微分トポロジー便り No.2

1990年1月
編集 伊藤敏和
(龍谷大学経済学部)

もくじ

編集後記

佐藤さんと石川さんが編集部の無理な注文に応じて，すばらしい原稿を送ってくださいました。又，多くの方々が手もちのプレプリントのリストを送ってくださいました。ご協力に心から感謝します。

No1 には H. Whitney の追悼文を載せましたが，No2 には R. Thom が数学の研究をはじめた頃の様子を書いた A. Haefliger の原稿を手に入れました。どのようにして自分の数学を作っていったのか，人との出会い等々私には興味あることがいっぱいありました。この原稿は I.H.E.S. から出ている青い色の雑誌に載ることになっているものです（私がもらってからずいぶん時間がたつから，もう出版されているかもしれません）。

プレプリントの部分で日本語名で書いてある部分は「科研費総合A（代表者 松本幸夫）」の報告書作製のための資料のうちプレプリント部分を伊藤敏和の独断で載せました。せっかく，みなさんが協力してくださったものが文部省への報告だけでうもれてしまうのはもったいないと思い。

それから，プレプリントに対する感想等をつけくわえてみる試みもはじめました。

今年は ICM 90 が京都で開催されるので，世界中の数学者との交流が各人の数学の質的発展につながることを願っています。

伊藤敏和

1.

UNIVERSITE DE GENEVE
Section de Mathématiques

2-4, rue du Lièvre
Case postale 240
1211 GENEVE 24

Annonce préliminaire

COLLOQUE D'ARITHMETIQUE ET DE GEOMETRIE

En l'honneur d'André HAEFLIGER et Michel KERVAIRE

les 18, 19 et 20 avril 1990

Liste provisoire des conférenciers :

V. ARNOLD (Moscou)
R. BOTT (Harvard)
J. COATES (Cambridge)
E. GHYS (ENS Lyon)
F. HIRZEBRUCH (Bonn)
V. JONES (Berkeley)
R. NARASIMHAN (Chicago)
J.-P. SERRE (Collège de France)
J. TITS (Collège de France)
M.F. VIGNERAS (Paris)
D. ZAGIER (Bonn et Université de Maryland)

Comité d'organisation :

E. BAYER-FLUCKIGER
P. de la HARPE
C. WEBER

Mai 1989

2.

随想

名大理　佐藤 肇

伊藤編集長の強い勧めにより，とりとめのない事を書くことにした．主に先日名古屋で行なわれた「古典力学，量子力学とトポロジー」研究会に対する感想などである．

● まだ量子化は完全になされているとは言えないが，古典及び量子力学系，の研究テーマは（以前の微分方程式の理論と全く同じように），ストカスティックな現象の解析と，それとは逆にソルバブルな問題の具体的な解を決定するという大きな2つの流れに従って来ている．勿論，前者においても非決定性の力学系の沢山の発見の中に，統計的なあるいは例えばフラクタル的な規則性の発見というのが数学的方法といえ，後者においても無限自由度等の一見乱雑さが表われ，それを可積性の強さで可解性を保っているのではあるが，――
（ハミルトン力学も量子力学も実りの多い微分方程式論の一分野であることは間違いない）

● 3次元多様体の不変量 Floer ホモロジーは，$\pi_1(\Sigma_g)$ の $SU(2)$ への表現空間の symplectic structure を，$\pi_1(\Sigma_g)$ の $SU(2)$-接続全体のなす部分 symplectic submfd とみなし，その Chern-Simon の流れの解析により定義された．その symplectic str. は Σ_g の symplectic str より引き起こされるものである

● 他方、Jones 不変量は、古典的なヤン－バクスター方程式の解より定める $SL(2,\mathbb{C})$-valued の接続のモノドロミーから、ブレイド群の表現が定まって、決まるものである。ヤン－バクスター方程式は $SL(2,\mathbb{C})$ のポアソン構造の量子的変形の変形方程式であるといってよい。すなわち $SL(2,\mathbb{C})$ のリー環の構造の他に $SL(2,\mathbb{C})$ に Bialgebra の構造を入れなければならない。これは共形場の理論によると ヴィラソロ代数の表現により自然に統制されて表われて来る。いいかえると、ヴィラソロ代数の表現に規制されて、新しいポアソン構造の変形を産み出していると言ってもよい。ヴィラソロ代数は $Conf(S^2)$ より自然に定まる Lie algebra であり、たいして複雑なものではない。Jones 不変量を産み出す肥沃な土台は、ブレイド群と、量子的変形（ポアソン構造）といえる。よって次のような対応が考えられる。

Floer	Jones
$\pi_1(\Sigma_g)$	ブレイド群
Σ_g の Poisson 構造	Poisson 構造の変形

● ウィッテンはそれらを統一する方法として場の量子論的解釈を与えた。即ち、ラグランジアンとして、チャーン・サイモン関数の、すべての接続のなす空間での（ファイマン）積分を考えた。勿論これには厳密な数学的意味づけと、Floer, Jones との関係も調べなければならない。河野氏の仕事が、一つの明晰な数学を与えている。

● $\pi_1(\Sigma_g)$ の G への表現空間の幾何は、より歴史的に見れば、
むしろ、バンドルが Trivial でない場合（G-主束 over Σ_g）
の平坦な接続全体のなす空間の研究の方が伝統的である。
Trivial の場合には、$\pi_1(\Sigma_g)$ の表現空間であるが、接続全体のなす
空間はコンパクトでない。コンパクトの場合、このような接続は
Σ_g 上の stable な正則束と対応し、接続全体のなす空間は
stable な正則束の moduli 空間となる。このような空間のトポロジー
（あるいはコホモロジー）の計算方法は、次のようなものがある。第1は
解析的な調和積分論の方法。第2は、これらが代数的に定義さ
れることを用いて、有限体上に落とし、整数論の結果を適用して
Betti 数などを計算する方法である。第3は、Atiyah-Bott に
よる Yang-Mills 関数の gradient による critical point
を調べて、Morse 理論を適用する方法である。第2の方法
では、（有限体上で）接続全体の空間が、対称空間（関数体の
アデール群を maximal compact group で割ったもの）の discrete
group による quotient になっていることが有効であるらしい
（Atiyah-Bott による）。第3の Morse 理論の適用が可能
な一番の理由は、Σ_g の symplectic 構造から induce される接続
全体の空間の symplectic structure である。gradient flow
は、この構造を保って流れ、次元によっての induction の
計算が可能となる。

以上をまとめると、$\pi_1(\Sigma_g)$ の（Trivial 束でない）G への表現全体
のなす空間は、compact ではあるが、contractible でなく（$\pi_1=0$
であるが）、その symplectic 構造を保つ Yang-Mills の流れ
は、美しい cell-decomposition を与えているといえる。特に
cohomology には torsion は表われないというのが Atiyah-Bott の
理論である。

• これらに関連するものの一つとして十分肥沃なものに、

$$\mathrm{Aut}\,\pi_1(\Sigma_g)/\sim \;=\; \pi_0\,\mathrm{Diff}\,\Sigma_g \;=\; \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$$

alias, mapping class group = Teichmüller gp があり、
これは シンプレクティック多様体 (ケーラー多様体)

$$T(\Sigma_g) \equiv \mathrm{Hom}\,(\pi_1(\Sigma_g),\ SL(2,\mathbb{R}))/\sim \quad : \text{タイヒミュラー空間}$$

に計量, シンプレクティック構造を保って Act し. その商空間が Σ_g のモデュライ空間である.

タイヒミューラー空間は. 複素 $3g-3$ 次元の contractible な多様体であり. モデュライ空間のホモロジー. タイヒミュラー群のホモロジーも少しずつわかって来た (森田 等).

今後の課題は,

$$M(\Sigma_g) = T(\Sigma_g)/\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$$

の保型関数論で、
これらが、多様体論, 整数論, その他もろもろに応用を与えることは十分に予想される.

• (図らずも) この研究会では,
小沢氏の $\mathbb{Z}\pi$ の量子化の話と
前田氏の C^∞(symplectic mfd) の量子化の話がある.
Goldman によれば

$$\mathbb{Z}\pi \longrightarrow C^\infty(N) \qquad N = \mathrm{Hom}(\pi_1, G)/G \ \text{(symplectic mfd) for some } G$$

は Lie algebra map で, discrete lattice を与えている.
この2人の talk の関係を不思議に思った.

簡単に言うと ZT の量子化は Turaev によるものと、その他、ホモロジーへの写像を可換な別の量子化があるというのが小沢氏の話であり、前田氏の話は、C^∞(Sympl. mfd) は常に量子化出来るというものである。$N=C^\infty(M)$ の量子化 (M: symplectic mfd) は、Lichnerowicz、Vey etc により今まで考えられ続けられていたもので、

$$H^3(N,N)$$

が量子化の存在の為の obstruction (の候補) になり

$$H^2(N,N)$$

が量子化の一意性の obstruction (の候補) になるというのが定理で、Gelfand-Fuks 理論、あるいは Losik 等を用いて、

$$H^3(N,N)=0 \quad \text{iff} \quad H^2(M;\mathbb{R})=0 \quad \text{になる}$$

ことも、Vey は計算したのであった。

ところが、de Wilde & Lecomte あるいは前田氏等は、その $H^3(N,N)$ の obstruction が消えていて、常に量子化は存在するというのである。

同じように考えると、$H^2(N,N)$ の一意性の障害の存在も怪しく、常に unique なのかもしれない (?)。

これに反して、小沢氏の結果は、その Lattice である algebra には、異なる量子化があるというのであり、その原因となるところを知りたいと思わずにはいられない。

ホモロジー理論は、general non-sense であるにもかかわらず、問題の整理には非常に役立つものである。

これ以後の話はあてずっぽうで、しかも、たいして意味のあることでもないが、すっきりさせたいと思うのは人情である。

普通の ring 又は algebra A の deformation の存在の為の obstruction は Gerstenhaber によって研究され、Hochschild cohomology $H^3(A, A)$ に存在し、uniqueness の obstruction は $H^2(A, A)$ にある。これは、Lie algebra、又は $C^\infty(M)$ の Poisson structure の deformation にも拡張されて、同じ形の cohomology に obstruction が存在する。一般の Poisson algebra の deformation の理論は、見当たらないが、同じ形になるだろう。従って、Poisson algebra $S(\mathbb{Z}\hat{\pi})$ の deformation の uniqueness の obstruction は

$$H^2(S(\mathbb{Z}\hat{\pi}), S(\mathbb{Z}\hat{\pi}))$$

の中の元だろう。

$S(\mathbb{Z}\hat{\pi})$: Poisson algebra of the symmetric algebra of $\mathbb{Z}\hat{\pi}$, $\mathbb{Z}\hat{\pi}$: Goldman の定義した (non-oriented) free homotopy class of loops in Σ_g のなす Lie algebra.

問題はこの cohomology の計算であるが、

$H^1(\pi)$ からの写像があって

$$H^1(\pi) \longrightarrow H^2(S(\mathbb{Z}\hat{\pi}), S(\mathbb{Z}\hat{\pi}))$$

この写像が non-trivial なので、$H^2(S(\mathbb{Z}\hat{\pi}), S(\mathbb{Z}\hat{\pi})) \neq 0$.
小沢氏の例は、この obstruction の元を定めている。一方、

$$H^2(S(\mathbb{Z}\hat{\pi}), S(\mathbb{Z}\hat{\pi})) \longleftarrow H^2(C^\infty(N), C^\infty(N))$$

という写像は surjective でなく、$S(\mathbb{Z}\hat{\pi})$ の deformation のうちのほとんどのものは、$C^\infty(N)$ の deformation からは来ない。この辺の事情は

$C^\infty(N)/S(\mathbb{Z}\hat{\pi})$ の研究でわかるのだろう。

3.

シンプレクティック特異点論について

石川剛郎（北大・理）記

「... 微分方程式、古典力学や、その量子化などにシンプレクティック幾何・接触幾何が自然に現れ[AM],[Hö]、そこに必然的に生じる特異点を解析する分野です[AVG],[J]。」「ラグランジュ特異点や、ルジャンドル特異点と言ったって、結局、関数の特異点の話じゃないの？」「そうかもしれませんが、特異点の開析で、ラグランジュ多様体や、ルジャンドル多様体を捉えるということは，すでに一般関数を扱っている ([GS]) わけですし、要は問題に即して、どういう対象をどの視点で切るかです。たとえば、ラグランジュ特異点の分類 ([AVG]) にしても、つき詰めて視ると、図式 $\mathbf{R} \longleftarrow \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ の R^+ -同値 による分類をすることになり、写像の（左右同値による）分類の、明確な動機付けのもとでの一般化になるわけです。」「よくわからんが、所詮、局所論だね。」「大域的問題でも、ラグランジュ・ルジャンドルコボルディズムなど、興味深いテーマがあり[V]、シンプレクティック位相幾何に於いて特異点の研究は不可欠になると思われます。これに関しては、東工大院生の大本享氏が詳しいそうです。」「今後の発展性は？」「或る意味では、この分野はまだ赤ん坊で、これを育てるには、若い人に、どんどん創造的な仕事をしてもらいたいですね。」

ラグランジュ特異点やルジャンドル特異点を（陽に陰に）扱った文献をすべて挙げたら膨大な数にのぼる。ここでは、まず最初に目を通すと良い古典的文献を思い付くままに列挙した。編集長の意に沿っているかどうかわからないけれども。

参考文献

[AM] R. Abraham, J.E. Marsden, "Foundations of Mechanics," second ed., Benjamin, 1978.

[AVG] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, "Singularities of Differentiable Maps, I, II," Birkhäuser, 1985, 1988.

[GS] V. Guillemin, S. Sternberg, "Geometric Asymptotics," Mathematical Surveys, 14, Amer. Math. Soc., 1977.

[Hō] L. Hörmander, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators I,II,III,IV," Grund. math. Wissenschaften 256,257,274,275, Springer-Verlag, 1983,1983,1985,1985 または、代数解析の本.

[J] S. Janeczko, *Theory of singularities of Lagrangian varieties and applications*, Preprint of Monash University (Australia), Analysis Paper 58. この文献は出版されていないと思うが、興味深い survey である.

[V] V.A. Vassilyev, "Lagrnage and Legendre characteristic classes," Advanced Studies in Contemporary Mathematics 3, Gordon and Breach Science Publishers, 1988.

4.

UN APERÇU DE L'ŒUVRE DE THOM EN TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE (jusqu'en 1957)*

par ANDRÉ HAEFLIGER

René Thom est élève à l'École normale supérieure de Paris de 1943 à 1946. Henri Cartan y enseigne depuis 1940 et, de 1945 à 1947, il retourne à Strasbourg. René Thom reçoit un poste d'attaché au C.N.R.S. et suit Cartan à Strasbourg.

Strasbourg était un centre très vivant. Outre Henri Cartan, parmi les professeurs figuraient Ehresmann, Lichnerowicz, Chabauty. Reeb y achevait sa thèse sous la direction d'Ehresmann et Koszul travaillait à la sienne sous la direction de H. Cartan. Plusieurs jeunes Chinois et Japonais (tels Kobayashi, Nomizu et plus tard Wu Wen Tsun) attirés par Ehresmann et Koszul séjournaient à Strasbourg. Le séminaire de topologie d'Ehresmann, où venaient parler de nombreux conférenciers étrangers (tels Hopf, Whitney, etc.), était une source d'information très précieuse sur toutes les nouveautés en topologie qui n'avait pas son équivalent en France.

Cartan propose à Thom d'étudier les mémoires d'Oka sur les idéaux de fonctions analytiques. Ce serait plutôt les idéaux de fonctions différentiables qui intéresseraient Thom, mais rien n'est connu sur ce sujet sur lequel Thom reviendra plus tard. Thom cherche sa voie, et il faut attendre jusqu'en mars 1949 pour que sorte sa première note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences. Il était temps, car les responsables du C.N.R.S. se demandaient s'il fallait continuer à soutenir ce jeune mathématicien si peu productif. A-t-on réalisé à l'époque l'importance de cette courte note [1][1] intitulée « Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété », introduisant une idée fondamentale nouvelle qui a suscité un développement considérable?

Il s'agit d'un raffinement de la théorie de Morse. Thom considère une fonction différentiable f sur une variété compacte n'ayant que des points singuliers non dégénérés et son champ de gradient relativement à une métrique riemannienne bien adaptée à f. Il constate que toute trajectoire de ce champ part d'un point critique et aboutit à un point critique et que la réunion des trajectoires issues d'un point critique d'indice p est une p-cellule ouverte (appelée maintenant la variété instable de ce point critique). Il en déduit notamment une démonstration des inégalités de Morse. Cette note a été généralisée d'abord par Reeb (Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém.*, 27, nº 9, 1952), puis par Smale dans son fameux mémoire On Morse inequalities for dynamical systems, *Bull. A.M.S.*, 66, 1960, 43-49. Cette précision de la théorie de Morse a également conduit à la technique de chirurgie utilisée par Milnor et Kervaire. Dans un article intitulé A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. III, 39-65, A.M.S., 1961, Milnor remercie Thom de lui avoir expliqué le procédé de chirurgie et son utilisation pour tuer les groupes d'homotopie.

Concernant la théorie de Morse, je voudrais également signaler que dans leur article intitulé The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections, *Ann. of Math.*, 69, 1959 (reçu en octobre 1958), 713-717, A. Andreotti et Th. Frankel mentionnent que Thom a donné une démonstration non publiée du théorème de Lefschetz en utilisant la théorie de Morse, et que la démonstration qui figure dans leur article est inspirée de celle de Thom. A ce propos j'ai retrouvé un manuscrit de Thom daté de février 1957 où il montre plus généralement qu'un domaine q-convexe de dimension complexe n se rétracte par déformation sur un CW-complexe de dimension au plus $2n - q - 1$.

Cet exemple, et il y en a beaucoup d'autres, montre bien que les écrits publiés de Thom ne donnent qu'une idée très partielle de sa créativité mathématique. Bouillonnant d'idées, il a été en général peu soucieux de leur donner une forme définitive, de les pousser jusqu'au bout ou d'en revendiquer la paternité. Cependant, ses idées et les problèmes qu'il a posés ont été une source d'inspiration pour toute une génération de mathématiciens.

Revenons en arrière pour examiner la deuxième note de Thom aux Comptes Rendus, soumise à l'académie en janvier 1950 (Classes caractéristiques et *i*-carrés [2]); elle introduit une autre notion fondamentale qui jouera un rôle considérable dans le développement de la topologie algébrique, à savoir ce que l'on appelle maintenant l'isomorphisme de Thom.

Évoquons d'abord les circonstances. C'est Koszul qui a attiré l'attention de Thom sur le travail de Steenrod, Products of cocycles and Extension of Mappings, *Ann. of Math.*, 48, 1947, 290-320. D'autre part Wu Wen Tsun, élève de Chern, était arrivé à Strasbourg en 1948, il avait déjà publié une démonstration du théorème de dualité de Whitney (qui donne la relation entre les classes de Stiefel-Whitney d'une somme de fibrés vectoriels en fonction de celles des facteurs) publiée dans *Ann. of Math.*, 49, 1948, 641-653. Il avait aussi signalé à Thom le fameux exposé de Whitney : On the Topology of Differentiable Manifolds, *Lectures in Topology*, Univ. of Michigan Press, 1941, que l'on peut considérer comme le point de départ de la topologie différentielle. La note aux Comptes Rendus de Thom est précédée d'une note de H. Cartan où il démontre en particulier la formule de dualité reliant les carrés de Steenrod d'un produit à ceux des facteurs et mentionne que cette formule lui a été suggérée par Thom et Wu Wen Tsun. Dans le premier paragraphe de sa note, Thom considère un fibré E en sphères S^{k-1} de base un complexe cellulaire K et appelle A le fibré en boules B^k associé. Il remarque que, à toute cellule Z_i de dimension p de K correspond par image réciproque de la projection une cellule $Z_i \times b^k$ de dimension $p + k$ de A, et que cette correspondance induit un isomorphisme φ de $H^*(K; Z)$ sur $H^*(A, E; Z')$, où Z' est le système local des entiers tordus par l'orientation du fibré A. En appelant U_k l'image de 1 par cet isomorphisme (la *classe de Thom* du fibré A) et W_r la r-ième classe de Stiefel-Whitney de E, il montre la fameuse formule

$$Sq^r\, U_k = \varphi W_r.$$

Dans une deuxième note parue quinze jours plus tard intitulée « Variétés plongées et *i*-carrés » [3], Thom montre comment on peut en déduire l'invariance topologique des classes de Stiefel-Whitney d'une variété différentiable V en considérant le plongement diagonal de V dans $V \times V$. En fait, Thom avait d'abord découvert la formule précédente dans ce cas particulier en remplaçant φ par l'*Umkehrung Homomorphismus* de Gysin. Dans une note présentée à la même séance (« Classes caractéristiques et *i*-carrés d'une variété », p. 508-511), Wu Wen Tsun déduit de la formule de Thom l'invariance homotopique des classes de Stiefel-Whitney d'une variété en établissant les fameuses formules de Wu.

Ces deux notes de Thom constituent l'essentiel de sa thèse [6] rédigée sous la direction de H. Cartan et dont la forme finale doit beaucoup à ce dernier; elle fut soutenue en 1951 à la Faculté des Sciences de Paris.

C'est aussi pendant ces premières années strasbourgeoises que Thom est reçu très cordialement dans le groupe de Bourbaki comme « cobaye ». Il est invité à participer aux congrès Bourbaki; lorsque les discussions des aînés aboutissaient à une impasse, la coutume était de consulter les cobayes pour obtenir leur avis. Après une discussion interminable sur l'algèbre multilinéaire, au moment de s'adresser au jeune Thom, on constata qu'il s'était endormi et l'on comprit de part et d'autre qu'il n'était pas adapté à ce genre d'exercice.