可算列 $\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2), \cdots$ をとるのですが、これは、任意の Casson Handle $\mathcal{H}'$ に対しある $\mathcal{H}(i)$ が、バウンダリーが一致するように $\mathcal{H}'$ に smooth に埋め込めるというようにします。前セクションの定義から、Casson Handle の Link 表示は非可算無限個あるのに、このようなことができるというのは、どんな Casson Handle に対しても、その6段目までの中に、ある Casson Handle が埋め込める、という Freedman の発見があるからです。従って可算個の可能性しかない6段タワー各々に対してそれに含まれる Casson Handle をとればいいわけです。

次に各 $\mathcal{H}(i)$ に対し、位相的 Core $\mathcal{C}(i)$ をとります。($\mathcal{C}(i) \approx D^2$) この $\mathcal{C}(i)$ は、実際には中心の1点以外で smooth にとれることがわかります。従ってこの1点を中心とする、small 4-ball $B(i)$ (= standard 4-ball) をとって、$F(i) \equiv B(i) \cap \mathcal{C}(i)$ は、$B(i)$ の中心以外では smooth な、locally flat surface で、$\partial F(i) \subset \partial B(i)$ は、smooth link とすることができます。

そこで $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}(i(n))$, $B_n = B(i(n))$




$F_n = F(i(n))$, $L_n = \partial F_n$ とおき、$D^3 \times [0,\infty)$ の各 $D^3 \times [n-1,n]$ に $B_n$ を $L_n \subset \partial D^3 \times (n-1,n)$ となるように並べます(smooth に埋め込み：右図)。次に、各 $F_n$ の近傍に、(surface $F_n$ 上の unique $C^\infty$ structure) × (fiber $\mathbb{R}^2$) の形の smooth structure をとります。これは $D^3 \times [0,\infty)$ の smooth structure と一般には compatible ではありませんが、$\partial F$ の付近では $\partial(D^3 \times [0,\infty))$ の $D^3 \times [0,\infty)$ における近傍の smooth structure と一致

しています。そこで $D^3\times[0,\infty)$ における $\partial(D^3\times[0,\infty))\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n)$ の近傍（前ページの図の白い部分）に smooth structure が入ったわけですが、この smooth structure は Quinn の結果（$\pi_{n-1}(Top(4)/O(4))=0,\ n\leq 3$）と immersion theory から全体（図の ▨ 部分）へ拡張され、これによって $D^3\times[0,\infty)$ の smooth structure が得られます。これが Proposition の Universal half-space $H$ です。

このHが Proposition にのべたような universality をもつことは次のように証明されます。$L$ を $D^3\times[0,\infty)$ の任意の smooth structure（smooth 4-manifold）とします。このとき $(D^3\times[0,\infty))\times[0,1]$ に smooth structure $W^5$ をとって $(D^3\times[0,\infty))\times(0)$ では $L$ $(D^3\times[0,\infty))\times(1)$ では $H$ となるようにすることができます（smooth h-cobordism）。そこでこの h-cobordism の flow の singularity に触れないように (smooth) proper half-open arc $\gamma\subset H$ をとって、smooth なうめこみ $W^5\supset\gamma\times[0,1]$ をとります。次にこの近傍 $n(\gamma)\times[0,1]$ の smooth structure を $H\times[0,1]$ でとりかえます。少し説明が大ざっぱになりますが、

この $W'=$（$W$ の $n(\gamma)\times[0,1]$ を $H\times[0,1]$ でとりかえたもの）は smooth product cobordism になります。それはどうしてかというと、本質的な問題となるのは（½）-レベルでの 2-handle と 3-handle の handle cancellation ですが、このための Whitney trick を行なう部分に Casson Handle $\mathcal{H}'$ がとれます。必要ならより小さいものととりかえることによって $\mathcal{H}'=\mathcal{H}(i)$ （$\exists i$）とできます。