TOPOLOGY NEWS

NO.2　1977年10月

トポロジー・トポロジストあれこれ

前回につづいて位相幾何学シンポジウム第12回から第16回までの講演者名を記録してみました。参加者も第16回から100名を越えるようになり，だんだんと盛会になるようすがうかがえます。懇親会などで有名な「戸田先生の逆立ち」が見られたのも第12回あたりだったかと思います。講演の内容がわかれば，その当時の研究対象や方法の一端がわかるかと思いますので，そのいくつかを抜き書きしてみました。

1956年～1957年頃で，

☆ 写像空間 $\{S^n \to S^n\}$ について（$\pi_{n+1}(S^{n+1})$ の Hopf invariant との関係）

☆ $S^{31} \to S^{15}$ の Hopf invariant は 1 でない。

☆ 対称群 Gp の作用する複体の homology や homotopy について

☆ Cohomology operation を利用して $\pi_{i+3}(S^3)$ の 2-成分が $i \leq 22$ で計算できる。

☆ 古典リー群の homology や homogeneous spaces の胞体分割

☆ Adem relation の証明

☆ Fibre bundle のスペクトラル系列の reduced powers

☆ Knot の genus（Knot の genus がそのアレキサンダー多項式の次数の半分になる十分条件）.

今日では常識(?)となっているような基本的な事柄が未だ明らかではなかった時代です。（20年前!!）

第12回　1962年9月5日～9月7日，金沢大.
(14-241)　約160名（微分幾何，多変数函数論と合同）
戸田宏（京大），斉藤喜宥（京大），足立正久（名大）
（以上トポロジー関係のみ）

第13回　1963年8月27日～8月29日，浅虫，約70名
(16-115)　三村護（京大），松川りエ子（日本女子大），
小林貞一（東京教育大），安藤豊（名大），石川暢洋（福岡学芸大）
工藤慶子（早大）

第14回　1964年10月13日～10月15日，山口大，約90名
(16-244)　戸田宏（京大），荒木捷朗（阪市大），足立正久（名大），
小林貞一（京大），野口宏（早大），本間竜雄（横浜国大）

第15回　1965年7月20日～7月22日，北大，約60名
(17～171)　野村泰敏（名工大），渡部剛（新潟大），児玉之宏（東京教育大）
竹内勝（東大），志賀浩二（東工大），可知偉行（名大）
上部恒和（京大）

第16回　1966年7月18日～7月20日　御殿場，約100名
(19-51)　四方義啓（大阪市大），渡部剛（新潟大），鈴木治夫（九大），
笹尾靖也（東京女子大），小林一章（神戸大），可知偉行（名大）
垣内伸彦（愛知大），上部恒和（京大），内田伏一（東北大）
小林貞一（京大），

53年のトポロジー・シンポジウムは「新潟大学」で行なわれる予定です。

―特　集― Poincaré予想

I. 閉曲面の写像類群とPoincaré予想（鈴木晋一）

§1. 記法と定義

3次元球面 S^3 の種数 n の Heegaard 分解が与えられているとする。即ち，

$$V_n \cong W_n \cong (D^2\times S^1) \natural \cdots \natural (D^2\times S^1) \quad (n\text{個})$$

に対し，　$V_n \cup W_n = S^3$，　$V_n\cap W_n = \partial V_n \cap \partial W_n = \partial V_n = \partial W_n$，
$\partial V_n = F_n$（種数 n の有向閉曲面）。

$R: S^3 \to S^3$ を方向逆転の（周期2の）同相写像とし，$R(V_n)=V_n'$，$R(W_n)=W_n'$，$R(F_n)=F_n'$ 等と表わす。

F_n 上の一点 $*$ を基点とする $2n$ 本の単純閉曲線
$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$　を

(イ)　$\pi_1(F_n,*) \cong \langle a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n \mid \prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\rangle$

但し，$[a_i,b_i]=a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$

となるように選ぶ。更に，$i_V: F_n\to V_n$，$i_W: F_n \to W_n$ を包含写像とするとき，

(ロ)　$\begin{cases} i_V(a_i)=\hat{a}_i, & i_V(b_i)=1 \\ i_W(a_i)=1, & i_W(b_i)=\hat{b}_i \end{cases}$　$(1\le i\le n)$ であって，

$$\pi_1(V_n,*)=\langle \hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_n\rangle,\quad \pi_1(W_n,*)=\langle \hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_n\rangle$$

であると仮定する。（こゝで曲線とそのホモトピー類とを区別せずに用いている。）次の同相写像の群を考える。

$\mathcal{H}(n)$ = 方向保存の同相写像 $F_n\to F_n$ の全体の作る群，
$\mathcal{A}(n) = \{\varphi\in\mathcal{H}(n) \mid \varphi$ は V_n の同相写像に拡張できる。$\}$，
$\mathcal{B}(n) = \{\varphi\in\mathcal{H}(n) \mid \varphi$ は W_n の 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $\}$，
$\mathcal{D}(n) = \{\varphi\in\mathcal{H}(n) \mid \varphi \simeq id.$ (isotopic) $\}$。

$\mathcal{D}(n) \lhd \mathcal{H}(n)$（正規部分群），$\mathcal{D}(n)\lhd\mathcal{A}(n)$，$\mathcal{D}(n)\lhd\mathcal{B}(n)$
である。剰余類群

$$\mathcal{M}(n) = \mathcal{H}(n)/\mathcal{D}(n)$$

を種数 n の閉曲面 F_n の写像類群 (mapping class group) という。（isotopy group, homeotopy group 等と呼ぶこともある。）

$$J_V(n) = \mathcal{A}(n)/\mathcal{D}(n),\qquad J_W(n)=\mathcal{B}(n)/\mathcal{D}(n)$$

と定義する。$\varphi\in\mathcal{H}(n)$ の isotopy 類を $[\varphi]$ と表わす。

任意の $[\psi] \in \mathcal{M}(n)$ には、$\psi(*)=*$ をみたす代表元 ψ がとれるから、自己同型 $\psi_\# : \pi_1(F_n, *) \cong \pi_1(F_n, *)$ が誘導される。各 $[\psi]$ に対し、$\psi_\#$ は内部自己同型を法として $Aut(\pi_1(F_n, *))$ の元が唯一つ定まる。この逆は Nielsen [14], Manglar [13], Maclachlan [12], 等により示されているので、同型

$$\iota : \mathcal{M}(n) \cong Aut(\pi_1(F_n, *))/Inn(\pi_1(F_n, *)) \ ; [\psi] \mapsto \langle \psi_\# \rangle$$

が存在する。

§2. 有向3次元閉多様体の Heegaard 分解

$\mathcal{H}(n) \ni \rho : (F_n, *) \longrightarrow (F_n, *)$ を

$$\rho(a_i) = a_i^{-1} b_i a_i \quad , \quad \rho(b_i) = a_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

なる同相写像とする。（ρ は容易に作れる。[16] 参照）。このとき、任意の $\psi \in \mathcal{H}(n)$ に対して、有向3次元閉多様体 $M(\psi)$ を、V_n と V_n' から、∂V_n と $\partial V_n'$ を

$$x \in \partial V_n \quad に対し、\quad \psi(x) = \rho R(x)$$

と同一視してえられたものと定める。$M(\psi) = V_n \underset{\psi}{\cup} V_n'$ と書いて、$M(\psi)$ の Heegaard 分解という。次は明らかである。

2.1. $M(id) \cong S^3$, 2.2. $[\psi]=[\varphi] \in \mathcal{M}(n) \Rightarrow M(\psi) \cong M(\varphi)$.

$\psi \in \mathcal{H}(n)$ について、$\psi_\# ; \pi_1(F_n, *) \cong \pi_1(F_n, *)$ が

(ハ) $\psi_\#(a_i) = A_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$, $\psi_\#(b_i) = B_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$

$(i=1, \cdots, n)$ と $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ の words で表わされたとする。$M(\psi) = V_n \underset{\psi}{\cup} V_n'$ に Van-Kampen の定理を適用すれば、

(ニ) $\pi_1(M(\psi)) \cong \langle \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n \mid A_i(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n, 1, \cdots, 1), i=1, \cdots, n \rangle$

が成立する。（(ロ), (ハ) による。）

§3. Homology 球面の特徴付け。

$\psi \in \mathcal{H}(n)$ は同型 $\psi_* : H_1(F_n ; \mathbb{Z}) \cong H_1(F_n, \mathbb{Z})$ を誘導する。$H_1(F_n; \mathbb{Z})$ は $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ (の homology classes) を基底とする階数 $2n$ の自由アーベル群（または自由 $\mathbb{Z}$-加群）だから、ψ_* はこの基底に関して $\mathbb{Z}$ 上の $2n \times 2n$ sympletic 行列で表現される。実際、(ハ) を homology で、

(ハ)′
$$\begin{cases} \psi_*(a_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i\,k}\, a_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i\,n+k}\, b_k , \\ \psi_*(b_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+i\,k}\, a_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+i\,n+k}\, b_k \quad (i=1, \cdots, n) \end{cases}$$

と書けば、ψ_* は行列 (α_{rs}) で表わされる。そこで、準同型 $\alpha : \mathcal{M}(n) \longrightarrow Sp(2n, \mathbb{Z})$ を $\alpha([\psi]) = (\alpha_{rs})$ で定義し、$K(n) = Ker\, \alpha$ と定義する。

3.1. 定理 (Birman [2])　$M(\psi) = V_n \underset{\psi}{\cup} V_n'$ が homology 球面である為の必要十分条件は，$[\psi] \in J_V(n) K(n) J_W(n)$ である。

この証明は行列の symplectic 条件を用いてなされる。この定理を利用して多数の homology 球面が作られている．(Birman - Craggs [5]，Birman [3])。

$J_V(n)$，$J_W(n)$ の $Aut(\pi_1(F_n, *))/Inn(\pi_1(F_n, *))$ の部分群としての特徴付けが次によりなされる (Griffiths [8, 9]).

$\imath : J_V(n) \cong \{ \langle \psi_\# \rangle \mid \psi_\#(N(b_1, \cdots, b_n)) \subset N(b_1, \cdots, b_n) \}$,

$\imath : J_W(n) \cong \{ \langle \psi_\# \rangle \mid \psi_\#(N(a_1, \cdots, a_n)) \subset N(a_1, \cdots, a_n) \}$,

但し，$N(x_1, \cdots, x_r)$ は $x_1, \cdots, x_r$ を含む $\pi_1(F_n, *)$ の最小の正規部分群を表わす。

§4. Poincaré 予想と $\mathcal{M}(n)$.

次の定理に注目する。

4.1 定理 (Birman [2])　$M(\psi) = V_n \underset{\psi}{\cup} V_n'$ が S^3 である為の必要十分条件は，$[\psi] \in J_V(n) J_W(n)$ となることである。

もちろん $J_V(n) J_W(n)$ は $\mathcal{M}(n)$ の部分群にはならない。必要性の証明は本質的に Waldhausen [17] の定理を利用する。十分性の証明は難かしくはない。この定理により Poincaré 予想は $\mathcal{M}(n)$ の言葉で次のように述べられる。

4.2 系 (Birman [2])　Poincaré 予想と次の事実は同値；$[\psi] \in J_V(n) K(n) J_W(n)\ (\subset \mathcal{M}(n))$ に対し，$\psi_\#$ が(ハ)により与えられ，$\pi_1(M(\psi))$ が(ニ)により表示されているとしたとき，

$$\pi_1(M(\psi)) = 1 \implies [\psi] \in J_V(n) J_W(n).$$

§5. $\mathcal{M}(n)$ の現状.

Poincaré 予想の写像類群 $\mathcal{M}(n)$ の方面からの approach が少々話題になるのは，それが 3 次元多様体論との結び付きだけではなく，Riemann 面の理論や自由群上の同型群の問題と深くかゝわり合っていることによるのであろう。

1. Riemann 面との関係については，Harvey - Maclachlan [10],

Maclachlan [12]等を参照されたい。

2. 自由群上の自己同型群との関係は，Birmanの最近の本[1]に詳しい。これには$\mathcal{M}(n)$に関するかなり詳しい文献表がある。

3. $\mathcal{M}(n)$の生成元は，古くDehn [6]により与えられた。近年，Lickorish [11]，Birman [2]等によって再証明されている。それらは，F_n上の$3n-1$本の単純閉曲線に関するDehn twistsと呼ばれる単純な写像からなる。それらの定義関係式については，$n=1$の場合は，$\mathcal{M}(1) \cong Sp(2, \mathbb{Z})$だから別格，$n=2$についてはBirman-Hilden [4]，$n \geqq 3$については全く知られていない。

4. §3と§4により，$J_V(n)$，$J_W(n)$が重要になるが，これらは$\mathcal{M}(n)$の中で互にconjugateであるから一方のみを調べれば十分である。$J_V(1)$についてはその構造がよく知られているが，$J_V(2)$の生成元はGoeritz [7]によって与えられていた。$J_V(n)$，$n \geqq 3$，については，最近，Suzuki [16]により，その生成元が6個の同相写像のisotopy classesにより与えられた。定義関係式については$J_V(n)$，$n \geqq 2$，について全く知られていない。

また，最近のBirman [3]によれば，任意の3次元閉多様体は，適当なn'と，$\psi \in \mathcal{A}(n')$が存在して，

$$M \cong M(\psi) \cong V_{n'} \underset{\psi}{\cup} V_{n'}$$

と表わせるとのことで，$J_V(n)$の役割が増している。

5. §3の$K(n)$も重要だがその構造については知られていない。

6. $\mathcal{A}(n) \cap \mathcal{B}(n)$も3次元多様体との関連で興味深い群であるが，Powell [15]がある種のstableな生成元を決定したとのことだが，まだ，Preprintsは届いていない。

Reference

[1] Birman,J.S. : Briads, Links and Mapping Class Groups, Ann. of Math. Studies #82, Princeton Univ. Pr. 1974.

[2] ———— : Poincare conjecture and the homotopy group of a closed 2-manifold, J. Aust. Klath. Soc. 17(1974), 214-221.

[3] ———— : Special Heegard splittings for closed oriented 3-manifolds, (preprint).

[4] ———— and Hilden,H.M. : On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces, Ann of Math. 97(1973), 424-439.

[5] ———— and Craggs,R : The μ-invariant of 3-manifolds and certain structural properties of the group of homeomorphisms of a closed, oriented 2-manifolds. (preprint).

[6] Dehn,M. : Die Gruppe der Abbildungeklassen, Acta Math. 69(1938), 135-206.

[7] Goeritz,L. : Die Abbildungen der Brezelflachen und der Vollbrezel Vom Geschlecht 2, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 9(1933), 244-259.

[8] Griffiths. H.B. : Automorphisms of a 3-dimensional handlebody, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 26(1964), 191-210.

[9] ———— : Some elementary topology of 3-dimensionl handle-bodies, Comm. Pure and Appl. Math. 17(1964), 317-334.

[10] Harvey.J. and Maclachlan.C. ; On mapping class groups and Teich Teichmuller spaces, Pro. London Math. Soc(3), 30(1975), 496-512.

[11] Lickorish.W.B.R. : A finite set of generators for the homotopy group of a 2-manifold, Proc. Camb. Phil. Soc. 60(1964), 769-778.

[12] Maclachlan.C. : Modular groups and fibre spaces over Teichmuller spaces, Ann.of Math. Studies #79. Princeton Univ. Pr. 1974, 297-313.

[13] Mangler.W. : Die Klassen topologischer Abbildungen einer geschlossener Flachen auf sich, Math.Z. 44(1939), 541-554.

[14] Nielsen.J. : Untersuchen zur Topologie der geschlossen zweiseitigen Flachen I, Acta Math. 50(1927), 184-358.

[15] Powell.J. : Ph.D. Thesis, Colombia Univ, 1977.

[16] Suzuki.S. : On homeomorphisms of a 3-dimendional handlebod~~ies~~y, Canad.J.Math. 29(1977), 111-124

[17] Waldhausen.F. : Heegaard Zerlegungen der 3-Sphre, Topology 7(1968) 195-203.

II. Poincaré予想と群論的問題.　（丸本嘉彦）

有向3次元閉多様体 M の Heegaard 分解を $M = V_1 \cup V_2$ と表わす。但し、$T = V_1 \cap V_2 = \partial V_1 \cap \partial V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ は種数 g の有向閉曲面であるとする。次の基本群の可換図式を考える。（基点はT上にとられているとする。）

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(V_1) \arrow[dr, "i_*"] & \\
\pi_1(T) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\varphi\times\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(V_1)\times\pi_1(V_2) \\
 & \pi_1(V_2) \arrow[ur, "j_*"'] &
\end{tikzcd}$$

こゝで、φ, ψ, i_*, j_* はいずれも包含写像から誘導されたものである。φ, ψ は全射である。

$$\varphi\times\psi : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(V_1)\times\pi_1(V_2)$$

を $\pi_1(T)$ の (V_1, V_2) から誘導される splitting homomorphism という。一般に、自由群 F_g への全準同型

$$\eta_i : \pi_1(T) \rightarrow F_g \quad , \quad i=1,2, \quad に対し、$$

$$\eta_1\times\eta_2 : \pi_1(T) \longrightarrow F_g\times F_g$$

のことを $\pi_1(T)$ の splitting homomorphism という。

定理1（Stallings [12]）　splitting homomorphism $\varphi\times\psi : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(V_1)\times\pi_1(V_2)$ が全射であることと M が単連結であることとは同値である。

さらに Poincaré予想に関係して次が成立する。

定理2（Stallings [12], Jaco [3]).　Poincaré予想と次は同値である；　$\pi_1(T)$ の splitting homomorphism $\eta_1\times\eta_2 : \pi_1(T) \longrightarrow F_g\times F_g$ $(g \geqq 2)$ に対し、surface T 上の単純閉曲線 α で、$1 \neq [\alpha] \in Ker(\eta_1\times\eta_2)$ となるものが存在する。こゝで、$[\alpha]$ は $\pi_1(T)$ における α の homotopy 類である。

この定理における simple loop α の存在に関して、C. D. Papakyriakopoulos（Papas と略す）[8] がある。

定理3.（Papas. [8]）　定理2における α が存在する為の必要十分条件は次である；$\pi_1(T)$ の正規部分群 K が存在して、次の3条件をみたす。

(1) $K \subset \mathrm{Ker}(\eta_1 \times \eta_2)$,
(2) $\pi_1(T)/K$ は torsion free である,
(3) Kに対応するTの covering は planar surface である。
但し, planar surface とは 2-sphere に embed できるものをいう。

Papas の次の2つの予想がある。([8])

予想1. 種数gの有向閉曲面T ($g \geq 2$)の基本群が
$$\pi_1(T) = \langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \mid \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \rangle$$
で与えられているとき, $\pi_1(T)$の元wに対し, $W = [w, x_1] = w x_1 w^{-1} x_1^{-1}$の正規閉包($W$を含む最小の正規部分群)を$N$とすれば, $\pi_1(T)/N$ は torsion free である。

予想2. 予想1におけるNに対応するTの covering space は planar surface である。

定理4 (Papas [8]) $g \geq 2$に対し, 予想1, 2が成立すれば Poincaré 予想が成立する。

1964年 E.S. Rapaport [11] は予想1を肯定的に証明した。
1965年に B. Maskit [5] は定理3を別解釈して証明している。Mの Heegaard 分解を$M = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = T$とする。$\widetilde{V_i}$をV_iの universal cover, $\widetilde{T_i}$を$\partial\widetilde{V_i}$におけるTの逆像の component の1つとする。($i = 1, 2$) このとき, regular covering $p: \widehat{T} \to T$ が$(\widetilde{T_1}, \widetilde{T_2})$に subordinate するとは, $\widehat{T}$が$\widetilde{T_1}$, $\widetilde{T_2}$の covering であり, $\widehat{T}$がTの universal cover でないときをいう。

定理5 (Maskit [5]) 定理2における simple loop αが存在するための必要十分条件は, regular covering $p: \widehat{T} \to T$で, $\widehat{T}$が planar surface で, $(\widetilde{T_1}, \widetilde{T_2})$に subordinate するものが存在することである。

未解決の予想2に関して Papas は次の問題を attack した。

問題. Tを種数gの有向閉曲面, $w \in \pi_1(T)$ の正規閉包をNとし, $\tilde{T}$をNに対応するTの regular covering とする。$\tilde{T}$は planar surface か?

これに対して未解決であるが Papas [10] の結果がある。Stallings は別の予想を出している。([12])

G, A, Bを群とし, $\varphi: G \to A * B$ を全準同型とする。このとき, "ヨ$x \in A*B$が存在して, $x \cdot \varphi(G) \cdot x^{-1}$がAヌはBに含まれる" ということが成立しないとき, φは essential であるという。

予想 3 (Stallings [12]) $G = \langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \mid \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \rangle$ $F_n =$ 階数nの自由群, $\eta: G \to F_n \times F_n$ を全準同型とする。$n \geq 2$ とすれば, 2つの群 G_1, G_2 が存在して次をみたす。

(1). $\psi_1: G \to G_1 * G_2$ で essential なものが存在する。
(2). $\psi_2: G_1 * G_2 \to F_n \times F_n$, 準同型, が存在する。
(3). $\eta = \psi_2 \cdot \psi_1$ である。

この予想とPoincaré予想は同値となる。すなわち,

定理 6. 予想3が成立すればPoincaré予想が成立する。(Stallings [12]). 逆に, Poincaré予想が成立すれば予想3が成立する (Jaco [13])。

W. Jaco による逆の成立の証明は抽象的 splitting homo. と Heegaard splitting から誘導される splitting homo との関係について研究することでなされた。

他に, Heegaard splitting からではなく, branched covering space の立場からPoincaré予想を群論的に扱っている結果もある。(Fox [1], Montesinos [6], [7])

[13] R.Traub ; Poincaré's conjecture is implied by a conjecture on free groups, J. Res. Nat. Bur. Standard Sect. B, 71 B (1967) 53-56.

[1] R.H.FOx ; A note on branched cyclic coverings of spheres, Rev. mat. Hisp.-Amer., 32(1972) 158-166.

[2] J.Hempel ; 3-manifolds, Ann. of Math. Study #86, 1976.

[3] W.Jaco ; Heegaard splittings and splitting homomorphisms, Trans. A.M.S., 144(1969) 365-379.

[4] ——— ; Stable equivalence of splitting homomorphisms, Topology of Manifilds, edited by J.C.Cantrell, Markham Pub., 1970.

[5] B.Maskit ; A theorem on planar covering surfaces with application to 3-manifolds, Ann. of Math.,81(1965)341-355.

[6] J.M.Montesinos ; Reduccion de la conjectura de Poincare a otras conjecturas geometricas, Rev.mat.Hisp.-Amer., 32 (1972) 33-51.

[7] ——— ; Una nota a un teorema de Alexander, ibid. 158-166.

[8] C.D.Papakyriakopolous ; A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures, Ann. of Math.,77(1963) 250-305.

[9] ——— ; Attaching 2-dimensional cell to a complex, Ann. of Math., 78(1963) 205-222.

[10] ——— ; Planar regular coverings of orientable closed surfaces, Ann. of Math. Study #84 (1975) 261-292.

[11] E.S.Rapaport ; Proof of a conjecture of Papakyriakopolous, Ann. of Math., 79(1963) 506-513.

[12] J.Stallings ; How not to prove the Poincaré conjecture, Ann. of Math. Study #60 (1966) 83-88.

Ⅲ. Genus two の Heegaard 分解　（落合豊行）

1974年2月、本間は「Heegaard 分解と曲面上の曲線系について」を発表した。それ以来 genus two の Poincaré 予想に対する具体的な研究がなされてきた。ここでは、これらの研究の成果を中心に genus two の Heegaard 分解から genus two の Poincare 予想を解説してみる。

§1. genus two の Heegaard 分解

genus two の二つの solid torus W_1, W_2, と境界 ∂W_2 から ∂W_1 への同相写像 $h: \partial W_2 \to \partial W_1$ が与えられたとき、∂W_2 の各点 p とその像 $h(p)$ とを同一視してできる向きづけ可能な閉3次元多様体 M を

$$M = W_1 \cup_h W_2$$

とかき、$(W_1, W_2 : h)$ を M の（genus two の）Heegaard 分解と呼ぶ。

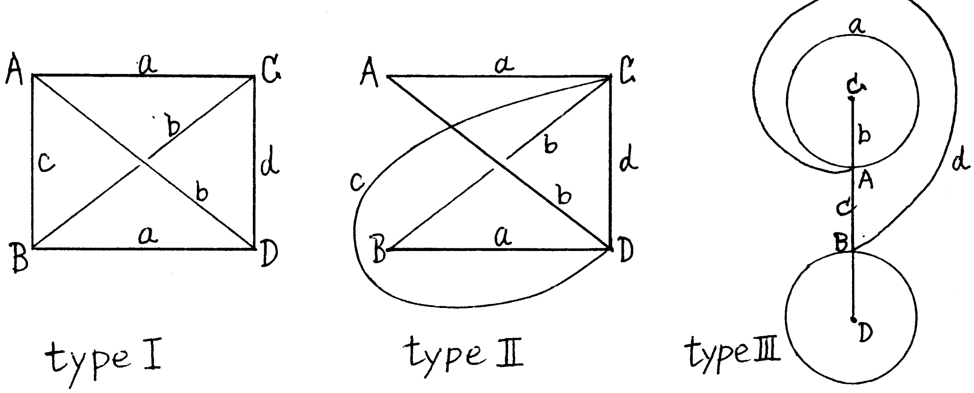
genus two の solid torus W において、互いに交わらない二個の proper な2－disk（properly embedded）D_1, D_2 があって、$W - (D_1 \cup D_2)$ が連結なとき $\{D_1, D_2\}$ を W の <u>meridian disk系</u>、$\{\partial D_1, \partial D_2\}$ を <u>meridian 系</u> と呼ぶ。

今 $(W_1, W_2 : h)$ を多様体 M の Heegaard 分解、$\{D_{i1}, D_{i2}\}$ を W_i の meridian disk系とする。そのとき、この Heegaard 分解は $\{h(\partial D_{21}), h(\partial D_{22})\}$ によって決定される。(up to homeomorphism)。以後 $\{h(\partial D_{21}), h(\partial D_{22})\}$ を fix し、∂W_1 上における位置を検討する。その為に Heegaard 分解に関する Whitehead graph を定義する。

$W_1 - \mathring{N}(D_{11}, W_1) \cup \mathring{N}(D_{12}, W_1)$ は3－cell であるので、$\partial\{W_1 - \mathring{N}(D_{11}, W_1) \cup \mathring{N}(D_{12}, W_1)\}$ は4つの2－disk $\{\partial N(D_{11}, W_1) \cup \partial N(D_{12}, W_1)\} \cap \mathring{W}_1 = \{A, B, C, D\}$ をその内点にもつ2－sphere S^2 である。

そのとき $\{h(\partial D_{21}),\ h(\partial D_{22})\}$ は $S^2-(A\cup B\cup C\cup D)$ 上の線分の族となる。そこで、これらの線分族を edge とし、2-disk の族 A,B,C,D を頂点とする多重（平面）グラフができる。この多重グラフのことを、Heegaard 分解（$W_1,W_2:h$）に対する Whitehead graph と呼ぶ。

命題1. genus two の Heegaard 分解の Whitehead graph は次の3つの多重グラフのみに限る。



但し a,b,c,d は edge の多重度である。

上記の3つの多重グラフは上下折り返しによる対称性がある。この対称性から次の定理が高橋〔32〕により、証明された。

定理1. genus two の homology 3-sphere は、3-sphere 上の knot（3-bridge）を分岐点とする、2-fold branched covering space である。（証明）高橋 construction による〔 〕。

この Theorem 1 から次のことが理解される。genus two の homology 3-sphere が 3-sphere である為の必要十分条件は分岐点の knot が unknot であることである。まず unknot であれば 3-sphere となるのは明白である。次に 3-sphere であれば、この 3-sphere は fixed point が knot であるような involution をもつ、ところが Wald hansen〔29〕によれば "S^3 の knot を fixed point とする involution においては knot は unknot である" よって分岐点は unknot である。

このことから、3-bridge knot が unknot かどうかを判定するアルゴリズムが重要となるが、Haken〔39〕の不充分なアルゴリズムを除いてはこれまでは知られていなか

った。

ここで、次のことが理解される。3-bridge knot が与えられたとき、この knotを分岐線とする 2-fold branched covering space が高橋 construction の逆をたどることによって作れる。しかもこの構成は必然的に genus two の Heegaard分解を与える。

従って genus two の Heegaard 分解が 3-sphere であるかどうかが判定できるならば始めの 3-bridge knot が unknot であるかどうかも判定できる。

§2. S^3判定のアルゴリズム

そこで、genus two の homology 3-sphere が S^3 かどうかを判定するかが問題となるが、—もちろん genus two の Poincaré 予想の第1関門としての重要性もある— これに関して本間 [35], Volodin [27] が同時に次の様なアルゴリズムを与えた。

アルゴリズム(A) genus two の homology 3-sphere が 3-sphere であるための必要十分条件はそれのどんな genus two の Heegaard 分解も、常にそれの Whitehead graph として typeⅢ をもつか、3-sphere の標準的 Heegaard splitting をもつ。

ここで Whitehead graph が typeⅢ であるとすると、常に W_1 の meridian系をとり直すことによって Whitehead graph の edgeの多重度を減らすことができる。(このことを geometric reduction と呼ぶ。)

従って、アルゴリズム(A)はその必要十分性が証明されるならば S^3-判定の完全なアルゴリズムとなる。ところで、その証明であるが、まず Volodinたちはその十分性を一般の genusで証明したが、その必要性については computer で作った 10^6個位の S^3 の Heegaard 分解に対してのみしか示せなかった。(もちろんこの場合一般の genus に対してであるが)

本間〔35〕，同じ頃，Waldhausen〔29〕の“S^3 の Heegaard 分解はすべて equivalent である”ことと Reidemeister〔20〕“genus n の solid torus の任意２つの meridian disk 系は互いに band operation で移り得る”ことに着目してこれを証明した。

§3. Dehn's surgery along 2-bridge knot.

Poincaré 予想を研究する別の手段は単連結な閉３次元多様体を knot に沿っての surgery（Dehn's surgery）から得る方法がある。

$S^3 \supset k$ を 3-sphere の knot．N（k, S^3）をそれの regular nbd である（genus 1）の solid torus．そのとき $\partial N(k, S^3) \subset S^3 - \mathring{N}(k, S^3)$ の始めの matching homeomorphism を適当にかえることによって，homology 3-sphere が得られる．（特にその matching homeomorphism が始めの trivial matching と異なるとき，non-trivial surgery という）

この方向での最初の成果は Dehn と〔8〕Bing〔1〕による trefoil knot に関する Property $\underline{P}$（non − trivial Dehn's surgery からは単連結多様体は得られない）に始まり，最近の Gonzalez-Acuna〔10〕, Riley〔22〕, Mayland, Jr〔38〕に至っている。特に Riley〔22〕は 2-bridge knot の knot group $\pi_1(S^3 - k) \longrightarrow PSL(*)$ への表現を作り，84個の classical knot に対して，8_{10}，9_n（$n = 24, 29, 32, 33, 34, 38, 39, 41, 46, 47, 49$）以外は全て Property $\underline{P}$ の成立つことを示した。残念なことにまだ 2-bridge knot 全体に対する Property $\underline{P}$ の証明はまだなされていない。

そこで，2-bridge knot の Dehn's surgery を考えてみることにすると，まず次のことがいえる。

<u>命題2.</u>（落合）2-bridge knot の Dehn's surgery から得られる閉３次元多様体は genus two の Heegaard 分解をもつ。

定理2. 命題2から得られるHeegaard分解は、もしDehn's surgeryがnon-trivialのとき、それのWhitehead graphとしてtypeⅢをもたない。

命題2から明らかの如く、2-bridge knotのProperty P はgenus twoのPoincaréに含まれる。逆にgenus twoのhomology 3-sphereで2-bridge knotのDehn's surgeryから得られないものがあると予想される。

例えば、Heegaard分解 $\left\{\begin{array}{l} a^2 = b^{-1}aba^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}bab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}aba^{-1} \end{array}\right\}$

はtorus knotのDehn's surgeryから得られるhomology 3-sphereであるが $\left\{\begin{array}{l} ab^3a = b^2a^3b^2 \\ abab^3a^4b^3 = 1 \end{array}\right.$ はそうでないであろう。

定理3. (Moser) torus knotに沿ってのDehn's surgeryによって得られる多様体は次の3つに限る。
(1) レンズspace, (2) 二つのレンズspaceのconnected sum
(3) 3つのexceptional fibersをもつSeifert fiver space.

§4. $\pi_1(M^3)$ の表示について.

§1で述べた如くにgenus twoのHeegaard分解は W_i のmeridian disk系を1つをfixすることによって完全にきまる。そこで $\pi_1(M^3)$ の表示はどうなるかをみて見よう。まず $\pi_1(M^3) = \{ s, t \mid l_1(s,t) = l_2(s,t) = 1 \}$ となる。ここで s, t は自由群 $\pi_1(W_1)$ の自由基で、∂D_{11}, ∂D_{12} のみとそれぞれ一点で交差する ∂W_1 上のsimple loopが表わす $\pi_1(W_1)$ の元である。さらに $l_i(s,t)$ $(i=1,2)$ は $h(\partial D_{2i})$ が $\pi_1(W_1)$ で生成する元で、$h(\partial D_{2i})$ のきめられた1つの方向に ∂D_{11}, ∂D_{12} との交差点でのintersection numberをたどったものとなる。従って1つのHeegaard分解は $\pi_1(M^3)$ の表示をもとにしても表現できることになる。

Ex. $\pi_1(M^3) = \{ s, t \mid st^3t^{-2}s^{-3}t^{-2} = stst^3s^4t^3 = 1 \}$

もちろん、1つのHeegaard分解の$\pi_1(M^3)$の表示による表現は、W_iのmeridian disk系をかえることによってかわる。そこで、より簡単な表現を求める方法が望まれる。まず$\pi_1(M^3)$の表示に表われる関係式$l_i(s,t)$ $(i=1,2)$の長さ$|l_i|$を、$h(\partial D_{2i})$と$\partial D_{11}\cup\partial D_{12}$との交点数の総和として定義する。

$\pi_1(M^3)=\{\tilde{s},\tilde{t}\mid l_1(\tilde{s},\tilde{t})=l_2(\tilde{s},\tilde{t})=1\}$
をHeegaard分解の別の$\pi_1(M^3)$の表示による表現とせよ。そのとき、もし

$l(s,t)=|l_1(s,t)|+|l_2(s,t)|>|l_1(\tilde{s},\tilde{t})|+|l_2(\tilde{s},\tilde{t})|=l(\tilde{s},\tilde{t})$
ならばHeegaard分解$(W_1,W_2:h)$はgeometrically reducibleと呼ぶ。

命題3. Heegaard分解がWhitehead graphとしてtype IIIをもてば、geometrically reducibleである。

定理4. (落合) Heegaard分解がWhitehead graphとして、type IIをもつとする。そのとき与えられる多様体がhomology 3-sphereならば$l(s,t)$を増やすことなくtype Iにreduceできる。

Heegaard分解の$\pi_1(M^3)$の表示$\pi_1(M^3)=\{s,t\mid l_1(s,t)=l_2(s,t)=1\}$において、$l_1(s,t)$にinverse operatition(例えば、$abab^{-2}=1\longrightarrow b^2a^{-1}b^{-1}a^{-1}=1$)か又はcyclic operatition(例えば、$abab^{-2}=1\longrightarrow bab^{-2}a=1$)をほどこすことによって$l_2(s,t)=1$に全体的にそう入できるとき、$\pi_1$-reducibleという。例えば$\pi_1(M^3)=\{s,t\mid ts^2t^2s^2t^2s^2t^2s^2ts^{-1}=t^{-2}s^{-2}t^{-2}s^{-2}t^{-3}s^{-2}=1\}$は$\pi_1$-reducibleである。

定理5. (落合) π_1-reducible $\Rightarrow$ geometrically reducible.

定理6. (本間) genus twoのHeegaard分解をもつ多様体Mは次の様な$\pi_1(M)$の表示をもつ。

$\pi_1(M)=\{s,t\mid l_1(s,t)=l_2(s,t)=1\}$

(1) $l_1(s,t)=W_0^{-1}W_1W_2W_0W_3W_4$

(2) $l_2(s,t)=(W_1W_2)^n(W_0W_3\tilde{W_0}W_2')^n$

ここで、$l_1(s,t)$はfree symmetric, W_1,W_2,W_3,W_4は

symmetric で $\widetilde{W_0}$ は W_0 の逆である（$W_0=abb$ ならば $\widetilde{W_0}=bba$）。

§5. genus two の Poincaré 予想の特殊な場合

<u>定理7.</u>（高橋）genus two の Heegaard 分解の π_1 の表示
$\pi_1(M)=\{s,t\,|\,\ell_1(s,t)=\ell_2(s,t)=1\}$ において $\ell_1(s,t)$
が $s^p t^q s^r t^v$ の形をしているとき $\pi_1(M)=0$ ならば M^3
は 3-sphere である。

<u>定理8.</u>（高橋、落合）$|\ell_1(s,t)|\leqq 11$ のとき
$\pi_1(M^3)=0$ ならば次の8つの場合を除いて M^3 は 3-sphere
である。

$|\ell_1(s,t)|=10$ のとき

(1) $b^3=a^2baba^2$ $\{(ba^3)^n\ (aba^2ba^{-2})^m=1\}$

(2) $b^3=aba^3ba$ $\{(b^2a^{-1})^n\ (aba^2b)^m=1\}$

(3) $a=b^2a^2ba^2b^2$ $\{(b^2a)^n\ (a^{-2}ba^{-1})^m=1\}$

(4) $b=ab^2a^3b^2a$ $\{(ab)^n\ (ba^{-1}b^{-2}a^{-1}b^2)^m=1\}$

$|\ell_1(s,t)|=11$ のとき

(1) $ababa=b^2a^{-2}b^2$

(2) $b^2a^{-1}b^2=aba^2ba$

(3) $ab^2ab^2a=ba^{-2}b$

(4) $ba^{-1}b=ab^2a^2b^2a$

（$|\ell_1(s,t)|=10$ のときに二番めの関係は定理6によって求めたものである）

§6. 問題点と最近の Topics

(1) $\pi_1(M)=0$ のとき π_1-reducible を示せるか？　Abstract group $G=\{x:y\,|\,xy^2=y^3x,\ yx^2=x^3y\}$ は trivial であるが genus two の Heegaard splitting に associate していない（定理6）　従って π_1-reducible を示すには、群の表示が genus two の Heegaard 分解の meridian-disk 系に associate していることを利用すべきである。

(2) $\pi_1(M)\neq 0$ を示すには、non-trivial Coxeter group $\{A,B\,|\,A^p=B^q=(AB)^r=(AB^{-1})^s=1,\ p=3,q,r,s\geqq 3\}$ への表現を作ることで可能であるが、しかしもっと Geomeric な reduction が望まれる。（例えば、Heegaard 分解 $\{a,b\,|\,ab^3a=b^2a^3b^2,\ abab^3a^4b^3=1\}$ は Coxeter group への表現をもたないのではないか？

(3) 最後に、Gonzáles-Acuña は次のことを示した。"どんな closed orientable 3-mfd も fibered knot を含む"。

References

[1] R.H.Bing Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3, Annals of Math. vol. 68, No. 1, July, 1958.

[2] R.H.Bing and J.M.Martin Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971) 217-231.

[3] J.S.Birman and H.M.Hilden Heegaard splittings of Branched Coverings of S^3, Trans. Amer. Math. Soc. vol.213, 1975, 315-352.

[4] J.S.Birman and R.Craggs On index-8 Z-homology 3-spheres, (to appear).

[5] B.E.Clark Surgery on Torus and Cable links, (to appear).

[6] H.S.M.Coxeter The abstract group $G^{3.7.16}$, Proc.Edinburgh Math. Soc. (2) 13, 1962, 46-61.

[7] R.Craggs A new proof of the Reidemeister-Singer theorem on stable equivalence of Heegaard splittings of 3-manifolds, (to appear in Proc. A.M.S.)

[8] M.Dehn Uber die Topologie des dreidimensionalen Raumes,Math. Ann. 69 , 1910, 137-168.

[9] R.H.Fox A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics, Prentices-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, 120-167.

[10] F.Gonzalez-Acuna Dehn's construction on knots, Bol.Soc.Mat.Mex., 15, 1970, 58-79.

[11] 3-dimensional open books, Lecture, Univ. of Iowa Topology Seminar, 1974/75, to appear.

[12] W.Haken Various aspects of the three-dimensional Poincare Problem, Toplogy of Manifolds, Proc. Inst. Univ. Georgia, Athens, 1969, 1970, 140-152.

[13] Some results on surfaces in 3-manifold, Studies in modern toplogy, MAA Studies in Math., vol 5, 1968, 39-98.

[14] J.Hempel A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a

solid torus and the complement of a torus knot, Proc. Amer. Soc.,15, 1964, 154-158.

[15] H.M.Hilden Every colsed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3, Bull. Amer. Math. Soc.,80, 1974, 1243-4.

[16] D.R.Mcmillan Homeomorphism on a solid torus, Proc. Amer. Soc., 14, 1963, 389-390.

[17] J.W.Milnor A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Amer. Jour. Math. ,84, 1962, 1-7.

[18] L.Moser Elementary surgery along torus knots, Pacific J. Math.,38, 737-745.

[19] Donald Myers Homeomorphisms on the solid double torus, Can. Jour. Math. XXVII, No. 4, 1975, 797-804.

[20] K.Reidemeister Zur Dreidimensional Topology, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 9, 1933, 189-194.

[21] R.Riley Parabolic replesentations of knot groups I, Proc. London Math. Soc., 3, XXIV , 1972, 217-242.

[22] Knots with parabolic property P, Quart. J. Math. 2 , 25, 1974, 273-283.

[23] J.Simon An algebraic classification of knots in S^3, Ann. of Math.,2, 97,1973, 1-13.

[24] Fibered knots in Homotopy 3-spheres, Proc. Amer.Soc., 58, July, 1976, 325-328.

[25] J.Singer Three-dimensional Manifolds and their Heegaard diagrams, Trans. Amer.Math.Soc., 1933, 88-111.

[26] J.Stallings On Fibering Certain 3-manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, 1962, 95-100.

[27] I.A.Volodin The Problem of Discriminating Algorithmically The Standard Three -Dimensional Sphere, Russian Math. Surveys 29: 5 , 1974 , 71- 172.

[28] F.Waldhausen Heegaard-Zerlegungen 3-Sphere, Topology 7, 1968, 195-203.

[29] Uber Involutionen der 3-Sphere, Topology 8, 1969, 81-91.

[30] M.Ochiai Dehn's surgery along 2-bridge knots, I, II, Research Reports on Information Science Tokyo Institute of Technology, April 1977, No. A-39,43.

[31] Geometric reductions of 3-manifolds with genus two, to appear.

[32] M.Takahashi An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem (to appear in Tukuba Math. Jour.)

[33] Two knots with the same 2-fold branched covoring space, to appear in Yokohama Math. Jour..

[34] 本間龍雄 Heegaard分解と曲面上の曲線系について．京都大学数理解析研究所講究録，1974年2月

[35] S^3の種数2のHeegaard分解．同上 1976年9月．

[36] Genus 2のHeegaard分解をもつ3-manifoldの$\pi_1(M)$の表示について，同上．1977年9月．

[37] 落合豊行 genus 2のHeegaard分解をもつhomology 3-sphere，同上，1976年 268，52～68．

[38] E.J.Mayland,Jr. A class of two-bridge knots with Property P, to appear.

[39] W.Haken Theorie der Normal Flachen, Acta. Math., 105(1961),245-375.

―― 特集 ――

球面のホモトピー群　　　（岡 七郎）

1．球面のホモトピー群 $\pi_i(S^n)$ の 2－成分の計算には，よく知られた James〔8〕の EHP 列

$$\cdots \to \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{i-1}(S^n) \to \cdots$$

が用いられる．ここで E は懸垂，H は拡張された意味での Hopf 不変量，P は二重懸垂の元に対して Whitehead 積によって与えられる．この列は n が奇数または $i<3n-1$ のとき完全，そうでないときも 2－成分については完全列である．この列と同型 $\pi_i(S^2)\approx\pi_i(S^3)$〔37〕により，$i-n$ に関しさらに n に関して順に $\pi_i(S^n)$ を決めていくことになる．群拡大を決めるさい Toda bracket が重要な役割をはたす．また，ある種の元または Toda bracket が 0 にならないことを示すのに，コホモロジー作用素や Adams の e 不変量（〔3〕,〔45〕）が用いられる．

2．$\pi_{n+k}(S^n)$ の 2－成分は $k\leqq 19$ のとき（すべての n について，以下も同じ）戸田〔44〕により，$k=20$ のとき三村－戸田〔23〕により，$k=21, 22$ のとき三村〔20〕により，$k=23, 24$ のとき三村－森－小田（〔21〕,〔22〕）により，さらに最近 $25\leqq k\leqq 31$ のとき小田（〔28〕,〔29〕）により決定された．小田の結果は $k=31$ のとき $\pi_{40}(S^9)$, $\pi_{41}(S^{10})$ について完全でない．また $k=32, 33$ のとき $n\leqq 8$ について決定している．なお $\pi_{n+k}(S^n)/2$-torsion は $k\leqq 42$ で知られている〔46〕ので，上記の範囲では $\pi_{n+k}(S^n)$ は完全に決まる．$k\leqq 22$ の範囲の結果は数学辞典の付録にあるので略し，$23\leqq k\leqq 31$ について知られた結果をまとめたのが表 I である．この表は奇数成分については〔46〕，2－成分については〔22〕（$k=23, 24$ のとき），〔29〕（$25\leqq k\leqq 31$）により作製した．さらに $k=32, 33$，$n\leqq 8$ のときは〔29〕,〔46〕によれば $\pi^n_{n+k}=\pi_{n+k}(S^n)$ は次のようになる．

($k=32$) $\pi^2_{34}=2^4+3+5+17$, $\pi^3_{35}=4+2^2+3$, $\pi^4_{36}=8+4+2^6+3^2$,
$\pi^5_{37}=8+2^2$, $\pi^6_{38}=8^2+4+2^3+3$, $\pi^7_{39}=8+2^3$, $\pi^8_{40}=8^2+2^6$.
($k=33$) $\pi^2_{35}=4+2^2+3$, $\pi^3_{36}=2^3+3^2$, $\pi^4_{37}=8^2+2^6+3^4+5$, $\pi^5_{38}=2^4+3$,

$\pi_{39}^{6}=2^6+(4\text{ or }2^2)+3$, $\pi_{40}^{7}=2^4+(4\text{ or }2^2)+3$, $\pi_{41}^{8}=8+2^6+(4\text{ or }2^2)+3^2$.
これらのほか Mahowald [9] は $\pi_{n+k}(S^n)$ の 2 成分を $23\leqq n\leqq 40$ のとき準安定域 $(n>\frac{k+3}{3})$ で group extension をのぞいて決定している。

3．2 成分について、表 I の $\pi_{40}(S^9)$ における群 A $(=Z_2 \text{ or } 0)$, $\pi_{41}(S^{10})$ における群 B $(=Z_4 \text{ or } Z_2+Z_2)$（表 I において $B=4 \text{ or } 2\oplus 2$ とあるのは $B=Z_2+Z_2$ の場合には一方の summand は安定群の同型な summand に写されることを意味する）が決定できていないため $k=32$, 33 における $n\geqq 9$ での計算が進まないものと思われる。**2** でのべた戸田から小田までの結果は、写像の合成から導かれる積についてはもちろん完全ではない。さらにいくつかの元については位数も決まっていない。こういう曖昧さがあとの計算に影響をおよぼすものと思われる。

4．次に奇数成分についてのべる。p を奇素数とし、$\pi_i(S^n)$ の p 成分を ${}_p\pi_i(S^n)$ であらわす。Serre [36] により p 成分の同型

$$E+[\iota_{2n},\iota_{2n}]_*:\pi_{i-1}(S^{2n-1})\oplus\pi_i(S^{4n-1})\to\pi_i(S^{2n})$$

が知られているので ${}_p\pi_i(S^{odd})$ を決めれば十分である。Q_2^{2n-1} を inclusion $S^{2n-1}\to\Omega^2S^{2n+1}$ の fiber として完全列

$$\cdots\to\pi_i(Q_2^{2n-1})\to\pi_i(S^{2n-1})\xrightarrow{E^2}\pi_{i+2}(S^{2n+1})\xrightarrow{H^{(2)}}\pi_{i-1}(Q_2^{2n-1})\to\cdots$$

が得られる。これと、戸田（[41], [46]）による次の２つの完全列

$$\cdots\to{}_p\pi_{i+4}(S^{2np+1})\to{}_p\pi_{i+2}(S^{2np-1})\xrightarrow{I'}{}_p\pi_i(Q_2^{2n-1})\xrightarrow{I}{}_p\pi_{i+3}(S^{2np+1})\to\cdots,$$

$$\cdots\to{}_p\pi_{i+4}(S^{2p+1})\to{}_p\pi_{i+2}(S^{2p-1})\xrightarrow{G}{}_p\pi_{i+3}(S^3)\xrightarrow{H_p}{}_p\pi_{i+3}(S^{2p+1})\to\cdots$$

によって 2 成分の場合と同様の手順で ${}_p\pi_i(S^{odd})$ は計算される。ただし、G は $\alpha_1(3)$ を ${}_p\pi_{2p}(S^3)=Z_p$ の生成元とするとき、$G(\gamma)=\alpha_1(3)E\gamma$ によってあたえられる。$IH^{(2)}$ は mod p Hopf 不変量 H_p に一致する。Q_2^{2n-1} は $\dim<4np-5$ の範囲で Moore 空間 $M=S^{2np-3}\cup_p e^{2np-2}$ と P 一同値であるので、i がてきとうに小さければ ${}_p\pi_i(Q_2^{2n-1})$ は Z_p 加群であり、上の I', I を含む列は cofiberation $S^{2np-3}\to M\to S^{2np-2}$ のホモトピー完全列と同等でありとくに ${}_p\pi_i(Q_2^{2n-1})$ における

群拡大はつねに自明である．Moore 空間の安定ホモトピー環 $\oplus_k \varinjlim_n [E^{n+k}M, E^nM]$ をあるkの範囲で環として決めておけばこれによって $p\pi_i(Q_2^{2n-1})$ の元をあらわすことができ，さらに，上の最初の完全列とこの完全列で n を $n-1$ におきかえたものにおける準同型をつないだ $\partial: p\pi_i(Q_2^{2n-1}) \to p\pi_i(S^{2n-1}) \to p\pi_{i-3}(Q_2^{2n-3})$ はある写像 $M \to E^{-(2p-3)}M$ から誘導されることが知られている〔46, I〕ので，Moore 空間の安定ホモトピー環の構造から ∂ を知ることができる．なお，この安定ホモトピー環は $k < p^2q-4$ の範囲で山本〔51〕により決定されたが，この結果は $p=3$ のときの若干の積について修正を要し〔46, Ⅲ〕完全な結果は戸田〔49〕により得られた．さらに大きな k について（$2p^2q$ 位まで）は岡（〔31〕，〔32〕など）により計算されている．

5．$p\pi_{n+k}(S^n)$ は戸田〔46〕により $k < (p^2+p)q-5$，$q=2(p-1)$ の範囲で計算され，その後まとまった結果は出ていないようである．結果は 2－成分よりかなりかんたんで，上記の範囲では位数 p^4 以上の元はあらわれず，p^3 の元は $k=p^2q-2$ p^2q-1 のときのみ，p^2 の元は $k=rpq-2$, $rpq-1$ $(1 \leqq r \leqq p)$, p^2q-3 のときのみあらわれる．直和因子の数は高々 4 であり，3，4 になるのは非常に少ない．これは，大きい p では異なる次元にとびとびにあらわれる現象が，p が小さくなると同じ次元に overlap してあらわれるということと，奇数成分の計算の方が 2－成分よりずっと遅れているということによるものと思われる．実際 S_q^{2i} と $P^{p^{i-1}}$ $(i \geqq 1)$ が対応していると考えられるから $p^{i-1}q$ が $p=2$ では 2^i に相当する．そうすると $(p^2+p)q-5$ は 8 か 9 位であり，$k \leqq 9$ では $2\pi_{n+k}(S^n)$ もかんたんである．

$k \leqq 31$ の範囲での $p\pi_{n+k}(S^n)$ は表 I の通り．さらに $p=3$ のときは $k \leqq 42$ で $3\pi_{n+k}(S^n)$ (n odd) の結果が〔46, Ⅲ〕に表になっている．

6．〔46〕の書かれた当時は安定群 $p\pi^S_{p^2q-3}$ が 0 かどうかが大問題であった時期で（〔46〕の直後に $p\pi^S_{p^2q-3}=0$ が戸田（〔47〕，〔48〕）により証明された．〔46, Ⅲ〕の序文参照．なお印刷出版されたのは〔47〕の方が早い），〔46, Ⅲ〕では $k=p^2q-3$, p^2q-2 のときの $p\pi_{n+k}(S^n)$ は，$p\pi^S_{p^2q-3}=0$，$\neq 0$ に場合

わけして結果がでている．この，戸田の結果は $\alpha_1\beta_1^{p}=0$（α_1 は ${}_p\pi^S_{q-1}=Z_p$ の生成元，β_1 は ${}_p\pi^S_{pq-2}=Z_p$ の生成元）という関係と同等であり，また Adams スペクトル列（8 参照）の E_{2p-1} 項で，

$$d_{2p-1}: E_{2p-1}^{2,\,p^2q}=Z_p \longrightarrow E_{2p-1}^{2p+1,\,(p^2+1)q}=Z_p$$

が自明でないことも同値である．我々はこの自明でない differential を Toda differential と呼ぶことにしよう．

さて，〔46〕の結果で，上述の場合わけののち最初にその影響の出てくる次元は $k=(p^2+p)q-5$（$=\alpha_1\beta_1^{p+1}$ の次元）であり（実は，$P=3$ のときはもう少しこの k の値は小さいが），〔46〕で $k<(p^2+p)q-5$ に限定されているのはそういう事情ではないかと想像される．現在の安定群に関する知見（それと，補助的役割をはたす Moore 空間の安定ホモトピー環に関する結果）からすれば，現在では，〔46〕にひきつづいてかなり計算可能と思われる．

7．以下安定群 $\pi^S_k=\varinjlim_n \pi_{n+k}(S^n)$ についてのべる．安定群の計算で有力な手段は Adams スペクトル列〔1〕である．一方同じ頃戸田（〔42〕,〔43〕）は killing method によって π^S_k を2－成分については $k\leqq 13$〔42〕，P－成分（P 奇素数）については $k\leqq p^2q-4$（$q=2p-2$）〔43〕の範囲で決定した．S^n の $n+k$ 次元以上のホモトピー群を kill した空間を n について動かしてスペクトラム K_k をつくり〔7〕，$H^*(K_k,Z_p)$ をてきとうな次元以下で A_p 加群（A_p は mod p Steenrod 代数）として k に関し順に決めて，同型 $H^{k+1}(K_k,Z_p)=\pi^S_k\otimes Z_p$ と $H^{k+1}(K_k,Z_p)$ における (higher) Bockstein をしらべて，π^S_k を決めるという方法である．6.でのべた $\alpha_1\beta_1^p$ が 0 かどうかという問題は，〔43, IV〕においてあたえられた．岡〔30〕はこの関係 $\alpha_1\beta_1^p=0$ のほか〔33〕,〔49〕等における π^S_* に関する結果の助けも借りて，同じ方法で ${}_p\pi^S_k$ を $P=3$ のとき，$k\leqq 76$，$P\geqq 5$ のとき，$k\leqq(2p^2+p-2)q-6$ の範囲で決定した．

この方法では，k が大きくなるにつれ，また $H^*(K_k,Z_p)$ の次元が大きくなるにつれて A_p 加群 $H^*(K_k,Z_p)$ の生成元とその間の関係を正確に求めるのがしだいに困難になってくる．これは単に算術的計算に時間を費すれば解決できるといった種類のものではないと思われる．〔30〕で計算

された$H^*(K_k, Z_p)$の次元の範囲を少しこえたところにはいくつかの未決定のままの関係式があらわれるが、これらをかなり正確に決めておかないと、計算を先へのばすことはむずかしいと思われる。

8. Adamsスペクトル列

$$E_2 = \mathrm{Ext}_{A_p}(Z_p, Z_p) \Rightarrow \pi_*^S / p\text{以外の torsions}$$

（Z_pは augumentation $\varepsilon: A_p \to Z_p$ によってA_p加群とみる）では、まずE_2項の計算が問題となるがMay（[15],[16],[17]）はE_2項に収束するスペクトル列

$$E_2' = \mathrm{Ext}_{E^0 A_p}(Z_p, Z_p) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{A_p}(Z_p, Z_p)$$

を構成し、さらにE_2'をてきとうな Koszul resolution によって計算することにより$\mathrm{Ext}_{A_p}^{s,t}$を$p=2$のとき$t-s \leqq 42$，$p \geqq 3$のとき$t-s \leqq (2p^2+p+2)q-4$で決め，この結果から${}_p\pi_k^S$を$p=2$のとき$k \leqq 28$，$p \geqq 3$のとき$k \leqq (p^2+2p)q-5$（ただし$k=p^2q-3$, p^2q-2ほか Toda differential の関係するところを除く）の範囲で決めた．その後$\mathrm{Ext}_{A_p}^{s,t}$は$p=2$のとき，Tangora [38] により$t-s \leqq 70$，中村により [24] $t-s \leqq 77$の範囲で，また$p \geqq 3$のとき中村 [25] により$t-s \leqq (3p^2+3p+4)q-2$の範囲で決められている．Extの結果から，${}_p\pi_k^S$は$p=2$のとき Tangora 等（[13],[39]）により$k \leqq 45$の範囲で，$p=3$のとき中村 [26]，Tangora [40] により$k \leqq 103$，$p \geqq 5$のとき中村－岡（[27]，[30, III]）により$k \leqq (2p^2+4p+1)q-7$の範囲でそれぞれ決定されており，これより先は現在まで印刷公表されたものはないようである．Adamsスペクトル列では非常に多くの自明でない differential があらわれ，その多くは算術的計算に時間を費すれば解決できるものであるが，上述の Toda differential のように本質的にπ_*^Sの結果に依存しているものもある．上の Tangora，中村等の結果ではそれぞれのkの範囲をこえたところでわからない differential があるため計算が止っている．differential のわかっている範囲ではE_∞からπ_*^Sの群拡大を決めることはすべてできている．なお，上の範囲をこえるkについて Ext のわかっている範囲でπ_k^Sの部分的な結果を得ることはもちろん可能である．例えば Mahowald [10] によれば，${}_2\pi_k^S \neq 0$ for $46 \leqq k \leqq 61$．

9. 最近注目される有力な手段はBP理論による一般Adamsスペクトル列

$$E_2 = \mathrm{Ext}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*) \Rightarrow \pi_*^S(p)$$

である．これによる計算はZahler〔52〕，次いでMiller〔18〕によりされた。Ravenelからの私信によれば，彼は昨年あたりから，$p=3$でのこのスペクトル列の計算をやっており，144次元まで計算したとの由（ただし120をこえるところはtentative computations），また桜井〔35〕は$p \geqq 5$についてこのスペクトル列により${}_p\pi_k^S$を$k \leqq (4p^2+3p-1)q$までup to extensionで決定した．これらは印刷公表が待たれる．

このスペクトル列のAdamsスペクトル列との大きなちがいは自明でないdifferentialがはるかに少なく，π_*^Sの計算には能率が良いという点であろう．$p \geqq 3$の場合，Toda differentialが最初の自明でないdifferentialであり，$\beta_1^t = 0$（となる最小のt，実際のtの値は$p=3$のとき$t=6$，$p=5$のとき$t=20$ or 21，$p \geqq 7$のとき$t=p(p-1)+1$〔50〕）に相当するdifferentialがあらわれるまではすべての非自明なdifferentialはToda differentialから代数的に導かれる．ただしRavenelによれば高い次元では別の種類のdifferentialもあらわれるようである．

10. 表IIはπ_*^S，$\pi_*^S/2$-torsionを完全に決っている範囲でまとめたものである．この表のほか，$p \geqq 5$のとき${}_p\pi_k^S$は$k \leqq (2p^2+4p+1)q-7$（$=561$ if $p=5$）の範囲で決っているがその結果は略す．

11. これらのほか，$\pi_{n+k}(S^n)$，π_k^Sを計算する手段としてはunstable Adamsスペクトル列〔14〕，Λ代数（Adamsスペクトル列のE_1項）〔4〕などが考えられる．この方面ではCurtis〔6〕にはじまる，特定のnと$m \geqq n$についてすべての$i \geqq m$（またはほとんどすべての，$i-n$をmod 8で考えたとき特別な値はのぞく）に対して${}_2\pi_i(S^n) \neq 0$，という種類の結果が知られている．

12. 最後に，二次コホモロジー作用素でdetectされるπ_*^Sの元についてふれておく．一次作用素でのこの問題は

Hopf不変量1の元の存在，非存在でありAdamsスペクトル列でいえば$Ext^{1,*}$の元でE_∞まで残るものがどれだけあるかということである．よく知られているように，この問題はAdams〔2〕$(P=2)$，島田一山ノ下，Lieuleircins（以上$P\geqq 3$）により解決をみたが彼らは同時に$Ext^{2,*}$を完全に決定した．したがって$Ext^{2,*}$の元でE_∞まで残るものはどれだけあるかという問題が考えられるが，$P=2$のときはMahowald等（〔12〕（ただしh_2h_5については〔13〕），〔11〕により，Arf－Kervaire不変量が自明でないframed多様体の存在〔5〕と関連する元とわずかの例外をのぞいて解決ずみである，とくに最近のMahowald〔11〕によればh_1h_i（$i\neq 2$，記号はAdamsによる）はすべてE_∞に残り，$Ext^{1,*}$とは大部様子が異なるようである。$P\geqq 3$の場合は、最近のMiller－Ravenel等（〔19〕，〔34〕）により，h_0h_i（$i\geqq 3$）と、$P=3$のとき上のArf不変量に関連する元の類似と考えられる元をのぞいて解決されている。$P=2$の時とは違い，今のところE_∞まで残る元は有限個しか知られていない．

本稿を書くにあたって，2－成分に関しては琉球大，森・中村両氏と九大、小田君の御協力をいただいた．お礼申しあげる．

表 I. $\pi_{n+k}(S^n)$, $23 \leqq k \leqq 31$

$n \backslash k$	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	$2+3+5+7$	$4+3^2+5+7+13$	$2^2+3\oplus 2$	$4+2^2 \oplus 2$	$4+2^3+3^2$	$4+2^3+3^2$	2^4	2^3	$4+2+3+5$
3	$4+3 \oplus 3+5+7+13$	$2+3\oplus\pi_{24}^S=2^2$	$4+2\oplus\pi_{25}^S=2^2$	$4+2^2+3^2\oplus$	$4+2^3+3\oplus 3$	$2^3\oplus\pi_{28}^S=2$	2^3	$4+2+3+5$	$2^4\oplus 3+5+17$
4	$4+3^2\oplus 8+3+5+7+13$	$2^3+3^2\oplus\pi_{24}^S$	$8+4+2^4+9\oplus$	$8^2+4+2^6+3^3+9+5+7+13\oplus$	$4+2^{10}+3^2\oplus$	$8+4+2^6\oplus$	$8+2^9+3$	$8^2+4+2^2+3^2+5$	$2^8\oplus$
5	$2\oplus 8+2+9+3+5+7+13$	$2^2+3\oplus$	$8+2^2\oplus$	$8+2^3+3\oplus 2^2$	$2^4\oplus\pi_{27}^S=8+3$	$4+2^2\oplus$	$2^6\oplus\pi_{29}^S=3$	$8+2^3+3+5\oplus 3$	$2^5+3\oplus$
6	$8+4^2\oplus$	$8+2^4+3^2+11\oplus$	$8+4+2^3+3\oplus$	$8+4^2+2^2+3\oplus$	$16+4+2+3\oplus$	$16+8+2+9+3+5+7+13\oplus$	$4^2+2^2\oplus$	$8+4^2+2+3+5\oplus$	$8+4^2+2^3+3^3\oplus$
7	$8+2^3\oplus$	$2^5+3\oplus$	$8+4+2\oplus$	$8+2^4+3\oplus$	$8+2\oplus$	$2^3\oplus$	$8+2^4\oplus$	$8^2+2^3+3+5\oplus$	$8+2^4+3\oplus$
8	$8+2^6\oplus$	$2^{10}+3\oplus$	$8^3+4+2^2\oplus$	$8^2+2^6+3^2+11\oplus$	$8^2+2+3\oplus$	$2^6\oplus$	$16+8+2^7\oplus$	$16+8^3+2^7+3^2+9+5^2+7+13\oplus$	$8+2^{10}+3\oplus$
9	$2^3\oplus\pi_{23}^S=16+8+2+9+3+5+7+13$	$2^5\oplus$	$8+4+2\oplus$	$8+2^4+3\oplus\pi_{26}^S=2^2+3$	$8+2\oplus$	$2^4+3\oplus$	$16+2^4+3\oplus$	$16+8+2^3+3\oplus$	$16+2^4+A+3\oplus$
10	$4+2\oplus\pi_{23}^S$	$32+4+2+3+5\oplus$	$4^2\oplus$	$8+4+2+3\oplus$	$8+4\oplus$	$8+2^3+3^2+11\oplus$	$16+8+2^2+3^2\oplus$	$16+4^2+2^2+3\oplus$	$16+8+B+3\oplus$
11	$2\oplus\pi_{23}^S$	$4+2\oplus$	$4+2^2\oplus$	$8+2^2+3\oplus$	$8+2^2\oplus$	$2^5\oplus$	$16+2^2\oplus$	$16+2^3+3\oplus$	$16\oplus 2+3+5+17$
12	$2\oplus$	$2^2+3\oplus$	$8+2^2\oplus$	$64+4+2^3+3^2+5\oplus$	$4+2^4\oplus$	$2^7\oplus$	$16+4+2^2\oplus$	$32+4+2^2+3^2+11\oplus$	$16+4+3\oplus$
13	$2\oplus$	$2^2\oplus$	$8\oplus$	$8+2^2+3\oplus$	$4+2^2\oplus$	$2^3\oplus$	$8+2\oplus$	$32+2+3\oplus$	$32\oplus$
14	$2+3\oplus$	$8+2^2+9+7\oplus$	$8\oplus$	$8+3^2\oplus$	$2^2\oplus$	$32+3+5\oplus$	$4\oplus$	$64+2^2+3\oplus$	$8\oplus 64+2+3+5+17$
15	$2^3\oplus$	$2^4\oplus$	$8+2\oplus$	$8\oplus$	$\pi_{27}^S=8+3$	$\pi_{28}^S=2$	$2^2\oplus$	$64+2^2+3\oplus$	$2^3\oplus\pi_{31}^S=64+2^2+3+5+17$
16	$2^5\oplus$	$2^7\oplus$	$8+2^2+3\oplus$	$8^2+9+7\oplus$	π_{27}^S	$3\oplus\pi_{28}^S$	$2^4\oplus$	$128+16+2^3+3^2+5\oplus$	$2^5\oplus$
17	$2^3\oplus$	$2^4\oplus$	$8+2\oplus$	$8\oplus$	π_{27}^S	π_{28}^S	$2^2\oplus$	$64+2^2\oplus$	$2^3\oplus$
18	$2^2\oplus$	$16+2+3+5\oplus$	$4\oplus$	$8\oplus$	$3\oplus\pi_{27}^S$	$8+9+7\oplus\pi_{28}^S$	$2^2\oplus$	$64+3\oplus$	$2^2\oplus$

19	$2\oplus$	$2\oplus$	$2\oplus$	$8\oplus$	$2^2\oplus$	$2^2\oplus$	$2^3\oplus$	$64\oplus$	$\pi^S_{31} = {64+2^2 \atop +3+5+17}$
20	$2\oplus$	$\pi^S_{24} = 2^2$	$\pi^S_{25} = 2^2$	$16+4+3$ $+5\oplus$	$2^4\oplus$	$2^5\oplus$	$2^4+3\oplus$	$128+4+9$ $+7\oplus$	π^S_{31}
21	$2\oplus$	π^S_{24}	π^S_{25}	$8\oplus$	$2^2\oplus$	$2^3\oplus$	$4+2^2\oplus$	$64\oplus$	π^S_{31}
22	π^S_{23}	$4+3\oplus\pi^S_{24}$	π^S_{25}	$8\oplus$	$4\oplus$	$16+3+5\oplus$	$4+2\oplus$	$64+2\oplus$	$3\oplus\pi^S_{31}$
23	π^S_{23}	$2\oplus$	$2\oplus\pi^S_{25}$	$8\oplus$	$2\oplus$	$\pi^S_{28} = 2$	$2^2\oplus$	$64+2\oplus$	$2^2\oplus$
24	$\infty\oplus\pi^S_{23}$	$2^2\oplus$	$2^2\oplus$	$8^2+3\oplus$	$2\oplus$	π^S_{28}	$2^2\oplus$	$64+8+2$ $+3+5\oplus$	$2^4\oplus$
25	stable	$2\oplus$	$2\oplus$	$8\oplus$	$2\oplus$	π^S_{28}	$2\oplus$	$32+2\oplus$	$2^2\oplus$
26	↓	stable	$\infty\oplus$	$4\oplus$	π^S_{27}	$4+3\oplus\pi^S_{28}$	$2\oplus$	$32\oplus$	$2\oplus$
27		↓	stable	$2\oplus$	π^S_{27}	$2\oplus$	$2^2\oplus$	$32\oplus$	$\pi^S_{31} = {64+2^2 \atop +3+5+17}$
28			↓	stable	$\infty\oplus\pi^S_{27}$	$2^2\oplus$	$2^2\oplus$	$32+4+3\oplus$	π^S_{31}
29				↓	stable	$2\oplus$	$2\oplus$	$16\oplus$	π^S_{31}
30					↓	stable	$\infty\oplus$	$8\oplus$	π^S_{31}
31						↓	stable	$4\oplus$	π^S_{31}
32							↓	$\pi^S_{30} = 2+3$ stable	$\infty\oplus\pi^S_{31}$
33								↓	stable

注；a を素数巾とするとき，a^b は位数 a の巡回群 b 個の直和をあらわす。＋，⊕は直和をあらわす。
たて引で，⊕以後の因子は suspension により安定群の同型な因子に写される。⊕以前の因子上では iterated suspension は non-trivial な kernel をもつ。$\pi_{n+k}(S^n)$ で⊕以後何も書いてないのは，$\pi_{n+k-1}(S^{n-1})$ における⊕以後の因子と suspension により同型な因子をあらわす。
太線の部分は完全には決っていない。

$n=9$ $A=2$ or 0
$n=10$ $B=4$ or $2\oplus2$

表II π_k^S for $k \leqq 45$, $\pi_k^S/2$-tor for $k \leqq 103$

k	π_k^S	k	π_k^S	k	$\pi_k^S/2$-tor	k	$\pi_k^S/2$-tor
<0	0	28	2	46	3	75	$9+3$
0	∞	29	3	47	$9+3+5+7+13$	76	5
1	2	30	$2+3$	48	0	77	0
2	2	31	$64+2^2+3+5+17$	49	3	78	3
3	$8+3$	32	2^4	50	3	79	$3+11+25+41$
4	0	33	2^5	51	3	80	0
5	0	34	$4+2^3$	52	3	81	3^2
6	2	35	$8+2^2+27+7+19$	53	0	82	$3+7$
7	$16+3+5$	36	$2+3$	54	0	83	$9+5+49+43$
8	2^2	37	2^3+3	55	3^2+5+29	84	3^2
9	2^3	38	4^2+3+5	56	0	85	3^2
10	$2+3$	39	$16+2^5+3^2+25+11$	57	0	86	$3+5$
11	$8+9+7$	40	$4+2^5+3$	58	0	87	$3+5+23$
12	0	41	2^5	59	$9+7+11+31$	88	0
13	3	42	$8+2^2+3$	60	0	89	0
14	2^2	43	$8+3+23$	61	0	90	3
15	$32+2+3+5$	44	8	62	3	91	3^3+47
16	2^2	45	$16+2^3+9+5$	63	$3+5+17$	92	3^2
17	2^4			64	0	93	$9+5+7$
18	$8+2$			65	3	94	3^2
19	$8+2+3+11$			66	0	95	$3+5+7+9+13+17$
20	$8+3$			67	3	96	0
21	2^2			68	3	97	0
22	2^2			69	0	98	0
23	$16+8+2+9+3+5+7+13$			70	0	99	3^2+11
24	2^2			71	$27+5+7+13+19+37$	100	3
25	2^2			72	3	101	3^2
26	2^2+3			73	0	102	3^2
27	$8+3$			74	3	103	$3+5+53$

aを素数巾, $b \geqq 2$ とするとき a, a^b はそれぞれ位数 a の巡回群 Z_a, Z_a の b 個の直和をあらわす. $+$ は直和をあらわす.

References

[1] J.F.Adams, On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. Math. Helv. 32(1958), 180-214.

[2] ————, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. 72(1960), 20-103.

[3] ————, On the groups J(X)-IV, Topology 5(1966), 21-71.

[4] A.K.Bousfield, E.B.Curtis. D.M.Kan, D.G.Quillen, D.L.Rector and J.W.Schlesinger, The mod p lower central series and the Adams spectral sequence, Topology 5(1966), 331-342.

[5] W.Browder, The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalizations, Ann. of Math. 90(1969), 157-186.

[6] E.B.Curtis, Some non-zero homotopy groups of spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 541-544.

[7] H.H.Gershenson, Relationships between the Adams spectral sequence and Toda's calculations of the stable homotopy groups of spheres, Math. Z. 81(1963), 223-259.

[8] I.M.James, Suspension triad of a sphere, Ann. of Math. 63 (1956), 407-429.

[9] M.E.Mahowald, The metastable homotopy of S^n, Mem. Amer. Math. Soc. No.72, 1967.

[10] ————, Description homotopy of the elements in the image of the J-homomorphism, Manifolds Tokyo 1973, 255-263.

[11] ————, A new infinite family in ${}_2\pi_*^S$, preprint.

[12] ———— and M.C.Tangora, On secondary operations which detect homotopy classes, Bol. Soc.Mat. Mexicana, 12(1967), 71-75.

[13] ————————, Some differentials in the Adams spectral sequence, Topology 6(1967), 349-369.

M.G.Barratt, M.E.Mahowald and M.C.Tangora, ——— II, Topology 9(1970), 309-316.

** [11] Topology, 16(1977), 249-256.

[14] W.S.Massey and F.P.Peterson, The mod 2 cohomology structure of certain fiber spaces, Mem. Amer. Math. Soc. No.74, 1967.

[15] J.P.May, The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras; applications to the Steenrod algebra, Thesis, Princeton Univ. 1964.

[16] ———, The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 71(1965), 372-377.

———, The cohomology of the Steenrod algebra; stable homotopy groups of spheres, ibid. 377-380.

[17] ———, The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras, J. Algebra, 3(1966), 123-146.

[18] H.R.Miller, Some algebraic aspects of the Adams-Novikov spectral sequence, Thesis, Princeton Univ. 1974.

[19] ———, D.C.Ravenel and W.S.Wilson, Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence, preprint.

[20] M.Mimura, On the generalized Hopf homomorphism and the higher composition, Part I, Part II, J. Math. Kyoto Univ. 4(1964),171-190, 301-326.

[21] ———, M.Mori and N.Oda, On the homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 50(1974), 277-280.

[22] ———, Determination of 2-components of the 23 and 24-stems in homotopy groups of spheres, Mem. Sci. Kyushu Univ. Ser.A, 29(1975), 1-42.

[23] M.Mimura and H.Toda, The (n+20)-th homotopy groups of n-spheres, J. Math. Kyoto Univ. 3(1963), 37-58.

[24] O.Nakamura, On the cohomology of the mod 2 Steenrod algebra, Bull. Sci. Engrg. Division, Univ. Ryukyus (Math. Nat. Sci.), 16 (1973), 1-18.

[25] ———, On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, ibid. 18(1975), 9-58.

[26] ———, Some differentials in the mod 3 Adams spectral

sequence, ibid. 19(1975), 1-26.

[27] ———— and S.Oka, Some differentials in the mod p Adams spectral sequence ($p \geq 5$), Hiroshima Math. J. 6(1976), 305-330; Corrections, ibid. 7(1977), 655-656.

[28] N.Oda, The group structures of π^n_{n+i}, I, II, preprint (Proc. Japan Acad. 投稿予定).

[29] ———, The group structures of π^n_{n+i}, I (for i = 25 and 26), II(for i = 27 and 28), III(for i = 29, 30 and 31), preprint.

[30] S.Oka, The stable homotopy groups of spheres, I, II, III, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337, 2(1972),99-161, 5(1975), 407-438.

[31] ———, On the stable homotopy ring of Moore spaces, ibid. 4(1974), 629-678.

[32] ———, Module spectra over the Moore spectrum, ibid. 7(1977), 93-118.

[33] ——— and H.Toda, Non-triviality of an element in the stable homotopy groups of spheres, ibid. 5(1975), 115-125.

[34] D.C.Ravenel, The nonexistence of odd primary Arf invariant elements in stable homotopy, preprint.

[35] S.Sakurai, Calculation of the Adams-Novikov spectral sequence, I, II, (in Japanese) 修士論文 Nagoya Univ.

[36] J.P.Serre, Group d'homotopie et classes des groupes abéliens, Ann. of Math. 58(1953), 258-294.

[37] N.E.Steenrod, Topology of fiber bundles, Princeton.

[38] M.C.Tangora, On the cohomology of the Steenrod algebra, Math. Z. 116(1970), 18-64.

[39] ————, Some extension questions in the Adams spectral sequence, Proc. Advanced Study Inst. on Alg. Top. III, Aarhus Univ. Various Publ. Ser.13, 1970, 578-587.

[40] ————, Some homotopy groups mod 3, Conference on homotopy

theory (Evanston 1974), Mexico Math. Soc. 1975.

[41] H.Toda, On double suspension E^2, J. Osaka City Univ. 3(1956) 103-145.

[42] ———, On exact sequences in Steenrod algebra mod 2, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser.A, 31(1958), 33-64.

[43] ———, p-Primary components of homotopy groups I, II, III, IV, ibid. 129-142, 143-160, 191-210, 32(1959) 297-332.

[44] ———, Composition methods in homotopy groups of spheres, Ann. of Math. Studies, Princeton.

[45] ———, ホモトピー概論,数学 15(1963), 141-155; English translation Advances in Math. 10(1973), 417-455.

[46] ———, On iterated suspensions, I, II, III, J. Math. Kyoto Univ. 5(1965), 87-142, 5(1966), 209-250, 8(1968), 101-130.

[47] ———, An important relation in homotopy groups of spheres, Proc. Japan Acad. 43(1967), 839-842.

[48] ———, Extended p-th powers of complexes and applications to homotopy theory, ibid. 44(1968), 198-203.

[49] ———, Algebra of stable homotopy of Z_p-spaces and applications, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 197-251.

[50] ———, On stable homotopy groups of spheres and spectra, Conference on homotopy theory (Evanston 1974), Mexico Math. Soc. 1975, 259-265.

[51] N.Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14(1963), 45-67.

[52] R.S.Zahler, The Adams-Novikov spectral sequence for the spheres, Ann. of Math. 96(1972), 480-504.

松本幸夫氏からの米国便り　　1977年9月9日付

まず，Institute for Advanced Study の Topology 関係のメンバーは次の様です。(* は半期のみ)

* D. A. Asimov, University of Minnesota ; Diff. Top. and Geometry.
P. F. Baum, Brown Univ. ; Topology.
F. R. Cohen, Northern Illinois Univ. ; Algebraic Top.
M. Davis, M. I. T. ; Transformation groups and diff. Top.
R. D. Edwards, U. C. L. A. ; Geometric Top.
F. T. Farrell, Pennsylvania State Univ. ; Topology.
C. H. Giffen, Univ. of Virginia ; alg. K-theory and Topology
Sue E. Goodman, Univ. of North Carolina ; Foliations (女性).
C. McA. Gordon, Cambridge Univ. ; Geometric Top.
J-L. Loday, Univ. of Strasbourg ; Algebraic K-theory.
R. Mandelbaum, Weizmann Institute ; Top. of 4-mfds. and deformations of varieties.
Y. Matsumoto, Colledge of Gen. Ed. Univ of Tokyo, Topology.
J. M. Montesinos, Univ. of Complutense, Spain ; alg. Top., manifolds and cell complexes.
R. C. Randell, Univ. of Michigan ; Topology of singularities.
L. C. Siebenmann, Univ. of Paris ; non-simply connected manifolds.
* D. A. Stone, Brooklyn Colledge ; C.U.N.Y. ; Diff. Geometry and Comb. Top.
C. Watkiss, Univ. of Lille ; Topology
等。

Siebenmann の専門が non-simply connected manifolds とはどういうわけか当人にききそびれましたが奇妙です。David Stone は微分幾何と組合せトポロジーを一緒にやっているようにみえて変ですが、実は Pontrjagin class の組合せ的定義をもっとよく目で見たいと一生けんめいのようでした。"Mysterious number 24" が図形で見えたというような事を言っていましたが何のことやらききたださぬうち前期のみで帰って行きました。Formal な Topology のセミナーは毎週金曜日の 11:00 am より1時間ミルナーの主宰で行なわれました。Milnor は愛きょうのある顔に似あわずドスのきいた声で時々顔をあげては鋭い質問を発するので講演者も多少緊張の様子でした。この外に、Siebenmann と Edwards により毎週水曜の 4:30 pm から Geometric Topology のセミナー

がひらかれ，この分野の実質的な討論の場になりました。

水曜のセミナーではEdwardsの活躍が目だちました。彼はまず全てのhomology 3-sphereのdouble suspensionがS^5にhomeomorphicであることを証明したと主張し，研究所内にちょっとしたショックを与えましたが，数日後にGapがあったのがわかり，あとで全てのtriple suspensionがS^6にhomeomorphicという主張に変更しそれを証明しました。

その後はCasson handlesのtopology（cf. T.I.T. vol.4（津久井氏（相工大）によるNews））に集中していたようです。Casson handlesは最近flexible handlesという名前が定着しつつあるようですが，数年前にA. Cassonが4-mfdへの2-sphereのうめこみの困難さ（∵ Whitney lemmaが成立しない）を擬似的に解消する一手段として考案した一種のinfinite repetitionにより構成される"handle"です。それは$D^2\times\mathbb{R}^2$と同じproper homotopy typeをもつ4-mfd W^4であり，通常高次元でhandleをつかって色々な操作をするかわりにW^4をつかうと4次元でも高次元の類似が成立します。したがって，W^4が本当の$D^2\times\mathbb{R}^2$かどうかは大きな問題で，もし$W^4=D^2\times\mathbb{R}^2$なら4次元は高次元と"全く同じような"世界だということになります。例えば，$S^2\times S^2$の$p\oplus q$ $((p,q)=1)$はsmooth 2-sphereで実現できてしまうし，1月にCasson自身がInstituteに来て講演したところによれば，4次元単連結多様体間のh-cobordism theoremも成立し，したがって，4次元Poincaré予想もO.K.ということになります。これではあまりに調子がよすぎるので，大方の見方は$W^4\neq D^2\times\mathbb{R}^2$ということだろうと思いますが証明されていません。去年の暮ごろでしたが，Edwardsは$W^4\neq D^2\times\mathbb{R}^2$を示したと主張しましたが，あいまいさがあり，今もってダメなようです。Casson handlesがreal handlesでない事を示すため何か代数的不変量にひっかけるやり方は今の所全てダメです。classicalなknotsやlinksの不変量は全て役立たないようです。C. Giffenは得意の代数的K-theoryを駆使してWhitehead torsionの拡張のような何やら難かしげな"functional invariants"を考えていましたが，何か月かの計算のあとそれも全て消えてしまったようです。僕自身はMazurのcontractible 4-mfd M^4の境界上にある"Zeeman's curve"がM^4内で2-diskをはらないというZeemanの予想

を例えば僕のP-群を"4次元化"することにより証明し，それによって4次元 h-cobordism theorem の反例を出したいという"夢"をもっていましたが，Casson の講演でそれが flexible handle の判定という困難な問題と少なくとも同程度に困難な問題であることを知って暗タンたる気分に落入りました。Siebenmann は Casson handles を幾何的に精密に見つめるという作業をやっていたようです。彼の言葉によれば，"Geometric-geometric Topology" という分野の建設が大切なのだそうです。そんなわけで，いろんな人が Casson handles に挑戦しましたが結局の所挫折したというのが正直な評価だと思います。C. Giffen は"少なくともあと10年間は解ける筈がない"という感想をもらしていました。

例の Casson-Gordon 不変量 (cf. "Cobordism of classical knots") で有名になった C. Gordon はイギリスの感じのよい青年紳士といった人ですが，彼も Mazur Manifold の方からずい分考えたが今は休んでいるなどといっていました。Spain の J. M. Montesinos (3次元専門) は"あまり難しい問題にかかわって時間を無駄にしたくない"といって彼の得意の branched covering を4次元に拡張する仕事に集中していました。4次元閉多様体を4次元球面の branched covering として表現する仕事で今も続けています。

R. Mandelbaum は"まあ何かわかったら利用してやろう"という感じで，Casson handle には適当につきあって，あとは自分の仕事 — complex surfaces の topology — に熱中し一番たくさん論文を書いたのではないでしょうか？ 彼は complex surface M^4 に何個 $\mathbb{C}P^2$ を connected sum したら $\mathbb{C}P^2$ と $-\mathbb{C}P^2$ の connected sum として書けるようになるかという"肯定的側面"の問題を実に精力的に研究していました。最新の結果は $\mathbb{C}P^{n+1}$ 内の complete intersection として書ける complex surface は1個の $\mathbb{C}P^2$ を加えると $\mathbb{C}P^2$ と $\overline{\mathbb{C}P^2}$ のいくつかの和になるというものだと思います。チャップリンをホウフツさせるヒゲの P. Baum 氏も一人超然と仕事をしていた人でホモトピー的に $K_0(A) = \pi_{2n}(BU \times A / * \times A)$ によって定義されるホモロジー K-theory に丁度通常の K-theory が complex vector bundles を使って定義されるように何か幾何的対象による定義を与えよという問題を考えていました。almost complex manifold U と U 内の cycle, U上の vector bundle ξ という triple を object として考えるとうまくいくようです。同じヒゲでも山羊のようなヒゲの R. Randell 氏は non-isolated singularity の場合の Milnor fiber の topology をやっていました。冬休み明けに、C. Giffen がこれが自分の holiday work だといって"classical links の間の concordance は Milnor の意味の homotopy を imply する"という結果を示しました。Kirby の問題集の 1.44 と番号のついた問題で、問題を出した Kauffman の奥さんの D. Goldsmith 女史も独立に証明しました。ほぼ同じ時期です。technical ですが idea は単純です。

他に話題を呼んだ人としてプリンストン大学の A. Hatcher が 4, 5 月ごろ $Diff^+(S^3) \simeq SO(4)$ という Smale 予想を証明したようです。Cornell 大学で開かれた Topology Festival (5月上旬) で1時間ほどの講演をしましたがどうもよくわかりませんでした。5月頃になり、S. Armentraut が3次元ポアンカレ予想を否定的に解決したと名のりを上げました。S^3 内に無限回の inductive な操作で奇妙な decomposition を構成してその decomposition space をつくるとエキゾチック S^3 になるという主旨のものですが8月1日〜22日の Georgia Conference でだいぶホコ先がにぶり、こんな方法で出来ると思うというプログラムの提出にとどまるというふうに変りました。Milnor は Thurston と共同で 3-mfds の characteristic numbers を定義する事をやっています。最近 Thurston がやっている 3-mfds 上の hyperbolic geometry との関係で興味深い様です。Thurston は"3次元多様体のトポロジーは (elliptic, euclidean, hyperbolic) geometry である"という指導原理の下に3次元多様体に hyperbolic structure を入れる為の大きな理論を建設中です。"2つの hyperbolic mfds. が homotopy equivalent なら isomorphic"という Mostow の rigidity theorem と呼ばれるものが大切な役割を果すようです。彼は現在30才だそうですが、彼の講演のズイ所にはハッとさせられるように幾何学的 idea がキラメイている感じで、やはりかなり天才風です。

大学には半期だけ D. Sullivan が来ていて Dynamical system についてのセミナーをやっています。

以上思いつくまゝの報告で、僕の興味に限りました。その他の動きもあったのでしょうがあしからず。(松本幸夫)

文献リスト

1. A. Fathi, Le groupe des transformations de [0, 1] qui preservent la mesure de lebesgue est un groupe simple.

2. J. Palis & F. Takens, Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems.

3. M.R. Herman, Mesure de lebesgue et nombre de rotation.

4. " , L^2 regularity of measurable solutions of a finite difference equation of the circle.

5. " , Conjugasion C des diffeomorphismes du cercle pour presque tout nombre de rotation.

6. 1976 AMS Summer Institute (Problems)

   Wu-Chung Hsiang, Problems on homotopy theory, transformation groups and differentiable manifolds.

   Robert Oliver, Group actions on disks, integral permutation representations, and the Burnside ring.

   John Morgan, Hodge theory for the algebraic topology of smooth algebraic varieties.

   R. J. Milgram, A survey of the classifying spaces associated to spherical fiberings and surgery.

   C.T.C. Wall, Frce actions of finite groups on spheres.

   Wu-Chung Hsing, Differentiable actions of compact Lie groups on homotopy spheres and euclidean spaces.

7. S.J. Kaplan, Construction framed 4-manifolds with given almost framed boundaries.

8. M. Kreck, Bordismusgruppen von diffeomorphismen.

9. J.L. Heitsch, Independent variation of secondary classes.

10. S. Nishikawa & A. Poor, An index formula for conformal vector fields.

11. G.R. Sell, Bifurcation theory and the method of averaging.

BP, MU 理論とその安定ホモトピー論への応用に関する文献

[1] J. F. Adams, Quillen's work on formal group laws and complex cobordism, University of Chicago lecture notes series, 1970.

[2] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, University of Chicago Press, 1974.

[3] J. F. Adams, Localisation and completion : with an addendum on the use of Brown-Peterson homology in stable homotopy, Univ. Chicago, Lecture Notes in Math. 1975.

[4] J. F. Adams and A. Liulevicius, The Hurewicz homomorphism for MU and BP, J. London Math. Soc. 5(1972), 539-545.

[5] S. Araki, Typical formal groups in complex cobordism and K-theory, Lecture Notes in Math. Kyoto Univ. Kinokuniya.

[6] P. E. Conner and L. Smith, Homological dimension of complex bordism modules, Topology of Manifolds, Markham Publ. Co. Chicago, 1970, 472-482.

[7] P. E. Conner and L. Smith, On the complex bordism of finite complexes, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 37(1969), 417-521.

[8] P. E. Conner and L. Smith, ——— II, J. Differential Geometry, 6(1971), 135-174.

[9] P. E. Conner and L. Smith, On the complex bordism of complexes with few cells, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 315-356.

[10] M. Hazewinkel, Constructing formal groups I. Over $Z_{(p)}$-algebras, Report of the Econometric Institute #7119, Netherlands School of Economics, 1971.

[11] D. C. Johnson and W. S. Wilson, Projectuve dimension and Brown-Peterson homology theory, Topology 12(1973), 327-353.

[12] D. C. Johnson and W. S. Wilson, BP operations and Morava's extraordinary K-theories, Math. Z. 144(1975), 55-75.

[13] D. C. Johnson, H. R. Miller, W. S. Wilson and R. S. Zahler, Boundary homomorphisms in the generalized Adams spectral sequence and the nontriviality of infinitely many γ_t in stable homotopy, Conference on homotopy theory (Evanston 1974), edited by D. M. Davis, Mexico Math. Soc. 1975, 47-59.

[14] D. C. Johnson and W. S. Wilson, The projective dimension of Eilenberg-MacLane spaces, preprint 4pp.

[15] P. S. Landweber, Annihilator ideals and primitive elements in complex bordism, Illinois J. Math. 17(1973),272-284.

[16] P. S. Landweber, Associated prime ideals and Hopf algebras, J. Pure Appl. Algebra, 3(1973), 43-58.

[17] P. S. Landweber, On Panov's theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 43(1974), 209-213.

[18] P. S. Landweber, Invariant regular ideals in Brown-Peterson homology, Duke. J. Math. 42(1975), 499-505.

[19] P. S. Landweber, Homological properties of comodules over $MU_*(MU)$ and $BP_*(BP)$, **Amer. J. Math. 98(1976), 591-610.**

[20] P. S. Landweber, BP_*BP and typical formal groups. **Osaka J. Math. 12(1975), 357-363.**

[21] H. R. Miller, Some algebraic aspects of the Adams-Navikov spectral sequence, Thesis, Princeton Univ. 1974, 99pp.

[22] H. R. Miller, D. C. Ravenel and W. S. Wilson, Navikov's Ext^2 and the nontriviality of the gamma family, Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975), 1073-1075.

[23] H. R. Miller and W. S. Wilson, On Novikov's Ext^1 modulo an invariant prime ideal, Conference on homotopy theory (Evanston 1974), edited by D. M. Davis, Mexico Math. Soc. 1975, 159-166.

[24] H. R. Miller and W. S. Wilson, ———, Topology 15(1976), 131-141.

[25] H. R. Miller and D. C. Ravenel, Morava stabilizer algebras and the localization of Novikov's E_2-term, preprint 23pp.

[26] H. R. Miller, D. C. Ravenel and W. S. Wilson, Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence, preprint 76pp.

[27] J. Morava, Structure theorems for cobordism comodule. (手許になし)

[28] J. Morava, Notes on the Novikov algebra $\mathrm{Ext}_c^{**}(U, U)$. (〃)

[29] S. P. Novikov, The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theory, Math. USSR-Izv. 1(1967), 827-913.

[30] S. Oka, A new family in the stable homotopy groups of spheres, Hiroshima Math. J. 5(1975), 87-114.

[31] S. Oka, ——— II, Hiroshima Math. J. 6(1976), 331-342.

[32] S. Oka and H. Toda, Non-triviality of an element in the stable homotopy groups of spheres, Hiroshima Math. J. 5(1975), 115-125.

[33] S. Oka and H. Toda, 3-Primary β-family in stable homotopy, Hiroshima Math. J. 5(1975), 447-460.

[34] D. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 1293-1298.

[35] D. C. Ravenel, The structure of BP_*BP modulo an invariant prime ideal, Topology 15(1976), 149-154.

[36] D. C. Ravenel, The cohomology of the Morava stabilizer algebras, preprint 24pp., to appear in Inventions Math.

[37] D. C. Ravenel, The structure of Morava stabilizer algebras, preprint 24pp.

[38] D. C. Ravenel, The nonexistence of odd primary Arf invariant elements in stable homotopy, preprint 21 pp.

[39] D. C. Ravenel, A May spectral sequence converging to the Adams-Novikov E_2-term, preprint 37pp.

[40] Y. Hirashima, On the BP_*- Hopf invariant, Osaka J. Math. 12(1975), 187-196.

[41] D. C. Ravenel and W. S. Wilson, Bipolynomial Hopf algebras, J. Pure Appl. Algebra 4(1974), 41-45.

[42] D. C. Ravenel and W. S. Wilson, The Hopf ring for complex cobordism, Bull. Amer. Math. Soc. 80(1974), 1185-1189.

[43] D. C. Ravenel and W. S. Wilson, ———, preprint 34pp.

[44] D. C. Ravenel and W. S. Wilson, ——— (Expanded version), preprint 76pp.

[45] L. Smith, On realizing complex bordism modules, Amer. J. Math. 92(1970), 793-856.

[46] L. Smith, ——— II, Amer. J. Math. 93(1971), 226-263.

[47] L. Smith, ——— III, Amer. J. Math. 94(1972), 875-890.

[48] L. Smith, ——— IV, Amer. J. Math. 99(1977), 418-436.

[49] L. Smith, On characteristic numbers of almost complex manifolds with framed boundaries, Topology, 10(1971), 237-256.

[50] L. Smith, New infinite families in the stable homotopy of spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975), 148-150.

[51] L. Smith, The ε sequences in stable homotopy of spheres, Conference on homotopy theory (Evanston 1974), edited by D. M. Davis, Mexico Math. Soc. 1975, 185-198.

[52] L. Smith and R. Zahler, Detecting stable homotopy with primary cobordism operations, Math. Z. 129(1972), 137-156.

[53] E. Thomas and R. S. Zahler, Nontriviality of the stable homotopy element γ_1, J. Pure Appl. Algebra, 4(1974), 189-204.

[54] E. Thomas and R. S. Zahler, Generalized higher order cohomology operations and stable homotopy groups of spheres, Advances in Math. 20(1976), 287-328.

[55] H. Toda, On spectra realizing exterior parts of the Steenrod algebra, Topology 10(1971), 53-66.

[56] H. Toda, Algebra of stable homotopy of Zp-spaces and applications, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 197-251.

[57] H. Toda, Constructing some spectra, Conference on homotopy theory (Evanston 1974), edited by D. M. Davis, Mexico Math. Soc. 1975, 247-258.

[58] H. Toda, On stable homotopy groups of spheres and spectra, Conference on homotopy theory (Evanston 1974), edited by D. M. Davis, Mexico Math. Soc. 1975, 259-265.

[59] H. Toda and S. Oka, On the stable homotopy groups of spheres (in Japanese), Sûgaku 28(1976), 226-235.

[60] W. S. Wilson, The Ω-spectrum for Brown-Peterson cohomology I, Comment. Math. Helv. 48(1973), 45-55.

[61] W. S. Wilson, ——— II, Amer. J. Math. 97(1975), 101-123.

[62] W. S. Wilson, ——— III, Preprint 17pp.

[63] R. S. Zahler, The Adams-Novikov spectral sequence for the spheres, Ann. of Math. 96(1972), 480-504.

[64] R. Zahler, Existence of the stable homotopy family $\{\gamma_t\}$, Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973), 787-789.

[65] R. S. Zahler, Detecting stable homotopy with secondary cobordism operations I, Quart. J. Math. 25(1974), 213-226.

[66] D. C. Johnson and R. S. Zahler, ——— II, preprint 13pp.

[67] R. S. Zahler, Fringe families in stable homotopy, preprint 16pp. (+ errata 1p.), to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[68] K, Morisugi, On the group $\mathrm{Ext}^{1,*}_{A^{BP}}(BP^*(S^0), BP^*(S^0))$ and the Hurewicz image of BP/S^0, J. Math. Kyoto, Uni. 15(1975) 647-669.

[69] S. Oka, Realizing some cyclic BP_*-modules and applications to stable homotopy of spheres, Hiroshima Math. J. 7(1977) 427-447.

主として, Miller, Ravenel, Wilson, Smith, Zahler 等による安定ホモトピー論への応用に関するものと それらに引用されているもので 1970年以後のもの.
従って BP, MU 理論に関する文献は必ずしも網羅されていない。

大学のトポロジー

前回につづき，北大，弘前大，秋田大，山形大の数学科，あるいは数学コースの１９７７年５月現在のようすをお知らせ致します。

北大では，毎週，職員および博士課程の院生が参加して「トポロジーセミナー」を行っている。内容はトポロジーだけでなく，境界領域の話題もとり上げている。最近の話題としては

・横断射影的接続による２次特性類．
・３次元多様体上のS^3上３－branched coveringsによる表示．
・三角形分割できない cut locus

などがありました。

秋田大では，弘前大の土田氏と鎌形，福原氏とで Cobordism theory のセミナーを月１～２回実施しており，他に教官同志で論文についてある結果ができたとき，セミナールで紹介しています。

山形大では東北大学のセミナーに各自参加したり，特定題目についてセミナーを行うこともあります。

北大（理）	メンバー	鈴木治夫　酒井隆　小林一章	D.C. 4
		諏訪立雄　安藤良文　倉田雅弘	M.C. 3
	２年	後期，10月から始まる．アフィン幾何学と射影幾何学の予定．（岩波基礎講座；河田敬義著：アフィン幾何と射影幾何程度）	
	３年	前期，基本群とホモロジー（I.M. Singer－J.A. Thorpe トポロジーと幾何学入門の基本群，M.Greenberg. Algebraic Topology のホモロジー程度） 後期，曲面上のリーマン幾何学（I.M.Singer－J. A.Thorpe 著書の後半部）	
	４年	（かなり自由） 参考：対称空間論入門，微分位相幾何学入門，集中講義あり	
	４年次セミナー	テキスト例 M.Hirsch著「Differential Topology」	
	修士等	論文および著書の紹介，各自研究の発表．	

秋田大（教育）	メンバー	安藤英夫　鎌形利夫　福原健三　三上健太郎
	2年	位相空間；テキスト　花井七郎氏「位相空間論入門」 位相空間演習；テキストなし
	3,4年	3,4年対象（かなり自由） テキスト例「位相幾何学，(ホモロジー論)　中岡稔氏」，「位相数学入門」中岡稔氏．
	4年次セミナー	テキスト例（かなり自由） 「位相幾何学」河田敬義，大口邦雄氏，「多様体入門」島山洋二氏
弘前大（理）	メンバー	土田喜輔　菊地茂樹　工藤良満
	3年	多様体論
	4年	田村一郎氏 トポロジー程度
	4年次セミナー	テキスト　Sternberg「Algebraic Topology」
	修士等	テキスト　Conner-Floya「Differential periodic maps」
山形大（理）	メンバー	和田達　大池宏清　井伊清隆　安井孜
	2年	位相空間論，線型代数学
	3年	幾何学序論；中岡稔「位相数学入門」4〜6章程度
	4年	幾何学（かなり自由）　集中講義あり． 昨年度は鈴木治夫氏に来ていただき葉層構造の話をしてもらいました．
	4年次セミナー	テキスト例　横田一郎；群と位相 A. H. Wallace：Differential Topology 等，その時の学生の質にあわせる．

── あとがき ──

今回の特集はポアンカレ予想，球面のホモトピー群をとりあげました．"こんなことを" という企画をおもちの方はお知らせください．

松本幸夫氏から，プリンストンの現況（トポロジー関係）レポートが届きました．

今回も原稿の清書等に穴田小夜子，本田文代さんのお世話になりました．

東京工大・理・数　笹尾靖也
東大・教養・数　加藤十吉