

TOPOLOGY NEWS

★ 特異点の幾何

★ 文献リスト

★ お知らせ

NO. 6

1979年10月

2.

この状況で2つの問題が自然に生れてくる。

才1の問題 『与えられた φ に対し、一番わかりやすい標準型を与えること』

この問題に関し多少とも研究されているのは、 $k=1$ のときで、更に、 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ (Hessian matrix) が非退化なら、Morse に依って、標準型

$$\varphi(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2$$

となる。それ以外の場合には一般には難しいが、Thom, Boardman, Arnold, Mather, Fukuda 等の研究が目立っている。([3], [30], [31], [33], [18])。

上の問題はまた次のようにいえることができる。

「与えられた φ, φ' に対し、どのような条件の下で φ と φ' を同一視 (同値) するか?」

これに対し、2, 3の候補があるがどれも一長一短である様だ。例えば、右同値, 右左同値, 位相的同値 etc. 但し, *simple singularity* と呼ばれる特別の class に限れば, 上の問題は Arnold により美しい結果がえられている。

才2の問題 『与えられた φ を無限小に変形して得られる写像 φ' はいかなるものが可能か?』

$k=1$ の時は Thom, Mather に依り "unfolding" の理論としてかなり整理された理論があるが, それも孤立特異点の時だけで, それ以外及び $k \geq 2$ に関しては何もわかっていない. ([30], [18]).

(b) 多様体 (代数的および解析的) としての特異点.

$f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, f_k(z_1, \dots, z_n)$ を n 変数の解析関数とすると, 集合

$$V(f_1, \dots, f_k) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_j(z) = 0, j=1, \dots, k\}$$
 を考える. $0 \in V$ としよう.

$\text{rank} \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} (0) \right) = k \quad (k \leq n)$ のときには, 逆関数定理により, V は 0 の近傍で, \mathbb{C}^{n-k} と同相になるが, rank が下がっているときはどのような位相空間になるか? この場合次の2つの結果が近年の種々の研究発展の動機ともいえるものである.

(1) Mumford の結果: $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ で原点が孤立特異点の場合, V は 0 の近傍で決して位相的にも多様体にはならない, ([20]).

(2) Brieskorn の結果: 超曲面 $V = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_n^{a_n} = 0\}$ ($a_i \geq 2$, 整数)

4.

を考える。 V と単位球面 $S = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ との交わりを $K(a)$ とする。 $a = (a_1, \dots, a_n)$ を適当に動かすと全ての σ -paralligable な多様体の境界として表せるエキゾチック球面が現れる。この発見は当時、複雑な構成を通してしか *exotic spheres* をみられなかったトポロジストのみならず、広範な数学者達の話題をさらったであろう。1965年頃である。

Milnor はこの結果に刺激を受け、超曲面の特異点の研究に現在まで有効な手段として使われている Milnor 束を開発した。その後、この方面では Brieskorn を獲頭とするドイツ学派、フランスの Lê, A'Campo 等 Thom の精神的影響を受けた group 及び Polytechniques の Tisserand を中心とした広中氏の弟子達、Arnold の下の Kouchnirenko, Varchenko etc., アメリカにおける Orlik, Dufee 等など、日本においては斎藤恭司氏を中心に最近の若い人のグループ、福田拓生氏を中心とするグループ、無諸属として、坂本幸一、岡 睦雄、加藤十吉 etc. などが活発な研究をしている ([H1]-[B3])。

(c) ベクトル場の特異点 多様体 M 上のベクトル場 X

が与えられた時, $X(p) = 0 \in T_p M$ なる p を X の特異点ということがある. L_X (X の Lie 微分) に依って定まる $T_p(M)$ 上の線形変換が退化している際の標準形を求めることは非常に重要なことと思われるが, この方面での研究は私の知る限り余り進展していないようだ.(?).

(d) 微分方程式 特に Pfaff 方程式としての特異点.

1-form $\omega_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \omega_k(z_1, \dots, z_n)$ が integrable であるとし, $\text{rank}(\omega_1, \dots, \omega_k)$ が k のときは Frobenius の定理として知られている様に $n-k$ 次元の積分多様体が各点を指定した時に存在する. rank が下がるころでは, 余りよくわからないが最近の Malgrange の研究が著しい, ([17]). その他には特異点の名で呼ばれているものが沢山あるだろうが, ここではこの位にして, 以下で (a), (b) に関する現状, 今後の見通しについて考えよう.

§2. 現状.

(I). 超曲面の特異点. この分野は Milnor 以来, Orlik, Lê, A'Campo, Brieskorn, Saito, Oka,

6.

Sakamoto, Lazzeri 等 色々の結果がえられ、易しい向題で面白いものは全んどない? 最近では有藤恭司が古典的アール積分の理論の拡張として孤立特異点をつかまえようとしているそうだが、未だ完成に到っていないようである。又、Kashiwara, Malgrange はモノドロミーの固有値と B-関数の根の対応を示し、その後何人かの数学者が追跡しているようだが、この二つの一見相異なる概念のギャップをうめる理論は不完全なままである。特に孤立しない特異点の場合 B-関数の次数と Milnor 束のファイバーの Betti 数の関係など今後の研究に待つ所が多い。Arnold 内下の Kouchnirenko はニュートン境界が非退化のとき、孤立特異点の Milnor 数がニュートン境界のニュートン数と一致することを示した。Karchenko その他若いロシアのグループはこれを振動積分に応用を試みている。一方小生も長年ニュートン境界に類似の概念を試行錯誤していたが、Kouchnirenko の仕事に hint を得、非退化のニュートン境界をもつ擬斉次多項式の Milnor 束を完全に決定することに成功し、又これまでの雑多な諸結果をニュートン境界を通して再構成を試みている。Li を中心とす

るフランスグループは Thom の *ideam* に刺激されて、*relative cycles* の理論を研究、非孤立特異点の研究に一つの有力な手段を提供している。又、Brieskorn の下の若き数学者 Slodowy は *simple singularity* と Lie 環の分類に現れる A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 がどのように実際の幾何学を通して対応しているかを *simple Lie 群* の "nilpotent" な概念を使って示し、最近の話題の一つとなっている。

又長年の懸案になっていた Zariski 予想は本年5月に Fulton に依って解かれた模様である。

(II) 多項式写像としての特異点

福田拓生は $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の次数を固定すればその "位相型" が *topological equivalence* の下で有限である事を示したがこの現象は一般に $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ なる多項式写像には成立しない様である。 $k=2$ のときは福田グループで青木がよい結果を出しているが、一般的解決には程遠いと思われる。又 *Unfolding* の概念を $k \geq 2$ のときに拡張することが望ましいが、著しい結果は何もないようである。

その他孤立特異点の変形 ([10], [25]) について,

良い結果があるようだが、小生の能力の限界に近づいてきたので割愛する。

以上雑にのべてきたが、特異点の理論はオ一次低連期の末期にあるといえるかも知れない。これからは最新のドリルでも崩壊しないと新しい鉱脈を掘りあてるのは難しいがもしれない。しかしながら、小生は個人的には多少とも楽天的見通し（根拠はないが）を期待している。

末尾に文献をつけたが、勿論、これは完全なものではない。

参考文献

1. A'Campo, N; Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, Indag. Math. 35, 1973.
2. La fonction de zeta d'une monodromie, Comm. Math. Helv. 50, 1975
3. Arnold, V.I. Normal forms for functions and singularities of projections of Lagrangean manifolds, Funct. Anal. Appl. 6, 1972.
4. Brieskorn, E. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math. 2, 1966.
Die monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta. Math. 2, 1970.
5. Deligne, P. Equations Différentielles à points singuliers réguliers, Springer Lecture Note 163.
6. Burfee, A. Diffeomorphism classification of isolated hypersurface singularities, Thesis, Cornell Univ. 1971.
7. Hamm, H. Local topologische Eigenschaften komplexer Räume, Math. Ann. 191, 1971.

8. Hamm, H. and Le Dung Trang, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann.Sci. l'Ecole Nor. Sup.6,1973.
9. Hironaka, H, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II, Annals of Math.79, 1964.
10. Kas, A and Schlessinger, M. On the Versal Deformation of a Complex Space with an isolated singularity, Math. Ann. 196, 1972.
11. Kato, M and Matsumoto, Y. On the connectivity of the Milnor fiber of a holomorphic function at a critical point. Manifold Tokyo, 1973.
12. Kouchnirenko, A.G. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math. 32, 1976.
13. Hefez, A. and Lazzeri, F. The intersection matrix of Brieskorn singularities, Invent. Math. 25, 1974.
14. Lê Dũng Tráng, Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, Ann. Inst. Fourier Grenoble '73, 1973
Sur les noeuds algébriques, Comp. Math. 25, 1972.
15. Lê and Ramanujam. The invariance of the Milnor number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math. 98, 1976.
16. Looijenga, E. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity, Invent. Math. 23, 1974.
On simple elliptic hypersurface singularities,
17. Malgrange, B. Le polynome de Bernstein d'une singularité isolée. Springer Lecture note 459.
Frobenius avec singularité, I. II. Invent.
18. Mather, J. Stability of C^∞ -Mappings I. II. III. IV. V. 1968
19. Milnor, J. Singular points of complex hypersurfaces Annals of Math. Studies 61.
20. Mumford, D. Topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. I.H.E.S.9, 1961.
21. Oka, M. On the bifurcation of the multiplicity and the topology of the Newton boundary, I. II. J. OF Math. Soc. Japan, 1979.

22. Orlik and Milnor, Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, *Topology*, 9, 1970.
23. Orlik, P. The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point.
24. Pham, F. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales, *Bull. Soc. Math. France*. 93, 1965.
25. Pinkam, H. Deformations of algebraic varieties with G_m action, *Asterisque* 20, 1974.
26. Saito, K. Einfach-elliptische Singularitäten, *Invent. Math.*, 23, 1974.
27. Sakamoto, K. Milnor fiberings and their characteristic maps, *Manifold Tokyo*. 1973.
28. Siersma, D. Classification and deformation of singularities, *THESIS*, Amsterdam, 1974.
29. Wagreich, P. Elliptic singularities of surfaces, *Amer. J. Math.* 92, 1972.
30. Wassermann, G. Stability of unfoldings, *Springer Lecture Note No. 393*.
31. Fukuda, T. *I.H.E.S*, 1978.
32. Teissier, B. *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, *Asterisque* 1973.
33. Thom, R. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Benjamin.

PREPRINTS

III

W. Meeks[^] and S. T. Yau, The classical Plateau problem and the topology of three dimensional manifolds. (東工大・落合豊行氏)

W. Meeks III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. (東大・理・服部晶夫氏)

Smith の予想の解決については前号でお知らせしましたが、その際に使用される equivariant Dehn's lemma が示されている。

W. Fulton, On the fundamental group of the complement of a nord curve. (東大・養・加藤十吉)

Zariski の予想と呼ばれている問題の解決がなされている。証明の outline が与えられている。基本的な論文が Ann. of Math. に発表されるとのこと。又、Deligne の手紙もある。(岡 睦雄氏の提供による。)

次頁のプレプリントは足立正久氏の御好意による。

- UN THÉOREME DE THURSTON ETABLI AU MOYEN DE L'ANALYSE NON STANDARD ...1
 par G. REEB (Strasbourg) et P. SCHWEITZER, s.j. (Strasbourg et Rio)
- COMPACT KÄHLER MANIFOLDS OF POSITIVE BISECTIONAL CURVATURE¹ ...17
 by Yum-Tong Siu and Shing-Tung Yau
- DIFFERENTIAL CHARACTERS AND GEOMETRIC INVARIANTS ...25
 by Jeff Cheeger and James Simons
- Clifford bundles, immersions of manifolds and the vector field problem ...22
 by H.B. LAWSON, Jr. and M.L. MICHELSON
- The Classification of Simply Connected Manifolds of Positive Scalar Curvature ...11
 by Mikhael Gromov and H.Blaine Lawson, Jr.
- Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I ...22
 by Mikhael Gromov and H.Blaine Lawson, Jr.
- The existence of minimal immersions of 2-spheres ...24
 by J. Sacks and K. Uhlenbeck
- A THEOREM ON ALMOST ANALYTIC EQUISINGULARITY ...12
 by Tzee-Char KUO and J.N. WARD
- SUR CERTAINES VARIÉTÉS À GÉODÉSQUES TOUTES FERMÉES ...5
 by Marcel Berger
- Sufficiency of Jets via Stratification Theory ...8
 by Tzee-Char Kuo & Yung-Chen Lu

お 知 ら せ

TOPOLOGY NEWS は今回でNO.6となりますが、NO.1以来編集発行のすべてをなさられてこられた冠尾靖也氏が健康を害され、小生が今回は担当しました。前回迄と比較して情報量が少ないことをお詫し下さい。発行にこぎつけられたのも、岡睦雄氏と足立正久氏の御協力のためものと感謝しております。

加 藤 十 吾

